

## 2.3 Le Langage Bond Graph

Le langage Bond Graph est un langage de modélisation permettant d'identifier les différents phénomènes physiques intervenant au sein d'un système et de représenter graphiquement leur interconnexion. Globalement, il permet de mieux appréhender la répartition des échanges d'énergie au sein d'un système. L'objectif de cette partie est, d'abord, de présenter les principes de base du langage bond graph. Pour ce faire, les notions de base seront rappelées. La procédure de construction d'un modèle simple et le principe de causalité seront ensuite décrits. Les livres de référence suivants [26, 61, 83, 40, 57] pourront permettre, au lecteur intéressé, d'approfondir ses connaissances dans le domaine du Bond Graph. L'exemple d'application donnée correspond à la commande d'une masse sur un axe d'une machine à commande numérique.

On considère deux systèmes  $S_1$  et  $S_2$  qui échangent de la puissance. Par exemple ces deux systèmes peuvent être représentés respectivement, par un moteur à courant continu et une charge, comme indiqué sur la Figure 2.8(a). Cette puissance échangée est représentée par un lien de puissance, caractérisé par une demi-flèche qui correspond au « bond » (ou lien) du Bond Graph (Figure 2.8(b)). L'expression de la puissance échangée entre les deux systèmes s'obtient par multiplication des deux variables dites « variables de puissance » appelée de manière générique « effort » et « flux » et notées respectivement  $f$  et  $e$ . Pour traduire le caractère générique des appellations « effort » et « flux », ces variables sont aussi appelées « variables généralisées ». L'effort est la variable intensive (par exemple : la force mécanique, le couple, la pression, le potentiel électrique, la température, le potentiel chimique, etc.) et le flux est la dérivée d'une variable extensive (par exemple : la vitesse, le débit volumique, le courant, la variation de l'entropie, etc.). Pour la représentation des variables, la variable d'effort peut être placée sur un côté du bond et la variable de flux peut être placée sur l'autre côté, bien que ces emplacements ne sont pas nécessaires dans de nombreux cas. L'expression de l'énergie est obtenue alors par intégration de l'expression de la puissance. Deux autres variables généralisées sont alors définies : les « variables d'énergie ». Elles sont définies comme l'intégrale par rapport au temps des variables de puissance. Celles-ci sont appelées « moment généralisé » et « déplacement généralisé » et noté respectivement  $p$  et  $q$ .

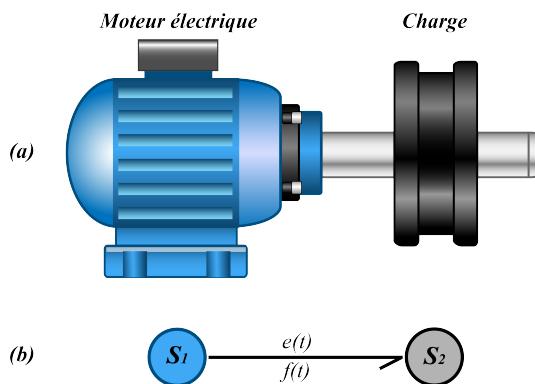


Figure 2.8: Transfert de puissance entre un moteur électrique et une charge (a), Représentation d'un lien de puissance bond graph (b).

Le Tableau 2.1 présente les analogies entre les variables de puissance et d'énergie dans les principaux domaines concernés dans les systèmes mécatroniques.

Dans les domaines chimiques et thermodynamiques, l'intégration des efforts (température ou potentiel

Domaine physiques	Variables de puissance		Variables d'énergie	
	Effort $e$	Flux $f$	Moment généralisé $p$	déplacement généralisé $q$
Mécanique de translation	Force $F$ ( $N$ )	Vitesse $v$ ( $m/s$ )	Quantité de mouvement $p$ ( $kg.m/s$ )	Déplacement $x$ ( $m$ )
Mécanique de rotation	Couple $C$ ( $N.m$ )	Vitesse angulaire $\omega$ ( $rad/s$ )	Moment cinétique $p_\omega$ ( $kg.m^2.rad/s$ )	Angle $\theta$ ( $rad$ )
Électrique	Tension $u$ ( $V$ )	Courant $i$ ( $A$ )	Flux magnétique total $\lambda$ ( $V.s$ )	Charge $q$ ( $C$ )
Hydraulique	Pression $P$ ( $Pa$ )	Débit volumique $Q_v$ ( $m^3/s$ )	Moment de pression $P_p$ ( $Pa.s$ )	Volume $V$ ( $m^3$ )
Thermodynamique	Température $T$ ( $K$ )	Débit d'entropie $\dot{S}$ ( $J/(K.s)$ )	-	Entropie $S$ ( $J/K$ )
Chimie	Potentiel chimique $\mu$ ( $J/mole$ )	Débit molaire $\dot{n}$ ( $mole/s$ )	-	Quantité molaire $n$ mole

Tableau 2.1: Variables de puissance et d'énergie (et leurs unités SI) associées à différents domaines de la physique

chimique) par apport au temps n'ont pas de signification physique directe. Voilà pourquoi, les moments généralisés  $p$  ne sont pas définis dans le Tableau 2.1 pour ces domaines.

