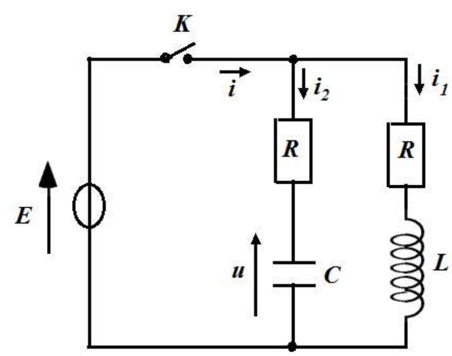
Année universitaire 2019-2020

Filières SMI-S4
TD Electromagnétisme dans le vide, série n°2, Corrections

Prof L. ELMAIMOUNI

Exercice 1

1. On suppose que le condensateur est déchargé. On ferme l'interrupteur K, Déterminons les intensités $i_1(t)$, $i_2(t)$ et $i(t)$.



Calcul de $i_1(t)$ **:**

D'après la loi des mailles, on peut écrire que :

$$E = Ri_1(t) + L\frac{di(t)}{dt} \Rightarrow \frac{di(t)}{dt} + \frac{R}{L}i_1(t) = \frac{E}{L},$$

comme $\tau = \dfrac{L}{R}$, donc :

$$\frac{di(t)}{dt} + \frac{i_1(t)}{\tau} = \frac{E}{L} \tag{1}$$

Il s'agit d'une équation différentielle de premier ordre :

- La solution générale de l'équation sans second membre SGESSM :

$$\frac{di(t)}{dt} + \frac{i_1(t)}{\tau} = 0 \Rightarrow i_1(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}} \tag{2}$$

- La solution particulière de l'équation avec second membre SPEASM

En régime permanent, $\dfrac{di(t)}{dt} = 0 \Rightarrow i_1(t) = \dfrac{\tau E}{L} = \dfrac{LE}{RL} = \dfrac{E}{R}$

- La solution totale est :

$$i_1(t) = \frac{E}{R} + Ae^{-\frac{t}{\tau}}$$

A l'instant t=0, $i_1(0) = 0$ ➔ $A = -\frac{E}{R}$

Il en résulte que :

$$\boxed{i_1(t) = \frac{E}{R}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)} \qquad (3)$$

Calcul de $i_2(t)$:

D'après le circuit, on :

$$E = Ri_2(t) + u \text{ avec } i_2(t) = C\frac{du(t)}{dt} \text{ ➔ } E = RC\frac{du(t)}{dt} + u$$

➔ $\frac{du(t)}{dt} + \frac{u}{\tau} = \frac{E}{\tau}$

Il s'agit d'une équation différentielle du premier ordre.

SGESSM :

$$\frac{du(t)}{dt} + \frac{u}{\tau} = 0 \text{ ➔ } u(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}}$$

SPEASM :

$$\frac{du(t)}{dt} + \frac{u}{\tau} = \frac{E}{\tau}$$

En régime permanent : $\frac{du(t)}{dt} = 0$ ➔ $u = E$

La solution totale est :

$$u(t) = E + Ae^{-\frac{t}{\tau}}$$

Calcul de la constante A :

A l'instant t=0, le condensateur ne contient aucune charge : A=-E ➔ $u(t) = E\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$

$i_2(t) = C\frac{du(t)}{dt}$ ➔ $i_2(t) = \frac{CE}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{CE}{RC}e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{E}{R}e^{-\frac{t}{\tau}}$

Finalement :

$$\boxed{i_2(t) = \frac{E}{R}e^{-\frac{t}{\tau}}} \qquad (4)$$

Calcul de $i(t)$:

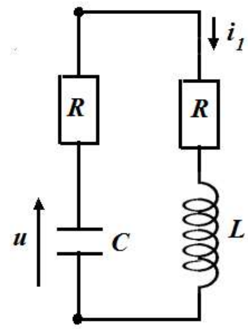
D'après la loi de Kirchhoff, $i(t) = i_1(t) + i_2(t)$ ➔ $\boxed{i(t) = \frac{E}{R}e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{E}{R}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) = \frac{E}{R}}$

D'où :

$$\boxed{i(t) = \frac{E}{R}} \qquad (5)$$

2. Le régime permanent est établi. On ouvre l'interrupteur K, déterminons $u(t)$.

Si l'interrupteur K est ouvert, le condensateur C se décharge dans la résistance 2R et la bobine. Le circuit devient :



