Année universitaire 2019-2020

# SMI-S4

## TD Electromagnétisme dans le vide, Série n°1, Corrections

*Prof L. EL MAIMOUNI*

## Exercice 1

I. Les valeurs de R et C parmi :

a) $R = 1000\Omega$, b) $C = 2{,}52\mu F$ , c) $R = 4000\Omega$, d) $C = 3{,}61\mu F$

Il s'agit de la réponse d'un circuit RC à un échelon de tension. A la fermeture de l'interrupteur K, nous avons :

$$E = Ri + u \text{ avec } i = \frac{dq}{dt} = +C\frac{du}{dt}$$

On obtient l'équation différentielle classique du 1[er] ordre.

$$E = RC\frac{du}{dt} + u \text{, et en posant } \tau = RC \text{ : } \frac{du}{dt} + \frac{u}{\tau} = \frac{E}{\tau}.$$

A la fermeture de l'interrupteur K, charge et tension u relatives au condensateur sont continues :

$$u(t) = E + Ae^{-\frac{t}{\tau}} \text{ avec } u_0 = E + A$$

soit :

$$u(t) = E + (u_0 - E)e^{-\frac{t}{\tau}}$$

On peut déduire la constante de temps (ou temps de relaxation) de la donnée à $t_1$ :

$$ln\frac{u_1 - E}{u_0 - E} = -\frac{t_1}{\tau} \Rightarrow \tau = \frac{t_1}{ln\frac{E - u_1}{E - u_0}}$$

donc : $$\tau = \frac{t_1}{ln2} = 0{,}0144s$$

Cette valeur n'est compatible qu'avec :

$$R = R_C = 4000\Omega \text{ et } C = C_d = 3{,}61\mu F$$

**II.1. Montrer que $\frac{di}{dt} + \frac{i}{\tau} = 0$ avec $\tau = \frac{RC_1C_2}{C_1 + C_2}$.**

Le fait que les deux condensateurs soient en série se traduit par :

$$i = \frac{dq_1}{dt} = \frac{dq_2}{dt} \text{ et } q_1(t) = q_2(t) \text{ puisque } q_1(0) = q_2(0).$$

La loi d'Ohm donne : $V_A - V_B = \dfrac{q_1}{C_1} + \dfrac{q_2}{C_2} = E - Ri$

Par dérivation temporelle, il vient : $i(\dfrac{1}{C_1} + \dfrac{1}{C_2}) = R\dfrac{di}{dt}$ soit : $\dfrac{di}{dt} + \dfrac{i}{\tau} = 0$ avec $\tau = \dfrac{RC_1C_2}{C_1 + C_2}$

Solution de cette équation différentielle : $i(t) = i(0)e^{-\frac{t}{\tau}} = \dfrac{E}{R}e^{-\frac{t}{\tau}}$ (car à t=0, $V_A(0) - V_B(0) = 0$).

**II.2. Expression de $q_1(t)$ et $q_2(t)$. Ces grandeurs lorsque $t \to \infty$.**

Par intégration :

$q_1(t) = q_2(t) = \int_0^{+\infty} i(t)dt = \dfrac{E\tau}{R}\int_0^{+\infty} e^{-\frac{t}{\tau}}dt = \dfrac{E\tau}{R}(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$ ➔ $q_1(t) = q_2(t) = \dfrac{E\tau}{R}(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$

Lorsque $t \to \infty$ :

$$q_1(\infty) = q_2(\infty) = \frac{E\tau}{R}$$

**II.3. Energie emmagasinée par chaque condensateur lors de la charge :**

Lors de la charge $t \in [0, +\infty]$ :

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{2}\frac{q_1^2(\infty)}{C_1} = \frac{1}{2}\frac{C_1C_2^2}{(C_1 + C_2)^2}E^2$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{2}\frac{q_2^2(\infty)}{C_2} = \frac{1}{2}\frac{C_2C_1^2}{(C_1 + C_2)^2}E^2$$

**II.4. Energie fournie par la source de tension :**

$$W_{source} = \int_0^\infty E\,i\,dt = \int_0^\infty E\,dq_1 = Eq_1(\infty) \text{ ➔ } W_{source} = \frac{C_1C_2}{C_1 + C_2}E^2$$

**II.5. Energie perdue par effet Joule.**

$$W_{Joule} = \int_0^\infty Ri^2\,dt = \frac{E^2}{R}\int_0^\infty e^{-\frac{2t}{\tau}}dt = \frac{E^2\tau}{2R},\ W_{Joule} = \frac{1}{2}\frac{C_1C_2}{C_1 + C_2}E^2$$

