

序 (Orderings)

数上的例子

- $Z = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ 整数集合

$$-2 < -1 < 0 < 1 < 2$$

- R 表示所有实数的集合

$$0.5 < \frac{2}{3} < 1 < \sqrt{2} < \pi$$

一个实际例子

- 冰箱有三个参数(V, E, C)， 其中 V 表示容积(升)， E 表示耗电量(KWh/24h)， C 表示价格(元)。并假设我们总是更喜欢相对容积大、耗电量低、价格低的产品。那么如下几款冰箱相比哪款最有优势？
- I号： (110, 0.47, 1500)
- II号： (120, 0.47, 1350)
- III号： (100, 0.51, 1400)

一个实际例子

- 冰箱有三个参数(V, E, C)，其中 V 表示容积(升)， E 表示耗电量(KWh/24h)， C 表示价格(元)。并假设我们总是更喜欢相对容积大、耗电量低、价格低的产品。那么如下几款冰箱相比哪款最有优势？
- I号：(110, 0.47, 1500)
- II号：(120, 0.47, 1350)
- III号：(100, 0.51, 1400)



一个实际例子

- 冰箱有三个参数(V, E, C)， 其中 V 表示容积（升）， E 表示耗电量(KWh/24h)， C 表示价格（元）。并假设我们总是更喜欢相对容积大、耗电量低、价格低的产品。那么如下几款冰箱相比哪款最有优势？
- I号： (110, 0.47, 1500)
- II号： (120, 0.47, 1350) 
- III号： (100, 0.51, 1400)

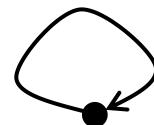
一个实际例子

- 冰箱有三个参数(V, E, C)， 其中 V 表示容积（升）， E 表示耗电量(KWh/24h)， C 表示价格（元）。并假设我们总是更喜欢相对容积大、耗电量低、价格低的产品。那么如下几款冰箱相比哪款最有优势？
- I号： (110, 0.47, 1500)
- II号： (120, 0.47, 1350) 
- III号： (100, 0.51, 1400)

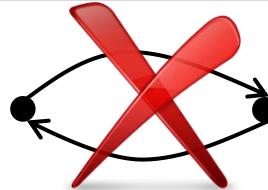
偏序(Partial ordering)

- 偏序(Partial ordering): 若集合 S 上的关系 R (即: $R \subseteq S \times S$) 同时具有自反性、反对称性、传递性，则关系 R 被称为偏序。

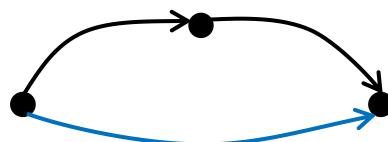
自反(Reflexive): $(\forall x \in S) xRx$



反对称(Anti-symmetric): $(\forall x, y \in S) (xRy \wedge yRx \rightarrow x = y)$



传递(Transitive): $(\forall x, y, z \in S) (xRy \wedge yRz \rightarrow xRz)$



符号约定

- 偏序集(S, R): R 是集合 S 上的偏序关系。
- 常用符号
 - 偏序 (Partial ordering): \leqslant, \leq
 - 严格序 (Strict inequality): $<, <$
 $x < y$ 若 $(x \leqslant y)$ 且 $(x \neq y)$
 - 逆序 (Reverse inequality): \geqslant, \geq
 $x \geqslant y$ 若 $y \leqslant x$

线性序

- 集合 S 上的关系 R 被称为**线性序**，若 R 满足：
 - R 是偏序；
 - 对任意 S 中的元素 x, y ，都有 xRy 或 yRx 。

线性序举例

- (N, \leq)
- $(Z, \leq), (R, \leq)$

(非线性) 偏序例子

- 自然数集上的整除关系: $(N, |)$
 $a|b$ 当且仅当存在自然数 c , 使得 $b = a \times c$ 。
- 集合 A 上的子集关系: $(2^A, \subseteq)$ 。
- 冰箱选择。

一个重要的序

$(S_1, \leq_1), (S_2, \leq_2), \dots, (S_n, \leq_n)$ 是 n 个线性序，

$(a_1, a_2, \dots, a_n), (b_1, b_2, \dots, b_n) \in S_1 \times S_2 \times \dots \times S_n$ ，

n 元字典序 (Lexicographic ordering):

$(a_1, a_2, \dots, a_n) \leq_{\text{lex}} (b_1, b_2, \dots, b_n)$ 当且仅当

- $(a_1, a_2, \dots, a_n) = (b_1, b_2, \dots, b_n)$, 或
- 存在 $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ ($\forall j < i$) $a_j = b_j$ 且 $a_i <_i b_i$ 。