La loi des mailles donne :

$$u(t) + 2Ri_1(t) + L\frac{di_1(t)}{dt} = 0$$

Comme $\begin{cases} i_1(t) = C\dfrac{du(t)}{dt} \\ \dfrac{di_1(t)}{dt} = C\dfrac{d^2u(t)}{dt^2} \end{cases}$ ➔ $LC\dfrac{d^2u(t)}{dt^2} + 2RC\dfrac{du(t)}{dt} + u(t) = 0$

➔ $\dfrac{d^2u(t)}{dt^2} + 2\dfrac{RC}{LC}\dfrac{du(t)}{dt} + \dfrac{1}{LC}u(t) = 0$ ➔ $\dfrac{d^2u(t)}{dt^2} + 2\dfrac{R}{L}\dfrac{du(t)}{dt} + \dfrac{R}{LRC}u(t) = 0$

Comme $\tau = RC = \dfrac{L}{R}$ donc :

$$\frac{d^2u(t)}{dt^2} + \frac{2}{\tau}\frac{du(t)}{dt} + \frac{1}{\tau^2}u(t) = 0 \qquad (6)$$

L'équation caractéristique de cette équation est donnée par :

$$r^2 + \frac{2}{\tau}r + \frac{1}{\tau^2} = 0 \qquad (7)$$

Calcul du discriminant Δ

$$\Delta = b^2 - 4ac = \left(\frac{2}{\tau}\right)^2 - 4\frac{1}{\tau^2} = 0$$

La solution de cette équation différentielle est donnée en régime critique par :

$$\boxed{u(t) = (At + B)e^{-\frac{t}{\tau}}} \qquad (8)$$

Déterminations des constantes d'intégration A et B à partir des conditions initiales.
On a :

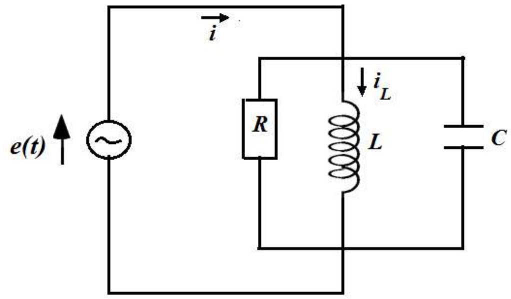
$$\begin{cases} u(t) = (At + B)e^{-\frac{t}{\tau}} \\ \dfrac{du(t)}{dt} = Ae^{-\frac{t}{\tau}} - \dfrac{1}{\tau}(At + B)e^{-\frac{t}{\tau}} \end{cases}$$

A l'instant t=0, $\begin{cases} u(0) = E \rightarrow u(0) = B \\ \dfrac{du(0)}{dt} = A - \dfrac{1}{\tau}B = -\dfrac{i_1(0)}{C} \end{cases}$ ➔ $\begin{cases} B = E \\ A - \dfrac{1}{\tau}B = -\dfrac{E}{CR} \end{cases}$ ➔ $\begin{cases} B = E \\ A = -\dfrac{E}{RC} + \dfrac{E}{CR} = 0 \end{cases}$

Finalement :

$$\boxed{u(t) = Ee^{-\frac{t}{\tau}}} \qquad (9)$$

3. Calculons l'admittance équivalente du circuit, puis déterminons le déphasage φ de i_L par rapport à i en fonction de R, L, C et la pulsation ω.



❖ **Admittance équivalente** :

En notation complexe l'admittance équivalente du groupement R, L et C en parallèle est donnée par :

$$\overline{Y}_{eq} = \overline{Y}_R + \overline{Y}_L + \overline{Y}_C = \frac{1}{R} + \frac{1}{jL\omega} + jC\omega = \frac{1}{R} + \frac{1 - LC\omega^2}{jL\omega} = \frac{R\left(1 - LC\omega^2\right) + jL\omega}{jRL\omega}$$

Finalement :

$$\overline{Y}_{eq} = \frac{R\left(1 - LC\omega^2\right) + jL\omega}{jRL\omega} \qquad (10)$$

