

容斥原理

longhuan@sjtu.edu.cn

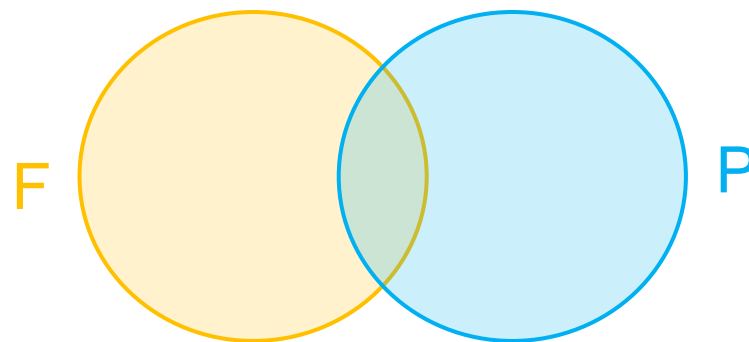


“One of the most useful principles of enumeration in discrete probability and combinatorial theory is the celebrated *principle of inclusion–exclusion*. When skillfully applied, this principle has yielded the solution to many a combinatorial problem.”

Gian-Carlo Rota (April 27, 1932 – April 18, 1999) was an Italian-born American mathematician and philosopher.

- **问题：**上海交大计算机某班本学期一共有二门选修课（形式化方法**F**，概率学**P**），所有学生都选了至少一门选修课。已知有**25**个学生选了形式化方法，有**28**个学生选了概率学。有**7**个学生选了形式化方法和概率。

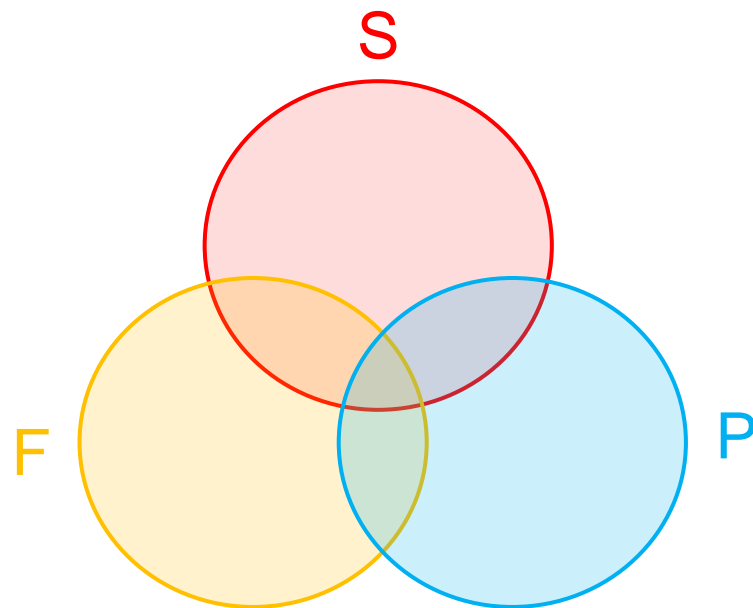
问：此班上一共有多少名学生？



$$\begin{aligned}|F \cup P| &= |F| + |P| - |F \cap P| \\ &= 25 + 28 - 7 \\ &= 46\end{aligned}$$

- **问题：**上海交大计算机某班本学期一共有三门选修课（信息安全**S**，形式化方法**F**，概率学**P**），所有学生都选了至少一门选修课。已知有**30**个学生选了信息安全，有**25**个学生选了形式化方法，有**28**个学生选了概率学。有**5**个学生选了信息安全和形式化方法，有**7**个学生选了形式化方法和概率，有**9**个学生选了信息安全和概率。特别地有**5**个精力特别充沛的学生同时选了这三门选修课。

问：此班上一共有多少名学生？



$$\begin{aligned} & |S \cup F \cup P| \\ &= |S| + |F| + |P| - |S \cap F| - |S \cap P| - |F \cap P| + |S \cap F \cap P| \\ &= 30 + 25 + 28 - 5 - 9 - 7 + 5 = 67. \end{aligned}$$

容斥原理

- 容斥定理(*Inclusion-exclusion principle*):

对任意有限集合 A_1, A_2, \dots, A_n , 有

$$\begin{aligned} \left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| &= \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \sum_{I \in \binom{\{1,2,\dots,n\}}{k}} \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right| \\ &= \sum_{\emptyset \neq I \subseteq \{1,2,\dots,n\}} (-1)^{|I|-1} \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right| \end{aligned}$$

$$|S \cup F \cup P| = |S| + |F| + |P| - |S \cap F| - |S \cap P| - |F \cap P| + |S \cap F \cap P|$$

$$\left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \sum_{I \in \binom{\{1,2,\dots,n\}}{k}} \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right|$$