**II.6. Montrer que $\dfrac{di}{dt} + \dfrac{i}{\tau} = 0$ avec $\tau = R(C_1 + C_2)$.**

**III.1.** Les deux condensateurs sont en parallèle, la tension est commune, mais les courants de charge sont différents.

$$\begin{cases} V_A - V_B = \dfrac{q_1}{C_1} = \dfrac{q_2}{C_2} = E - Ri \\ i = i_1 + i_2 = \dfrac{dq_1}{dt} + \dfrac{dq_2}{dt} \end{cases}$$

La dérivation temporelle conduit à :

$-R\dfrac{di}{dt} = \dfrac{1}{C_1}\dfrac{dq_1}{dt} = \dfrac{1}{C_2}\dfrac{dq_2}{dt}$ soit $-R(C_1 + C_2)\dfrac{di}{dt} = i$ donc $\dfrac{di}{dt} + \dfrac{i}{\tau} = 0$ **avec** $\tau = R(C_1 + C_2)$

Solution de cette équation : $i(t) = i(0)e^{-\frac{t}{\tau}} = \dfrac{E}{R}e^{-\frac{t}{\tau}}$

**III.2. Expression de $q_1(t)$ et $q_2(t)$. Ces grandeurs lorsque $t \to \infty$.**

$$\begin{cases} q_1(t) = C_1E - C_1Ri(t) = C_1E(1-e^{-\frac{t}{\tau}}) \\ q_2(t) = C_2E(1-e^{-\frac{t}{\tau}}) \end{cases} ;\quad t \to \infty \Rightarrow \begin{cases} q_1(\infty) = C_1E \\ q_2(t) = C_2E \end{cases}$$

**III.3. Energie emmagasinée par chaque condensateur lors de la charge :**

Lors de la charge $t \in [0,+\infty]$

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{2}\frac{q_1^2(\infty)}{C_1} = \frac{1}{2}C_1E^2 ,\ \varepsilon_2 = \frac{1}{2}\frac{q_2^2(\infty)}{C_2} = \frac{1}{2}C_2E^2$$

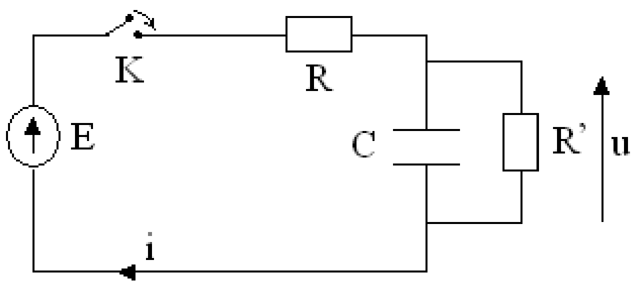
**III.4.** Energie fournie par la source de tension :

$$W_{source} = \int_0^\infty E\,i\,dt = \int_0^\infty E\,(dq_1 + dq_2) = E(q_1(\infty) + q_2(\infty)) \Rightarrow W_{source} = (C_1 + C_2)E^2$$

**III.5.** Calculer l'énergie perdue par effet Joule.

$$W_{Joule} = \int_0^\infty R\,i^2\,dt = \frac{E^2}{R}\int_0^\infty e^{-\frac{2t}{\tau}}\,dt \Rightarrow W_{Joule} = \frac{1}{2}(C_1 + C_2)E^2$$

## Exercice 2




a) A la fermeture de l'interrupteur k, les lois de Kirchhoff donne :

Loi des nœuds :

$$i = i_c + i_{R'}$$

Loi des mailles:

$$E = Ri + u$$

avec $u = R'i_{R'}$ et $i_c = C\dfrac{du}{dt}$

Si on conserve la variable u, il vient :

$$E = R\left(C\frac{du}{dt} + \frac{u}{R'}\right) + u = RC\frac{du}{dt} + u\left(1 + \frac{R}{R'}\right)$$

Soit :

$$\frac{du}{dt} + \frac{1 + \frac{R}{R'}}{RC}u = \frac{E}{RC}$$

La constante de temps (ou temps de relaxation) de ce circuit est donc : $\tau' = \dfrac{RC}{1 + \frac{R}{R'}}$

l'expression de u(t) correspond à :

$$u(t)=\frac{E}{1+\frac{R}{R'}}+Ae^{-\frac{t}{\tau'}}$$

A l'instant t=0, la continuité de la tension $\left(u(0)=\frac{q(0)}{C}=0\right)$, conduit à :

$$u(0)=\frac{E}{1+\frac{R}{R'}}+A=0 \Rightarrow A=-\frac{E}{1+\frac{R}{R'}} \Rightarrow u(t)=\frac{E}{1+\frac{R}{R'}}\left(1-e^{-\frac{t}{\tau'}}\right)=E'\left(1-e^{-\frac{t}{\tau'}}\right)$$