En notation complexe, les relations courant-tension s'écrivent sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \bar{i}_L = \overline{Y}_L \bar{e} = \dfrac{1}{jL\omega}\bar{e} \\ \bar{i} = \overline{Y}_{eq}\,\bar{e} \end{cases} \Rightarrow \bar{i}_L = \frac{\overline{Y}_L}{\overline{Y}_{eq}}\bar{i} \Rightarrow \bar{i}_L = \frac{\dfrac{1}{jL\omega}}{\dfrac{R\left(1 - LC\omega^2\right) + jL\omega}{jRL\omega}}\bar{i}$$

Il en résulte:

$$\boxed{\bar{i}_L = \frac{1}{\left(1 - LC\omega^2\right) + \dfrac{jL\omega}{R}}\bar{i}} \qquad (11)$$

❖ **Déphasage** φ

$$\varphi = \arg\left(\frac{1}{\left(1 - LC\omega^2\right) + \dfrac{jL\omega}{R}}\right) = -\arg\left(\left(1 - LC\omega^2\right) + \frac{jL\omega}{R}\right)$$

Finalement:

$$\boxed{\varphi = -arctg\frac{L\omega}{R\left(1 - LC\omega^2\right)}} \qquad (12)$$

4. Un générateur de tension délivre entre ses bornes une tension sinusoïdale de fréquence f.

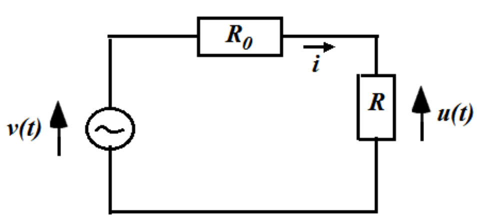


Fig 4.a

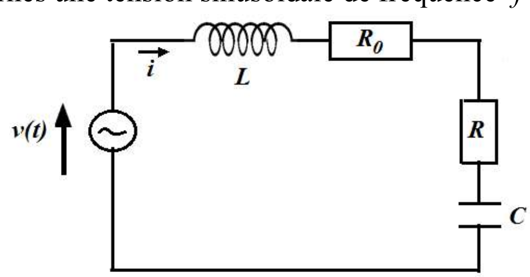


Fig 4.b

On supposera que l'amplitude v_0 est indépendante des circuits connectés aux bornes de ce générateur (Fig4.a). Si on suppose que R est une résistance pure variable :

4.1. Déterminons la puissance électrique moyenne P_R dissipée dans la résistance R (Fig.4).
$v(t)$ est tension sinusoïdale de fréquence f et d'amplitude v_0 s'écrit sous la forme :

$$v(t) = v_0 \cos(\omega t)$$

D'après la loi des mailles, on peut écrire :

$$v(t) = (R + R_0) i(t) \Rightarrow i(t) = \frac{v(t)}{R + R_0} = \frac{v_0}{R + R_0} \cos \omega t$$

Donc :

$$\boxed{i(t) = \frac{v_0}{R + R_0} \cos \omega t} \qquad (13)$$

Au niveau de la résistance R, nous avons un diviseur de tension, $u(t)$ est donnée par :

$$u(t) = \frac{R}{R + R_0} v(t) = \frac{R}{R + R_0} v_0 \cos(\omega t)$$

Donc :

$$\boxed{u(t) = \frac{R}{R + R_0} v_0 \cos(\omega t)} \qquad (14)$$

La puissance électrique moyenne P_R dissipée dans la résistance R est définie par :

$$P_R = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) i(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{v_0}{R + R_0} \cos \omega t . \frac{R}{R + R_0} v_0 \cos(\omega t) dt$$

$$= \frac{R(v_0)^2}{(R + R_0)^2} \frac{1}{T} \int_0^T \cos^2 \omega t . dt = \frac{R(v_0)^2}{(R + R_0)^2} \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1 - \cos 2\omega t}{2} . dt = \frac{R(v_0)^2}{(R + R_0)^2} \frac{1}{2}$$

Il en résulte :

$$P_R = \frac{v_0^2}{2} \frac{R}{(R + R_0)^2} \qquad (15)$$

4.2. Déterminons la valeur $R_{\max}$ de R pour laquelle P_R est maximale.

La puissance est maximale si est seulement si $\left(\frac{dP_R}{dR} \right)_{R_{\max}} = 0$

$$\Rightarrow \frac{dP_R}{dR} = \frac{v_0^2}{2} \frac{(R + R_0)^2 - 2R(R + R_0)}{(R + R_0)^4} = \frac{v_0^2}{2} \left[\frac{1}{(R + R_0)^2} - \frac{2R}{(R + R_0)^3} \right] = 0$$

Soit donc :

$$\frac{R_{\max} + R_0}{(R_{\max} + R_0)^2} - \frac{2R_{\max}}{(R_{\max} + R_0)^3} = 0 \Rightarrow R_{\max} + R_0 = 2R_{\max}$$

Finalement :

$$\boxed{R_{\max} = R_0} \qquad (16)$$

5. On connecte entre A et B le réseau représenté en figure 4.b dans lequel les éléments sont considérés comme pure.

5.1. Déterminons la puissance électrique moyenne P_R dissipée dans la résistance R en fonction de R, L, C et la fréquence f.

