Chapitre I

Circuits électriques en régimes variables

I.1. Définition

Un circuit électrique fonctionne en régime variable lorsqu'il est alimenté par des sources de courant ou de tension du temps au lorsque sa configuration est modifiée, à un instant donnée, par l'ouverture ou la fermeture d'un interrupteur par exemple.

Les signaux (courant et tension) sont alors variables, fonction du temps. Néanmoins, des signaux continus peuvent coexister avec ces signaux variables. On appelle vecteur instantanée, l'expression temporelle d'un signal, que l'on note par une lettre minuscule : par exemple u(t), i(t).

I.2. Dipôles élémentaires

Les circuits électriques en régime variable sont constitués de divers éléments. On retrouve les sources de courant et de tension dont les valeurs seront tantôt constantes tantôt fonction du temps, et les résistances.

D'autres dipôles passifs linéaires sont utilisés : bobines et condensateurs, ainsi que les dipôles non linéaires comme les interrupteurs, les diodes etc.

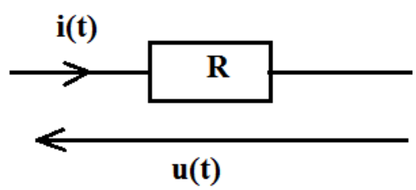
Le fonctionnement des dipôles passifs linéaire réagi par une équation différentielle c'est-à-dire à coefficient constants.

I.3. Dipôles passifs : Equation de fonctionnement

Le fonctionnement des dipôles passifs linéaire réagi par une équation différentielle c'est-à-dire à coefficient constant.

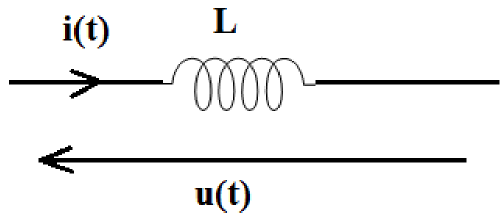
I.3.1. Résistance

Loi d'Ohm : Relation tension-courant



$$u(t) = R\, i(t) \qquad (1)$$

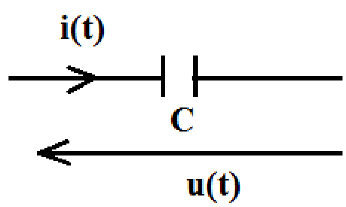
I.3.2. Bobine parfaite



L : inductance en H(Henry)

$$u(t) = L\frac{di(t)}{dt} \tag{2}$$

I.3.3. Condensateur parfait



C : Capacité en F (Farades)

$$i(t) = C\frac{du(t)}{dt} \tag{3}$$

I.3.4. Interrupteurs

Ils peuvent être de type mécanique, mais on utilise surtout des composantes de l'électronique : diodes, transistors,… fonctionnant en régime de commutation. Ces commutateurs sont généralement unidirectionnels en courant ou en tension. Ils ne sont parfaits qu'en première approximation (en négligeant tensions de seuil, courants résiduels, et…)

- Mise en équation et résolution du problème posé.

On se place dans le cas simple, mais classique, où le circuit étudié n'est constitué que d'une maille, celle-ci comportant, entre autre des bobines et/ou des condensateurs. Pour résoudre le problème, il faut suivre la démarche proposée.

- On commence par analyser le fonctionnement des interrupteurs du montage. A chaque état des interrupteurs correspond à une configuration du circuit donc un problème différent à traiter.
- On écrit les lois de Kirchhoff pour le circuit, en faisant intervenir les équations des dipôles élémentaires. On obtient ainsi une équation différentielle linéaire du 1^{er} ordre où du $2^{ème}$ ordre (on n'ira pas au delà) ayant comme inconnu le signal s(t) cherché :

On peut écrire :

$$f\left(s(t),\frac{ds(t)}{dt}\right)=e(t) \tag{4}$$

Ou

$$f\left(s(t),\frac{ds(t)}{dt},\frac{d^2s(t)}{dt^2}\right)=e(t) \tag{5}$$

Le second membre $e(t)$ traduit généralement l'action des dipôles actifs du montage.

- On cherche la solution générale $S_1(t)$ de l'équation sans second membre (**SGESSM**).

$$\begin{cases} f\left(s(t),\frac{ds(t)}{dt}\right)=0 \\ f\left(s(t),\frac{ds(t)}{dt},\frac{d^2s(t)}{dt^2}\right)=0 \end{cases} \tag{5}$$

- On cherche la solution particulière $S_2(t)$ de l'équation avec second membre (**SPEASM**).
- La solution de l'équation différentielle est :

$$s(t)=s_1(t)+s_2(t) \tag{6}$$

La solution fait intervenir un nombre de constantes d'intégration égale à l'ordre de l'équation différentielle. Leur valeur est déterminée par les conditions initiales du problème.

- La **SGESSM** $s_1(t)$ correspond au régime libre ou au régime transitoire. C'est toujours en pratique, une fonction décroissante du temps à cause de l'amortissement du aux résistances.

Ainsi, si $t \to \infty \quad , \quad s_1(t) = 0$

- La SPEASM $s_2(t)$ correspond au régime forcé ou au régime permanent. C'est-à-dire celui qui tend à imposer au circuit le signal e(t). On l'obtient d'ailleurs par identification. Si ce régime avait le temps de s'établir, la seconde solution $s_2(t)$ substituerait seule : $s(t) \to s_2(t)$

I.4. Réponse de circuits du 1er ordre :

Un circuit de 1[er] ordre est généralement régi par une équation différentielle de la forme suivante :

$$\tau \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = e(t) \tag{7}$$

Avec τ : constante de temps du circuit (homogène à un temps).

I.4. Réponse à un échelon :

On appelle échelon de tension (de courant) le signal e(t) tel que e(t)=0 si $t \prec 0$ et $e(t) = Cons\tan te$ pour $t \geq 0$.

$$e(t) = \begin{cases} Cste & si \quad t \geq 0 \\ 0 & si \quad t < 0 \end{cases} \tag{7}$$

La réponse s(t) associée est appelée <u>réponse indicielle</u>.

I.5. Réponse du circuit de 2ème ordre (régime libre est forcé)

Un circuit linéaire de2ème ordre répond à l'équation différentielle suivante :

$$\frac{1}{\omega_0^2}\frac{d^2s(t)}{dt^2} + \frac{2m}{\omega_0}\frac{ds(t)}{dt} + s(t) = e(t) \tag{8}$$

Avec :

ω_0 : pulsation propre du circuit (en rad/s)

m : coefficient d'amortissement du circuit sans unité et ≥ 0.

La résolution de cette équation suit un cheminement légèrement élaboré que dans le cas d'un circuit du 1ér ordre. Des discussions sur la valeur de certaines grandeurs s'imposent.

L'équation caractéristique (EC) :

$$\frac{1}{\omega_0^2}r^2 + \frac{2m}{\omega_0}r + 1 = 0 \qquad (9)$$

Avec r est une racine de l'équation caractéristique.

On en déduit l'expression du discriminant Δ :

$$\Delta = \left(\frac{2m}{\omega_0}\right)^2 - \frac{4}{\omega_0^2} = \frac{4}{\omega_0^2}\left(m^2 - 1\right)$$

La discussion peut alors s'engager sur les valeurs de m, nous avons donc 3 cas :

- $m > 1$, $\Delta > 0$, nous avons deux racines réelles de même signe

$$r_{1,2} = -m\,\omega_0 \pm \omega_0\sqrt{m^2 - 1}$$

SGESSM :

$$s_1(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t} \qquad (10)$$

Régime libre périodique amorti

- $m = 1$, $\Delta = 0$ nous avons une racine double réelle

$$r_1 = -\omega_0$$

SGESSM :

$$s_1(t) = e^{-\omega_0 t}\left(At + B\right)u(t) = R\,i(t) \qquad (11)$$

Régime libre critique

- $0 \leq m < 1$, $\Delta < 0$, nous avons deux racines complexes conjugués

$$r_{1,2} = -m\,\omega_0 \pm j\omega_0\sqrt{1 - m^2} = -m\,\omega_0 \pm j\omega_p$$

Avec : $\omega_p = \omega_0\sqrt{1-m^2}$

ω_p : Pseudo-pulsation des oscillations.

SGESSM :

$$\begin{aligned} s_1(t) &= e^{-m\omega_0 t}\left(A\cos\omega_p t + B\sin\omega_p t\right) \\ &= S_{\max} e^{-m\omega_0 t}\sin\left(\omega_p t + \varphi\right) \end{aligned} \tag{12}$$

Ou $S_{\max} = \sqrt{A^2+B^2}$ et $tg\varphi = \dfrac{A}{B}$

Dans ce cas, on parle du **régime libre oscillant amorti.**

Le régime forcé correspond à la SPEASM $s_2(t)$.

Les solutions particulières les plus courantes en génie électrique sont la constante ou la somme de fonctions circulaires.

- La solution complète est la somme des deux solutions précédemment définies.
- La résolution se termine par la recherche des constantes A et B (ou et) grâce à des conditions initiales (C.I).

I.6. Circuits électriques en régime sinusoïdal

Pour plusieurs raisons, les régimes sinusoïdaux ont une très grande importance en électricité :

- La majeure partie de l'électricité consommée dans le monde est produite et distribuée sous forme de tensions sinusoïdales.
- Le régime sinusoïdal sert de base à l'étude des signaux périodiques par l'intermédiaire de la transformation de Fourier (voir plus loin).

L'étude des circuits électriques en régime sinusoïdal correspond à l'étude des réseaux électriques composés uniquement de dipôles passifs linéaire (résistance, condensateurs et bobines) alimentés par des sources de tension ou de courant sinusoïdales.

En tous points de ce circuit, les signaux sont des grandeurs sinusoïdales du temps de même fréquence f mais déphasées les unes par rapport aux autres.

Un signal sinusoïdal est défini par : $s(t) = S\sqrt{2}\cos(\cos \omega t + \varphi)$

S : Valeur efficace, ω : pulsation en rad/s, $\omega = 2\pi\, f = \dfrac{2\pi}{T}$ où T la période en (s).

φ : Le déphasage à l'origine (à t=0).