### 2.3.1 Les éléments du Bond Graph

Il existe neuf éléments bond graph ( $Se$ ,  $Sf$ ,  $R$ ,  $C$ ,  $I$ ,  $0$ ,  $1$ ,  $TF$ ,  $GY$ ) qui sont classés en quatre catégories : les éléments actifs, les éléments passifs, les éléments de jonction et les éléments de détections (capteurs).

#### a- Éléments actifs

Les sources sont appelées éléments actifs dans la notation Bond Graph. Ils contribuent à fournir de la puissance au système. Leur type est indiqué soit par un indice «  $e$  » ou «  $f$  » selon que la source impose sur le système soit un effort ou un flux. En fonction du type de variable d'alimentation de la source fournie, la modélisation Bond Graph à deux éléments sources : source d'effort ( $Se$ ) et source de flux ( $Sf$ ). La Figure 2.9 montre la représentation Bond Graph de ces éléments. Puisque les sources fournissent de l'énergie, l'orientation de la demi-flèche est fixée, et supposée sortante de la source, autrement dit, orientée vers le système auquel la puissance est imposée.

**Source d'effort** : elle impose un effort, qui peut être une fonction du temps, mais indépendante de la variable flux. Par exemple : le générateur de tension électrique, la pompe de pression, la source de la température, la gravité, etc.

**Source de flux** : elle fournit au système un flux indépendant de l'effort. Par exemple : le générateur de courant électrique, la vitesse imposée à un système mécanique, la pompe hydrostatique entraînée avec une fréquence de rotation constante. Si une telle pompe est équipée d'un régulateur de pression idéal, il devient alors une source d'effort avec l'effort (pression) indépendant du flux.

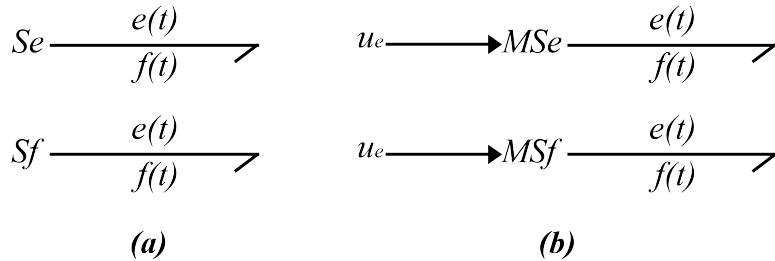


Figure 2.9: Éléments actifs : sources d'effort et de flux (a), sources d'effort et de flux modulés (b).

**Sources modulées** : beaucoup des sources d'efforts et de flux sont contrôlées (par un signal). Elles sont nommées sources modulées ( $MSe$  ou  $MSf$ ) et sont mises en évidence par une lettre  $M$  « modulée » qui précède les symboles de source comme indiqué sur la Figure 2.9(b). Par exemple, une pompe peut être commandée par un signal de commande externe pour réguler sa vitesse.

### b- Éléments passifs

Les éléments  $R$ ,  $I$  et  $C$  sont dits éléments passifs, car ils transforment la puissance qui leur est fournie en énergie dissipée (élément  $R$ ) ou stockée sous forme d'une énergie cinétique (élément  $I$ ) ou d'une énergie potentielle (élément  $C$ ). Ces éléments sont appelés, élément uni-port, car ils sont connectés à un système par un seul port. Par convention, la demi-flèche est orientée vers l'élément comme illustré sur la Figure 2.9, où  $J$  indique une jonction (1 ou 0).

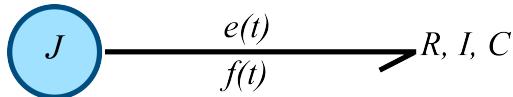


Figure 2.10: Représentation des éléments passifs.

Selon la façon dont la puissance est transformée par le port, les éléments passifs sont classifiés en éléments résistifs ( $R$ ), éléments capacitifs ( $C$ ) et éléments inertiels ( $I$ ).

**L'élément  $R$**  : il est utilisé pour modéliser tout phénomène physique liant la variable d'effort  $e$  à la variable de flux  $f$  (Équation 2.2). Il est dissipatif d'énergie et la puissance qui lui est transmise est transformée en chaleur (considérée ici comme dissipée). La Figure 2.11 montre le modèle Bond Graph et les croquis des éléments résistances dans plusieurs domaines de la physique. Pour les systèmes physiques, l'élément  $R$  peut représenter : une résistance électrique, du frottement et de l'amortissement mécanique, une résistance hydraulique et une résistance thermique.

$$e(t) = \Phi_R(f(t)) \quad (2.2)$$

**L'élément  $C$**  : il est utilisé pour modéliser tout phénomène physique liant la variable d'effort  $e$  à la variable de déplacement  $q$  (Équation 2.3). Dans la Figure 2.12, le modèle Bond Graph et quelques exemples physiques des phénomènes de stockage d'énergie potentielle sont présentés. L'élément  $C$  peut être représenté : le condensateur électrique, le ressort mécanique, le réservoir de stockage et les barres de torsion, etc.