En régime sinusoïdale, la tension $v(t)$ et le courant $i(t)$ sont donnée par :

$$v(t) = v_0 \cos(\omega t) \text{ et } i(t) = i_0 \cos(\omega t - \varphi) \qquad (17)$$

Déterminons l'amplitude i_0 fonction de R, L, C et la fréquence f puis le déphasage en notation complexe :

D'après la figure 4.2, nous avons :

$$\overline{V} = \left[(R+R_0) + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)\right]\overline{I} = \overline{Z}\overline{i} \text{ avec } \overline{Z} = (R+R_0) + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)$$

Cette relation se traduit par :

$$v_0 = \sqrt{(R+R_0)^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}\; i_0 \qquad (18)$$

Avec $i_0 = (Z)^{-1} v_0$ et $z = \sqrt{(R+R_0)^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}$

- **Déphasage:**

$$\varphi = \arg \overline{Z} = arctg \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{(R+R_0)^2} \qquad (19)$$

La puissance électrique dans la résistance R est définie par : $P_R = u(t)i(t) = R\, i(t)^2$

La puissance électrique moyenne P_R dissipée dans la résistance R est définie par :

$$P_R = \frac{1}{T}\int_0^T u(t)i(t)dt \Rightarrow P_R = \frac{1}{2}Ri_0^2$$

Si on fait le calcul, on trouve :

$$P_R = \frac{1}{2}\frac{Rv_0^2}{(R+R_0)^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2} \text{ avec } \omega = 2\pi f \qquad (20)$$

5.2. A quelles conditions la puissance dissipée dans R est maximale ?

Pour $L\omega - \frac{1}{C\omega} = 0$, on trouve :

$$P_R = \frac{1}{2}\frac{Rv_0^2}{(R+R_0)^2} \qquad (21)$$

Cette puissance est maximale lorsque : $R_{\max} = R_0$

Exercice 2

a) En série, les impédances complexes s'ajoutent : $\overline{Z}' = R' + jL'\omega$

En parallèle, les admittances complexes s'ajoutent : $\overline{Y} = \frac{1}{R} + \frac{1}{jL\omega} = \frac{R + jL\omega}{jRL\omega}$

$$\overline{Z} = \frac{1}{\overline{Y}} = \frac{jRL\omega}{R + jL\omega} = \frac{jRL\omega(R - jL\omega)}{R^2 + (L\omega)^2}$$

Pour que les dipôles AB et A'B' soient équivalents, il faut et il suffit que :

$$\overline{Z} = \overline{Z}' \Rightarrow R' + jL'\omega = \frac{jRL\omega(R - jL\omega)}{R^2 + (L\omega)^2} = \frac{jR^2L\omega + R(L\omega)^2}{R^2 + (L\omega)^2}$$

donc : $\boxed{R'=\dfrac{R(L\omega)^2}{R^2+(L\omega)^2}}$, $\boxed{L'=\dfrac{R^2L}{R^2+(L\omega)^2}}$

b) La pulsation ω_0 pour laquelle on a : $\dfrac{R'}{R}=\dfrac{L'}{L}$.

$$\frac{R'}{R}=\frac{(L\omega)^2}{R^2+(L\omega)^2} \quad \text{et} \quad \frac{L'}{L}=\frac{R^2}{R^2+(L\omega)^2}$$

$\dfrac{R'}{R}=\dfrac{L'}{L}$ ➔ $L^2\omega_0^2=R^2$ donc $\boxed{\omega_{0}=\dfrac{R}{L}=\dfrac{R'}{L'}}$

c) Application numérique : R=100Ω et L=0.01H.

$$\boxed{\omega_{0}=10^4\,rad/s}$$

Exercice 3

1. Détermination de l'impédance complexe $\overline{Z}_{AB}$ entre A et B pour chaque Figure.

Pour la Figure 3, l'impédance complexe $\overline{Z}_{AB}$ entre la branche A et B est l'impédance équivalente à l'association des trois impédances R, $\dfrac{1}{jC\omega}$ et $jL\omega$ en parallèle.