Chapitre II

Circuits en régime transitoire

II.1 Introduction

On appelle régime transitoire le régime de variation en fonction du temps des grandeurs électriques $u(t)$ou $i(t)$entre un premier état d'équilibre $(t \leq 0)$ et un nouvel état d'équilibre, atteint à une perturbation extérieure appliquée à t=0. Un tel régime assure la transition entre deux régimes permanents.

Par exemple, lorsqu'on ferme un circuit pour le mettre en fonction, les courants et les tensions mettent un certain temps à s'établir : c'est le régime transitoire.

II.2 Importance du régime transitoire

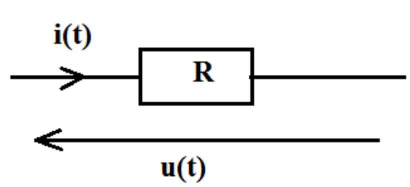
- Utilisation du régime transitoire : filtrage, lissage du courant et de tension après redressement, stockage momentané d'énergie, découplage, déphasage entre le tension et le courant, oscillateurs, etc…
- Effets indésirables (ex) : le démarrage ou l'arrêt d'un moteur d'asservissement doit être le plus bref possible pour une meilleure précision.
- Pour diverses raisons techniques et/ou économiques, il peut être nécessaire de connaître le temps ou au moins d'avoir un ordre de grandeur.

II.3 Dipôles R.L ou C en régime quasi-permanent

II.3.1 Relation Courant-tension (Convention récepteur)

Les relations établies en régime permanent restent valables en régime quasi-permanent. C'est-à-dire « lentement » variables en utilisation des grandeurs électriques instantanées (approximativement des régimes quasi-permanents : ARQP)

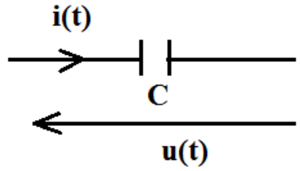
- ***Cas d'un résistor R*** :



Loi d'Ohm donne :

$$u = R\,i \tag{13}$$

- ***Cas d'un condensateur (Capacité)***

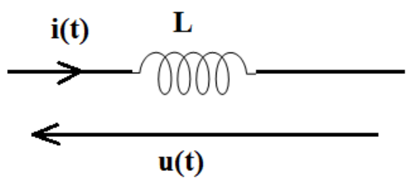


$$i = \frac{dq}{dt} \quad et \quad u = \frac{q}{C} \rightarrow \frac{du}{dt} = \frac{1}{C}\frac{dq}{dt}$$

Ce qui donne :

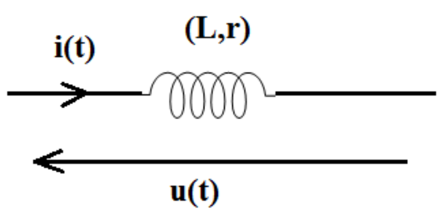
$$i = C\frac{du}{dt} \tag{14}$$

- Cas d'une bobine pure (Inductance L)



$$u = L\frac{di}{dt} \tag{15}$$

- Cas d'une bobine résistance (L,r)



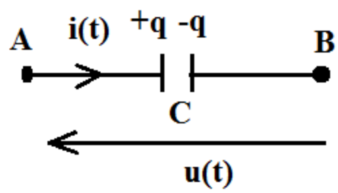
$$u = Ri + L\frac{di}{dt} \tag{16}$$

II.4 Composantes de stockage d'énergie

Nous introduisons ici deux éléments dont les caractéristiques courant-tension font intervenir des relations différentielles ou intégrales.

II.4.1 Condensateur

Un condensateur est un dipôle qui emmagasine une charge électrique q proportionnelle à la tension qui lui est appliquée.



$$q(t) = C\,u(t) = C\left[V_A(t) - V_B(t)\right] \tag{17}$$

La charge q étant portée par l'armature A.

Le coefficient de proportionnalité C est appelé « Capacité » du condensateur dont l'unité est le Farad noté F. la variation par unité du temps de la charge q est égale à l'intensité du courant traversant le condensateur. Donc on peut écrire :

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt} = C\,\frac{du(t)}{dt} \tag{18}$$

La charge est donc la tension d'un condensateur ne peut pas varier d'une manière infiniment rapide. La charge et la tension d'un condensateur sont donc toujours des fonctions continues par rapport au temps. Cette caractéristique est utile pour la détermination des conditions initiales.

La puissance instantanée reçue par un condensateur peut s'écrire :

$$p(t) = u(t)i(t) = C\,u(t)\frac{du(t)}{dt} = \frac{1}{2}C\frac{d^2u(t)}{dt^2}$$

donc :

$$p(t) = \frac{1}{2}C\frac{d^2u(t)}{dt^2} \tag{19}$$

Calculons l'énergie reçue par le condensateur pendant un intervalle du temps.

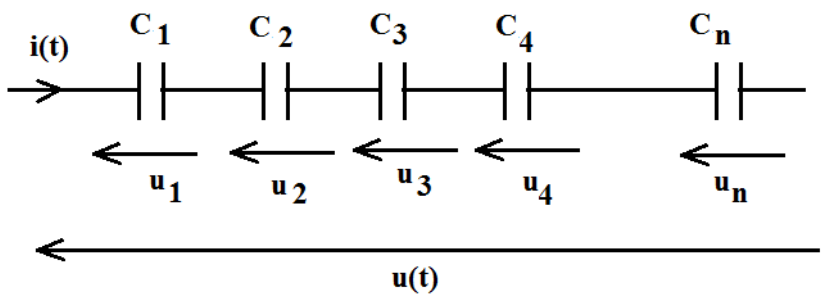
$$w = \int_0^t p(t)dt = \frac{1}{2}C\int_0^t \frac{d^2u(t)}{dt^2}dt = \frac{1}{2}C\left[u^2(t) - u^2(0)\right]$$
$$= \frac{1}{2}C\,u^2(t) \qquad (u(0) = 0)$$

donc :

$$w = \frac{1}{2} C u^2 (t) \tag{20}$$

II.4.2 Association de condensateurs

Considérons l'association de n condensateurs de capacités $C_{k=1,n}$ en série :



Chacun de ces condensateurs est traversé par la même intensité i. Nous pouvons écrire pour chaque condensateur une relation entre cette intensité et la tension à ses bornes :

$$i = C_k \frac{du_k}{dt} \qquad \forall\, k \in [1\,,\,n]$$

Où u_k repésente la tension aux bornes de $k^{ème}$ condensateur.

Par définition, le condensateur équivalent à la série est tel que :

$$i = C\,\frac{du}{dt} \qquad \text{avec} \qquad u = \sum_{k=1}^{n} u_k$$

Ce qui donne :

$$u = \sum_{k=1}^{n} u_k \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{dt} = \sum_{k=1}^{n} \frac{du_k}{dt} = \sum_{k=1}^{n} \frac{i}{C_k}$$

Donc :

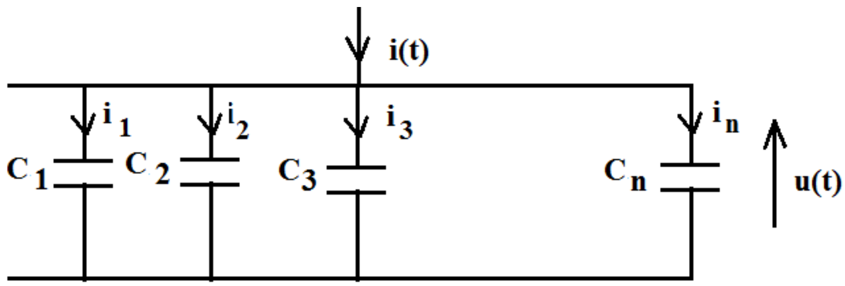
$$i = C\,\frac{du}{dt} = C\; i \sum_{k=1}^{n} \frac{i}{C_k}$$

Finalement :

$$\frac{1}{C} = \sum_{k=1}^{n} \frac{i}{C_k} \tag{21}$$

Pour une association des condensateurs en série, l'intensité de la capacité équivalente est égale à la somme des inverses des capacités.

Considérons maintenant l'association de n condensateurs de capacités $C_{k=1,n}$ en parallèle :



Chaque condensateur est soumis à la même d.d.p u et est traversé par le courant i_k

$$\boxed{i = C_k \frac{du}{dt}}$$

L'intensité du courant total devant traverser le condensateur équivalent est égal à la somme de ces courants, donc :

$$i = C\frac{du}{dt} = \sum_{k=1}^{n} i_k = \sum_{k=1}^{n} C_k \frac{du}{dt}$$

Finalement :

$$C = \sum_{k=1}^{n} C_k \tag{22}$$

Pour une association de condensateurs en parallèle, la capacité équivalente est égale à la somme des capacités.

II.4.3 Propriétés fondamentales d'un condensateur

- **Equation fondamentale** :

$$i = C\frac{du}{dt}$$

- **En régime continu établi** :

Les grandeurs électriques sont constates $u_C = Cste \Rightarrow \frac{du}{dt} = 0$ soit $i = 0$. Donc en régime continu établi, la capacité se comporte comme un circuit ouvert.

- **En régime périodique établi** :

Les grandeurs électriques ne prennent périodiquement la même valeur.

Conséquence : En régime périodique établi, la valeur moyenne du courant dans une capacité est nulle.

- **En régime quelconque** : d'une façon générale, la tension aux bornes d'une capacité ne peut pas subir de discontinuité :

$u\left(t_{0^+}\right) = u\left(t_{0^-}\right)$ quelque soit la valeur de t_0

La capacité s'oppose aux variations de la tension à ses borne et ce d'autant plus que :

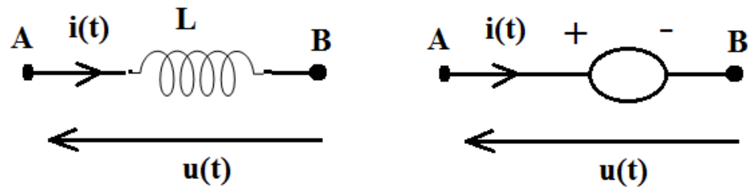
- C est grand.
- Le courant dans la capacité est grand
-

II.4.4 Auto-inductance ou self

Dans une bobine ou auto-inductance, le flux instantané est proportionnel au courant parcourant celle-ci : $\Phi = L\,i$. Le coefficient L est appelé le coefficient d'auto induction du circuit. Il s'exprime en Henry (H). Lorsque le courant varie, il apparaît dans le self f.e.m (qui s'oppose à la variation) :

$$e(t) = -\frac{d\Phi}{dt} = -L\frac{di(t)}{dt} \tag{23}$$

Le symbole que nous avons utilisé pour une self et sa modélisation en convention récepteur est schématisé par :



A cette modélisation correspond l'équation suivante :

$$u(t) = V_A(t) - V_B(t) = L\frac{di(t)}{dt} \tag{24}$$

L'intensité traversant une bobine ne peut pas varier de manière rapide. L'intensité d'une bibine est donc une fonction continue du temps. Cette caractéristique est utile pour la détermination de conditions initiales.