$$e(t) = \Phi_C(q(t)) \quad (2.3)$$

**L'élément  $I$**  : il est utilisé pour modéliser tout phénomène physique liant la variable de flux  $f$  à la variable de moment  $p$  (Équation 2.4). L'élément  $I$  transforme la puissance reçue en énergie cinétique pour les systèmes mécaniques et en énergie magnétique pour les systèmes électriques. Le modèle Bond Graph et quelques exemples physiques sont présentés sur la Figure 2.13. L'élément  $I$  est utilisé pour

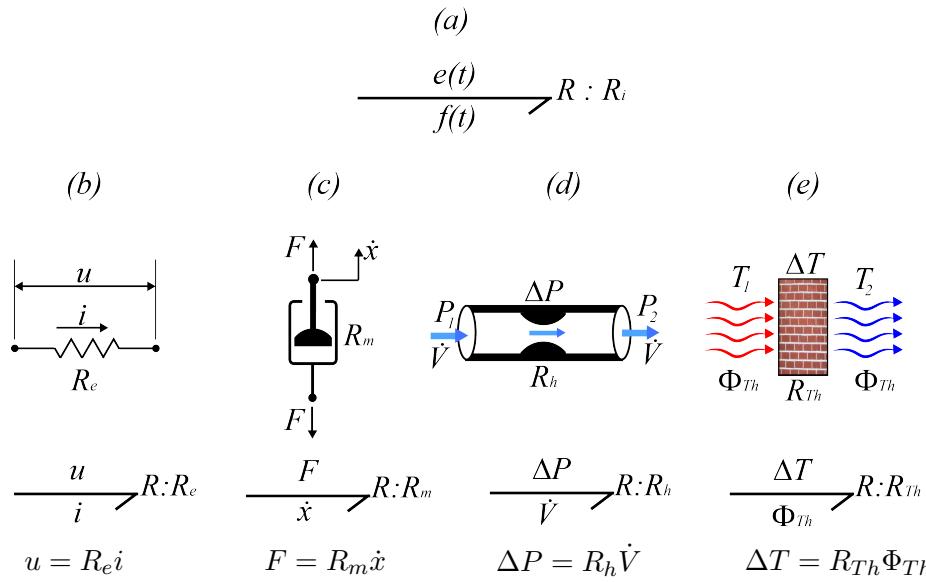


Figure 2.11: Représentation bond graph de l'élément  $R$  (a), la résistance électrique (b), l'amortissement mécanique (c), la résistance hydraulique (d), résistance thermique (e).

modéliser les phénomènes d'inductance dans les systèmes électriques, la masse ou l'inertie dans les systèmes mécaniques ou hydrauliques, ect.

$$p(t) = \Phi_I(f(t)) \quad (2.4)$$

Citons également, à titre d'exemple, les éléments présentés sur la Figure 2.14 qui reçoivent de la puissance par plusieurs ports, de natures pouvant être différentes; ils sont modélisés par des éléments « multiports » comme indiquer la Figure 2.14, associés à des lois matricielles.

### c- Éléments d'interconnexion

Les éléments d'interconnexion permettent de connecter les éléments actifs ( $Se$  et  $Sf$ ) et passifs ( $R$ ,  $I$  et  $C$ ) afin de représenter le système complet. Deux catégories d'éléments d'interconnexion existent : les éléments de jonction et les éléments de transduction.

**Les éléments de jonction :** à effort commun (*jonction* = 0) ou à flux commun (*jonctions* = 1) permettent de décrire des bilans d'énergie entre les éléments en respectant les lois de conservations de la physique. Les lois de conservations sont notamment les lois de Kirchoff en électricité et les lois de conservation de la quantité de mouvement et de la masse en mécanique. Ce sont des jonctions de type n-ports; c'est-à-dire qu'elles peuvent accueillir autant de liens que nécessaire. La représentation Bond Graph des jonctions 0 et 1 est montrée sur la Figure 2.15.

Dans toutes les jonctions, la conservation d'énergie peut être exprimée comme suit (Équation 2.5):

$$\sum_{i=1}^n e_i f_i = 0 \quad (2.5)$$

Avec  $n$  le nombre des ports. Les signes apparaissant dans les lois constitutives de ces éléments dépendent de l'orientation des liens de puissance. Une variable est pondérée par un signe + si la demi-flèche est entrante et par un signe - si la demi-flèche est sortante.