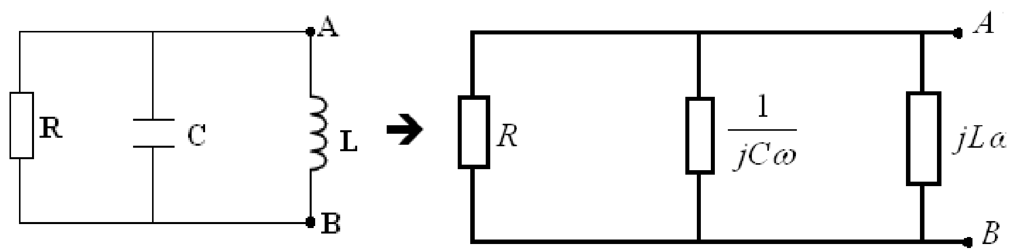


Figure 3

Donc :

$$\frac{1}{\overline{Z}_{AB}}=\frac{1}{R}+\frac{1}{jL\omega}+jC\omega=\frac{R+jL\omega-RLC\omega^2}{jRL\omega}$$

D'où :

$$\overline{Z}_{AB}=\frac{jRL\omega}{R+jL\omega-RLC\omega^2}=\frac{R(L\omega)^2+jR^2L\omega(1-LC\omega^2)}{R^2(1-LC\omega^2)^2+(L\omega)^2}$$

Pour la Figure 4, l'impédance complexe $\overline{Z}_{AB}$ entre la branche A et B est l'impédance équivalente à l'association de $jL\omega$ en série avec l'impédance équivalente $\overline{Z}_{CB}$ entre C et B.

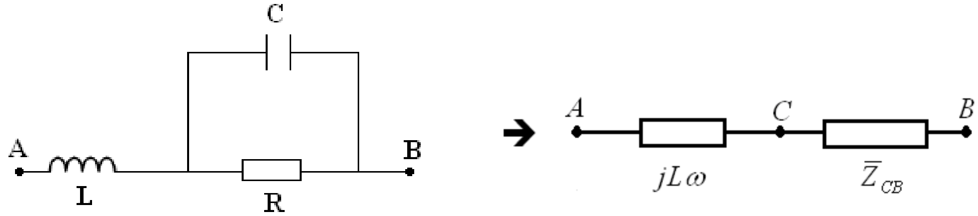


Figure 4

Or, $\overline{Z}_{CB}$ est l'impédance équivalente à l'association de R en parallèle avec $\dfrac{1}{jC\omega}$.

Donc :

$$\frac{1}{\overline{Z}_{CB}}=\frac{1}{R}+jC\omega=\frac{1+jRC\omega}{R} \Rightarrow \overline{Z}_{CB}=\frac{R}{1+jRC\omega}$$

et :

$$\overline{Z}_{AB}=jL\omega+\overline{Z}_{CB}=jL\omega+\frac{R}{1+jRC\omega}=\frac{R+j(L\omega+R^2LC^2\omega^3-R^2C\omega)}{1+(RC\omega)^2}$$

2. le module et l'argument de $\overline{Z}_{AB}$ pour chaque Figure.

<u>Pour la figure.3 :</u>

$$\left|\overline{Z}_{AB}\right|=\frac{\sqrt{\left(R(L\omega)^2\right)^2+\left(R^2L\omega(1-LC\omega^2)\right)^2}}{R^2(1-LC\omega^2)^2+(L\omega)^2}=\frac{RL\omega}{\sqrt{(L\omega)^2+R^2\left(1-LC\omega^2\right)^2}}$$

$$Arg\left(\overline{Z}_{AB}\right)=Arctg\frac{R^2L\omega(1-LC\omega^2)}{R(L\omega)^2}=Arctg\frac{R(1-LC\omega^2)}{L\omega}$$