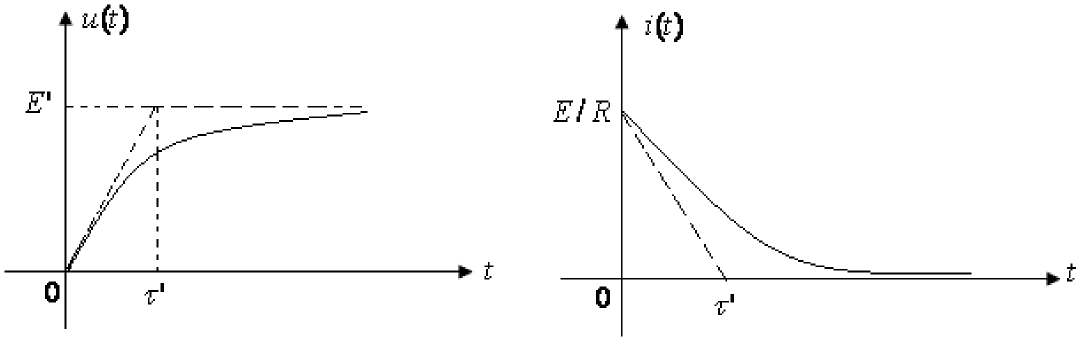
Donc :

$$u(t)=E'\left(1-e^{-\frac{t}{\tau'}}\right) \text{ avec } E'=\frac{E}{1+\frac{R}{R'}}$$

On en déduit :

$$i(t)=C\frac{du(t)}{dt} \Rightarrow i(t)=\frac{E'C}{\tau'}e^{-\frac{t}{\tau'}} \Rightarrow i(t)=\frac{E}{R}e^{-\frac{t}{\tau'}}$$

Les graphes de $u(t)$ et $i(t)$ illustrent la continuité de la tension et la discontinuité du courant à t=0.




b) En l'absence de résistance de fuite (faire $R'=\infty \Rightarrow i_{R'}=0$)

$$\tau=RC \;;\; q(t)=Cu(t)=CE\left(1-e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

En présence de la résistance de fuite c'est-à-dire R' est finie :

$$\tau'=\frac{RC}{1+\frac{R}{R'}}=\frac{\tau}{1+\frac{R}{R'}} \Rightarrow q(t)=CE'\left(1-e^{-\frac{t}{\tau'}}\right)$$

La constance de temps $\tau'$ est diminuée par l'existence de la résistance de fuite, et la charge doit être plus rapide.

- si t tend vers zéro, soit en pratique $t<<\tau'<\tau$ :

$$q(t)\approx CE\left(+\frac{t}{\tau}\right) \text{ et } q'(t)\approx CE'\left(+\frac{t}{\tau'}\right)$$

par un développement limité à l'ordre 1 au voisinage de 0 $e^x\approx 1+x$, on constat que :

$$q(t)\approx q'(t) \text{ car } \frac{E}{\tau}=\frac{E'}{\tau'}=\frac{E}{RC}$$

- si t tend vers l'infini, soit en pratique, $t>>\tau<\tau'$ :

$$q(\infty) \approx CE \text{ et } q'(\infty) \approx CE' = C\frac{E}{1+\frac{R}{R'}}$$

On constate que : $q(\infty) > q'(\infty)$

# Exercice 3

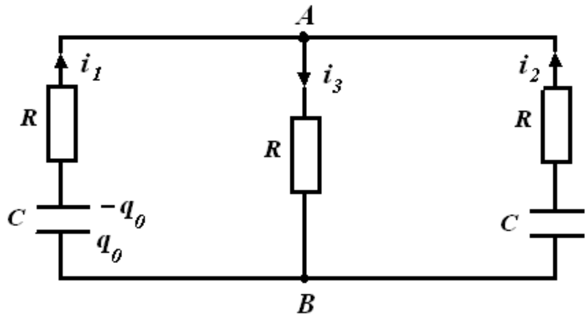



**Figure.1**

**1**) La loi des nœuds en B donne la relation demandée :

$$i_1 + i_2 = i_3 \quad (1)$$

**2**) En considérons successivement les trois dipôles AB, on peut écrire trois expressions de $V_A - V_B$ , ce qui donne les deux relations suivantes :

$$\boxed{-\frac{q_1}{C} + Ri_1 = -Ri_3} \quad (2) \qquad \boxed{-\frac{q_2}{C} + Ri_2 = -Ri_3} \quad (3)$$

