Algoritma Thomas: Penyelesaian Metode Beda Hingga Implisit

Zaitun, Oktober 2023

◊◊

Institut Teknologi Bacharuddin Jusuf Habibie

$\rightarrowtail$ Pengantar $\leftarrowtail$

Algoritma thomas digunakan untuk menyelesaikan persamaan linier berbentuk matriks tiga sisi diagonal yang nilainya tidak nol atau disebut *tridiagonal-matrix*. Algoritma thomas menyelesaikan persamaan $Mx = r$ dengan melakukan transformasi matriks M ke LU sehingga $LUx = r$ kemudian dengan memberikan $Ux = \rho$ dan menyelesaikan ρ dalam $L\rho = r$ setelah itu menyelesaikan x dalam $Ux = \rho$. Penggunaan algoritma tomas akan memudahkan dalam melakukan komputasi pada persoalan persamaan metode beda hingga implisit.

1 Algoritma Thomas

Misalkan terdapat persamaan linier $Mx = r$ dengan $x = \{x_1, x_2, ..., x_6\}$ untuk $x_i \in \mathbb{R}$, dan $M \in \mathbb{R}^{6\times 6}$ serta $r \in \mathbb{R}^6$. Matriks M diberikan dengan bentuk berikut

$$\begin{bmatrix} b_1 & c_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_3 & b_3 & c_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_4 & b_4 & c_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_5 & b_5 & c_5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_6 & b_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \\ r_5 \\ r_6 \end{bmatrix}$$

Algoritma thomas menerapkan dua tahap penyelesaian dalam komputasi, misalkan L adalah matriks segitiga bawah dan U adalah matriks segitiga atas, kemudian persamaan matriks dibentuk menjadi $LUx = r$ dan misalkan $Ux = \rho$, maka $L\rho = r$. tahap pertama mendapatkan ρ pada $L\rho = r$ dan setelah itu tahap kedua mendapatkan nilai x pada $Ux = \rho$.

Tahap 1

Langkah 1: melakukan manipulasi pada baris pertama

$$b_1x_1 + c_1x_2 = r_1$$

dikalikan dengan $\dfrac{1}{b_1}$

$$x_1 + \frac{c_1}{b_1}x_2 = \frac{r_1}{b_1}$$

dan menuliskan kembali persamaan menjadi

$$x_1 + \gamma_1x_2 = \rho_1, \quad \gamma_1 = \frac{c_1}{b_1}, \quad \rho_1 = \frac{r_1}{b_1}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \gamma_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_3 & b_3 & c_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_4 & b_4 & c_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_5 & b_5 & c_5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_6 & b_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \\ r_5 \\ r_6 \end{bmatrix}$$

Langkah 2: melakukan manipulasi pada baris kedua

$$a_2x_1 + b_2x_2 + c_2x_3 = r_2$$

dengan mengambil baris pertama yang dikalikan dengan a_2

$$a_2(x_1 + \gamma_1 x_2 = \rho_1)$$

$$a_2x_1 = -a_2\gamma_1 x_2 + a_2\rho_1$$

persamaan ini disubstitusi ke dalam persamaan baris kedua sebelumnya, sehingga

$$[a_2x_1] + b_2x_2 + c_2x_3 = r_2$$

$$[-a_2\gamma_1 x_2 + a_2\rho_1] + b_2x_2 + c_2x_3 = r_2$$

$$(b_2 - a_2\gamma_1)x_2 + c_2x_3 = r_2 - a_2\rho_1$$

disederhanakan sehingga

$$x_2 + \frac{c_2}{b_2 - a_2\gamma_1}x_3 = \frac{r_2 - a_2\rho_1}{b_2 - a_2\gamma_1}$$

dan menuliskan kembali persamaan menjadi

$$x_2 + \gamma_2 x_3 = \rho_2, \quad \gamma_2 = \frac{c_2}{b_2 - a_2\gamma_1}, \quad \rho_2 = \frac{r_2 - a_2\rho_1}{b_2 - a_2\gamma_1}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \gamma_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \gamma_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_3 & b_3 & c_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_4 & b_4 & c_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_5 & b_5 & c_5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_6 & b_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ r_3 \\ r_4 \\ r_5 \\ r_6 \end{bmatrix}$$

