

序 (Order ings)

数上的例子

- $Z = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ 整数集合

$$-2 < -1 < 0 < 1 < 2$$

- R 表示所有实数的集合

$$0.5 < \frac{2}{3} < 1 < \sqrt{2} < \pi$$

一个实际例子


- 冰箱有三个参数(V, E, C), 其中 V 表示容积(升), E 表示耗电量(KWh/24h), C 表示价格(元)。并假设我们总是更喜欢相对容积大、耗电量低、价格低的产品。那么如下几款冰箱相比哪款最有优势?
- I号: (110, 0.47, 1500)
- II号: (120, 0.47, 1350)
- III号: (100, 0.51, 1400)

一个实际例子


- 冰箱有三个参数(V, E, C), 其中 V 表示容积(升), E 表示耗电量(KWh/24h), C 表示价格(元)。并假设我们总是更喜欢相对容积大、耗电量低、价格低的产品。那么如下几款冰箱相比哪款最有优势?
- I号: (110, 0.47, 1500)
- II号: (120, 0.47, 1350)
- III号: (100, 0.51, 1400)



一个实际例子

- 冰箱有三个参数(V, E, C), 其中 V 表示容积(升), E 表示耗电量(KWh/24h), C 表示价格(元)。并假设我们总是更喜欢相对容积大、耗电量低、价格低的产品。那么如下几款冰箱相比哪款最有优势?
- I号: (110, 0.47, 1500)
- II号: (120, 0.47, 1350) 
- III号: (100, 0.51, 1400)

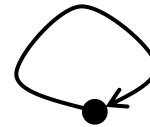
一个实际例子

- 冰箱有三个参数(V, E, C), 其中 V 表示容积(升), E 表示耗电量(KWh/24h), C 表示价格(元)。并假设我们总是更喜欢相对容积大、耗电量低、价格低的产品。那么如下几款冰箱相比哪款最有优势?
- I号: (110, 0.47, 1500)
- II号: (120, 0.47, 1350) 
- III号: (100, 0.51, 1400)

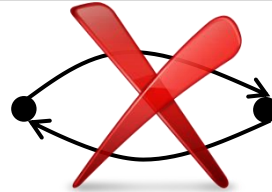
偏序(Partial ordering)

- **偏序(Partial ordering)**: 若集合 S 上的关系 R (即: $R \subseteq S \times S$) 同时具有**自反性**、**反对称性**、**传递性**, 则关系 R 被称为偏序。

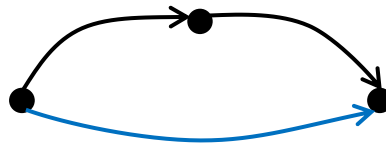
自反(Reflexive): $(\forall x \in S) xRx$



反对称(Anti-symmetric): $(\forall x, y \in S) (xRy \wedge yRx \rightarrow x = y)$



传递(Transitive): $(\forall x, y, z \in S) (xRy \wedge yRz \rightarrow xRz)$



符号约定

- 偏序集 (S, R) : R 是集合 S 上的偏序关系。
- 常用符号
 - 偏序 (Partial ordering): \leq, \leq
 - 严格序 (Strict inequality): $<, <$
 $x < y$ 若 $(x \leq y)$ 且 $(x \neq y)$
 - 逆序 (Reverse inequality): $\geq, >$
 $x \geq y$ 若 $y \leq x$

线性序

- 集合 S 上的关系 R 被称为**线性序**，若 R 满足：
 - R 是偏序；
 - 对任意 S 中的元素 x, y ，都有 xRy 或 yRx 。

线性序举例

- (N, \leq)
- $(Z, \leq), (R, \leq)$

（非线性）偏序例子

- 自然数集上的整除关系： $(N, |)$
 $a|b$ 当且仅当存在自然数 c , 使得 $b = a \times c$ 。
- 集合 A 上的子集关系： $(2^A, \subseteq)$ 。
- 冰箱选择。

一个重要的序

$(S_1, \leq_1), (S_2, \leq_2), \dots, (S_n, \leq_n)$ 是 n 个线性序,
 $(a_1, a_2, \dots, a_n), (b_1, b_2, \dots, b_n) \in S_1 \times S_2 \times \dots \times S_n,$

n 元字典序(Lexicographic ordering):

$(a_1, a_2, \dots, a_n) \leq_{\text{lex}} (b_1, b_2, \dots, b_n)$ 当且仅当

- $(a_1, a_2, \dots, a_n) = (b_1, b_2, \dots, b_n)$, 或
- 存在 $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ ($\forall j < i$) $a_j = b_j$ 且 $a_i <_i b_i$ 。