Pour le modèle Bond Graph de la Figure 2.15, deux demi-flèches sont entrantes dans la jonction (les bonds 1 et 4) et deux demi-flèches sont sortantes de la jonction (les bonds 2 et 3), donnant ainsi la loi de conservation (Équation 2.7) :

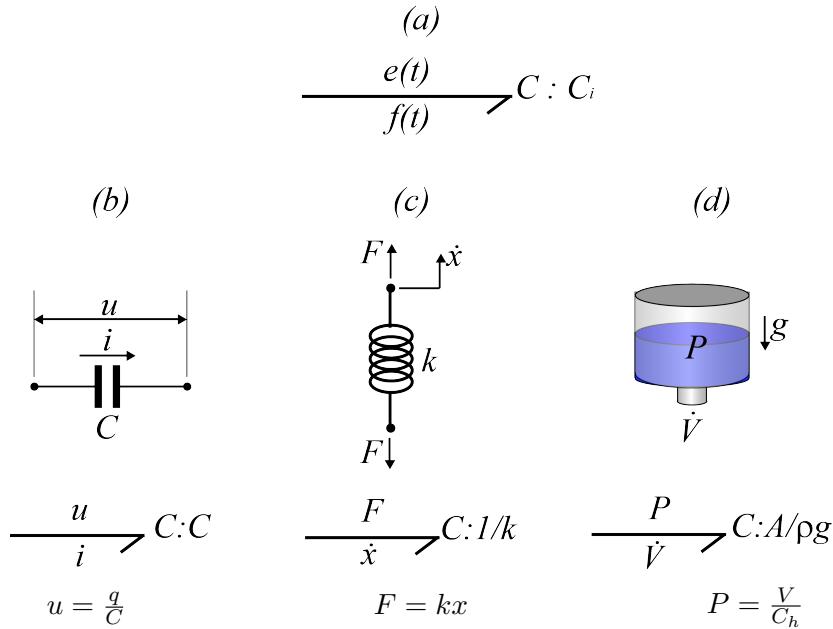


Figure 2.12: Représentation Bond Graph de l'élément  $C$  (a), le condensateur électrique (b), le ressort mécanique (c), le réservoir de stockage (d).

$$e_1 f_1 + e_4 f_4 - e_2 f_2 - e_3 f_3 = 0 \quad (2.6)$$

Pour la jonction 0, les efforts sur tous les liens arrivant ou partant de la jonction sont les mêmes. Elle est dite à effort commun, et la somme algébrique des flux est égale à zéro. Les équations constitutives (à partir de la Figure 2.15) peuvent être rédigées comme (Équation 2.7) :

$$\begin{cases} f_1 + f_4 - f_2 - f_3 = 0 \\ e_1 = e_2 = e_3 = e_4 \end{cases} \quad (2.7)$$

En mécanique, la jonction 0 représente une compatibilité géométrique pour une situation impliquant une seule force et plusieurs vitesses, dont la somme algébrique égale à zéro. Il représente, pour le système électrique, la loi de Kirchhoff pour un noeud. Dans les systèmes hydrauliques, il représente une conservation du débit volumique / massique à un point où plusieurs tuyaux se rejoignent.

Pour la jonction 1, les flux sur tous les liens arrivant ou partant de la jonction sont les mêmes. Elle est dite à flux commun, et la somme algébrique des efforts est égale à zéro. Les équations constitutives (à partir de la Figure 2.15) peuvent être rédigées comme (Équation 2.8) :

$$\begin{cases} e_1 + e_4 - e_2 - e_3 = 0 \\ f_1 = f_2 = f_3 = f_4 \end{cases} \quad (2.8)$$

La jonction 1 représente en mécanique l'équilibre dynamique des forces associées à une vitesse commune. Dans le circuit électrique, elle représente la loi de Kirchhoff pour la tension (loi des mailles) pour un circuit en série. Lorsque des composants d'un circuit hydraulique en connexion série et le débit volumique/massique est le même, la somme algébrique des pressions égale à zéro, ceci peut être assuré par la jonction 1.

**Les éléments de transduction** : ce sont les éléments transformateurs ( $TF$ ) et gyrateurs ( $GY$ ) qui permettent de modéliser les transformations parfaites de puissance et les couplages entre différents domaines de la physique.

L'élément transformateur  $TF$  est associé à un transfert d'énergie couplant les efforts entre eux dans un certain rapport et les flux entre eux dans le rapport inverse (Équation 2.9).