Langkah 3: melakukan manipulasi pada baris ke-3

$$a_3x_2 + b_3x_3 + c_3x_4 = r_3$$

dengan mengambil baris kedua yang dikalikan dengan a_3

$$a_3(x_2 + \gamma_2 x_3 = \rho_2)$$

$$a_3x_2 = -a_3\gamma_2 x_3 + a_3\rho_2$$

persamaan ini disubstitusi ke dalam persamaan baris ke-tiga sebelumnya, sehingga

$$[a_3x_2] + b_3x_3 + c_3x_4 = r_3$$

$$[-a_3\gamma_2 x_3 + a_3\rho_2] + b_3x_3 + c_3x_4 = r_3$$

$$(b_3 - a_3\gamma_2)x_3 + c_3x_4 = r_3 - a_3\rho_2$$

disederhanakan sehingga

$$x_3 + \frac{c_3}{b_3 - a_3\gamma_2}x_4 = \frac{r_3 - a_3\rho_2}{b_3 - a_3\gamma_2}$$

dan menuliskan kembali persamaan menjadi

$$x_3 + \gamma_3 x_4 = \rho_3, \quad \gamma_3 = \frac{c_3}{b_3 - a_3\gamma_2}, \quad \rho_3 = \frac{r_3 - a_3\rho_2}{b_3 - a_3\gamma_2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \gamma_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \gamma_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \gamma_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_4 & b_4 & c_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_5 & b_5 & c_5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_6 & b_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \rho_3 \\ r_4 \\ r_5 \\ r_6 \end{bmatrix}$$

Langkah 4: melakukan manipulasi pada baris ke-4

$$a_4x_3 + b_4x_4 + c_4x_5 = r_4$$

dengan mengambil baris ke-3 yang dikalikan dengan a_4

$$a_4(x_3 + \gamma_3x_4 = \rho_3)$$

$$a_4x_3 = -a_4\gamma_3x_4 + a_4\rho_3$$

persamaan ini disubstitusi ke dalam persamaan baris ke-4 sebelumnya, sehingga

$$[a_4x_3] + b_4x_4 + c_4x_5 = r_4$$

$$[-a_4\gamma_3x_4 + a_4\rho_3] + b_4x_4 + c_4x_5 = r_4$$

$$(b_4 - a_4\gamma_3)x_4 + c_4x_5 = r_4 - a_4\rho_3$$

disederhanakan sehingga

$$x_4 + \frac{c_4}{b_4 - a_4\gamma_3}x_5 = \frac{r_4 - a_4\rho_3}{b_4 - a_4\gamma_3}$$

dan menuliskan kembali persamaan menjadi

$$x_4 + \gamma_4x_5 = \rho_4, \quad \gamma_4 = \frac{c_4}{b_4 - a_4\gamma_3}, \quad \rho_4 = \frac{r_4 - a_4\rho_3}{b_4 - a_4\gamma_3}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \gamma_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \gamma_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \gamma_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \gamma_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_5 & b_5 & c_5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_6 & b_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \rho_3 \\ \rho_4 \\ r_5 \\ r_6 \end{bmatrix}$$

Langkah 5: melakukan manipulasi pada baris ke-5

$$a_5x_4 + b_5x_5 + c_5x_6 = r_5$$

dengan mengambil baris ke-4 yang dikalikan dengan a_5

$$a_5(x_4 + \gamma_4x_5 = \rho_4)$$

$$a_5x_4 = -a_5\gamma_4x_5 + a_5\rho_4$$

persamaan ini disubstitusi ke dalam persamaan baris ke-4 sebelumnya, sehingga

$$[a_5x_4] + b_5x_5 + c_5x_6 = r_5$$

$$[-a_5\gamma_4x_5 + a_5\rho_4] + b_5x_5 + c_5x_6 = r_5$$

$$(b_5 - a_5\gamma_4)x_5 + c_5x_6 = r_5 - a_5\rho_4$$

disederhanakan sehingga

$$x_5 + \frac{c_5}{b_5 - a_5\gamma_4}x_5 = \frac{r_5 - a_5\rho_4}{b_5 - a_5\gamma_4}$$