例: S_k 是 26 个英文字母, \leq_k 是字母序
则 $ab\textcolor{red}{c}def \leq_{\text{lex}} ab\textcolor{red}{e}aay$

一个重要的序

$(S_1, \leq_1), (S_2, \leq_2), \dots, (S_n, \leq_n)$ 是 n 个线性序,

$(a_1, a_2, \dots, a_n), (b_1, b_2, \dots, b_n) \in S_1 \times S_2 \times \dots \times S_n,$

n 元字典序(Lexicographic ordering):

$(a_1, a_2, \dots, a_n) \leq_{\text{lex}} (b_1, b_2, \dots, b_n)$ 当且仅当

- $(a_1, a_2, \dots, a_n) = (b_1, b_2, \dots, b_n)$, 或
- 存在 $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ ($\forall j < i$) $a_j = b_j$ 且 $a_i <_i b_i$.

n 元字典序是线性序。

$$\begin{aligned} x &= (a_1, a_2, \dots, a_i, \dots, a_j, \dots, a_n) \\ y &= (b_1, b_2, \dots, b_i, \dots, b_j, \dots, b_n) \\ z &= (c_1, c_2, \dots, c_i, \dots, c_j, \dots, c_n) \end{aligned}$$

$$a_i < b_i = c_i$$

一个重要的序

$(S_1, \leq_1), (S_2, \leq_2), \dots, (S_n, \leq_n)$ 是 n 个线性序,

$(a_1, a_2, \dots, a_n), (b_1, b_2, \dots, b_n) \in S_1 \times S_2 \times \dots \times S_n$,

n 元字典序(Lexicographic ordering):

$(a_1, a_2, \dots, a_n) \leq_{\text{lex}} (b_1, b_2, \dots, b_n)$ 当且仅当

- $(a_1, a_2, \dots, a_n) = (b_1, b_2, \dots, b_n)$, 或
- 存在 $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ ($\forall j < i$) $a_j = b_j$ 且 $a_i <_i b_i$.

n 元字典序是线性序。

$$\begin{aligned} x &= (a_1, a_2, \dots, a_i, \dots, a_j, \dots, a_n) \\ y &= (b_1, b_2, \dots, b_i, \dots, b_j, \dots, b_n) \\ z &= (c_1, c_2, \dots, c_i, \dots, c_j, \dots, c_n) \end{aligned}$$

$$a_i = b_i < c_i$$

• 立即前元(Immediate predecessor)

对偏序集 (S, \leq) , 元素 $x, y \in S$, 如果以下两个条件成立, 称 x 是 y 的立即前元:

$$1. x < y,$$

$$2. \neg(\exists z \in S)(x < z < y).$$

用符号 $x \triangleleft y$ 表示立即前元关系。

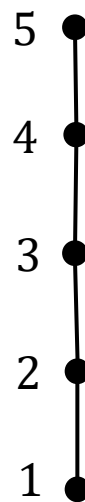
• 例:

$(N, |)$

- $2 \triangleleft 4 \triangleleft 8$, 但是 2 不是 8 的立即前元。(\triangleleft 不具有传递性)
 - $3 \triangleleft 6, 3 \triangleleft 9$
 - 对任意素数 x , 有 $1 \triangleleft x$
 - $2 \triangleleft 10, 5 \triangleleft 10$ (一个元素可能有多个立即前元)
- } (多个元素可能有同一立即前元)

哈斯图(Hasse diagram)

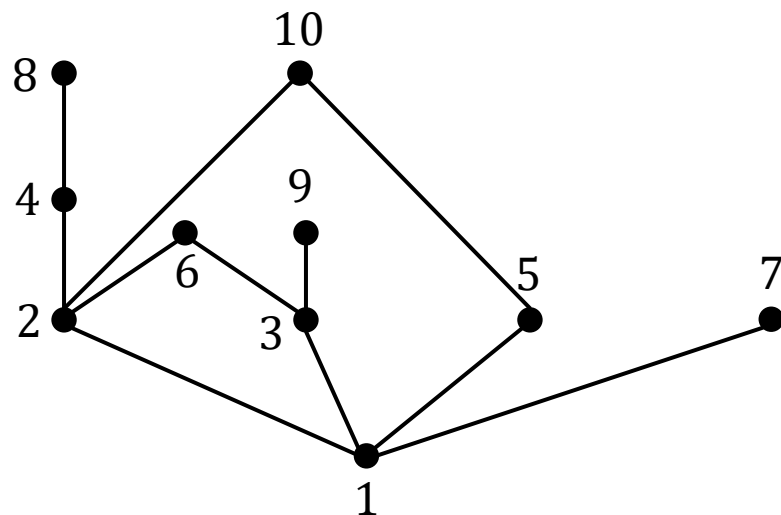
- **哈斯图:** 给定偏序集 (S, \leq) , S 为有限集
 - 只保留立即前元关系对应的边。
 - 若 $x < y$, 则代表的 y 点画在代表 x 的点的上方。
- 例:
 $(\{1,2,3,4,5\}, \leq)$



