CHAPITRE IV GEOMETRIE ANALYTIQUE.

1. REPERAGE DES POINTS ET VECTEURS DU PLAN.
2. Repère d’une droite.

1° Définition d’un axe.

Définition.

Soit (D) une droite, u un vecteur directeur de (D) et O un point de (D) :

Le couple (O,u) s’appelle un repère de la droite (D). Le point O est appelé origine du repère.

Remarque :

A tout point M de (D) on associe son abscisse x, c’est le nombre qui vérifie OM=xu.

Exemples :

Si A est le point d’abscisse 3 alors OA=3u.

Si OB=-2u alors B est le point d’abscisse -2.

OO=0u donc l’abscisse de O est 0.

OI=1u donc l’abscisse de I est 1.

L’ensemble des points de (D) d’abscisse positive est la demi-droite [OA).

L’ensemble des points de (D) d’abscisse négative est la demi-droite [OB).

L’ensemble des points de (D) d’abscisse comprise entre -2 et 3 est le segment [AB].

2° Mesure algébrique d’un vecteur.

Définition.

Soit (D) une droite, u un vecteur directeur de (D) et A, B deux points de (D).

Les vecteurs u et AB sont colinéaires donc il existe un nombre k unique tel que AB=ku.

Ce nombre k est appelé mesure algébrique du vecteur AB relativement au vecteur u et noté AB.

Remarque : AB=AB.u

Exemples : AB=-5u donc AB=-5. OI=u donc OI=1. AA=0.u donc AA=0.

Remarque :De OM=xu, on déduit que OM est l’abscisse du point M dans le repère (O,u).

Propriété 1. (Relation de Chasles)

Soit A, B et C trois points d’une droite (D) de repère (O,u). On a AC=AB+BC.

Conséquence : si A et B sont deux points d’une droite (D) de repère (O,u) . On a : AB=OB-OA.

Nous en déduisons la propriété suivante :

Propriété 2.

Soit (D) une droite de repère (O,u), A et B deux points de (D) d’abscisses respectives .

La mesure algébrique AB du vecteur AB relativement au vecteur u est telle que : .

Exemple : A a pour abscisse 3 et B a pour abscisse -2 donc AB=-2-3=-5.

1. Coordonnées d’un vecteur du plan.

1° Base et repère du plan.

Définition :

on dit que le triplet (O,i,j) est un repère (cartésien) du plan si (i,j) est une base, c'est à dire si i et j sont deux vecteurs non colinéaires. O est appelé l’origine du repère.

Repères particuliers :

on appelle repère orthogonal un repère où les vecteurs i et j sont orthogonaux.

On appelle repère normé un repère où les vecteurs i et j ont pour norme 1 (i.e. ).

On appelle repère orthonormal un repère où les vecteurs i et j sont orthogonaux de norme 1.

2° Coordonnées d’un point, coordonnées d’un vecteur d’origine O.

Définition :

les coordonnées du point M dans le repère (O,i,j) sont aussi les coordonnées du vecteur OM dans la base (i,j). Ainsi si  alors 

Soit P le projeté du point M sur (Ox) parallèlement à (Oy) et

Q le projeté du point M sur (Oy) parallèlement à (Ox).

Alors, . Q

 est l’abscisse du point M.

 est l’ordonnée du point M.

(Ox) est l’axe des abscisses et (Oy) l’axe des ordonnées.

Exemples :

P( ;0), Q(0 ; ), I(1 ;0), J(0 ;1), i(1 ;0) et j(0 ;1).

3° Coordonnées d’un vecteur AB.

Soient , de même , d’où l’on déduit . Par conséquent, 

et finalement AB.

Propriété :

Soit (O,i,j) un repère du plan, A et B les points de coordonnées , alors le vecteur AB a pour coordonnées  dans la base (i,j).

Applications :

Calculer les coordonnées du vecteur AB dans les cas suivants :

1. A(-2 ; 3) et B(4 ;-1) ii) A(3 ;0) et B(0 ;-5)

iii) A(0 ;5) et B(-2 ;5) iv) A(3 ;-2) et B(-2 ;3)

4° Opérations et vecteurs.

Propriétés algébriques :

Soit (i,j) une base, u(x ;y) et v(x’ ;y’) deux vecteurs, alors :

u=0 équivaut à x=0 et y=0. (u(0 ;0))

u=v équivaut à x=x’ et y=y’.

u+v a pour coordonnées (x+x’ ;y+y’).

ku (k réel) a pour coordonnées (kx ;ky).

5° Coordonnées du milieu d’un segment [AB].

Soient , on note I le milieu du segment [AB]. On a OI= , on en déduit donc les coordonnées de I :  et .

Théorème.

Le milieu I du segment [AB] a pour coordonnées  et .

Application : Soit A(-2 ;3) et B(5 ;2), quelles sont les coordonnées du milieu I du segment [AB] ?