dan menuliskan kembali persamaan menjadi

$$x_5 + \gamma_5x_6 = \rho_5, \quad \gamma_5 = \frac{c_5}{b_5 - a_5\gamma_4}, \quad \rho_5 = \frac{r_5 - a_5\rho_4}{b_5 - a_5\gamma_4}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \gamma_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \gamma_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \gamma_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \gamma_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \gamma_5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_6 & b_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \rho_3 \\ \rho_4 \\ \rho_5 \\ r_6 \end{bmatrix}$$

Langkah 6: melakukan manipulasi pada baris ke-6

$$a_6x_5 + b_6x_6 = r_6$$

dengan mengambil baris ke-5 yang dikalikan dengan a_6

$$a_6(x_5 + \gamma_5x_6 = \rho_5)$$

$$a_6x_5 = -a_6\gamma_5x_6 + a_6\rho_5$$

persamaan ini disubstitusi ke dalam persamaan baris ke-6 sebelumnya, sehingga

$$[a_6x_5] + b_6x_6 = r_6$$

$$[-a_6\gamma_5x_6 + a_6\rho_5] + b_6x_6 = r_6$$

$$(b_6 - a_6\gamma_5)x_6 = r_6 - a_6\rho_5$$

disederhanakan sehingga

$$x_6 = \frac{r_6 - a_6\rho_5}{b_6 - a_6\gamma_5}$$

dan menuliskan kembali persamaan menjadi

$$x_6 = \rho_6, \qquad \rho_6 = \frac{r_6 - a_6\rho_5}{b_6 - a_6\gamma_5}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \gamma_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \gamma_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \gamma_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \gamma_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \gamma_5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \rho_3 \\ \rho_4 \\ \rho_5 \\ \rho_6 \end{bmatrix}$$

Tahap 2

Tahap pertama mendapatkan matriks $Ux = \rho$ seperti di atas, kemudian tahap kedua melakukan perhitungan penyelesaian akhir untuk x_i dengan $i = 1, 2, ..., 6$ dimulai dari akhir.
Langkah 1: mengambil baris ke-6

$$x_6 = \rho_6$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \gamma_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \gamma_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \gamma_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \gamma_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \gamma_5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \rho_3 \\ \rho_4 \\ \rho_5 \\ \rho_6 \end{bmatrix}$$

Langkah 2: mengambil baris ke-5

$$x_5 + \gamma_5x_6 = \rho_5$$

$$x_5 = -\gamma_5x_6 + \rho_5$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \gamma_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \gamma_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \gamma_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \gamma_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \gamma_5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \rho_3 \\ \rho_4 \\ \rho_5 \\ \rho_6 \end{bmatrix}$$

Langkah 3: mengambil baris ke-4

$$x_4 + \gamma_4x_5 = \rho_4$$

$$x_4 = -\gamma_4x_5 + \rho_4$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \gamma_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \gamma_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \gamma_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \gamma_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \gamma_5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \rho_3 \\ \rho_4 \\ \rho_5 \\ \rho_6 \end{bmatrix}$$

Langkah 4: mengambil baris ke-3

$$x_3 + \gamma_3 x_4 = \rho_3$$

$$x_3 = -\gamma_3 x_4 + \rho_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \gamma_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \gamma_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \gamma_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \gamma_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \gamma_5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \rho_3 \\ \rho_4 \\ \rho_5 \\ \rho_6 \end{bmatrix}$$

Langkah 5: mengambil baris ke-2

$$x_2 + \gamma_2 x_3 = \rho_2$$

$$x_2 = -\gamma_2 x_3 + \rho_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \gamma_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \gamma_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \gamma_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \gamma_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \gamma_5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \rho_3 \\ \rho_4 \\ \rho_5 \\ \rho_6 \end{bmatrix}$$