La puissance instantanée reçue par une self s'écrit :

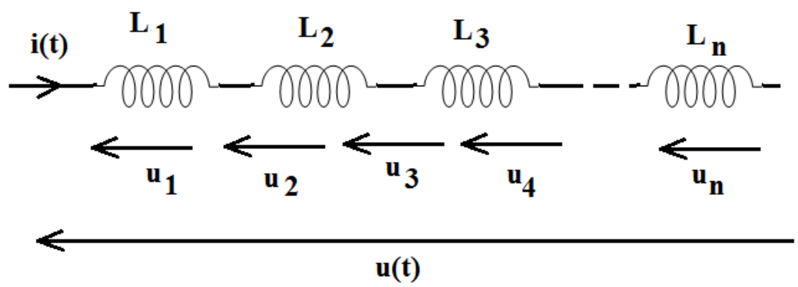
$$p(t) = u(t)i(t) = L\,i(t)\frac{di(t)}{dt} = \frac{1}{2}L\frac{di^2(t)}{dt}$$

En intégrant sue un intervalle du temps t, nous retrouvons l'expression de l'énergie électromagnétique stockée dans une bobine :

$$w = \frac{1}{2}L\,i^2 = \frac{1}{2}i\,\Phi \tag{25}$$

II.4.5 Association de bobines

Considérons l'association de n bobines en série :



Chaque self est traversée par le même courant est soumise à une tension u_k :

$$u_k(t) = L_k\frac{di(t)}{dt}$$

La tension aux bornes de l'ensemble est égale à la somme des tensions partielles, donc :

$$u(t) = L\frac{di(t)}{dt}$$

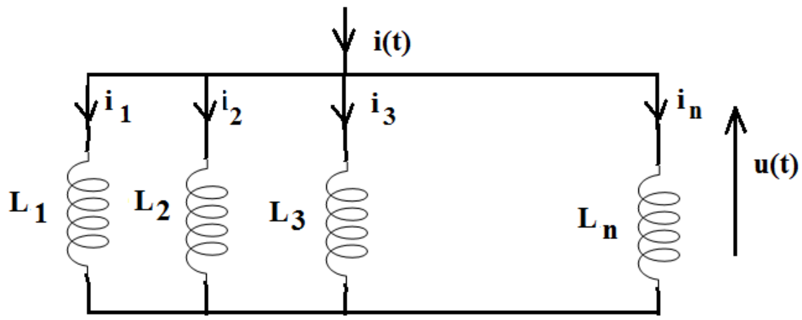
$$u(t) = \sum_{k=1}^{n} u_k(t) = \frac{di(t)}{dt}\sum_{k=1}^{n} L_k$$

Finalement :

$$L = \sum_{k=1}^{n} L_k \tag{26}$$

Pour une association de bobines en série, l'inductance équivalente est égale à la somme des conductances.

Considérons l'association de n bobines en parallèle suivante:



Chaque self est soumise à la meme tension u et est traversée par un courant i_k tel que :

$$u(t) = L_k \frac{di_k(t)}{dt}$$

L'intensité totale est égale à la somme des intensités partielles, donc :

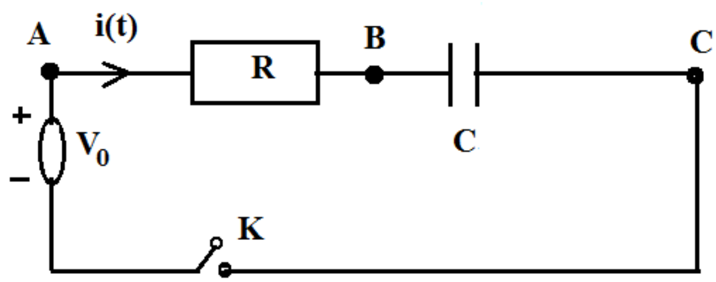
$$i(t) = \sum_{k=1}^{n} i_k(t) \quad \Rightarrow \quad \frac{di(t)}{dt} = \frac{u(t)}{L} = \sum_{k=1}^{n} \frac{di_k(t)}{L_k}$$

On en déduit :*

$$\frac{1}{L} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{L_k} \tag{27}$$

II.5 Charge d'un condensateur au travers d'une résistance

Considérons le circuit schématisé suivant :



A l'instant t=0, nous fermons l'interrupteur k. nous supposons qu'à cette instant la charge initiale du condensateur est nulle : $q(t=0)=0$.

A l'instant $t>0$, nous pouvons écrire :

$$V_D = V_A - V_C = (V_A - V_B) + (V_B - V_C) = R\,i(t) + \frac{q(t)}{C}$$

Avec la relation entre la charge et l'intensité :

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt}$$

Nous obtenons donc l'équation différentielle suivante :

$$\frac{dq(t)}{dt} + \frac{q(t)}{RC} = \frac{V_0}{R} \qquad (28)$$

Toute solution de cette équation différentielle du premier ordre peut s'écrire comme la superposition d'une solution particulière de l'équation complète et de la solution générale de l'équation sans second membre.

Comme la solution particulière de l'équation complète, nous pouvons considérer le régime stationnaire (indépendant de temps) :

$$\frac{dq(t)}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{q(t) = C V_0}$$

Résolvons l'équation différentielle sans second membre :

$$\frac{dq(t)}{dt} + \frac{q(t)}{RC} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dq(t)}{q(t)} = -\frac{dt}{RC}$$

$$\Leftrightarrow \quad q(t) = k\,e^{-t/RC} = k\,e^{-t/\tau}$$

Avec $\tau = RC$

La solution générale s'écrit donc :

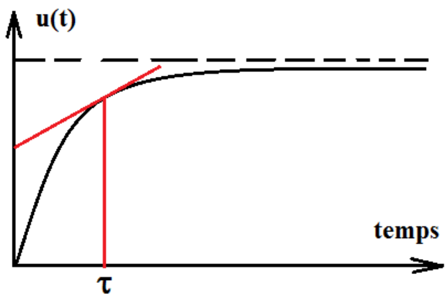
$$q(t) = CV_0 + k\;e^{-t/\tau} \qquad (29)$$

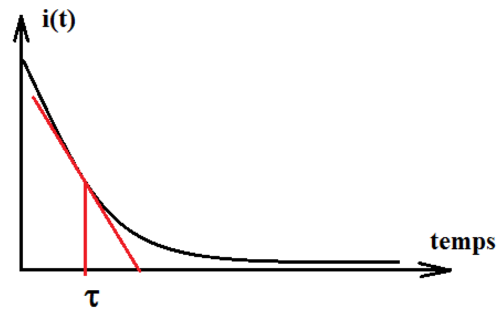
Cherchons la solution vérifiant les conditions initiales :

$$t=0 \quad \Rightarrow \quad q(t=0) = CV_0 + k = 0 \quad \Rightarrow \quad k = -CV_0$$

Nous avons donc :

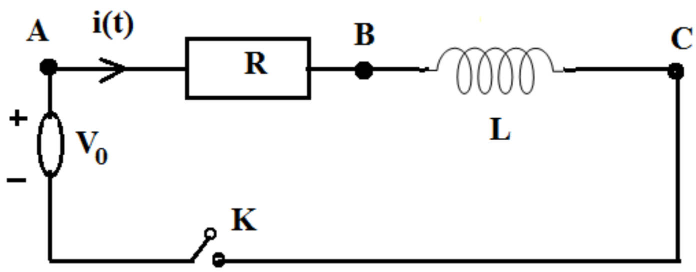
$$
\begin{cases}
q(t) = CV_0\left(1 - e^{-t/\tau}\right) \\
u(t) = V_0\left(1 - e^{-t/\tau}\right) \\
i(t) = \dfrac{V_0}{R} e^{-t/\tau}
\end{cases}
\tag{30}
$$





II.6 établissement d'un courant à travers une bobine

Considérons le circuit présenté sur la figure suivante :



Nous supposons qu'initialement l'interrupteur k est ouvert et qu'aucun courant ne circule : $i(t=0)=0$, à l'instant t=0, nous fermons l'interrupteur.

A $i \succ 0$, nous pouvons écrire :

$$V_0 = u_L^{(t)} + u_R^{(t)} \quad \Rightarrow \quad V_0 = L\frac{di(t)}{dt} + Ri(t)$$

Avec : $u_R^{(t)} = Ri(t)$ et $u_L^{(t)} = L\dfrac{di(t)}{dt}$

Ce qui nous donne l'équation différentielle suivante :

$$L\frac{di(t)}{dt} + Ri(t) = V_0 \tag{31}$$

Nous retrouvons une équation différentielle du premier ordre dont la solution générale de l'équation sans second membre s'écrit :

$$L\frac{di(t)}{dt}+Ri(t)=0 \quad \Leftrightarrow \quad i(t)=k\ e^{-t/\tau}$$

Avec $\tau=\dfrac{L}{R}$

Comme la solution particulière de l'équation complète, nous pouvons chercher le régime stationnaire, soit : $i=\dfrac{V_0}{R}$

Ce qui nous donne pour la solution complète :

$$i(t)=\frac{V_0}{R}+k\ e^{-t/\tau}$$

La constante k est définie par la condition initiale :

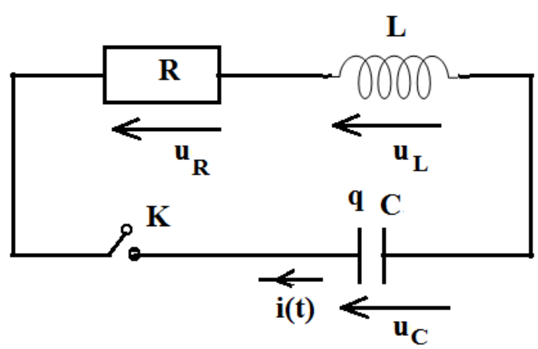
$$\boxed{k=-\frac{V_0}{R}}$$

Ce qui nous donne :

$$i(t)=\frac{V_0}{R}\left(1-e^{-t/\tau}\right) \qquad (32)$$

II.7 Décharge d'un condensateur à travers une bobine et une résistance

Nous considérons le circuit RLC suivant :