II VECTEURS COLINEAIRES

1° Formule de colinéarité.

Soit u(x ;y) et v(x’ ;y’) deux vecteurs colinéaires non nuls, il existe donc un nombre réel k non nul tel que u=kv, ce qui se traduit au niveau des coordonnées par x=kx’ et y=ky’, d’où l’on déduit que **xy’-x’y=0**.

Théorème.

Soit deux vecteurs u(x ;y) et v(x’ ;y’). La condition u et v sont colinéaires équivaut à xy’-x’y=0.

Application :Montrer que u(-2 ;5) et v(3 ;-7,5) sont deux vecteurs colinéaires.

2° Application à l’alignement et au parallélisme :

Représenter dans un repère les points A(5 ;3), B(8 ;5), C(13 ;8) et D(-1 ;-1).

Les points A, B et C sont-ils alignés ?

Les points A, B et D sont-ils alignés ?

Représenter dans ce même repère les points E(5 ;-1) et F(2 ;-3).

Les droites (AB) et (EF) sont-elles parallèles ?

III EQUATIONS DE DROITES.

1. Equation cartésienne d’une droite.

1° Détermination de l’équation cartésienne d’une droite du plan.

1. Connaissant un point et un vecteur directeur :

*Soit (D) une droite passant par le point A(3 ;1) et de vecteur directeur (1 ;2). Tracer la droite (D) dans un repère (O,*). *Soit M(x ;y) appartenant à (D), que peut-on dire des vecteurs  et  ? Exprimer la condition de colinéarité entre ces deux vecteurs.*

1. Connaissant deux points :

*Soit A(-3 ;2) et B(2 ;1) deux points du plan. Tracer la droite (AB), donner un vecteur directeur de (AB),puis une équation cartésienne de la droite (AB).*

2° Forme cartésienne de l’équation d’une droite.

*Quel est l’ensemble des points M du plan de coordonnées (x ;y) vérifiant l’équation*

*2x-3y+5=0 ? Donner un vecteur directeur de cette droite.*

Définition-Théorème :

Le plan étant repéré par (O, ), a, b et c étant trois nombres réels tels que (a ;b) (0 ;0), l’ensemble des points M du plan de coordonnées (x ;y) tels que ax+by+c=0 est une droite (D) de vecteur directeur (-b ;a).

L’équation ax+by+c=0 est appelée **équation cartésienne** de la droite (D).

Réciproquement, toute droite du plan admet une équation cartésienne de la forme ax+by+c=0.

(Remarque : Tout autre vecteur non nul, colinéaire à , est aussi un vecteur directeur de (D)).

1. Equation réduite d’une droite.

1° Cas général.

Soit ax+by+c=0 une équation cartésienne de la droite (D).

1. si b=0, donner l’équation réduite de la droite (D).

, (D) est une droite parallèle à l’axe des ordonnées.

Exemple : (D1) d’équation 2x-5=0.

1. si b0, donner l’équation réduite de la droite (D).

, (D) est la droite de vecteur directeur , d’ordonnée à l’origine .

Exemples : (D2) d’équation x-2y-3=0.

(D3) d’équation 3y-5=0.

Théorème et définitions.

Si (D) est une droite non parallèle à l’axe des ordonnées elle possède une équation de la forme y=mx+p ; m s’appelle le **coefficient directeur** de la droite (D) et (D) possède un vecteur directeur  ; p s’appelle **l’ordonnée à l’origine**.

2° Détermination de l’équation réduite d’une droite.

i) Connaissant un point et un vecteur directeur :

*Soit A(3 ;1) et (3 ;2). On cherche à déterminer l’équation réduite de la droite (D) passant par A et de vecteur directeur .*

Théorème.

Si **(a ;b) est un vecteur directeur de (D), alors (D) a pour coefficient directeur , et si  appartient à (D) alors .

ii) Connaissant deux points :

*Déterminer l’équation réduite de (AB) où A(-2 ;1) et B(3 ;2).*

Théorème.

Si , (AB) a pour équation x= .

Si , (AB) a pour coefficient directeur .

1. Représentation graphique.

1° Méthode.

A partir d’une équation cartésienne ou de l’équation réduite de (D) :

1. déterminer les coordonnées de deux points et tracer la droite passant par ces deux points.
2. déterminer les coordonnées d’un point et d’un vecteur directeur, tracer la droite passant par ce point de direction le vecteur directeur.

2° Application.

1. n°17 page 263.
2. n°20 page 263.
3. n°23 page 263.
4. Position relative de deux droites.

Propriété.

Les droites (D) et (D’) d’équations respectives ax+by+c=0 et a’x+b’y+c’=0 sont **parallèles** si, et seulement si, ab’-a’b=0.

On dira de (D) et (D’) qu’elles sont **sécantes** si, et seulement si, ab’-a’b0.