例: S_k 是 26 个英文字母, \leq_k 是字母序

则 $abc\textcolor{red}{def} \leq_{\text{lex}} ab\textcolor{red}{e}aay$

一个重要的序

$(S_1, \leq_1), (S_2, \leq_2), \dots, (S_n, \leq_n)$ 是 n 个线性序，

$(a_1, a_2, \dots, a_n), (b_1, b_2, \dots, b_n) \in S_1 \times S_2 \times \dots \times S_n$,

n 元字典序 (Lexicographic ordering):

$(a_1, a_2, \dots, a_n) \leq_{\text{lex}} (b_1, b_2, \dots, b_n)$ 当且仅当

- $(a_1, a_2, \dots, a_n) = (b_1, b_2, \dots, b_n)$, 或
- 存在 $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ ($\forall j < i$) $a_j = b_j$ 且 $a_i <_i b_i$ 。

n 元字典序是线性序。

$$x = (a_1, a_2, \dots, a_i, \dots, a_j, \dots, a_n)$$

$$y = (b_1, b_2, \dots, b_i, \dots, b_j, \dots, b_n)$$

$$z = (c_1, c_2, \dots, c_i, \dots, c_j, \dots, c_n)$$

$$a_i < b_i = c_i$$

一个重要的序

$(S_1, \leq_1), (S_2, \leq_2), \dots, (S_n, \leq_n)$ 是 n 个线性序，

$(a_1, a_2, \dots, a_n), (b_1, b_2, \dots, b_n) \in S_1 \times S_2 \times \dots \times S_n$,

n 元字典序 (Lexicographic ordering):

$(a_1, a_2, \dots, a_n) \leq_{\text{lex}} (b_1, b_2, \dots, b_n)$ 当且仅当

- $(a_1, a_2, \dots, a_n) = (b_1, b_2, \dots, b_n)$, 或
- 存在 $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ ($\forall j < i$) $a_j = b_j$ 且 $a_i <_i b_i$ 。

n 元字典序是线性序。

$$x = (a_1, a_2, \dots, a_i, \dots, a_j, \dots, a_n)$$

$$y = (b_1, b_2, \dots, b_i, \dots, b_j, \dots, b_n)$$

$$z = (c_1, c_2, \dots, c_i, \dots, c_j, \dots, c_n)$$

$$a_i = b_i < c_i$$

• 立即前元(Immediate predecessor)

对偏序集 (S, \leq) , 元素 $x, y \in S$, 如果以下两个条件成立, 称 x 是 y 的立即前元:

1. $x < y$,
2. $\neg(\exists z \in S)(x < z < y)$ 。

用符号 $x \triangleleft y$ 表示立即前元关系。

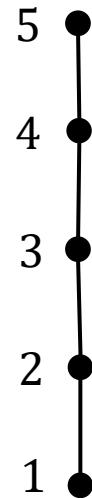
• 例:

$(N, |)$

- $2 \triangleleft 4 \triangleleft 8$, 但是 2 不是 8 的立即前元。 $(\triangleleft$ 不具有传递性)
- $3 \triangleleft 6, 3 \triangleleft 9$
- 对任意素数 x , 有 $1 \triangleleft x$
- $2 \triangleleft 10, 5 \triangleleft 10$ (一个元素可能有多个立即前元)

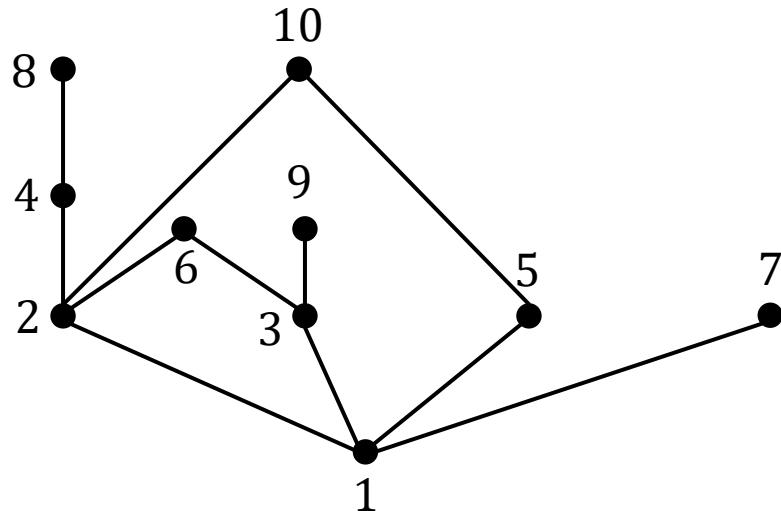
哈斯图(Hasse diagram)