<u>Pour la figure.4 :</u>

$$\left|\overline{Z}_{AB}\right|=\frac{\sqrt{R^2+(L\omega+R^2LC^2\omega^3-R^2C\omega)^2}}{1+(RC\omega)^2}$$

$$Arg(\overline{Z}_{AB})=Arctg\frac{L\omega+R^2LC^2\omega^3-R^2C\omega}{R}$$

3. Eléments passifs équivalents :

<u>Pour la figure.3 :</u>

La partie réelle $\mathrm{Re}\left(\overline{Z}_{AB}\right)$ de $\overline{Z}_{AB}$ est positive et la partie imaginaire $\mathrm{Im}\left(\overline{Z}_{AB}\right)$ est négative (car $1-LC\omega^2=-0.972$ est négatif). Donc $\overline{Z}_{AB}$ est l'impédance équivalente à une résistance R_1 (partie réelle de $\overline{Z}_{AB}$) en série avec un condensateur C_1 telle que : $\frac{-1}{C_1\omega}=\mathrm{Im}\left(\overline{Z}_{AB}\right)$

Soit :

$$\begin{cases} R_1=\mathrm{Re}\left(\overline{Z}_{AB}\right)=\dfrac{R(L\omega)^2}{(L\omega)^2+R^2\left(1-LC\omega^2\right)^2}\approx 0.01\Omega \\ C_1=-\dfrac{1}{\omega\,\mathrm{Im}\left(\overline{Z}_{AB}\right)}\approx 920\mu F \end{cases}$$

<u>Pour la figure.4 :</u>

La partie réelle $\mathrm{Re}\left(\overline{Z}_{AB}\right)$ de $\overline{Z}_{AB}$ est positive et la partie imaginaire $\mathrm{Im}\left(\overline{Z}_{AB}\right)$ est positive (car $L\omega+R^2LC^2\omega^3-R^2C\omega=1.17\,10^8$ est positif). Donc $\overline{Z}_{AB}$ est l'impédance équivalente à une résistance R_2 (partie réelle de $\overline{Z}_{AB}$) en série avec une bobine d'inductance L_2 telle que : $L_2\omega=\mathrm{Im}\left(\overline{Z}_{AB}\right)$.

Soit :

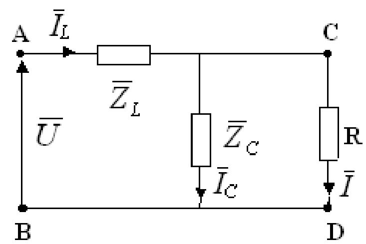
$$\begin{cases} R_2=\mathrm{Re}\left(\overline{Z}_{AB}\right)=\dfrac{R}{1+(RC\omega)^2}\approx 0.025\Omega \\ L_2=\dfrac{\mathrm{Im}\left(\overline{Z}_{AB}\right)}{\omega}\approx 49mH \end{cases}$$

Exercice 4

1) l'intensité du courant i(t) traversant la résistance R.
Nous avons plusieurs méthodes : lois de Kirchhoff, Théorème de Thevenin, de Norton et règles des ponts diviseurs de tension et de courant.

*Application des Lois de Kirchhoff :

$$\begin{cases} (1) \quad \bar{I}_L = \bar{I} + \bar{I}_C \\ (2) \quad \bar{U} = \bar{Z}_L \bar{I}_L + R\bar{I} \\ (3) \quad \bar{Z}_C \bar{I}_C = R\bar{I} \end{cases}$$

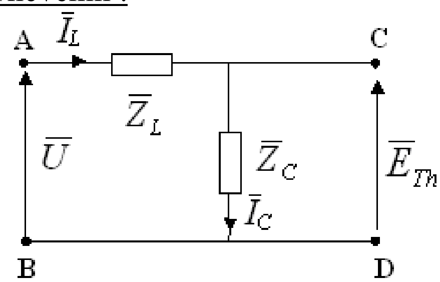


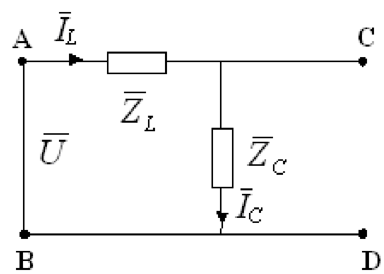
La résolution de ce système donne :

(3) ➔ $\boxed{\bar{I}_C = \frac{R}{\bar{Z}_C}\bar{I}}$, (3) dans (1) ➔ $\boxed{\bar{I}_L = \frac{\bar{Z}_C + R}{\bar{Z}_C}\bar{I}}$ (4).