Langkah 6: mengambil baris ke-1

$$x_1 + \gamma_1 x_2 = \rho_1$$

$$x_1 = -\gamma_1 x_2 + \rho_1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \gamma_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \gamma_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \gamma_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \gamma_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \gamma_5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \rho_3 \\ \rho_4 \\ \rho_5 \\ \rho_6 \end{bmatrix}$$

Pada tahap ini seluruh nilai x dapat ditentukan secara iteratif atau komputasi yang berurut. Penggunaan algoritma thomas dapat digunakan hanya untuk bentuk matriks tridiagonal, namun perlu juga untuk menguji singularitas dari matriks. dari [1], kriteria singularitas tridiagonal matriks dapat dituliskan seperti berikut

$$||a_i|| + ||c_i|| \leq ||b_i||, \quad i \in \mathbb{N} \tag{1}$$

Summary: Penyelesaian matriks $Mx = r$ dilakukan dengan menerapkan dua tahap penyelesaian pada algoritma Thomas. Secara singkat, algoritma thomas dapat ditulis kembali. Misalkan diketahui matriks tridiagonal berikut

$$\begin{bmatrix} b_1 & c_1 & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & a_n & b_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_{n-1} \\ r_n \end{bmatrix}$$

pertama adalah menentukan parameter γ

$$\gamma_i = \begin{cases} \dfrac{c_i}{b_i} & i = 1 \\ \dfrac{c_i}{b_i - a_i\gamma_{i-1}} & i = 2, 3, \ldots n \end{cases}$$

selanjutnya menentukan parameter ρ

$$\rho_i = \begin{cases} \dfrac{r_i}{b_i} & i = 1 \\ \dfrac{r_i - a_i\rho_{i-1}}{b_i - a_i\gamma_{i-1}} & i = 2, 3, \ldots n \end{cases}$$

setelah mendapatkan kedua parameter tersebut, langkah selanjutnya adalah melakukan komputasi untuk penyelesaian x yang dilakukan dari akhir indeks (*Backwards Operation*) menggunakan persamaan berikut

$$x_i = \begin{cases} \rho_i & i = n \\ -\gamma_i x_{i+1} + \rho_i & i = n-1, n-2, \ldots 1 \end{cases}$$

2 Penerapan Algoritma Thomas: Persoalan Nilai Batas

Diketahui persamaan diferensial berikut

$$\frac{d^2}{dx^2} f(x) = g(x), \quad 0 \le x \le 1$$

$$f(0) = 0, \quad f(1) = 1$$

dengan

$$g(x) = 6x$$

yang merupakan klasifikasi persoalan nilai batas, akan diselesaikan menggunakan metode beda hingga dengan terlebih dahulu akan didiskritisasi pada domain x menggunakan persamaan beda tengah. apabila persamaan diferensial didekati di titik i dengan

$$\left.\frac{d^2}{dx^2} f(x)\right|_i = \left. g(x)\right|_i, \quad 0 \le x_i \le 1, \quad i \in \mathbb{N}$$

untuk ruas kiri dan kanan

$$\left.\frac{d^2}{dx^2} f(x)\right|_i = \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{(\Delta x)^2}$$

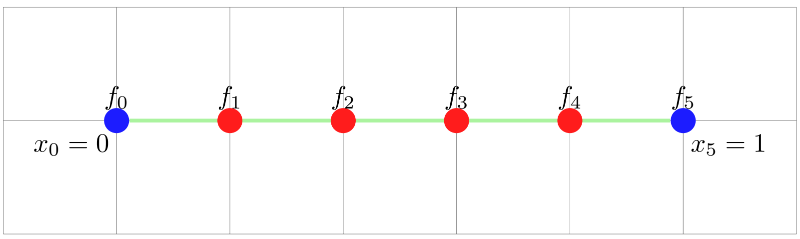
$$\left. g(x)\right|_i = g(x_i) = g_i$$

sehingga dapat disusun kembali menjadi

$$\frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{(\Delta x)^2} = g_i$$

$$f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1} = g_i(\Delta x)^2 \tag{2}$$