- **哈斯图:** 给定偏序集 (S, \leq) , S 为有限集
 - 只保留立即前元关系对应的边。
 - 若 $x \lhd y$, 则代表的 y 点画在代表 x 的点的上方。
- 例:
 $(\{1,2,3,4,5\}, \leq)$



哈斯图(Hasse diagram)

- **哈斯图:** 给定偏序集 (S, \leq) , S 为有限集
 - 只保留立即前元关系对应的边。
 - 若 $x \lhd y$, 则代表的 y 点画在代表 x 的点的上方。
- 例:
 $(\{1, 2, \dots, 10\}, |)$

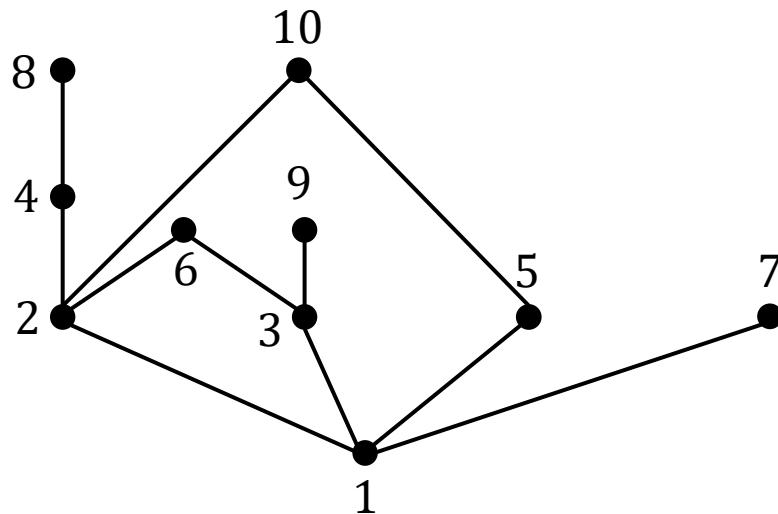


极大元/极小元

(Minimal/Maximal element)

- 偏序集(S, \leq), 称 $a \in S$ 是此有序集上的
 - 极小元(Minimal element):
如果 $\neg(\exists x \in S)x < a$;
 - 极大元(Maximal element):
如果 $\neg(\exists x \in S)x > a$;

- 例:
 $(\{1, 2, \dots, 10\}, |)$

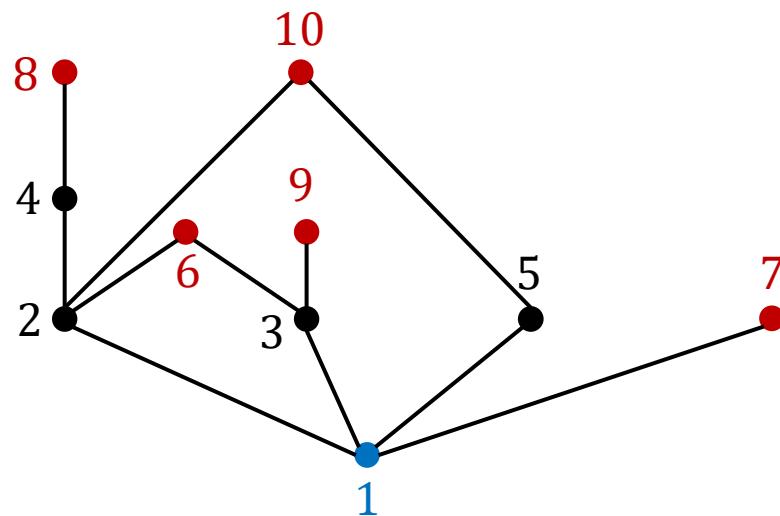


极大元/极小元

(Minimal/Maximal element)

- 偏序集(S, \leq), 称 $a \in S$ 是此有序集上的
 - 极小元(Minimal element):
如果 $\neg(\exists x \in S)x < a$;
 - 极大元(Maximal element):
如果 $\neg(\exists x \in S)x > a$;