Nous supposons qu'initialement le condensateur est chargé et qu'il ne circule aucun courant (k est ouvert) : $q(t=0)=q_0$ et $i(t=0)=0$ avec notre choix d'orientation du sens positif pour le courant, nous avons :

$$u_C^{(t)}=u_R^{(t)}+u_L^{(t)} \quad \Rightarrow \quad \frac{q(t)}{C}=L\frac{di(t)}{dt}+Ri(t) \qquad ; \quad i(t)=-\frac{dq(t)}{dt}$$

Ce qui nous donne l'équation différentielle suivante :

$$LC\frac{d^2q(t)}{dt^2}+RC\frac{dq(t)}{dt}+q(t)=0$$

Il s'agit d'une équation différentielle linéaire du second ordre. Pour résoudre cette équation, il faut chercher les racines de l'équation caractéristique associée :

$$LC\ x^2 + RC\,x + 1 = 0$$

Cette équation a pour discriminant : $\Delta = R^2C^2 - 4LC$. La valeur de la résistance pour laquelle ce discriminant est nul est appelée résistance critique :

$R_C = 2\sqrt{\dfrac{L}{C}}$ lorsque $\Delta = 0$

Nous pouvons encore écrire le discriminant sous la forme :

$$\Delta = C^2\left(R^2 - 4\frac{L}{C}\right) = C^2\left(R^2 - R_C\right)$$

Les solutions de l'équation différentielle sont différentes selon le nombre et le type des racines de l'équation caractéristiques.

1[er] cas : $R = R_C$

L'équation caractéristique admet une racine double réelle :

$$x = -\frac{R_C}{2L} = -\frac{1}{\sqrt{LC}} = -\frac{1}{\tau} \qquad avec \qquad \tau = \sqrt{LC}$$

L'équation différentielle admet alors pour solution :

$$q(t) = (\mu + \lambda t)\,e^{xt}$$

Ce qui nous donne pour l'intensité :

$$i(t) = -\frac{dq(t)}{dt} = -(\lambda + \mu x + \lambda x t)\,e^{xt}$$

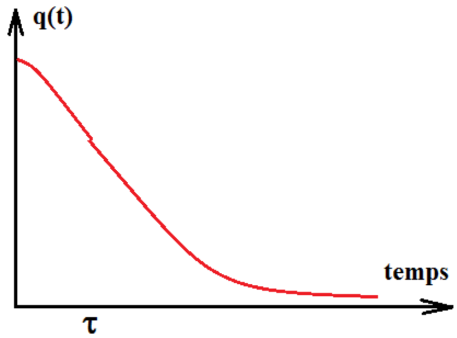
Les constantes λ et μ sont définies par les conditions initiales.

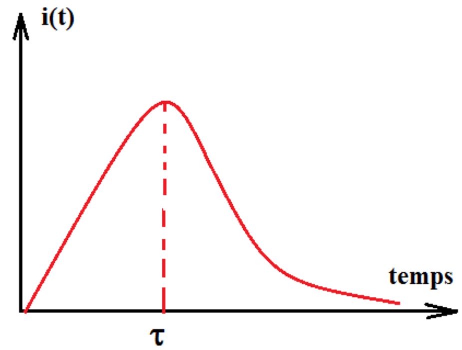
$$\begin{cases} q(t=0) = \mu = q_0 \\ i(t=0) = (\lambda + \mu x) = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad \lambda = -\mu x = \frac{q_0}{\sqrt{LC}}$$

Nous obtenons donc pour la solution globale :

$$\begin{cases} q(t) = q_0\left(1 + \dfrac{t}{\tau}\right)e^{-t/\tau} \\ i(t) = \dfrac{q_0}{\tau^2}\,t\,e^{-t/\tau} \end{cases} \qquad avec \quad \tau = \sqrt{LC} \qquad (33)$$

Représentation graphique :





Ces deux figures illustrent l'évolution temporelle de la charge du condensateur et de l'intensité au travers de la self. L'intensité est maximale lorsque $t = \tau$.

2$^{\text{ème}}$ cas : l'équation caractéristique a alors deux racines réelles distinctes : $R > R_C$

$$x_{1,2} = \frac{-R \pm \sqrt{R^2 - R_C^2}}{2L}$$

De meme signe car : $x_1.x_2 = \dfrac{1}{LC} \succ 0$, ces deux racines sont donc négatives. Nous notons leurs valeurs absolues :

$$\alpha_{\pm} = \frac{R \pm \sqrt{R^2 - R_C^2}}{2L}$$

Ce qui vérifie :

$$\alpha_+.\alpha_- = \frac{1}{LC} = \frac{1}{\tau^2}$$

Les solutions de l'équation différentielle se mettent alors sous la forme :

$$q(t) = \lambda_+ e^{-\alpha_+ t} + \lambda_- e^{-\alpha_- t}$$

Les coefficients λ_+ et λ_- sont définis par les conditions initiales :

$$\begin{cases} q(t=0) = \lambda_+ + \lambda_- = q_0 \\ i(t=0) = \lambda_+ \alpha_+ + \lambda_- \alpha_- = 0 \end{cases}$$

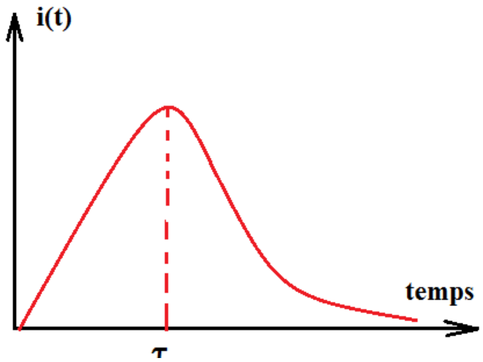
Ce qui nous donne :

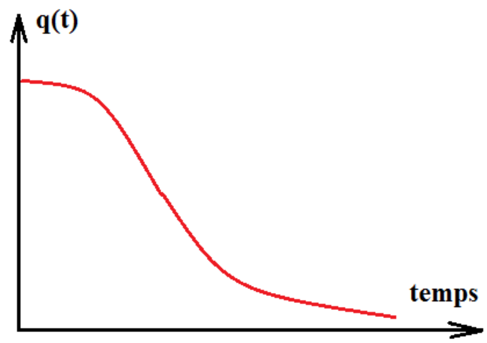
$$\boxed{\lambda_+ = \frac{\lambda_- q_0}{\lambda_+ + \lambda_-}} \text{ et } \boxed{\lambda_- = \frac{\lambda_+ q_0}{\lambda_+ + \lambda_-}}$$

Soit en reportant dans les expressions de la charge et de l'intensité :

$$\begin{cases} q(t) = \dfrac{q_0}{\alpha_+ + \alpha_-}\left(\alpha_+ \, e^{-\alpha_- t} - \alpha_- \, e^{-\alpha_+ t}\right) \\ i(t) = \dfrac{\alpha_+ \alpha_- q_0}{\alpha_+ + \alpha_-}\left(e^{-\alpha_- t} - \alpha_- \, e^{-\alpha_+ t}\right) \end{cases} \qquad (34)$$

Les représentations graphiques sont données par :





3

3ème cas : $R < R_C$

L'équation caractéristique admet deux racines complexes conjuguées :

$$x_{1,2} = \frac{-R \pm j\sqrt{R_C^2 - R^2}}{2L}$$

Notons α et ω les valeurs absolues des parties réelle et imaginaire de ces deux racines : $x_{1,2} = -\alpha \pm j\omega$ avec :

$$\begin{cases} \alpha = \dfrac{R}{2L} \quad ; \quad R_C = 2\sqrt{\dfrac{L}{C}} \\ \omega = \dfrac{\sqrt{R_C^2 - R^2}}{2L} = \sqrt{\dfrac{1}{LC} - \dfrac{R}{4L^2}} = \sqrt{\dfrac{1}{\tau^2} - \alpha^2} \end{cases}$$

La solution générale de l'équation différentielle s'écrit alors :

$$\begin{aligned} q(t) &= \lambda_+ \, e^{x_1 t} + \lambda_- \, e^{x_2 t} = \lambda_+ \, e^{-\alpha t} \, e^{j\omega t} + \lambda_- \, e^{-\alpha t} e^{-j\omega t} \\ &= A e^{-\alpha t} \cos(\omega t + \varphi) \end{aligned}$$

Ce qui nous donne pour l'intensité :

$$i(t) = A e^{-\alpha t}\left[\alpha \cos(\omega t + \varphi) + \omega \sin(\omega t + \varphi)\right]$$

Les constantes A et φ sont déterminées par les conditions initiales :

$$\begin{cases} q(t=0) = A\cos\varphi = q_0 \\ i(t=0) = A(\alpha\cos\varphi + \omega\sin\varphi) = 0 \end{cases}$$

Ce qui nous donne :

$$tg\,\varphi = \frac{-\alpha}{\omega} \text{ et } A = \frac{q_0}{\cos\varphi}$$

Soit en reportant les expressions de la charge q et du courant i :

$$\begin{cases} q(t) = \dfrac{q_0}{\cos\varphi} e^{-\alpha t} \cos(\omega t + \varphi) \\ i(t) = \dfrac{\omega q_0}{\cos^2\varphi} e^{-\alpha t} \sin \omega t \end{cases} \quad (35)$$

Si on traves les allures graphiques, on peut monter l'évolution temporelle de ces quantités. On observe des oscillations amorties.

Nous pouvons comparer les trois régimes de décharge que nous venons de rencontrer.