jika domain x dibagi menjadi n grid maka terdapat jumlah $n + 1$ titik solusi penyelesaian dalam domain. Apabila dipilih $n = 5$ grid, maka terdapat 6 titik pada domain dengan titik ujung-ujung merupakan nilai batas domain. Dapat dilihat pada gambar berikut untuk domain x



karena domain dibagi menjadi 5 grid, maka nilai $\Delta x = \dfrac{x_n - x_0}{n} = 0.2$. Selanjutnya menuliskan kembali persamaan 2 ke dalam semua grid domain yang telah diinisialisasi. Untuk memudahkan penulisan, bagian yang memiliki indeks kecil di tempatkan ke bagian awal.

$$f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1} = g_i(\Delta x)^2$$

menjadi

$$f_{i-1} - 2f_i + f_{i+1} = g_i(\Delta x)^2$$

kemudian dituliskan ke dalam semua indeks sehingga

$$\begin{aligned}
\textbf{untuk } i = 1&: \ f_0 - 2f_1 + f_2 = g_1(\Delta x)^2 \\
\textbf{untuk } i = 2&: \ f_1 - 2f_2 + f_3 = g_2(\Delta x)^2 \\
\textbf{untuk } i = 3&: \ f_2 - 2f_3 + f_4 = g_3(\Delta x)^2 \\
\textbf{untuk } i = 4&: \ f_3 - 2f_4 + f_5 = g_4(\Delta x)^2
\end{aligned}$$

kemudian disusun kembali menjadi

$$\begin{array}{cccccccc}
f_0 & -2f_1 & +f_2 & & & & = & g_1(\Delta x)^2 \\
 & f_1 & -2f_2 & +f_3 & & & = & g_2(\Delta x)^2 \\
 & & f_2 & -2f_3 & +f_4 & & = & g_3(\Delta x)^2 \\
 & & & f_3 & -2f_4 & +f_5 & = & g_4(\Delta x)^2
\end{array}$$

karena f_0 dan f_5 adalah nilai diketahui (nilai batas), sehingga bentuk sistem persamaan tersebut dapat dibuatkan ke dalam matriks

$$\begin{array}{cccccc}
-2f_1 & +f_2 & & & = & g_1(\Delta x)^2 - f_0 \\
f_1 & -2f_2 & +f_3 & & = & g_2(\Delta x)^2 \\
 & f_2 & -2f_3 & +f_4 & = & g_3(\Delta x)^2 \\
 & & f_3 & -2f_4 & = & g_4(\Delta x)^2 - f_5
\end{array}$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1(\Delta x)^2 - f_0 \\ g_2(\Delta x)^2 \\ g_3(\Delta x)^2 \\ g_4(\Delta x)^2 - f_5 \end{bmatrix}$$

pada tahap ini dapat dilihat bahwa bentuk matriks merupakan tridiagonal matriks, dengan kriteria pada persamaan 1, matriks di atas merupakan non-singular. Untuk menggunakan algoritma thomas, agar lebih mudah dalam penulisan dapat ditulis terlebih dahulu seluruh parameter algoritma thomas sebagai berikut

$$\begin{array}{lllllr}
a_1 = 0 & b_1 = -2 & c_1 = 1 & r_1 = g_1(\Delta x)^2 - f_0 & = & 0.0480 \\
a_2 = 1 & b_2 = -2 & c_2 = 1 & r_2 = g_2(\Delta x)^2 & = & 0.0960 \\
a_3 = 1 & b_3 = -2 & c_3 = 1 & r_3 = g_3(\Delta x)^2 & = & 0.1440 \\
a_4 = 1 & b_4 = -2 & c_4 = 0 & r_4 = g_4(\Delta x)^2 - f_5 & = & -0.8080
\end{array}$$