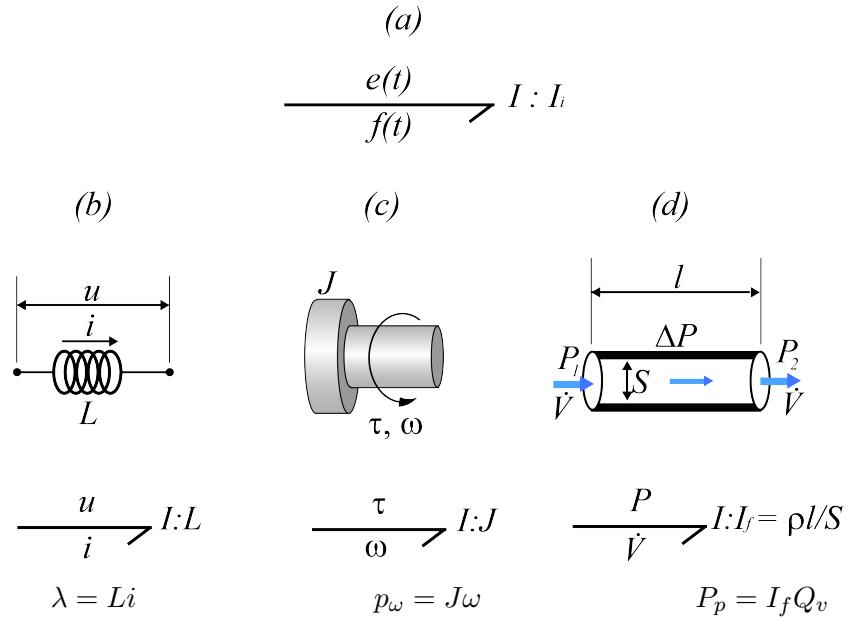


Figure 2.13: Représentation bond graph de l'élément  $I$  (a), l'inductance électrique (b), l'inertie mécanique (c), l'inertie de fluide (d).

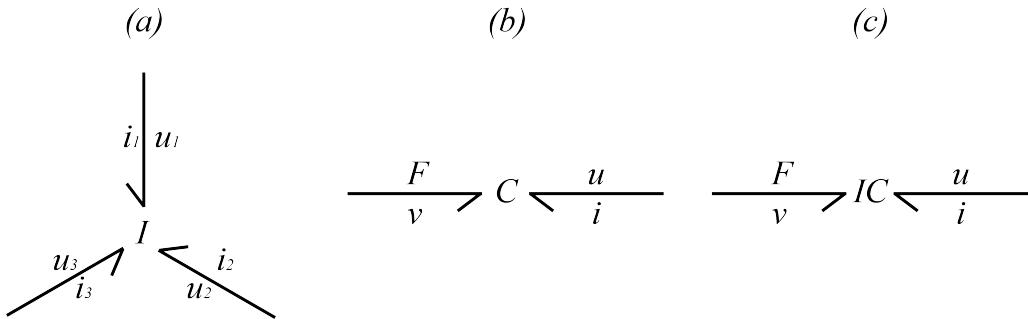


Figure 2.14: Représentation bond graph d'éléments multiports : 3 bobinages (a), condensateur à armature mobile (b), solénoïde à noyau mobile (c).

$$\begin{cases} e_1 = me_2 \\ f_2 = mf_1 \end{cases} \quad (2.9)$$

où  $m$  est appelé le module du transformateur, si le module de transformateur  $m$  n'est pas constant, l'élément transformateur TF est alors appelé un transformateur modulé et noté par  $MTF$ .

L'élément transformateur  $TF$  modélise le transformateur électrique pour un système électrique, le réducteur de vitesse pour un système mécanique de rotation, ou un simple levier pour la mécanique de translation, un vérin pour un système hydraulique (Figure 2.16). L'élément  $TF$  idéal ne stocke et ne dissipe pas de l'énergie.

L'élément gyrateur  $GY$  assure une transduction de l'énergie d'un domaine à un autre en couplant, de façon croisée, les efforts et les flux (Équation 2.10), par exemple un moteur électrique, qui transforme l'énergie électrique en énergie mécanique de rotation (Figure ). La constante de proportionnalité  $r$  est appelée ratio ou module de gyrateur. Ce module peut être réglable, et son taux de conversion peut être modulé par un signal appliqué par l'intermédiaire d'une liaison activée. Ceci est représenté par le symbole  $MGY$  (gyrateur modulé). Comme exemple, un moteur électrique, dont l'intensité de champ, est variable.

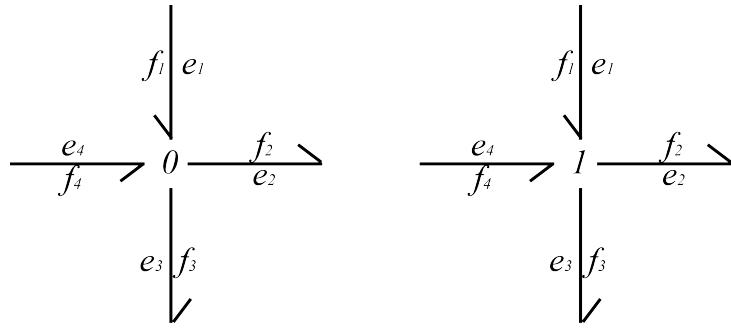


Figure 2.15: Représentation bond graph des jonctions 0 et 1.