Chapitre III

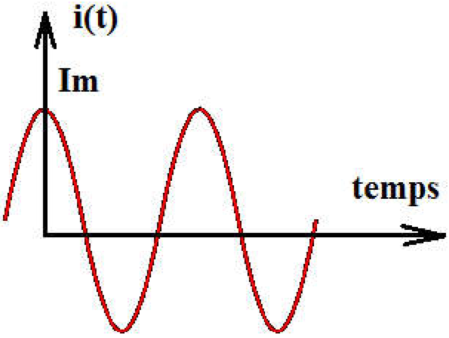
Réseaux électriques en courant alternatif sinusoïdal

III.1. Introduction

Dans ce chapitre, nous allons aborder l'étude des réseaux électriques en courant alternatif sinusoïdal. Ces réseaux sont en général composés d'un élément actif (générateur à courant alternatif sinusoïdal) et d'éléments passifs (Résistances, condensateurs et bobines).

III.2. Généralités sur le courant alternatif sinusoïdal.

Un courant électrique est dit alternatif sinusoïdal si l'intensité i de ce courant varie d'une façon sinusoïdal avec le temps



$$i = i(t) = I_{\max} \sin(\omega t + \varphi) \quad (36)$$

avec :

$I_{\max}$ et ω sont respectivement l'amplitude et la pulsation de i(t).

$(\omega t + \varphi)$ et φ sont respectivement la phase à l'instant t et la phase à l'origine (t=0) de i(t).

$T = \dfrac{2\pi}{\omega}$ et $f = \dfrac{1}{T}$ sont respectivement la période et la fréquence de i(t).

Remarque :

Dans le langage courant, on utilise l'appellation 'courant alternatif' pour désigner un courant alternatif sinusoïdal.

Puisque les fonctions sinus et cosinus s'obtiennent l'une de l'autre pas un simple changement de phase :

$$\sin(\omega t+\varphi)=\cos\left(\omega t+\varphi-\frac{\pi}{2}\right)=\cos(\omega t+\varphi')$$

L'intensité d'un courant alternatif sinusoïdal peut aussi s'exprimer par une fonction cosinus :

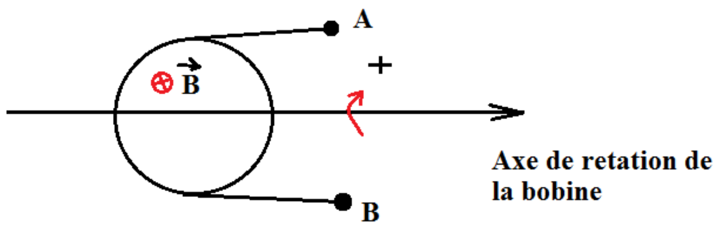
$$i=i(t)=I_{\max}\cos(\omega t+\varphi) \qquad (37)$$

III.3. Générateur à courant alternatif sinusoïdal :

Les générateurs à courant alternatif sinusoïdal sont des appareils qui permettent d'obtenir une différence de potentiel u (entre leurs bornes A et B) qui varie d'une façon sinusoïdale dans le temps :

$$V_A-V_B=u(t)=U_m\sin(\omega t+\varphi)$$

Ces générateurs sont en général composés d'une bobine qui tourne à une vitesse angulaire ω constante dans un champs magnétique uniforme $\vec{B}$.



La différence de potentiel (V_A-V_B) est égale à la force électromotrice d'induction :

$$V_A-V_B=e=-\frac{d\Phi}{dt} \qquad (37)$$

Où Φ est le flux de $\vec{B}$ à travers la bobine.

Or : $\Phi=N.\vec{B}\,S.\vec{n}=N.B.S.\cos(\omega t+\varphi)$

Où N est le nombre de spires de la bobine, S est la surface d'une spire, $\vec{n}$ est le vecteur unitaire perpendiculaire à S et φ l'angle entre $\vec{B}$ et $\vec{n}$ à l'instant t.

Donc :

$$u(t) = V_A - V_B = e = -\frac{d\Phi}{dt} = N.B.\omega.S.\sin(\omega t + \varphi)$$
$$= U_m \sin(\omega t + \varphi)$$

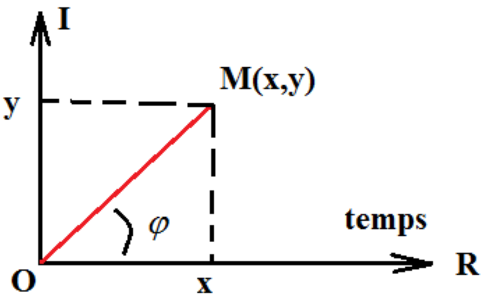
Ce qui donne :

$$u(t) = U_m \sin(\omega t + \varphi) \tag{38}$$

Remarque : Pour augmenter l'amplitude $U_{\max}$ de la tension sinusoïdale u(t), il faut augmenter N, S, B ou ω.

III.4. Représentations complexes

III.4.1 Rappels sur les nombres complexes



Un nombre complexe $\overline{Z}$ est caractérisé par sa partie réelle x et sa partie imaginaire y : $\overline{Z} = x + j\,y$ où j est le nombre complexe dont le carré est égale à -1.

Dans le plan complexe dont les axes sont les parties imaginaire (OI) et réelle (OR), le nombre complexe $\overline{Z}$ est représenté par un vecteur $\overrightarrow{OM}$, de composantes x et y faisant un angle φ par rapport à l'axe OR.

$\left|\overline{Z}\right| = Z = OM = \sqrt{x^2 + y^2}$ est le module du nombre complexe $\overline{Z}$.

$Arg\,\overline{Z} = \varphi = Arctg\left(\frac{y}{x}\right)$ est l'argument de nombre complexe $\overline{Z}$.

$$\overline{Z} = x + j\,y = Z\left(\cos\varphi + j\sin\varphi\right) = Z\,e^{j\varphi} \tag{39}$$

III.4.2 Représentation complexe

La représentation complexe d'une fonction sinusoïdale $a(t) = A_m \cos(\omega t + \varphi)$ consiste à associer à cette fonction la fonction complexe :

$$\overline{a}(t) = A_m \, e^{j(\omega t + \varphi)} \tag{40}$$

- $a(t)$ est la partie réelle de la fonction complexe associée $a(t) = \mathrm{Re}(\overline{a}(t))$
- L'amplitude A_m est le module de la fonction complexe associée $(A_m = |\overline{a}(t)|)$
- La phase à l'instant t est l'argument de la fonction complexe associée $(\omega t + \varphi) = Arg(\overline{a}(t))$

En courant alternatif sinusoïdal, les équations qui relient les grandeurs complexes dépendant du temps (tensions et courants complexes) sont des équations dans lesquelles le terme $e^{j\omega t}$ se trouve toujours en facteur dans les deux membres (de ces équations) et par conséquent il se simplifie. Pour ne pas laisser trainer ce facteur dans tous les passages de ces équations, on l'élimine dès le début en associant à toute grandeur sinusoïdale $a(t) = A_m \cos(\omega t + \varphi)$ la grandeur complexe simplifiée $\overline{A} = A_m \, e^{j\varphi}$

.

Remarque : Cette représentation permet de faciliter les calculs dans l'étude des réseaux en courant alternatif.

III.5. Valeur efficace

On appelle valeur efficace A d'une grandeur sinusoïdale a(t) (intensité ou tension) la racine carré de la valeur moyenne du carré de cette grandeur :

$$A^2 = \langle a^2(t) \rangle = \frac{1}{T} \int A_m^2 \cos^2(\omega t + \varphi) dt$$

$$= \frac{A_m^2}{2}$$

$$A = \frac{A_m}{\sqrt{2}} \tag{41}$$

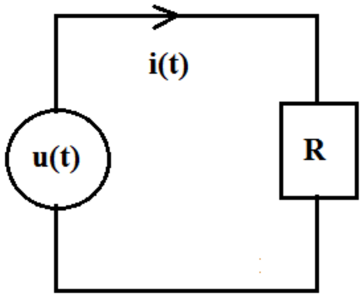
III.6. Les éléments passifs en courant alternatif

Lorsqu'on applique une tension alternative $u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi)$ aux bornes d'un élément passif, on constate qu'après un bref instant (régime transitoire) qu'il s'établit un courant alternatif (régime permanent) de même pulsation que u(t) : $i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi')$.

La différence de phase $(\varphi' - \varphi)$ est appelée déphasage de i(t) par rapport à u(t). si le déphasage $(\varphi' - \varphi)$ est nul, alors i(t) et u(t) sont dits en phase.

III.6.1. Cas d'une résistance pure

Si on applique une tension alternative $u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi)$ aux bornes d'une résistance pure R, elle sera parcourue par un courant alternatif d'intensité i(t).



D'après la loi d'Ohm, à un instant quelconque i(t) et u(t) sont reliés par : $u(t) = R\,i(t)$

Donc : $i(t) = \frac{u(t)}{R} = \frac{U_m}{R}\cos(\omega t + \varphi) = I_m \cos(\omega t + \varphi)$ avec $I_m = \frac{U_m}{R}$

Le courant i(t) est donc en phase avec la tension u(t).

En valeurs efficaces : $I_m = \frac{U_m}{R} \Rightarrow \quad I = \frac{U}{R} \Rightarrow \quad U = R\,I$.

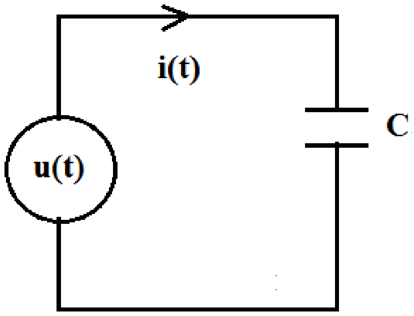
En notation complexe, si on associe à u(t) le complexe $\bar{u}\,(i)$ alors :

$$i(t)=\frac{u(t)}{R} \quad \Rightarrow \quad \bar{i}(t)=\frac{\bar{u}(t)}{R}=\frac{U_m}{R}e^{j(\omega t+\varphi)}=I_m e^{j(\omega t+\varphi)}$$

$$\overline{U}=R\,\overline{I} \qquad (42)$$

Cette dernière relation est analogue à la loi d'Ohm en courant continu.