Tahap 1: menentukan parameter γ dan ρ

$\gamma_1 = \dfrac{c_1}{b_1} = -\dfrac{1}{2}$

$$\gamma_i = \frac{c_i}{b_i - a_i\gamma_{i-1}}$$

$\gamma_2 = \dfrac{c_2}{b_2 - a_2\gamma_1} = \dfrac{1}{-2 - 1(-1/2)} = -\dfrac{2}{3}$

$\gamma_3 = \dfrac{c_3}{b_3 - a_3\gamma_2} = \dfrac{1}{-2 - 1(-2/3)} = -\dfrac{3}{4}$

$\gamma_4 = \dfrac{c_4}{b_4 - a_4\gamma_3} = \dfrac{0}{-2 - 1(-3/4)} = 0$

$\rho_1 = \dfrac{r_1}{b_1} = \dfrac{0.0480}{-2} = -0.0240$

$$\rho_i = \frac{r_i - a_i\rho_{i-1}}{b_i - a_i\gamma_{i-1}}$$

$$\rho_2 = \frac{r_2 - a_2\rho_1}{b_2 - a_2\gamma_1} = \frac{0.0960 - 1(0.0240)}{-2 - (-1/2)} = -0.0800$$

$$\rho_3 = \frac{r_3 - a_3\rho_2}{b_3 - a_3\gamma_2} = \frac{0.1440 - (-0.0800)}{-2 - (-2/3)} = -0.1680$$

$$\rho_4 = \frac{r_4 - a_4\rho_3}{b_4 - a_4\gamma_3} = \frac{-0.8080 - (-0.1680)}{-2 - (-3/4)} = 0.5120$$

Tahap 2: menentukan solusi dengan perhitungan mundur

$$f(x_i) = \begin{cases} \rho_i & i = 4 \\ -\gamma_i f(x_{i+1}) + \rho_i & i = 3, 2, 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} f_4 &= \rho_4 = 0.5120 \\ f_3 &= -\gamma_3 x_4 + \rho_3 = -(-3/4)(0.5312) + (-0.1680) &= 0.2160 \\ f_2 &= -\gamma_2 x_3 + \rho_2 = -(-2/3)(0.2544) + (-0.0800) &= 0.0640 \\ f_1 &= -\gamma_1 x_2 + \rho_1 = -(-1/2)(0.1216) + (-0.0240) &= 0.0000 \end{aligned}$$

f_1,f_2,f_3,f_4 masing-masing adalah solusi pendekatan dari persamaan diferensial untuk grid $n = 5$. Dengan meninjau solusi analitik dari persamaan diferensial, dapat dihitung nilai kesalahan komputasi pada tabel berikut

Tabel 1: Solusi persamaan diferensial persoalan nilai batas dengan $n = 5$ dan $\Delta x = 0.2$

i	x_i	f_i	$f(x_i)$	$\lvert f_i - f(x_i)\rvert$	%Error
0	0.0	0.0000	0.0000	0.0000	0.00%
1	0.2	0.0000	0.0080	0.0080	1.00%
2	0.4	0.0640	0.0640	0.0000	0.00%
3	0.6	0.2160	0.2160	0.0000	0.00%
4	0.8	0.5120	0.5120	0.0000	0.00%
5	1.0	1.0000	1.0000	0.0000	0.00%

Lanjutan :Apabila grid dibagi menjadi 10 grid, dengan cara yang identik dengan di atas yaitu nilai $\Delta x = 0.1$ dan menyusun elemen matriks tridiagonal dan dilanjutkan melakukan prosedur pada algoritma thomas berikut