• 证明：（数学归纳法）

- $n = 2$ 时定理成立。
- 假设对任意 $n - 1$ 定理成立。
- 继续证明规模为 n 时定理成立，此时：

$$\begin{aligned} \left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| &= \left| \left(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i \right) \cup A_n \right| \\ &= \left| \bigcup_{i=1}^{n-1} A_i \right| + |A_n| - \left| \left(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i \right) \cap A_n \right| \\ &= \left| \bigcup_{i=1}^{n-1} A_i \right| + |A_n| - \left| \bigcup_{i=1}^{n-1} (A_i \cap A_n) \right| \\ &= \dots \end{aligned}$$

应用一：错排公式

- **错排：** n 个有序的元素应有 $n!$ 种不同的排列。如若一个排列式的所有的元素都不在原来的位置上，则称这个排列为**错排**。
- **问题：** 任给一个 n ，求出 $1, 2, \dots, n$ 的错排个数 $D(n)$ 共有多少个？

解： 用 S_n 表示所有 $\{1, 2, \dots, n\}$ 上的排列。则 $|S_n| = n!$ 。

对 $i = 1, 2, \dots, n$ 定义 $A_i = \{\pi \in S_n : \pi(i) = i\}$ 。

则 $D(n) = n! - |A_1 \cup \dots \cup A_n|$

$$D(n) = n! - |A_1 \cup \cdots \cup A_n|$$

$$A_i = \{\pi \in S_n: \pi(i) = i\}$$

- $|A_i| = (n - 1)!$
- $i < j, |A_i \cap A_j| = (n - 2)!$
- $i_1 < i_2 < \cdots < i_k, |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}| = (n - k)!$
- 根据 **容斥原理**: $|A_1 \cup \cdots \cup A_n| = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \binom{n}{k} (n - k)! = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{n!}{k!}$
- 故 $D(n) = n! \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!} \right)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} D(n) = n!/e$$

应用二：欧拉函数 φ

- **欧拉函数 φ** ：给定自然数 n ，欧拉函数 $\varphi(n)$ 定义为不超过 n 且与 n 互素的自然数的个数
$$\varphi(n) = |\{m \in \{1, 2, \dots, n\} : \gcd(n, m) = 1\}|.$$
- **问题**：求欧拉函数。
- **例**：
 - $\varphi(3) = 2$ (1, 2)
 - $\varphi(8) = 4$ (1, 3, 5, 7)
 - $\varphi(12) = 4$ (1, 5, 7, 11)

应用二：欧拉函数 φ

- **欧拉函数 φ** ：给定自然数 n ，欧拉函数 $\varphi(n)$ 定义为不超过 n 且与 n 互素的自然数的个数
$$\varphi(n) = |\{m \in \{1, 2, \dots, n\} : \gcd(n, m) = 1\}|.$$
- **问题**：求欧拉函数。
- **解**：根据整数分解定理， n 可被唯一地分解成 $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r}$ 。其中 $\alpha_i > 1$ 且 p_i 为素数， $p_1 < p_2 < \cdots < p_r$.
 - 如果 $1 \leq m < n$ 且 m 与 n 不互素，则必存在某个 $1 \leq i \leq r$ 有 $p_i | m$.
 - $1 \leq i \leq r$ 令 $A_i = \{m \in \{1, 2, \dots, n\} : p_i | m\}$
 - 则 $\varphi(n) = n - |A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_r|$

$$\varphi(n) = n - |A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_r|$$

$$1 \leq i \leq r \quad A_i = \{m \in \{1, 2, \dots, n\} : p_i | m\}$$

$$\bullet \quad |A_i| = \frac{n}{p_i}$$

$$\bullet \quad i < j \quad |A_i \cap A_j| = \frac{n}{p_i p_j}$$

$$\bullet \quad i_1 < i_2 < \cdots < i_k,$$

$$|A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}| = \frac{n}{p_{i_1} p_{i_2} \cdots p_{i_k}}$$

• 根据 **容斥原理** 并整理化简后,

$$\varphi(n) = n \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{p_r}\right).$$



- 欧拉函数在信息安全领域有重要应用，是第一个公钥密码方案RSA的基础。