Introduction théorique et numérique au transport optimal

Zakaria Otmane

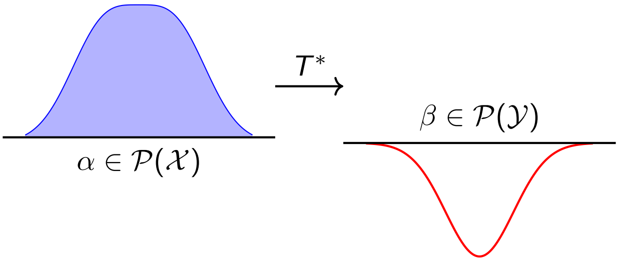
Maître de stage : Léonard Monsaingeon
Tuteur INSA : Mohamed Camar Eddine

Département Mathématiques Appliquées, INSA Rennes
Grupo de Fisica Matematica, IST Lisbonne

16 octobre 2025

Sommaire

Introduction

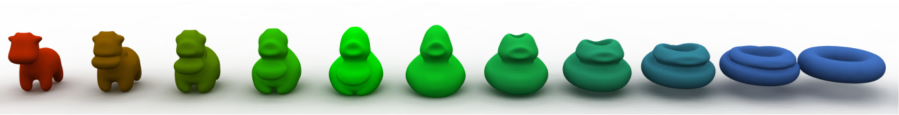


En prenant $c(x, y) = d(x, y)^2$, on cherche alors à résoudre le **problème de Kantorovich** :

$$\mathcal{T}_c(\alpha, \beta) = \inf_{\pi \in \mathcal{U}(\alpha,\beta)} \left[C(\pi) := \int_{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}} c(x, y)\, d\pi(x, y) \right]$$

$$\mathcal{U}(\alpha, \beta) := \left\{ \pi \in \mathcal{P}(\mathcal{X} \times \mathcal{Y}) \,\middle|\, d\alpha(x) = \int_{\mathcal{Y}} d\pi(x, y),\ d\beta(y) = \int_{\mathcal{Y}} d\pi(x, y) \right\}.$$

Le transport optimal admet de nombreuses applications, en particulier dans le domaine de l'imagerie.



$t = 0$ $t = 1/2$ $t = 1$

Figure – Illustration des déformations géométriques induites par le transport optimal

Résolution numérique

On discrétise $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ en une grille de points (x_i, y_j), avec :

$$(i,j) \in \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, m\}, \quad (n,m) \in (\mathbb{N}^*)^2.$$

Les couplages π deviennent des matrices $P \in \mathbb{R}^{n \times m}$.

Le coût c est discrétisé en une matrice $C \in \mathbb{R}^{n \times m}$.

Les mesures discrètes deviennent des vecteurs de probabilité $a \in \mathbb{R}^n$ et $b \in \mathbb{R}^m$.

Les contraintes marginales deviennent :

$$P 1_m = a, \quad P^T 1_n = b.$$

Résolution numérique

Le problème de Kantorovich discrétisé revient alors à résoudre :

$$L_C(a,b) = \min_{P \in U(a,b)} \left[C(P) := \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} C_{i,j} P_{i,j} \right] \tag{2}$$

où l'ensemble admissible est :

$$U(a,b) := \left\{ P \in (\mathbb{R}_+)^{n \times m} \;\middle|\; P 1_m = a,\; P^T 1_n = b \right\}.$$

Régularisation entropique et algorithme de Sinkhorn

Problème régularisé : Pour $\varepsilon > 0$, on considère le problème suivant :

$$L_C^{\varepsilon}(a,b) := \min_{P \in U(a,b)} \left(C(P) + \varepsilon H(P) \right). \tag{3}$$

Ce problème est **strictement convexe** et admet une **solution unique** P^{ε}.

Théorème 1

$$\lim_{\varepsilon \to 0} P^{\varepsilon} = P^{*}, \quad \lim_{\varepsilon \to 0} L_C^{\varepsilon}(a,b) = L_C(a,b),$$

où P^{*} est une solution de (2). La solution P^{ε} s'écrit :

$$P^{\varepsilon} = \mathrm{diag}(u)\, K\, \mathrm{diag}(v), \quad \text{avec } K = e^{-C/\varepsilon}.$$

Régularisation entropique et algorithme de Sinkhorn

Les **contraintes marginales** imposent :

$$\mathrm{diag}(u)\, K\ \mathrm{diag}(v)\, \mathbb{1}_m = a, \quad \mathrm{diag}(v)\, K^\top\ \mathrm{diag}(u)\, \mathbb{1}_n = b$$

Ceci équivaut à :

$$u \odot (Kv) = a, \quad v \odot (K^\top u) = b$$

D'où l'**algorithme de Sinkhorn** :

$$u^{(l+1)} := \frac{a}{Kv^{(l)}}, \quad v^{(l+1)} := \frac{b}{K^\top u^{(l+1)}}$$