$$\begin{array}{llllcr} a_1 = 0 & b_1 = -2 & c_1 = 1 & r_1 = g_1(\Delta x)^2 - f_0 & = & 0.0060 \\ a_2 = 1 & b_2 = -2 & c_2 = 1 & r_2 = g_2(\Delta x)^2 & = & 0.0120 \\ a_3 = 1 & b_3 = -2 & c_3 = 1 & r_3 = g_3(\Delta x)^2 & = & 0.0180 \\ a_4 = 1 & b_4 = -2 & c_4 = 1 & r_4 = g_4(\Delta x)^2 & = & 0.0240 \\ a_5 = 1 & b_5 = -2 & c_5 = 1 & r_5 = g_5(\Delta x)^2 & = & 0.0300 \\ a_6 = 1 & b_6 = -2 & c_6 = 1 & r_6 = g_6(\Delta x)^2 & = & 0.0360 \\ a_7 = 1 & b_7 = -2 & c_7 = 1 & r_7 = g_7(\Delta x)^2 & = & 0.0420 \\ a_8 = 1 & b_8 = -2 & c_8 = 1 & r_8 = g_8(\Delta x)^2 & = & 0.0480 \\ a_9 = 1 & b_9 = -2 & c_9 = 0 & r_9 = g_9(\Delta x)^2 - f_{10} & = & -0.9460 \end{array}$$

Tahap 1 : (1):menentukan nilai γ dan (2): menentukan nilai ρ_i
parameter γ menggunakan

$$\gamma_i = \begin{cases} \dfrac{c_i}{b_i} & i = 1 \\ \dfrac{c_i}{b_i - a_i\gamma_{i-1}} & i = 2, 3, \ldots 9 \end{cases}$$

dan parameter ρ menggunakan

$$\rho_i = \begin{cases} \dfrac{r_i}{b_i} & i = 1 \\ \dfrac{r_i - a_i\rho_{i-1}}{b_i - a_i\gamma_{i-1}} & i = 2, 3, \ldots 9 \end{cases}$$

$$
\begin{aligned}
\gamma_1 &= -0.5000 & \rho_1 &= -0.0030\\
\gamma_2 &= -0.6667 & \rho_2 &= -0.0100\\
\gamma_3 &= -0.7500 & \rho_3 &= -0.0210\\
\gamma_4 &= -0.8000 & \rho_4 &= -0.0360\\
\gamma_5 &= -0.8333 & \rho_5 &= -0.0550\\
\gamma_6 &= -0.8571 & \rho_6 &= -0.0780\\
\gamma_7 &= -0.8750 & \rho_7 &= -0.1050\\
\gamma_8 &= -0.8889 & \rho_8 &= -0.1360\\
\gamma_9 &= -0.0000 & \rho_9 &= 0.7290
\end{aligned}
$$

Tahap 2 :Menentukan solusi numerik

$$
f(x_i) = \begin{cases} \rho_i & i = 9 \\ -\gamma_i f(x_{i+1}) + \rho_i & i = 8, 7, \ldots 1 \end{cases}
$$

$$
\begin{aligned}
f_9 &= 0.7290\\
f_8 &= 0.5120\\
f_7 &= 0.3430\\
f_6 &= 0.2160\\
f_5 &= 0.1250\\
f_4 &= 0.0640\\
f_3 &= 0.0270\\
f_2 &= 0.0080\\
f_1 &= 0.0000
\end{aligned}
$$

Tabel 2: Solusi persamaan diferensial persoalan nilai batas dengan $n = 10$ dan $\Delta x = 0.1$

i	x_i	f_i	$f(x_i)$	$\lvert f_i - f(x_i) \rvert$	%Error
0	0.0	0.0000	0.0000	0.0000	0.00%
1	0.1	0.0000	0.0010	0.0010	1.00%
2	0.2	0.0080	0.0080	0.0000	0.00%
3	0.3	0.0270	0.0270	0.0000	0.00%
4	0.4	0.0640	0.0640	0.0000	0.00%
5	0.5	0.1250	0.1250	0.0000	0.00%
6	0.6	0.2160	0.2160	0.0000	0.00%
7	0.7	0.3430	0.3430	0.0000	0.00%
8	0.8	0.5120	0.5120	0.0000	0.00%
9	0.9	0.7290	0.7290	0.0000	0.00%
10	1.0	1.0000	1.0000	0.0000	0.00%