哈斯图(Hasse diagram)

- **哈斯图:** 给定偏序集 (S, \leq) , S 为有限集
 - 只保留立即前元关系对应的边。
 - 若 $x \triangleleft y$, 则代表的 y 点画在代表 x 的点的上方。

- 例:
 $(\{1, 2, \dots, 10\}, |)$



极大元/极小元

(Minimal/Maximal element)

- 偏序集 (S, \leq) , 称 $a \in S$ 是此有序集上的

- 极小元(Minimal element):

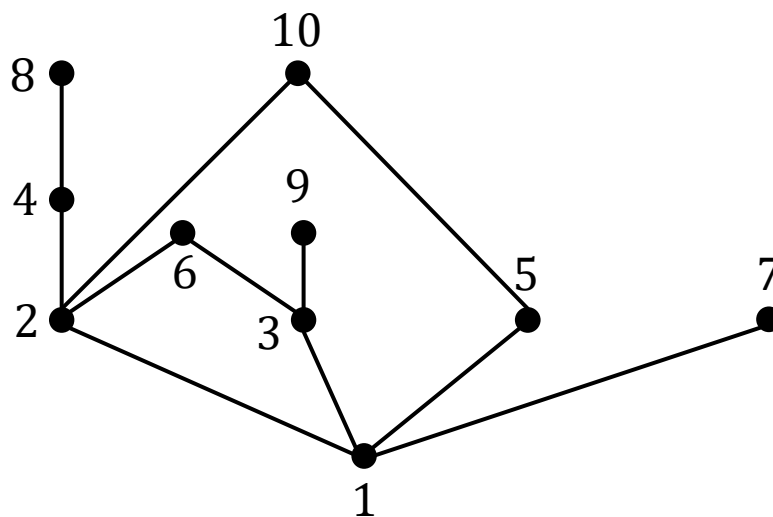
如果 $\neg(\exists x \in S)x < a$;

- 极大元(Maximal element):

如果 $\neg(\exists x \in S)x > a$;

- 例:

$(\{1, 2, \dots, 10\}, |)$



极大元/极小元

(Minimal/Maximal element)

- 偏序集 (S, \leq) , 称 $a \in S$ 是此有序集上的

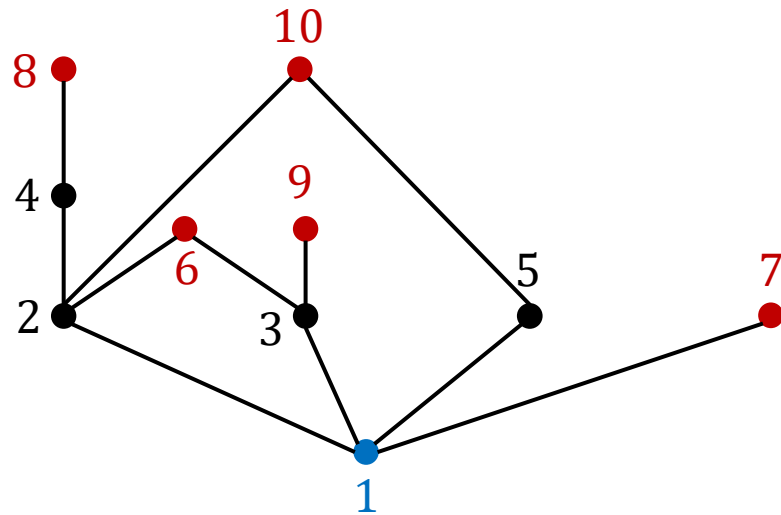
➤ 极小元(Minimal element):

如果 $\neg(\exists x \in S)x < a$;

➤ 极大元(Maximal element):

如果 $\neg(\exists x \in S)x > a$;

- 例:
 $(\{1, 2, \dots, 10\}, |)$



极大元/极小元

(Minimal/Maximal element)