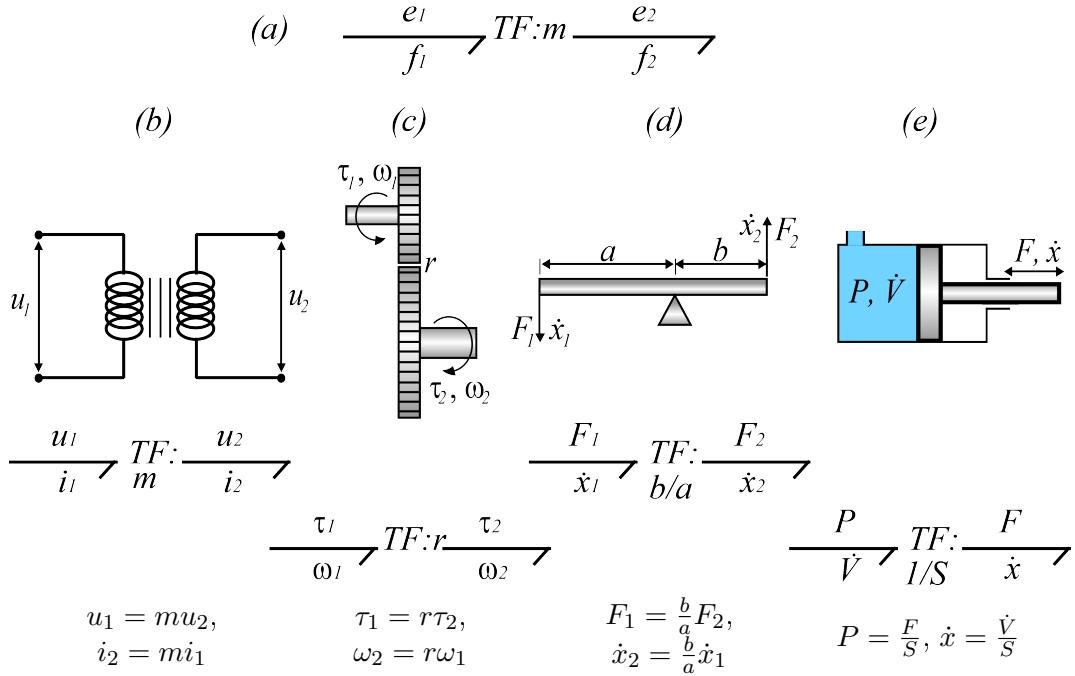


Figure 2.16: Représentation bond graph de l'élément TF (a), transformateur électrique (b), réducteur de vitesse (c), levier mécanique (d), vérin hydraulique (e).

$$\begin{cases} e_1 = rf_2 \\ e_2 = rf_1 \end{cases} \quad (2.10)$$

#### d- Les éléments de détections

Si les entrées du modèle sont explicitement représentées par des phénomènes idéalisés d'apport d'énergie (éléments bond graph  $Se$  et  $Sf$ ), il peut être utile pour des besoins d'analyse de faire également apparaître les sorties du système. Pour cela, de nouveaux éléments passifs ont été introduits. Il s'agit de détecteur d'effort (élément bond graph  $De$ ) et de flux (élément bond graph  $Df$ ) (Figure 2.18). Ils correspondent en quelque sorte à des capteurs idéaux. La puissance qui leur est associée est nulle et placée sur des jonctions adéquates, leur ajout ne modifie en rien le comportement dynamique du modèle.

#### 2.3.2 La causalité d'un Bond Graph

##### a- Objectifs de la causalité

Un modèle Bond Graph est dit acausal, ceci signifie que les relations mathématiques associées aux différents éléments bond graph n'ont pas été orientées. Cependant, pour des besoins de simulation,

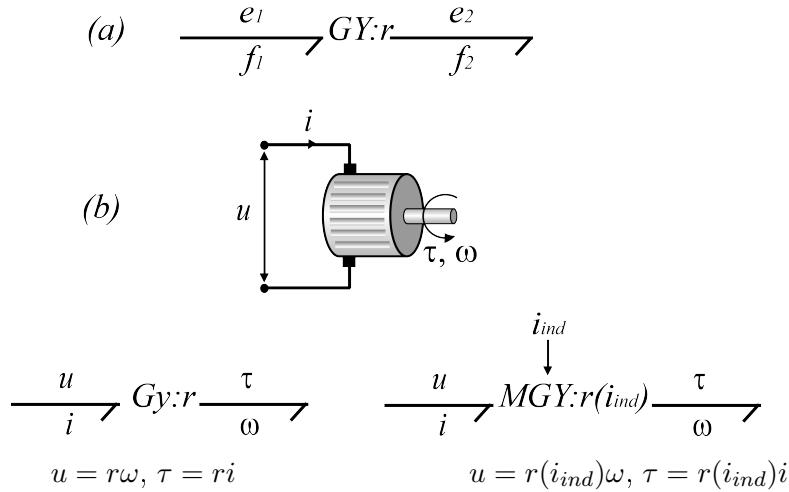


Figure 2.17: Représentation bond graph de l'élément GY (a), moteur électrique (b).

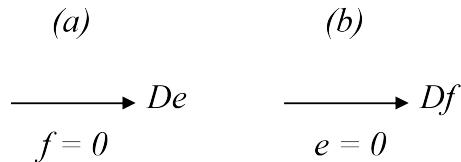


Figure 2.18: DéTECTEUR d'effORT imposANT un FLUX nUL (a), déTECTEUR de FLUX imposANT un EFFORT nUL (b).

l'orientation des équations (ou en d'autres termes, la structure de calcul des équations) est nécessaire. Les équations doivent être mises sous la forme d'une séquence d'affectations permettant de déterminer les sorties du modèle à partir des entrées et des paramètres du modèle. Un modèle causal peut alors être obtenu à partir de la représentation Bond Graph acausal en lui affectant une causalité de calcul.