III.6.2. Cas d'un condensateur idéal (capacité pure)



Si on applique une tension alternative $u(t)=U_m\cos(\omega t+\varphi)$ aux bornes d'un condensateur idéal de capacité pure, il sera parcourue par un courant alternatif d'intensité i(t) donnée par :

$$i(t)=\frac{dq}{dt}=C\frac{du(t)}{dt}=-C\,\omega U_m\sin(\omega t+\varphi)$$

$$i(t)=C\,\omega U_m\cos\left(\omega t+\varphi+\frac{\pi}{2}\right)$$

Soit :

$$i(t)=I_m\cos(\omega t+\varphi') \text{ avec } I_m=C\,\omega U_m \text{ et } \varphi'-\varphi=\frac{\pi}{2}$$

- Le courant i(t) est donc déphasé de $\frac{\pi}{2}$ (avance de phase) par rapport à la tension u(t).
- En valeurs efficace :

$$I_m=C\,\omega U_m \quad \Rightarrow \quad I=C\,\omega U \quad \Rightarrow \quad U=\frac{1}{C\,\omega}I$$

- En notation complexe, sin n associe à u(t) le complexe $\bar{u}(t)$alors :

$$i(t) = C\frac{du(t)}{dt} \quad \Rightarrow \quad \bar{i}(t) = C\frac{d\bar{u}(t)}{dt} = jC\omega U_m e^{j(\omega t+\varphi)} = jC\omega\bar{u}(t)$$

$$\Rightarrow \quad \bar{u}(t) = \frac{1}{jC\omega}\bar{i}(t) \quad \Rightarrow \quad \overline{U} = \overline{Z}_C \overline{I}$$

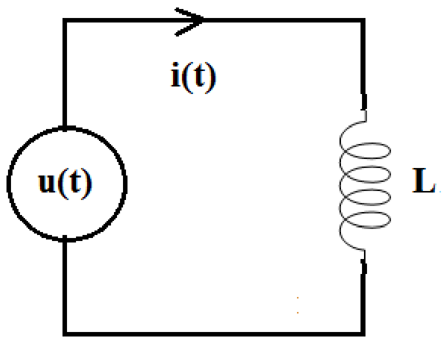
Avec $\overline{Z}_C = \dfrac{1}{jC\omega}$

$\overline{Z}_C$: L'impédance complexe associée à la capacité C. Cette relation est également analogue à la capacité C.

Remarque :

Un condensateur réel est équivalent à un condensateur idéal en parallèle avec une résistance R (qui représente la résistance de l'isolant situé entre les deux armatures) qui est très grande.

III.6.3. Cas d'une bobine idéale (inductance pure)



Si on applique une tension alternative $u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi)$ aux bornes d'une bobine idéale d'inductance L, elle sera parcourue par un courant alternatif d'intensité i(t) donnée par :

$$u(t) = C\frac{d\Phi}{dt} = \frac{d(L\,i(t))}{dt} = L\frac{di(t)}{dt}$$

$$\Rightarrow \quad i(t) = \frac{1}{L}\int u(t)dt = \frac{1}{L\,\omega}U_m \sin(\omega t + \varphi)$$

$$= \frac{1}{L\,\omega}U_m \cos\left(\omega t + \varphi - \frac{\pi}{2}\right)$$

Soit $i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi')$ avec $I_m = \frac{1}{L\,\omega}U_m$ et $\varphi' - \varphi = -\frac{\pi}{2}$

Le courant i(t) est donc déphasé de $-\frac{\pi}{2}$ (retard de phase) par rapport à la tension u(t).

En valeurs efficaces : $I_m = \frac{1}{L\,\omega}U_m \quad \Rightarrow \quad I = \frac{1}{L\,\omega}U$

$$U = L\,\omega I \tag{43}$$

En notation complexe, si on associe à u(t) le complexe $\bar{u}(t)$ alors :

$$i(t) = \frac{1}{L}\int u(t)dt \quad \Rightarrow \quad \bar{i}(t) = \frac{1}{L}\int \bar{u}(t)dt = \frac{1}{jL\,\omega}U_m e^{j(\omega t + \varphi)}$$

$$= \frac{1}{jL\,\omega}\bar{u}(t)$$

$\bar{u}(t) = jL\,\omega \bar{i}(t) = \bar{Z}_L\,\bar{i}(t)$

Finalement :

$$\bar{u}(t) = \bar{Z}_L\,\bar{i}(t) \tag{44}$$

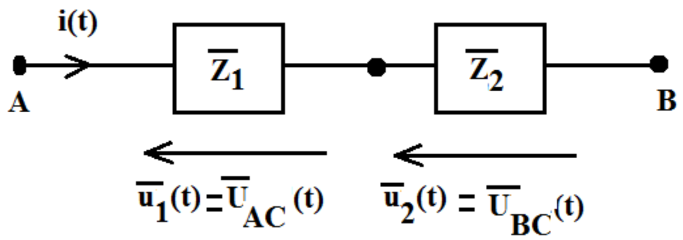
Avec $\bar{Z}_L = jL\,\omega$ est l'impédance complexe associée à l'inductance L. cette dernière relation est aussi analogue à la loi d'Ohm.

Remarque :

Une bobine réelle est équivalente à une bobine idéale en série avec une résistance r (qui représente la résistance du fil constituant la bobine) qui est très faible.

III.6.4. Association d'éléments passifs

III.6.4.1 Association en série :



Considérons deux fils passifs quelconques, caractérisés par leurs impédances complexes $\overline{Z}_1$ et $\overline{Z}_2$ branchés en série entre deux points A et B. la différence de potentiel u(t) entre A et B s'exprime par :

$$u(t) = V_A - V_B = (V_A - V_C) + (V_C - V_B) = u_1(t) + u_2(t)$$

Si on utilise la représentation complexe, on peut donc écrire :

$$\overline{u}(t) = \overline{u}_1(t) + \overline{u}_2(t) = \overline{Z}_1\,\overline{i}(t) + \overline{Z}_2\,\overline{i}(t) = \left(\overline{Z}_1 + \overline{Z}_2\right)\overline{i}(t) = \overline{Z}\,\overline{i}(t)$$

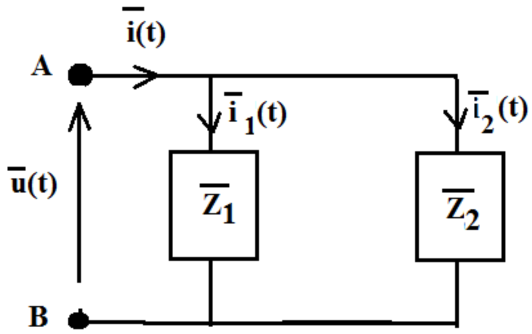
D'où $\overline{Z} = \overline{Z}_1 + \overline{Z}_2$ est l'impédance complexe de l'élément passif équivalent aux deux éléments d'impédances complexes $\overline{Z}_1$ et $\overline{Z}_2$ branchés en série.

L'impédance complexe $\overline{Z}$ de l'élément passif équivalent à l'association de N éléments passifs d'impédances complexes $\overline{Z}_1$, $\overline{Z}_2$, $\overline{Z}_3 \ldots$ $\overline{Z}_N$, branchés en série est la somme de ces impédances :

$$\overline{Z} = \overline{Z}_1 + \overline{Z}_2 + \ldots + \overline{Z}_N = \sum_{i=1}^{N} \overline{Z}_i \qquad (45)$$

III.6.4.2. Association en parallèle :

Considérons deux fils passifs quelconques, caractérisés par leurs impédances complexes $\overline{Z}_1$ et $\overline{Z}_2$ branchés en parallèle entre deux points A et B.



D’après la loi des nœuds, à un instant t quelconque, l’intensité du courant i(t) est :

$$i(t) = i_1(t) + i_2(t) \quad \Rightarrow \quad \bar{i}(t) = \bar{i}_1(t) + \bar{i}_2(t)$$

d’autre part :

$$\bar{u}(t) = \bar{Z}_1\,\bar{i}_1(t) = \bar{Z}_2\,\bar{i}_2(t) \quad \Rightarrow \quad \bar{i}_1(t) = \frac{\bar{u}(t)}{\bar{Z}_1} \text{ et } \bar{i}_2(t) = \frac{\bar{u}(t)}{\bar{Z}_2}$$

D’où :

$$\bar{i}(t) = \bar{i}_1(t) + \bar{i}_2(t) = \frac{\bar{u}(t)}{\bar{Z}_1} + \frac{\bar{u}(t)}{\bar{Z}_2} = \bar{u}(t)\left(\frac{1}{\bar{Z}_1} + \frac{1}{\bar{Z}_2}\right)$$

Or si $\bar{Z}$ est l’impédance complexe de l’élément passif équivalent à l’association considérée alors :

$$\boxed{\bar{i}(t) = \frac{\bar{u}(t)}{\bar{Z}}}$$

Donc :

$$\frac{1}{\bar{Z}} = \frac{1}{\bar{Z}_1} + \frac{1}{\bar{Z}_2} \tag{46}$$

L’impédance complexe $\bar{Z}$ de l’élément passif équivalent à l’association de N éléments passifs, d’impédances complexes $\bar{Z}_1$, $\bar{Z}_2$, $\bar{Z}_3 \ldots$ $\bar{Z}_N$, branchés en parallèle est telle que :

$$\frac{1}{\bar{Z}} = \frac{1}{\bar{Z}_1} + \frac{1}{\bar{Z}_2} + \ldots + \frac{1}{\bar{Z}_N} = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{\bar{Z}_i} \tag{47}$$

Remarque :

On appelle admittance complexe $\overline{Y}$ l'inverse de l'impédance complexe $\overline{Z}$. Donc pour des éléments passifs branchés en parallèle, l'admittance complexe de l'élément passif équivalent est la somme des admittances de chaque élément de l'association considérée :

$$\overline{Y} = \sum_{i=1}^{N} Y_i \tag{48}$$

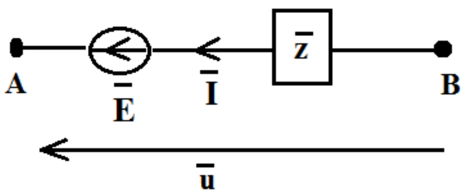
III.7. Les réseaux électriques en courant alternatif

En courant alternatif, les mots réseau, maille, branche et nœud gardent les mêmes définitions qu'en courant continu. Puisqu'en représentation complexe, les éléments passifs en courant alternatif se comportent comme des résistances en courant continu, l'étude des réseaux en courant alternatif est régie par les mêmes lois que celles utilisées en courant continu à condition de considérer les grandeurs complexes.

III.7.1. Générateur en courant alternatif

III.7.1.1. Générateur de tension

Un générateur de tension en courant alternatif est caractérisé par sa f.e.m sinusoïdale e(t) et son impédance interne (appelée également impédance de sortie) $\overline{Z}$ en série.