3 Kesimpulan

Algoritma thomas merupakan metode iterativ yang menerapkan dua tahap penyelesaian. dan sangat efisien dalam menyelesaikan persoalan metode beda hingga implisit. Proses komputasi pada algoritma thomas sangat prosedural yang menerapkan komputasi rekursif tiap iterasi. Dari pembahasan sebelumnya dapat dilihat juga efektifitas algoritma thomas dalam menyelesaikan persoalan nilai batas pada persamaan diferensial biasa. Nilai kesalahan yang menunjukan nilai yang sangat kecil walaupun jumlah grid cukup kecil. Walaupun dalam pembahasan hanya pada satu persoalan, namun persoalan lain tidak menutup kemungkinan akan menurunkan performa dari algoritma thomas. Harapannya materi ini dapat memberikan wawasan untuk menerapkan metode ini. Terima kasih... [1, 2, 3]

4 Tugas Mandiri

1. Selesaikan sistem linier berikut.

$$a.\quad \begin{aligned} 4x_1 + x_2 &= 11 \\ -x_1 &= 1 \end{aligned} \qquad b.\quad \begin{aligned} -x_1 + x_2 &= -1 \\ -2x_2 &= 12 \end{aligned}$$

$$c.\quad \begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= 4 \\ -x_2 + 3x_3 &= 3 \\ x_3 &= 1 \end{aligned} \qquad d.\quad \begin{aligned} 2x_1 \qquad\qquad &= -6 \\ -x_1 + x_2 \qquad &= 10 \\ -2x_1 + x_2 - 2x_3 &= 7 \end{aligned}$$

Jawaban: a. $(-1, 15)$, b. $(-6, -5)$, c. $(5, 0, 1)$, d. $(-3, 7, 3)$

2. Selesaikan persamaan linier $Mx = r$ menggunakan algoritma thomas untuk matriks M dan r masing-masing berikut.

$$a.\quad M = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}, r = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad b.\quad M = \begin{bmatrix} -4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{bmatrix}, r = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$c.\quad M = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}, r = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 1 \\ 1.5 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad d.\quad M = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, r = \begin{bmatrix} 1 \\ 1.5 \\ 2.5 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Jawaban: a. $(2, 3)$, b. $(3, 1)$, c. $(1, 2, 1)$, d. $(3, 1, 1)$

3. Tentukan solusi numerik dari persamaan diferensial biasa persoalan nilai batas berikut untuk jumlah pembagian grid sebanyak $n = 5$ dan $n = 10$.

a.
$$\frac{d^2 f}{dx^2} = \frac{1}{2}x, \quad 0 \le x \le 2$$
$$f(0) = 0, \quad f(2) = \frac{4}{3}$$

b.
$$\frac{d^2 f}{dx^2} = -e^x, \qquad 0 \le x \le 1$$
$$f(0) = -1, \qquad f(1) = -e$$

c.
$$\frac{d^2 f}{dx^2} = f(x), \quad 0 \le x \le 1$$
$$f(0) = e, \quad f(1) = e^2$$

d.
$$\frac{d^2 f}{dx^2} - \frac{df}{dx} = x, \quad -2 \le x \le 0$$
$$f(-2) = 0, \qquad f(0) = 0$$

5 Daftar Pustaka

[1] K. A. Hoffmann and S. T. Chiang, *Computational Fluid Duynamics For Engineers Volume I.* New York, NY, USA: *Engineering Education System*, 1995.

[2] [1] halaman 153.

[3] [1] halaman 166.

Lampiran

Menentukan $\%Error$ dari pendekatan numerik terhadap solusi analitik:

$$\%Error = \frac{|N_v - E_v|}{|E_v|}100\%$$

dengan

N_v: Nilai numerik
E_v: Nilai analitik

Menentukan persamaan beda dengan pendekatan beda maju:

$$\frac{df}{dx} = \frac{f_{i+1} - f_i}{\Delta x}$$

Menentukan persamaan beda dengan pendekatan beda mundur:

$$\frac{df}{dx} = \frac{f_i - f_{i-1}}{\Delta x}$$

Menentukan persamaan beda dengan pendekatan beda tengah:

$$\frac{df}{dx} = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2\Delta x}$$
$$\frac{d^2 f}{dx^2} = \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{(\Delta x)^2}$$