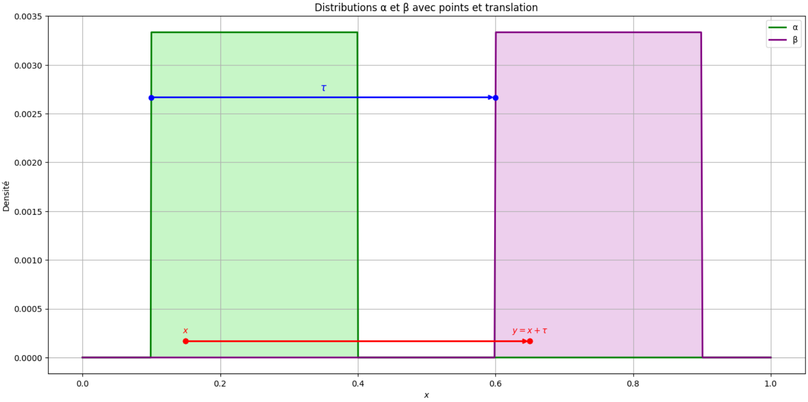


Figure – Distributions sources et cibles de type "porte"

Régularisation entropique et algorithme de Sinkhorn

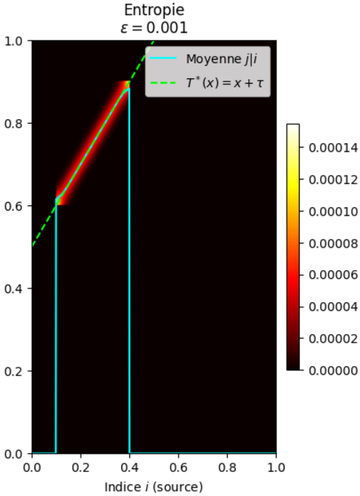


Figure – Plan de transports régularisés par entropie avec courbe moyenne

Barycentres entre deux distributions

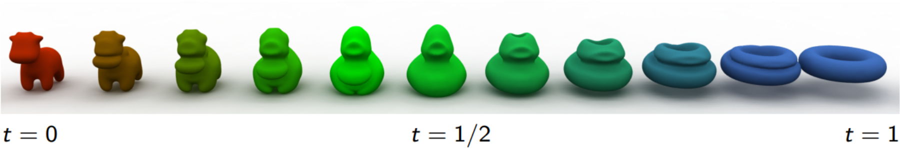


Figure – Illustration des déformations géométriques induites par le transport optimal

Barycentres entre deux distributions

Soit $t \in [0,1]$ et deux mesures de probabilité μ^1 et μ^2. L'objectif est de déterminer leur **barycentre** pour la distance de Wasserstein.

Définition 2

On définit la distance de Wasserstein par :

$$W_2^2(\alpha,\beta) := \inf_{\pi \in \mathcal{U}(\alpha,\beta)} \int_{\mathcal{X}\times\mathcal{X}} d(x,y)^2 \, \mathrm{d}\pi(x,y).$$

Le barycentre pour cette distance est :

$$\bar{\mu} := \arg\min_{\mu \in \mathcal{P}(\mathcal{X})} \left((1-t)\, W_2^2(\mu,\mu^1) + t\, W_2^2(\mu,\mu^2)\right).$$

Imagerie

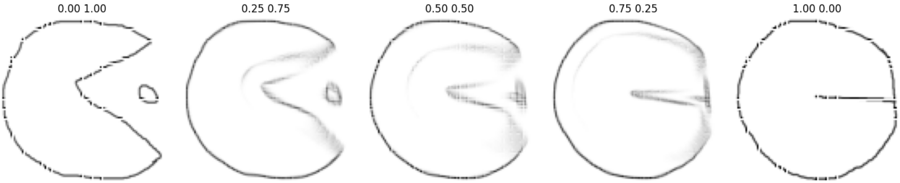


Figure – Une animation de Pacman

Imagerie

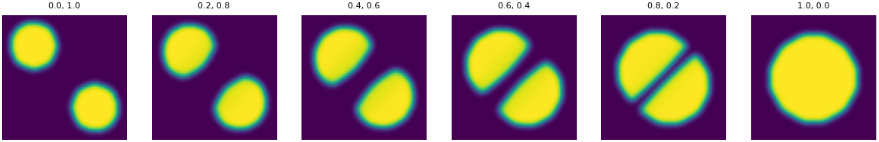


Figure – Une animation entre deux formes simples

Conclusion

- Fondements du transport optimal : Kantorovich et régularisation entropique
- Algorithme de Sinkhorn : Simple et efficace
- Applications : Imageries et bien plus encore !

Merci pour votre écoute et votre attention !