Lorsque les modèles sont utilisés pour simuler le comportement dynamique d'un système, le modèle utilisé est dit direct, car le schéma de calcul utilisé respecte la causalité physique du système : les équations sont orientées selon le sens des lois physiques qui repose sur le principe bien connu que l'effet d'un phénomène physique ne peut précéder sa cause.

### b- Convention de la causalité

La causalité est marquée par un trait perpendiculaire à l'extrémité d'un lien. Par convention, le trait causal est placé du côté de l'élément sur lequel l'effort est imposé, le flux est donc imposé de l'autre côté du lien (Figure 2.19).

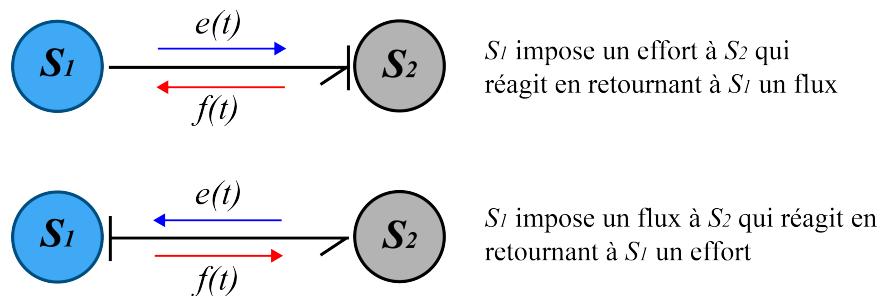


Figure 2.19: Représentation Bond Graph du principe de causalité.

### c- Règle d'affectation de la causalité

La causalité est affectée selon les règles spécifiques suivantes [55]:

- Les éléments sources ( $Se$  et  $Sf$ ) imposent une causalité unique. Pour une source d'effort  $Se$ , le trait causal est placé du côté de la flèche tandis qu'il s'agit de l'inverse, pour une source de flux  $Sf$ .
- Pour les jonctions 1, les jonctions 0, les transformateurs et les gyrateurs, une contrainte de causalité est imposée (Tableau 2.2). Pour les éléments de stockage  $C$  et  $I$ , le choix de la causalité intégrale est généralement préférée au choix de la causalité différentielle. Pour l'élément de dissipation  $R$ , il n'y a aucune préférence.

### 2.3.3 Procédure de construction du Bond Graph

La procédure de construction de modèles Bond Graph sera maintenant détaillée.

1. Disposer les sources d'énergie : les sources d'efforts ( $Se$ ) et/ ou source de flux ( $Sf$ ).
2. Placer les principaux éléments Bond Graph représentant les phénomènes énergétiques des éléments du système : les éléments de stockage ( $I$  et  $C$ ) et de dissipation ( $R$ ).
3. Interconnecter ces éléments en effectuant des bilans d'énergie en respectant les lois de conservation de la physique. Cette étape est réalisée à l'aide des éléments de jonction (les jonctions 0,1) et des éléments de transduction (les éléments transformateurs ( $TF$ ) et les éléments gyrateurs ( $GY$ ))
4. Affecter la causalité : La procédure suivante permet de propager la causalité (procédure SCARP [57])).
  - (a) Affecter les causalités imposées par les éléments sources d'effort et de flux et les propager aussi loin que possible en prenant en compte les contraintes imposées par les transformateurs, gyrateurs, jonctions 0 et jonctions 1.
  - (b) Affecter la causalité intégrale (de préférence) aux éléments de stockage  $I$  et  $C$  et la propager dans le Bond Graph.
  - (c) Affecter une causalité arbitraire aux éléments dissipatifs  $R$  et la propager dans le Bond Graph.
  - (d) Si le Bond Graph n'est pas complet d'un point de vue causal, affecter une causalité arbitraire aux éléments non traités et la propager au sein du Bond Graph. Si lors des étapes (b) à (d), il existe un conflit, il faut alors utiliser une causalité différentielle pour les éléments  $C$  et  $I$  de manière à lever le conflit. La présence d'éléments de stockage en causalité dérivée indique que les équations déduites du Bond Graph seront des équations algébro-différentielles. Cette situation se rencontre lors de la représentation Bond Graph de systèmes mécaniques bouclés. Dans ce manuscrit, la technique des perturbations singulières a été utilisée pour modifier le modèle de manière à éviter d'avoir des éléments de stockage en causalité dérivée.

### 2.3.4 Chemin causal, boucle causale

Le parcours d'un modèle Bond Graph peut se faire en suivant le transfert de la puissance (à l'aide des « lignes de puissance ») ou en suivant la propagation de la causalité. C'est ce deuxième cas que nous envisageons ici.

Chaque lien du Bond Graph étant porteur de deux variables,  $e$  et  $f$ , il est possible de parcourir le Bond Graph en suivant deux chemins, en suivant soit la variable effort soit la variable flux.