A l'instant initial on a $q_1 = q_0$ et $q_2 = 0$, par conséquent :

$$-\frac{q_0}{C} + Ri_1 = Ri_2 = -Ri_3 \Rightarrow \begin{cases} i_1 + i_3 = \dfrac{q_0}{RC} \\ i_2 + i_3 = 0 \\ i_2 - i_1 = -\dfrac{q_0}{RC} \end{cases}$$

Soit en remplaçant $i_3$ par $i_1 + i_2$, on obtient :

$$\begin{cases} 2i_1 + i_2 = \dfrac{q_0}{RC} \\ i_1 + 2i_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{i_1 = \frac{2q_0}{3RC}} \; ; \; \boxed{i_2 = -\frac{q_0}{3RC}} \; ; \boxed{i_3 = \frac{q_0}{3RC}}$$

**3**) On a :

$$i_1 = -\frac{dq_1}{dt} \text{ et } i_2 = -\frac{dq_3}{dt}$$

On obtient de même d'après (2) et (3), puis (1) :

$$\begin{cases} i_1 + i_3 = \dfrac{q_1}{RC} \\ i_2 + i_3 = \dfrac{q_2}{RC} \end{cases} \Rightarrow i_3 = \frac{q_1 + q_2}{3RC}$$

Par la suite :

$$\frac{di_3}{dt} = \frac{1}{\tau}\left(\frac{dq_1}{dt} + \frac{dq_2}{dt}\right) = \frac{-i_1 - i_2}{\tau}$$

Soit en tenant compte de (1) :

$$\boxed{\frac{di_3}{dt}+\frac{i_3}{\tau}=0}$$

**4**) L'intégration de cette équation donne:

$$i_3(t)=Ae^{-\frac{t}{\tau}}\text{, soit : } i_3(t)=\frac{q_0}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}}$$

**5**) Dérivons (2) et substituons $i_1=-\frac{dq_1}{dt}$, il vient :

$$-\frac{1}{RC}\frac{dq_1}{dt}+\frac{di_1}{dt}=-\frac{di_3}{dt} \;\Rightarrow\; \frac{i_1}{RC}+\frac{di_1}{dt}=-\frac{di_3}{dt}$$

soit :

$$\frac{3i_1}{\tau}+\frac{di_1}{dt}=\frac{q_0}{\tau^2}e^{-\frac{t}{\tau}}$$

L'équation homogène correspondante admet la solution générale suivante :

$$i_1(t)=Ae^{-\frac{3t}{\tau}}$$

On cherche la solution particulière sous la forme : $i_{1p}(t)=Be^{-\frac{t}{\tau}}$

$$-\frac{B}{\tau}+\frac{3B}{\tau}=\frac{q_0}{\tau^2} \;\Rightarrow\; B=\frac{q_0}{2\tau}$$

La solution générale de $i_1(t)$ et donc :

$$\boxed{i_1(t)=Ae^{-\frac{3t}{\tau}}+\frac{q_0}{2\tau}e^{-\frac{t}{\tau}}}$$

**6**) On a :

$$i_1(t=0)=A+\frac{q_0}{2\tau}=\frac{2q_0}{\tau} \;\Rightarrow\; A=\frac{3q_0}{2\tau}$$

Il vient par conséquent, compte tenu de (1) et de l'expression obtenue pour $i_3(t)$ :

$$\boxed{i_1(t)=\frac{q_0}{2\tau}\left(3e^{-\frac{3t}{\tau}}+e^{-\frac{t}{\tau}}\right)} \quad ; \quad \boxed{i_2(t)=\frac{q_0}{2\tau}\left(e^{-\frac{t}{\tau}}-3e^{-\frac{3t}{\tau}}\right)}$$

Les trois intensités trouvées tendent bien sûr zéro quant $t\to\infty$.
$i_1(t)$ et $i_3(t)$ sont décroissants. Etudions le signe de la dérivée de $i_2(t)$

$\frac{di_2(t)}{dt}=\frac{q_0}{2\tau^2}\left(-e^{-\frac{t}{\tau}}+9e^{-\frac{3t}{\tau}}\right)$, celle-ci change de signe pour $9=e^{\frac{2t}{\tau}}$, soit

$t=\frac{\tau\ln 9}{2}=\tau\ln 3\approx 1{,}10\tau$

Par ailleurs $i_2(t)$ passe par un maximum (voir schéma).