- 偏序集 (S, \leq) , 称 $a \in S$ 是此有序集上的

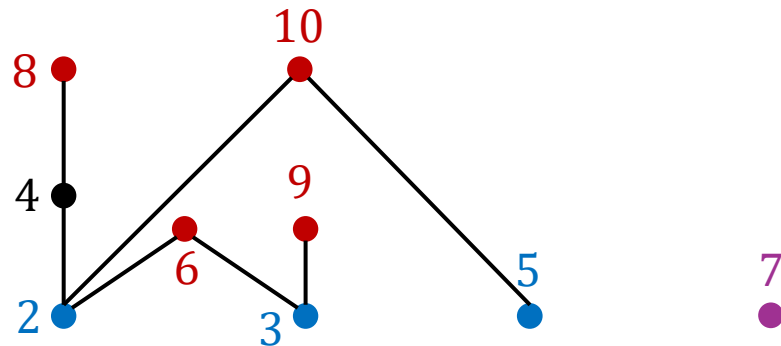
- 极小元(Minimal element):

如果 $\neg(\exists x \in S)x < a$;

- 极大元(Maximal element):

如果 $\neg(\exists x \in S)x > a$;

- 例:
 $(\{2, \dots, 10\}, |)$



最大元/最小元

(Smallest/Largest element)

- 偏序集 (S, \leq) , 称 $a \in S$ 是此有序集上的

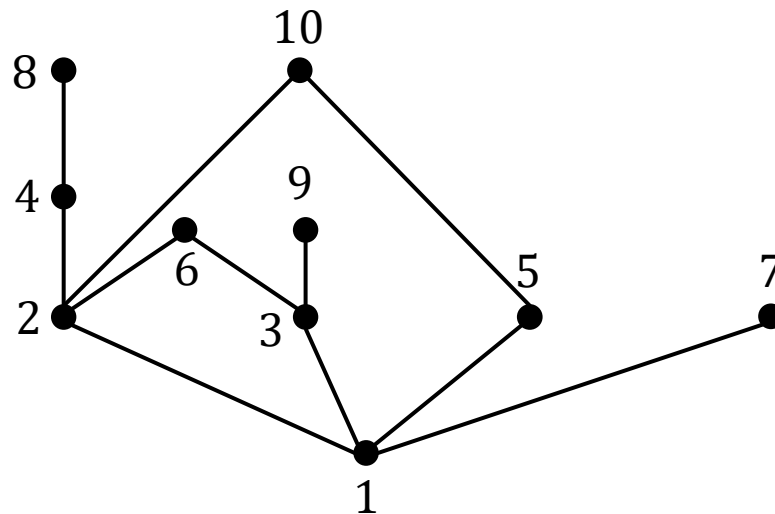
➤ 最小元(Smallest element):

如果 $(\forall x \in S) a \leq x$;

➤ 最大元(Largest element):

如果 $(\forall x \in S) a \geq x$;

- 例:
 $(\{1, 2, \dots, 10\}, |)$



最大元/最小元

(Smallest/Largest element)

- 偏序集 (S, \leq) , 称 $a \in S$ 是此有序集上的

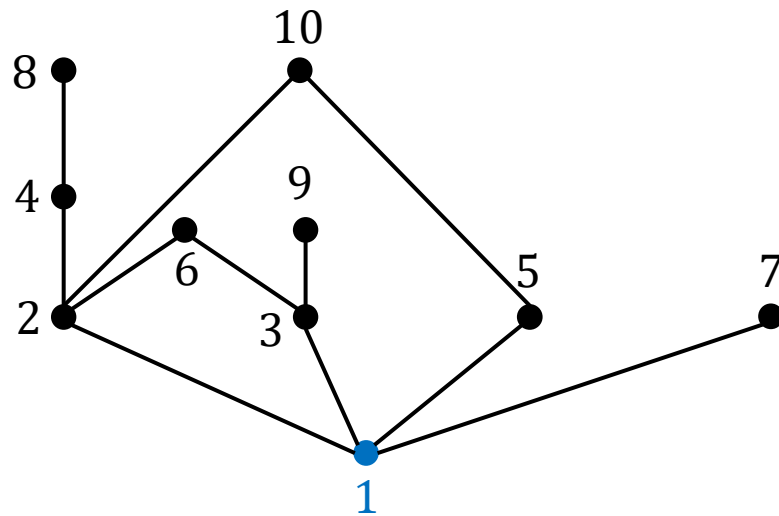
➤ 最小元(Smallest element):

如果 $(\forall x \in S) a \leq x$;

➤ 最大元(Largest element):

如果 $(\forall x \in S) a \geq x$;