(4) dans (2) ➔ $\bar{U} = (\bar{Z}_L \frac{\bar{Z}_C + R}{\bar{Z}_C} + R)\bar{I}$ ➔ $\boxed{\bar{I} = \frac{\bar{U}}{R + \bar{Z}_L + R\frac{\bar{Z}_L}{\bar{Z}_C}} =}$

*Application Thevenin :



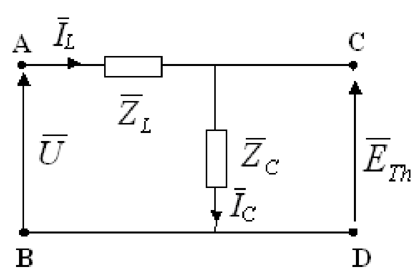


$\boxed{\bar{E}_{Th} = \bar{U}_{CD} = \frac{\bar{Z}_C}{\bar{Z}_C + \bar{Z}_L}\bar{U}}$ $\boxed{\bar{Z}_{Th} = \bar{Z}_{CD} = \bar{Z}_L // \bar{Z}_C = \frac{\bar{Z}_L \bar{Z}_C}{\bar{Z}_C + \bar{Z}_L}}$

$$\bar{I} = \frac{\bar{E}_{Th}}{\bar{Z}_{Th} + R} = \frac{\frac{\bar{Z}_C}{\bar{Z}_C + \bar{Z}_L}\bar{U}}{R + \frac{\bar{Z}_L \bar{Z}_C}{\bar{Z}_C + \bar{Z}_L}} \Rightarrow \boxed{\bar{I} = \frac{\bar{U}}{R + \bar{Z}_L + R\frac{\bar{Z}_L}{\bar{Z}_C}}}$$

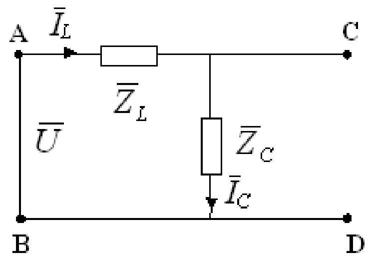
2.a) On supprime R. Calculons $\bar{E}$

$\boxed{\bar{E} = \bar{E}_{Th} = \frac{\bar{Z}_C}{\bar{Z}_C + \bar{Z}_L}\bar{U}}$

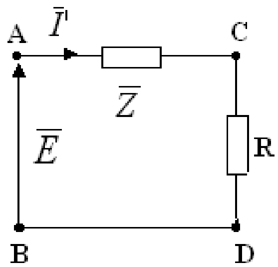


2.b) R étant supprimée, puis en relie les points A et B par un fil conducteur de résistance négligeable. Calculons $\bar{Z}$.

$$\boxed{\bar{Z} = \bar{Z}_{Th} = \bar{Z}_L // \bar{Z}_C = \frac{\bar{Z}_L \bar{Z}_C}{\bar{Z}_C + \bar{Z}_L}}$$



c) On reconstitue une maille formée de $\bar{Z}$, R et de $\bar{E}$. Calculons i'(t) ?



$$\begin{cases} \bar{I}' = \dfrac{\bar{E}}{\bar{Z} + R} \\ \bar{E}_{Th} = \bar{E} = \dfrac{\bar{Z}_C}{\bar{Z}_C + \bar{Z}_L}\bar{U} \\ \bar{Z}_{Th} = \bar{Z} = \dfrac{\bar{Z}_L \bar{Z}_C}{\bar{Z}_C + \bar{Z}_L} \end{cases} \Rightarrow \boxed{\bar{I}' = \frac{\bar{U}}{R + \bar{Z}_L + R\dfrac{\bar{Z}_L}{\bar{Z}_C}} = \bar{I}}$$

$i'(t) = I'_m \cos(\omega t + \varphi')$ avec : $I'_m = |\bar{I}| = \dfrac{U_0}{\sqrt{(L\omega)^2 + (R - RLC\omega^2)^2}}$,

$\varphi' = \arg(\bar{I}') = -arctg\left(\dfrac{L\omega}{R - RLC\omega^2}\right.$

d) $\bar{I}'_m = \bar{I}_m$ et $\varphi' = \varphi$ donc $\boxed{i'(t) = i(t) = I'_m \cos(\omega t + \varphi)}$

3) Les intensités des courants dans les autres branches :