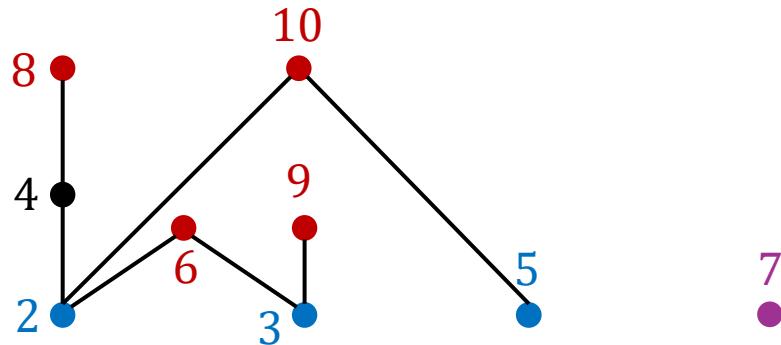
- 例:
 $(\{1, 2, \dots, 10\}, |)$



极大元/极小元

(Minimal/Maximal element)

- 偏序集(S, \leq), 称 $a \in S$ 是此有序集上的
 - 极小元(Minimal element):
如果 $\neg(\exists x \in S)x < a$;
 - 极大元(Maximal element):
如果 $\neg(\exists x \in S)x > a$;
- 例:
 $(\{2, \dots, 10\}, |)$

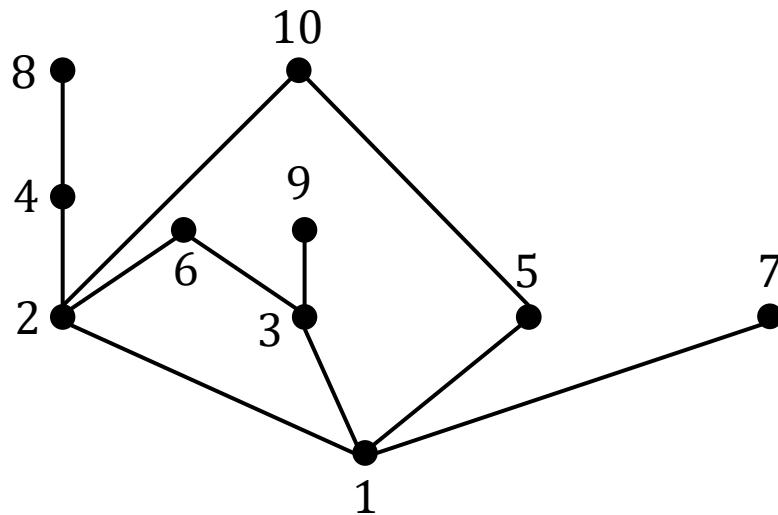


最大元/最小元

(Smallest/Largest element)

- 偏序集(S, \leqslant), 称 $a \in S$ 是此有序集上的
 - **最小元(Smallest element):**
如果($\forall x \in S$) $a \leqslant x$;
 - **最大元(Largest element):**
如果($\forall x \in S$) $a \geqslant x$;

- 例:
 $(\{1, 2, \dots, 10\}, |)$

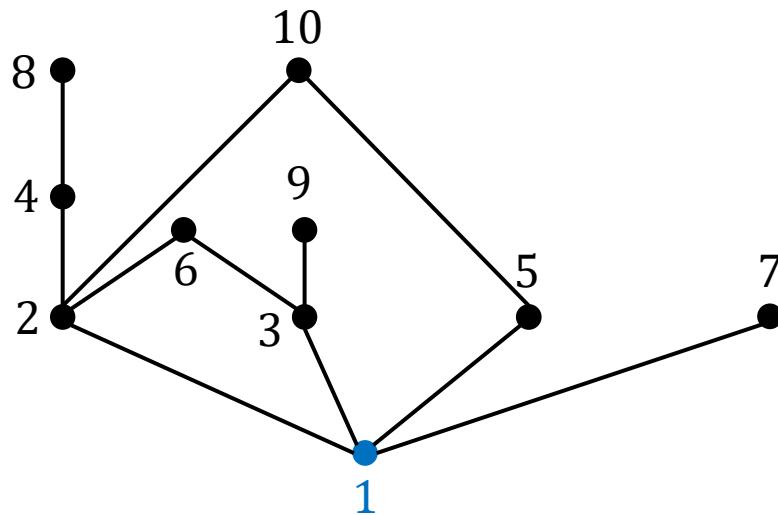


最大元/最小元

(Smallest/Largest element)

- 偏序集(S, \leqslant), 称 $a \in S$ 是此有序集上的
 - **最小元(Smallest element):**
如果($\forall x \in S$) $a \leqslant x$;
 - **最大元(Largest element):**
如果($\forall x \in S$) $a \geqslant x$;