- 例:
 $(\{1, 2, \dots, 10\}, |)$



最大元/最小元

(Smallest/Largest element)

- 偏序集 (S, \leq) , 称 $a \in S$ 是此有序集上的

➤ 最小元(Smallest element):

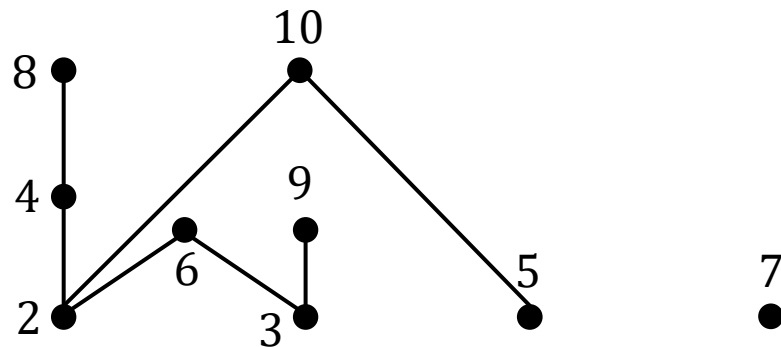
如果 $(\forall x \in S) a \leq x$;

➤ 最大元(Largest element):

如果 $(\forall x \in S) a \geq x$;

- 例:

$(\{2, \dots, 10\}, |)$



- 偏序集(S, \leq), 称 $a \in S$ 是此有序集上的

- 极小元(Minimal element):

如果 $\neg(\exists x \in S) x < a$;

- 极大元(Maximal element):

如果 $\neg(\exists x \in S) x > a$;

- 偏序集(S, \leq), 称 $a \in S$ 是此有序集上的

- 最小元(Smallest element):

如果 $(\forall x \in S) a \leq x$;

- 最大元(Largest element):

如果 $(\forall x \in S) a \geq x$;

最大元（最小元）必是极大元（极小元），反之不成立。

- 偏序集(S, \leq)

- S 无限:

极大元、极小元、最大元、最小元都不一定存在。

反例: (\mathbb{Z}, \leq) , (\mathbb{N}, \leq)

- S 有限:

最大元、最小元不一定存在。

极大元、极小元一定存在。

有限偏序必含极小元

- **定理：** 任意有限偏序集 (S, \leq) 中存在至少一个极小元。

有限偏序必含极小元

- **定理：** 任意有限偏序集 (S, \leq) 中存在至少一个极小元。

- 证明：

任意取 S 中的元素 x_0 ：

情况1： 如果 x_0 是极小元， 则定理得证；

情况2： 否则， 一定能找到 $x_1 < x_0$ 。

对 x_1 重复前述讨论， 因为 S 有限， 故情况2必在有限步后不成立。 从而情况1成立。

线性扩充定理

- 线性扩充(Linear extensions): 对有限偏序集 (S, \preceq) , 存在一个线性序集 (S, \preceq') 满足

$$x \preceq y \rightarrow x \preceq' y.$$

线性扩充定理

- 线性扩充(Linear extensions): 对有限偏序集 (S, \preceq) , 存在一个线性序集 (S, \preceq') 满足

$$x \preceq y \rightarrow x \preceq' y.$$

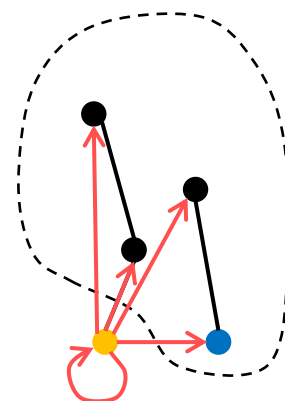
线性扩充定理

- **线性扩充(Linear extensions):**对有限偏序集 (S, \leq) , 存在一个线性序集 (S, \leq') 满足

$$x \leq y \rightarrow x \leq' y.$$

- 证明：（归纳法）
 - $|S| = 1$, $(S, \leq') = (S, \leq)$ 。
 - $|S| > 1$: 取 (S, \leq) 中的一个极小元 x_0 , $S' = S \setminus \{x_0\}$ 。
 (S', \leq) 是一个偏序集, 且 $|S'| < |S|$ 。
根据归纳假设, 存在 (S', \leq) 的线性扩充 (S', \leq'') ,
构造 (S, \leq') 为: $\leq' = \leq'' \cup \{(x_0, y) \mid y \in S'\}$ 。
可证 (S, \leq') 是一个线性序。

一般地, 线性扩充不唯一。



总结

- 偏序、线性序
- 哈斯图
- 极大元/极小元，最大元/最小元
- 线性扩充定理