<u>** Dans la bobine :*</u>

$\bar{I}_L = \dfrac{\bar{U}}{\bar{Z}_L + R // \bar{Z}_C}$; $\bar{Z}_L = jL\omega$ et $\bar{Z}_C = \dfrac{1}{jC\omega}$ donc $\boxed{\bar{I}_L = \dfrac{U_0(1 + jRC\omega)}{jL\omega + R(1 - LC\omega^2)}}$

$$\begin{cases} i_L(t) = I_{Lm}\cos(\omega t + \varphi_L) \\ I_{Lm} = |\bar{I}_L| = \dfrac{U_0\sqrt{(1 + (RC\omega)^2}}{\sqrt{(L\omega)^2 + R^2(1 - LC\omega^2)^2}} \\ \varphi_L = \arg(\bar{I}_L) = arctg(RC\omega) - arctg\left(\dfrac{L\omega}{R(1 - LC\omega^2)}\right) \end{cases}$$

<u>**Dans le condensateur :*</u>

$$\begin{cases} \bar{I}_C = \bar{I}_L - \bar{I} \\ \bar{I}_C = \dfrac{U_0(jRC\omega)}{jL\omega + R(1-LC\omega^2)} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} i_C(t) = I_{Cm}\cos(\omega t + \varphi_C) \\ I_{Cm} = \left|\bar{I}_C\right| = \dfrac{U_0(RC\omega)}{\sqrt{(L\omega)^2 + R^2(1-LC\omega^2)^2}} \\ \varphi_C = \arg(\bar{I}_C) = \dfrac{\pi}{2} - arctg(\dfrac{L\omega}{R(1-LC\omega^2)}) = arctg(\dfrac{R(1-LC\omega^2)}{L\omega}) \end{cases}$$

4) Puissances actives et réactives et réactives dans les différentes branches.

<u>** Dans la bobine :*</u>

$$P_a = 0 \text{ et } P_r = L\omega I_L^2 = \frac{1}{2}L\omega I_{Lm}^2$$

$$I_{Lm}^2 = \frac{U_0^2(1+RC\omega)^2}{(L\omega)^2 + R^2(1-LC\omega^2)^2} \quad \text{donc} \quad \boxed{P_r = \frac{1}{2}\frac{U_0^2 L\omega(1+RC\omega)^2}{(L\omega)^2 + R^2(1-LC\omega^2)^2}}$$

<u>**Dans le condensateur :*</u>

$$P_a = 0 \text{ et } P_r = -\frac{1}{C\omega}I_C^2 = \frac{1}{2}\frac{1}{C\omega}I_{Cm}^2$$

$$I_{Cm}^2 = \frac{U_0^2(RC\omega)^2}{(L\omega)^2 + R^2(1-LC\omega^2)^2} \quad \text{donc} \quad \boxed{P_r = -\frac{1}{2}\frac{U_0^2 R^2 C\omega}{(L\omega)^2 + R^2(1-LC\omega^2)^2}}$$

<u>**Dans la résistance :*</u>

$$P_a = RI^2 = \frac{1}{2}RI_m^2 \text{ et } P_r = 0$$

$$I_m^2 = \frac{U_0^2}{(L\omega)^2 + R^2(1-LC\omega^2)^2} \quad \text{donc} \quad \boxed{P_a = -\frac{1}{2}\frac{RU_0^2}{(L\omega)^2 + R^2(1-LC\omega^2)^2}}$$

<u>*Bilan des puissances :*</u>

$$\bar{P} = P_a + jP_r = \frac{1}{2}\bar{U}\bar{I}_L^* \Rightarrow \begin{aligned} \bar{P} &= \frac{1}{2}U_0^2\frac{(1-jRC\omega)}{-jL\omega + R(1-LC\omega^2)} \\ &= \frac{1}{2}U_0^2\frac{R - j\left[(R^2C\omega(1-LC\omega^2) - L\omega\right]}{\left((L\omega)^2 + R^2(1-LC\omega^2)^2\right)^2} \end{aligned}$$

donc :

$$\boxed{P_a = \frac{1}{2}\frac{U_0^2 R}{\left((L\omega)^2 + R^2(1-LC\omega^2)^2\right)^2}} \text{ et } \boxed{P_r = \frac{1}{2}\frac{U_0^2\left[(R^2C\omega(1-LC\omega^2) - L\omega\right]}{\left((L\omega)^2 + R^2(1-LC\omega^2)^2\right)^2}}$$