- 例:
 $(\{1, 2, \dots, 10\}, |)$

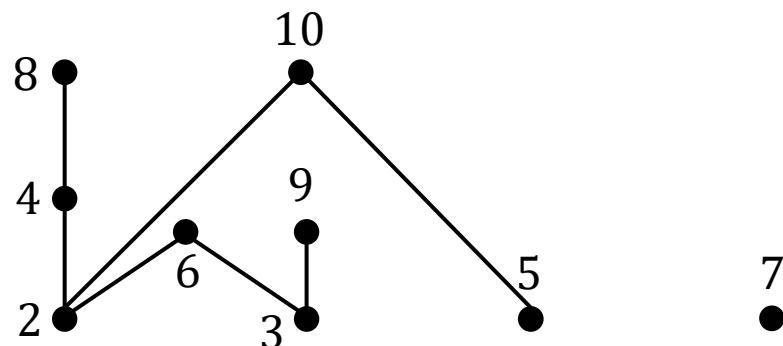


最大元/最小元

(Smallest/Largest element)

- 偏序集(S, \leqslant), 称 $a \in S$ 是此有序集上的
 - **最小元(Smallest element):**
如果($\forall x \in S$) $a \leqslant x$;
 - **最大元(Largest element):**
如果($\forall x \in S$) $a \geqslant x$;

- 例:
 $(\{2, \dots, 10\}, |)$



- 偏序集(S, \leq)，称 $a \in S$ 是此有序集上的

➤ 极小元(Minimal element):

如果 $\neg(\exists x \in S)x < a$;

➤ 极大元(Maximal element):

如果 $\neg(\exists x \in S)x > a$;

- 偏序集(S, \leq)，称 $a \in S$ 是此有序集上的

➤ 最小元(Smallest element):

如果 $(\forall x \in S)a \leq x$;

➤ 最大元(Largest element):

如果 $(\forall x \in S)a \geq x$;

最大元（最小元）必是极大元（极小元），反之不成立。

- 偏序集(S, \leq)

- S 无限:

- 极大元、极小元、最大元、最小元都不一定存在。

- 反例: (\mathbb{Z}, \leq) , (\mathbb{N}, \leq)

- S 有限:

- 最大元、最小元不一定存在。

- 极大元、**极小元**一定存在。

有限偏序必含极小元

- **定理:** 任意有限偏序集 (S, \leq) 中存在至少一个极小元。

有限偏序必含极小元

- **定理:** 任意有限偏序集 (S, \leq) 中存在至少一个极小元。
- 证明:

任意取 S 中的元素 x_0 :

情况1: 如果 x_0 是极小元, 则定理得证;

情况2: 否则, 一定能找到 $x_1 < x_0$ 。

对 x_1 重复前述讨论, 因为 S 有限, 故情况2必在有限步后不成立。从而情况1成立。

线性扩充定理

- 线性扩充(Linear extensions): 对有限偏序集 (S, \leq) , 存在一个线性序集 (S, \leq') 满足

$$x \leq y \rightarrow x \leq' y.$$

线性扩充定理

- 线性扩充(Linear extensions): 对有限偏序集 (S, \leq) , 存在一个线性序集 (S, \leq') 满足

$$x \leq y \rightarrow x \leq' y.$$

线性扩充定理

- 线性扩充(Linear extensions): 对有限偏序集 (S, \leq) , 存在一个线性序集 (S, \leq') 满足

$$x \leq y \rightarrow x \leq' y.$$

- 证明: (归纳法)

- $|S| = 1$, $(S, \leq') = (S, \leq)$.

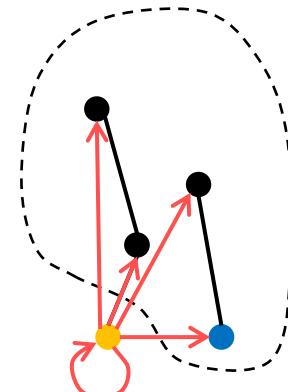
- $|S| > 1$: 取 (S, \leq) 中的一个极小元 x_0 , $S' = S \setminus \{x_0\}$ 。
 (S', \leq) 是一个偏序集, 且 $|S'| < |S|$ 。

根据归纳假设, 存在 (S', \leq) 的线性扩充 (S', \leq'') ,

构造 (S, \leq') 为: $\leq' = \leq'' \cup \{(x_0, y) \mid y \in S\}$.

可证 (S, \leq') 是一个线性序。

一般地, 线性扩充不唯一。



总结

- 偏序、线性序
- 哈斯图
- 极大元/极小元， 最大元/最小元
- 线性扩充定理