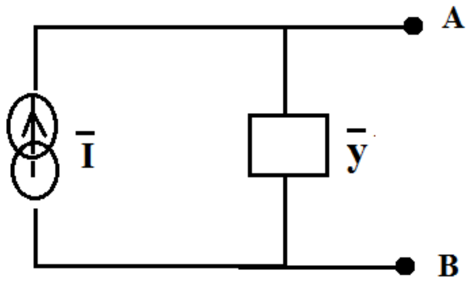


En notation complexe, la tension $\overline{U}$ entre ses bornes et donnée par :

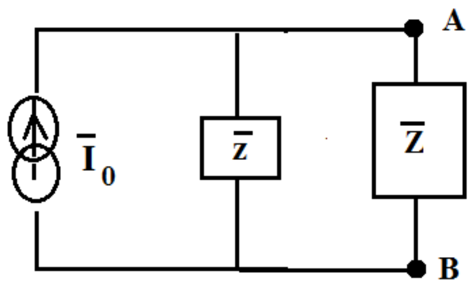
$$\overline{U} = \overline{E} - \overline{Z}\,\overline{I} \tag{49}$$

Si $\overline{Z} = 0$, $\overline{U} = \overline{E}$ quelque soit l'impédance de l'élément branché entre A et B : le générateur de tension est dit idéal.

III.7.1.2. Générateur de courant



Un générateur de courant alternatif est caractérisé par son courant de court-circuit $i_0(t)$ et son admittance interne $\bar{y}$ en parallèle. Soit $\bar{I}_0$ et $\bar{y}$ en notation complexe.



Si on branche entre les bornes A et B du générateur un élément d'impédance complexe $\bar{Z}$, le courant $\bar{I}$ dans cet élément est donné par :

$$\bar{I} = \bar{I}_0 \frac{\bar{z}}{\bar{Z} + \bar{z}} \tag{50}$$

(D'après la règle de diviseur de courant)

Si $\bar{y} = 0$ (c à d $\bar{z} \to \infty$) alors $\bar{I} = \bar{I}_0$ et par suite $i(t) = i_0(t)$ quelque soit l'impédance de l'élément branché entre A et B : le générateur de courant est dit idéal.

III.7.1.3. Equivalence générateur de tension-générateur de courant

Un générateur de tension ($\bar{E}, \bar{z}$) est équivalent à un générateur de courant ($\bar{I}_0, \bar{Z}$) dont le courant de court-circuit $\bar{I}_0$ est donné par : $\bar{I}_0 = \dfrac{\bar{E}}{\bar{z}}$. En effet, si on branche une impédance $\bar{Z}$ sur chacun, des deux générateurs, elle sera parcourue par le même courant complexe $\bar{I}$ donné par :

$$\bar{I} = \frac{\bar{E}}{\bar{Z} + \bar{z}} = \frac{\bar{I}_0 \, \bar{z}}{\bar{Z} + \bar{z}}$$

Ce qui donne :

$$\bar{I}_0 = \frac{\bar{E}}{\bar{z}} \tag{51}$$

III.7.1.4 Lois de Kirchhoff en courant alternatif

Les lois de Kirchhoff en courant continu restent valables en courant alternatif pour les valeurs instantanées et les grandeurs complexes.

III.7.1.4.1. Loi des nœuds

A un instant t quelconque, la somme algébrique des intensités des courants en un nœud d'un réseau est nulle : $\sum_{n}^{N} \varepsilon_n \, i_n(t) = 0$ avec $\varepsilon_n = 1$ si le courant arrive au nœud et $\varepsilon_n = 0$ si le courant part du nœud.

En représentation complexe :

$$\sum_{n} \varepsilon_n \, i_n(t) = 0 \Rightarrow \sum_{n} \varepsilon_n \, \bar{i}_n(t) = 0 \tag{52}$$

III.7.1.4.2. Loi des mailles

A un instant t quelconque, la somme algébrique des tensions aux bornes des différents éléments d'une maille du réseau est nulle :

$$\sum_{n} \varepsilon_n \, u_n(t) = 0 \tag{53}$$

Avec $\varepsilon_n = 1$ si le sens de parcours de la maille est le même que le sens d'orientation de la tension et $\varepsilon_n = -1$ si le sens de parcours de la maille est le sens contraire du sens d'orientation de la tension.

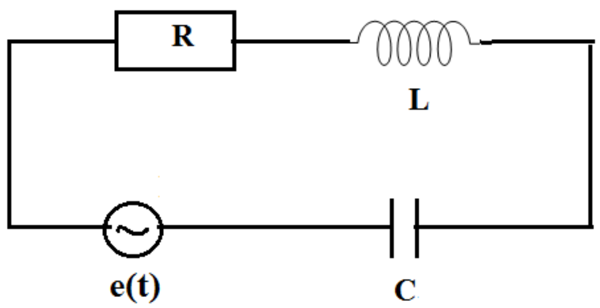
En représentation complexe :

$$\sum_n \varepsilon_n u_n(t) = 0 \Rightarrow \sum_n \varepsilon_n \overline{u}_n = 0 \qquad (54)$$

Remarque :

Les théorèmes de superposition, de Thevenin et de Norton en courant continu restent valables en courant alternatif.

III.8. Exemple : Circuit RLC série



Considérons l'exemple d'un circuit composé d'une résistance, une capacité pure et une inductance pure branchées en série aux bornes d'un générateur de tension sinusoïdale $e(t) = E_n \cos(\omega t)$

IV.1 Etude en représentation trigonométrique :

$$e(t) = R\,i(t) + L\frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C}\int i(t)dt$$

Avec $i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi)$ en régime permanent :

Soit

$$E_m \cos(\omega t) = R\,I_m \cos(\omega t + \varphi) - L\omega I_m \sin(\omega t + \varphi) + \frac{I_m}{C\omega}\sin(\omega t + \varphi)$$

$$= R\,I_m \cos(\omega t + \varphi) + \left(\frac{1}{C\omega} - L\omega\right) I_m \sin(\omega t + \varphi) \quad \forall\, t$$

En particulier pour $t = 0$ et $t = \frac{\pi}{2\omega}$, on obtient donc :

$$E_m = R I_m \cos\varphi + \left(\frac{1}{C\omega} - L\omega\right) I_m \sin\varphi \qquad (1)$$

et :

$$0 = -R I_m \sin\varphi + \left(\frac{1}{C\omega} - L\omega\right) I_m \cos\varphi \qquad (2)$$

$(1)\times\sin\varphi + (2)\times\cos\varphi \quad \Rightarrow \quad E_m \sin\varphi = \dfrac{1 - LC\omega^2}{C\omega} I_m$

$$\boxed{\sin\varphi = \frac{1 - LC\omega^2}{C\omega E_m} I_m}$$

$(1)\times\cos\varphi - (2)\times\sin\varphi \quad \Rightarrow \quad E_m \cos\varphi = R I_m$

$$\boxed{\cos\varphi = R\frac{I_m}{E_m}}$$

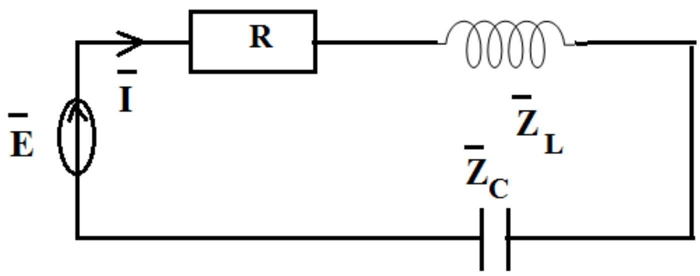
D'où :

$$tg\varphi = \frac{1 - LC\omega^2}{RC\omega} \qquad \text{et} \qquad I_m = \frac{E_m}{R\cos\varphi + \dfrac{1 - LC\omega^2}{C\omega}\sin\varphi}$$

$$I_m = \frac{E_m}{R^2\dfrac{I_m}{E_m} + \left(\dfrac{1 - LC\omega^2}{C\omega}\right)^2 \dfrac{I_m}{E_m}}$$

$$\boxed{I_m = \frac{E_m}{\sqrt{R^2 + \left(\dfrac{1 - LC\omega^2}{C\omega}\right)^2}}} \qquad (55)$$

III.9. Etude en représentation complexe



$$E_m = \overline{E}_m = \left(R + jL\omega - \frac{j}{C\omega} \right) \overline{I} = \overline{Z}\,\overline{I} \quad \Rightarrow \quad \overline{I} = \frac{\overline{E}}{\overline{Z}}$$

Donc :

$i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi)$

Avec

$$I_m = |I| = \frac{|\overline{E}|}{|\overline{Z}|} = \frac{E_m}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{j}{C\omega} \right)^2}}$$

et

$$\varphi = Arg(\overline{I}) = Arg(\overline{E}) - Arg(\overline{Z}) = 0 - Arctg\left(\frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R} \right)$$

$$= Arctg\left(\frac{1 - LC\omega^2}{RC\omega} \right)$$

Ce qui donne :

$$\varphi = Arctg\left(\frac{1 - LC\omega^2}{RC\omega} \right) \tag{56}$$

On obtient donc le même résultat que celui obtenu à l'aide de la représentation trigonométrique.

Remarque :

- La représentation complexe permet de déduire i(t) plus rapidement que la représentation trigonométrique.
- Nous avons déterminé i(t) en régime permanent. Pour déterminer l'expression de i(t) en régime transitoire, il faut résoudre l'équation différentielle.

III.10. Les puissances électriques en courant alternatif

III.10.1. Puissance instantanée

Dans une branche AB parcourue par un courant électrique d'intensité i(t), la puissance électrique P(t), à l'instant t est donnée par :

$$P(t) = u(t).i(t) \quad \varphi = Arctg\left(\frac{1 - LC\omega^2}{RC\omega}\right) \qquad (57)$$

Où u(t) est la d.d.p entre A et B. $P(t)$ est appelée puissance instantanée.

Cette puissance n'est accessible à la mesure à cause du temps de réponse des appareils de mesure qui est généralement très supérieur à la période t.

