CHAPITRE VI ORTHOGONALITE DANS LE PLAN

1°) Vecteurs orthogonaux.

Définition.

Soit  deux vecteurs non nuls et A, B et C trois points tels que 

On dit que  sont orthogonaux lorsque les droites (AB) et (AC) sont perpendiculaires.

*On note :  et on lit  est orthogonal à .*

Exemple :

Soit ABCD un carré de centre O. A B

Les vecteurs  sont orthogonaux, on écrit .

De même  O

Contre-exemple : les vecteurs  ne sont pas orthogonaux.

D C

Théorème 1 : *Expression analytique de la norme et de la distance.*

Le plan est muni d’un repère orthonormal .

Avec , .

Exemple numérique :

Le plan est muni d’un repère orthonormal . Soit A(3 ;-2), B(0 ;2) et C(-4 ;-1), montrer que le triangle ABC est isocèle, rectangle en B.

Avec (x ;y), .

Preuve :

Soit A et B tels que , alors ,  ont même longueur donc même norme, c’est à dire , d’où .

Exemple numérique :

Exercice n° 13 3°) et 7°) page 243.

Théorème 2 : *Condition analytique d’orthogonalité de deux vecteurs.*

Soit (x ;y) et (x’ ;y’),  et  sont orthogonaux si et seulement si xx’+yy’=0.

Preuve :

Si l’un des vecteurs  ou  est nul, l’affirmation est évidente.

Sinon considérons les points A et B tels que , c’est à dire A(x ;y) et B(x’ ;y’). Alors  et  orthogonaux signifie que OAB est un triangle rectangle en O ou encore AB²=OA²+OB² d’après Pythagore, ce qui se traduit par (x’-x)²+(y’-y)²=x²+y²+x’²+y’², c’est à dire x’²-2xx’+x²+y’²-2yy’+y²=x²+y²+x’²+y’², on en déduit que xx’+yy’=0.

*Réciproquement,* si (x ;y) et (x’ ;y’) sont tels que xx’+yy’=0, alors toujours avec A(x ;y) et B(x’ ;y’) tels que  :

AB²=(x’-x)²+(y’-y)²=x’²-2xx’+x²+y’²-2yy’+y², AB²=x²+y²+x’²+y’²-2(xx’+yy’)=x²+y²+x’²+y’² et puisque OA²=x²+y², et OB²=x’²+y’² on en déduit AB²=OA²+OB². Alors, d’après la réciproque du théorème de Pythagore, OAB est rectangle en O, ce qui implique que  et  sont orthogonaux.

Applications :

a) Soit A(5 ;3), B(8 ;5), C(1 ;-2) et D(-1 ;1).

Montrer que (AB) et (CD) sont deux droites perpendiculaires.

b) Soit A(3 ;-2), B(0 ;2) et C(-4 ;-1), montrer que le triangle ABC est rectangle en B.

2°) Droites orthogonales.

1. A partir des équations cartésiennes :

Soit (D) :ax+by+c=0 et (D’) :a’x+b’y+c’=0, deux droites orthogonales.  et  sont des vecteurs directeurs ,respectivement, de (D) et (D’). Puisque (D)(D’) alors  ce qui se traduit par bb’+aa’=0.

Théorème : *Condition analytique d’orthogonalité de deux droites.*

(D) :ax+by+c=0 et (D’) :a’x+b’y+c’=0 sont orthogonales si, et seulement si, aa’+bb’=0.

Application :Les droites (D) et (D’) sont-elles  orthogonales?

i) (D) :2x-5y+12=0 et (D’) :7x+2,8y-13=0

ii) (D) :8x-3y-6=0 et (D’) :6x-16y-11=0

1. A partir des équations réduites :

Soit (D) :y=mx+p et (D’) :y=m’x+p’, deux droites orthogonales.  et  sont des vecteurs directeurs, respectivement, de (D) et (D’). Puisque (D)(D’) alors  ce qui se traduit par 1+mm’=0.

Théorème : *Condition analytique d’orthogonalité de deux droites.*

(D) :y=mx+p et (D’) :y=m’x+p’ sont deux droites orthogonales si, et seulement si, mm’=-1.

Application :Les droites (D) et (D’) sont-elles  orthogonales?

i) (D) :y=2x-7 et (D’) :y=0,5x-12

ii) (D) :y=-4x+5 et (D’) :y=0,25x+7

1. Vecteur normal à une droite.

Le vecteur  est un vecteur directeur de la droite (D) d’équation cartésienne ax+by+c=0. Le vecteur  est orthogonal à  car . On dit que le vecteur  est orthogonal ou **normal** à la droite (D).

Propriété.

Le repère du plan étant orthonormal, un vecteur normal à la droite (D) d’équation ax+by+c=0 est le vecteur non nul .

Application : Déterminer les composantes d’un vecteur normal à (D).

i) (D) :2x-3y+8=0 ii) (D) :5x-4y+9=0

1. Détermination de l’équation cartésienne d’une droite orthogonale à une droite donnée, passant par un point donné.

Soit (D) :2x-3y+5=0 et A(3 ;4), déterminer l’équation cartésienne de la droite (D’) orthogonale à (D) et passant par le point A.

Application :Droites remarquables d’un triangle.

Le repère du plan étant orthonormal, soit A(-2 ;3), B(3 ;0) et C(0 ;-3).

Déterminer une équation cartésienne de la médiatrice du segment [BC].

Déterminer une équation cartésienne de la hauteur du triangle ABC issue de A.