III.10.2 Puissance active

On appelle puissance active la valeur moyenne de la puissance instantanée $P(t)$. Soit :

$$P_a = \frac{1}{T}\int_0^T u(t).i(t)dt = \frac{1}{T}\int_0^T U_m \cos(\omega t) I_m \cos(\omega t + \varphi)dt$$

$$= \frac{U_m I_m}{2T}\int_0^T (\cos\varphi + \cos(2\omega t + \varphi))dt = \frac{U_m I_m T}{2T}\cos\varphi = \frac{U_m I_m}{2}\cos\varphi$$

➔ $\frac{U_m}{\sqrt{2}}.\frac{I_m}{\sqrt{2}}\cos\varphi = U.I\cos\varphi$

$$P_a = U.I\cos\varphi \qquad (58)$$

Le produit $U.I$ est appelé puissance apparente et le rapport $\frac{P_a}{U.I} = \cos\varphi$ est appelé facteur de puissance.

Si $\overline{Z} = R + jX$ est l'impédance complexe de la branche AB considérée, alors :

$U_m = |\overline{Z}|I_m$ et $\cos\varphi = \frac{R}{|\overline{Z}|}$. D'où $P_a = |\overline{Z}|\frac{I_m^2}{2}\frac{R}{|\overline{Z}|} = R\frac{I_m^2}{2} = R\,I^2$

$$P_a = R\,I^2 \qquad (59)$$

Remarque :

Cette dernière expression de Pa qui n'est autre que la puissance dissipée par effet joule dans une résistance R, est à l'origine de la définition de la valeur efficace. En effet, la valeur efficace d'un courant (ou d'une tension) sinusoïdale est la valeur du courant (ou de la tension) continu qui demeurait la même puissance, que la puissance active dissipée par effet joule aux bornes de R. soit :

$$R\,I^2 = P_a = \frac{R\,I_m^2}{2}$$

$$\boxed{I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}}$$

III.10.3 Adaptation d'impédances

Considérons un élément passif (ou une association d'éléments passifs) d'impédance complexe $\overline{Z} = R + jX$ alimenté par un générateur de tension sinusoïdale de f.e.m e(t) et d'impédance interne $\overline{z} = r + jx$. La puissance P_a dissipée dans la branche AB d'impédance $\overline{Z}$ s'exprime par :

$$\boxed{P_a = R\,I^2 = R\frac{E^2}{(R+r)^2 + (X+x)^2}} \qquad (60)$$

Pour un générateur d'impédance interne $\overline{z}$ donnée, la puissance active P_a est maximale si $\frac{\partial P_a}{\partial R} = 0$ et $\frac{\partial P_a}{\partial X} = 0$. Soit :

$$\frac{\partial P_a}{\partial R} = \frac{E^2\left((R+r)^2 + (X+x)\right)^2 - 2R(R+r)E^2}{\left((R+r)^2 + (X+x)^2\right)^2} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{(R+r)^2 + (X+x)^2 - 2R(R+r)}{\left((R+r)^2 + (X+x)^2\right)^2} = 0$$

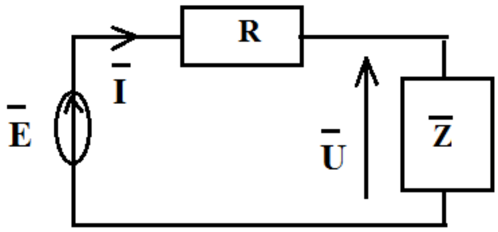
$$\frac{\partial P_a}{\partial X} = \frac{-2(X+x)}{\left((R+r)^2 + (X+x)^2\right)^2} = 0$$

Ou encore $X = -x$ et $R = -r$ $\quad \boxed{\overline{Z} = \overline{z}}$

Dans ces conditions, on dit que l'impédance de l'élément passif (ou de l'association d'éléments passifs) est adaptée à celle du générateur.

III.10.4. Coefficients de perte

Considérons une ligne de distribution électrique, de résistance R, reliant le fournisseur d'électricité (générateur de tension alternative) au consommateur (récepteur d'impédance complexe $\overline{Z}$).



On appelle coefficient de perte k le rapport des puissances P_J dissipée par effet joule dans la ligne de distribution et P_C consommée par l'utilisateur (récepteur).

$$k = \frac{P_J}{P_C} = \frac{R.I^2}{U.I\cos\varphi} \tag{61}$$

Plus ce coefficient est grand plus on perd de l'énergie.

Pour une puissance consommée donnée (P_C fixée), le coefficient de perte peut être réduit par l'une des trois considérations suivantes :

- Diminution de la résistance R de la ligne de distribution en utilisant un très bon conducteur (un supraconducteur si c'est possible).
- Augmentation de la tension U en augmentant la tension du générateur de tension (passage de 110V à 220V pour les générateurs de basse tension et transportant de l'énergie électrique an haute tension 5000V ou 8000V pour les grandes distances.
- Augmentation de $\cos\varphi$ (de façon à l'approcher de 1), ce qui revient à améliorer le facteur de puissance en branchant une capacité en série ou en parallèle avec $\overline{Z}$ qui permet d'obtenir $\cos\varphi = 1$

III.10.5. Puissance réactive

On appelle puissance réactive dans une branche AB la puissance P_r définie par $P_r = U.I \sin\varphi$ où φ est le déphasage de u(t) par rapport à i(t).

Si la puissance de u(t) est prise comme origine des phases, alors :

$u(t) = U_m \cos(\omega t)$ et $i(t) = I_m \cos(\omega t - \varphi)$. Si $\overline{Z} = R + jX$ est l'impédance complexe de la branche AB considérée, alors :

$$U_m = |\overline{Z}| I_m \text{ et } \sin\varphi = \frac{X}{|\overline{Z}|}.$$

D'où :

$$P_r = |\overline{Z}| \frac{I_m^2}{2}\left(\frac{X}{|\overline{Z}|}\right) = X\frac{I_m^2}{2} = X\,I^2$$

La partie imaginaire X de $(\overline{Z})$ est appelée réactance de la branche AB.

III.10.6. Puissance complexe

On appelle la puissance complexe $\overline{P}$ le complexe dont la partie réelle est P_a et la partie imaginaire est P_r :

$$\overline{P} = P_a + j\,P_r \tag{62}$$

Soit :

$$\begin{aligned}\overline{P} = U.I\cos\varphi + U.I\,j\sin\varphi = U.I\,e^{j\varphi} &= \frac{U_m.I_m}{2}e^{j\varphi}\\ &= \frac{\overline{U}.\overline{I}^*}{2}\end{aligned}$$

Où $\overline{I}^*$ est le complexe conjugué de $\overline{I}$

Pour une résistance pure : $\overline{U} = R.\overline{I} \quad \Rightarrow \quad \overline{P} = \frac{R.I\,I^*}{2} = R\frac{.I_m^2}{2} = R\,I^2 = P_a$

Pour une inductance pure : $\overline{U} = j\,L\omega\overline{I} \quad \Rightarrow \quad \overline{P} = j\,L\omega\frac{.I_m^2}{2} = j\,L\omega I^2 = jP_r$

Pour une capacité pure : $\overline{U} = \frac{-j}{C\omega}\overline{I} \quad \Rightarrow \quad \overline{P} = \frac{-j}{C\omega}\frac{I_m^2}{2} = \frac{-j}{C\omega}I^2 = jP_r$

Remarque :

P_a est toujours positive (c'est une vrai puissance) alors que P_r peur être aussi bien positive que négative (c'est une puissance fictive qui n'a pas de réalité physique).

III.11. Théorème de Boucherot

Considérons un circuit quelconque comportant N éléments passifs d'impédances complexes $\overline{Z}_1$, $\overline{Z}_2$, $\overline{Z}_3$… $\overline{Z}_N$.

Pour les impédances branchées en parallèle, le courant total $\bar{I}$ qui les traverse est $\bar{I} = \sum_j \bar{I}_j$ ($\bar{I}_j$ est le courant dans l'impédance $\overline{Z}_j$). Donc la puissance complexe $\overline{P}$ dans ces impédances est :

$$\overline{P} = \frac{1}{2}\overline{U}.\bar{I}^* = \frac{1}{2}\overline{U}\sum_j I_j^* = \frac{1}{2}\sum_j \overline{U}\,\bar{I}_j^* = \sum_j \overline{P}_j$$

$$\overline{P} = \sum_j \overline{P}_j \tag{63}$$

$\overline{P}_j$ est la puissance complexe dans l'impédance $\overline{Z}_j$.

De même, pour les impédances branchées en série, la tension complexe aux bornes de l'ensemble de ces impédances est : $\overline{U} = \sum_j \overline{U}_j$ ($\overline{U}_j$ étant la tension aux bornes de l'impédance $\overline{Z}_j$. Donc la puissance complexe $\overline{P}$ dans ces impédances est :

$$\overline{P} = \frac{1}{2}\overline{U}.\bar{I}^* = \frac{1}{2}\sum_i \overline{U}_i\,\bar{I}^* = \frac{1}{2}\sum_i U_i\,I^* = \sum_i \overline{P}_i$$

$\overline{P}_i$ est la puissance complexe dans l'impédance $\overline{Z}_i$.

La puissance complexe $\overline{P}$ pour l'ensemble des éléments du circuit est donc :

$$\overline{P} = \sum_i \overline{P}_i + \sum_j \overline{P}_j = \overline{P}_1 + \overline{P}_2 + \overline{P}_3 + \ldots + \overline{P}_N = \sum_{n=1}^{N} \overline{P}_n$$

$$= \sum_{n=1}^{N} \left(\overline{P}_{an} + j\overline{P}_{rn} \right) = \sum_{n=1}^{N} \overline{P}_{an} + j\sum_{n=1}^{N} \overline{P}_{rn} = \overline{P}_a + j\overline{P}_r$$

D'où :

$$\overline{P}_a = \sum_{n=1}^{N} \overline{P}_{an} \text{ et } \overline{P}_r = \sum_{n=1}^{N} \overline{P}_{rn} \qquad (64)$$

La puissance active dans l'ensemble des N éléments passifs est égale à la somme des puissances actives pour chacun de ces éléments et la puissance réactive est égale à la somme des puissances réactives. Ce résultat constitue le Théorème de Boucherot dont l'énoncé est le suivant :

Dans un circuit comportant plusieurs éléments passifs, la puissance active est égale à la somme des puissances actives dans chaque élément et la puissance réactive est égale à la somme des puissances réactives dans chaque élément.