Sur un modèle Bond Graph causal, un chemin causal est une suite ordonnée de variables (d'effort et/ou de flux) mises en relations les unes aux autres par les équations du modèle. L'ordonnancement de cette suite est conforme à la causalité du modèle. Un chemin causal permet de mettre en évidence comment une variable influe mathématiquement sur une autre variable. Un chemin causal E/S est un

Éléments bond graph et causalités possibles	Schémas de calcul	Commentaires
	$e(t)$ est connu	Causalité imposée
	$f(t)$ est connu	Causalité imposée
	$\begin{cases} e_4 = e_1 \\ e_4 = e_2 \\ e_4 = e_3 \\ f_4 = -f_1 + f_2 + f_3 \end{cases}$	Un seul effort est imposé sur la jonction 0
	$\begin{cases} f_4 = f_1 \\ f_4 = f_2 \\ f_4 = f_3 \\ e_4 = -e_1 + e_2 + e_3 \end{cases}$	Un seul flux est imposé sur la jonction 1
	$\begin{cases} e_1 = me_2 \\ f_2 = mf_1 \end{cases}$	Causalité directe
	$\begin{cases} e_2 = \frac{e_1}{m} \\ f_1 = \frac{f_2}{m} \end{cases}$	Causalité inverse
	$\begin{cases} e_1 = rf_2 \\ e_2 = rf_1 \end{cases}$	Causalité directe
	$\begin{cases} f_2 = \frac{e_1}{r} \\ f_1 = \frac{e_2}{r} \end{cases}$	Causalité inverse
	$f = \frac{d}{dt}(\Phi_C^{-1}(e))$	Causalité dérivée
	$e = \Phi_C(\int f dt) = \Phi_C(q)$	Causalité intégrale
	$f = \Phi_I(\int e dt) = \Phi_I(p)$	Causalité intégrale
	$e = \frac{d}{dt}(\Phi_I^{-1}(f))$	Causalité dérivée
	$f = \Phi_R^{-1}(e)$	Causalité conductance
	$e = \Phi_R(f)$	Causalité résistance

Tableau 2.2: Causalités possibles pour les différents éléments bond graph

chemin causal entre une variable d'entrée et une variable de sortie du modèle (Figure 2.20(b)). Un chemin causal fermé entre deux éléments de type  $R$ ,  $C$ , et  $I$  permet de définir une boucle causale, qui comprend les deux chemins élémentaires aller et retour (Figure 2.20(b)).

Dans le cas linéaire, les gains d'un chemin causal  $T_i$  et d'une boucle causale  $B_j$  sont obtenus à l'aide des Équations 2.11 et 2.12.

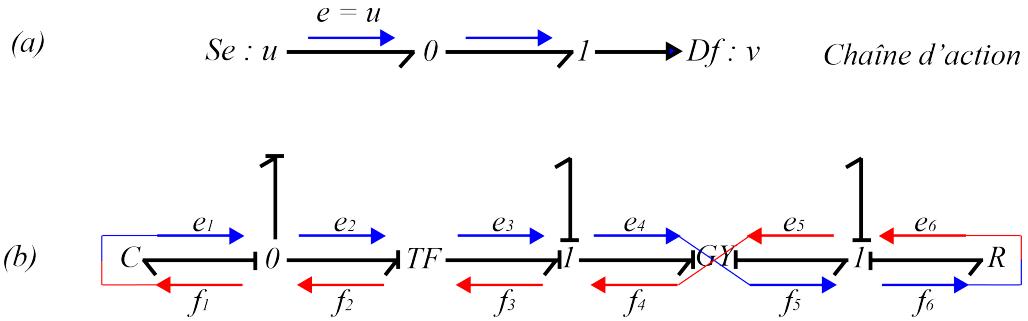


Figure 2.20: Chemin causal et boucle causale dans un Bond Graph.

$$T_i = (-1)^{n_0+n_1} \prod_i m_i^{k_i} \prod_j r_j^{l_j} \quad (2.11)$$

$$B_j = (-1)^{n_0+n_1} \prod_i (m_i^{k_i})^2 \prod_j (r_j^{l_j})^2 \prod_k g_k \quad (2.12)$$

où

- $m_i$  (respectivement  $r_j$ ) est le module du ième  $TF$  (respectivement jème  $GY$ ), avec un exposant  $k_i$  (respectivement  $l_j$ ) qui vaut +1 ou -1 suivant la causalité du  $TF_i$  (respectivement  $GY_j$ ).
- $n_0 + n_1$  est le nombre de changements d'orientation des demi-flèches aux jonctions 0 (respectivement 1) quand on suit la variable flux (respectivement effort).
- $g_k$  est le gain (ou transmittance) de l'élément  $R$ ,  $C$ , ou  $I$  traversé par le chemin causal ou la boucle causale, qui dépend de la causalité qui lui est affectée. Ces gains sont donnés dans le Tableau 2.3 où  $s$  est la variable de Laplace. Les gains sont essentiellement des fonctions de transfert élémentaires.

Élément	Causalité	Gain
Élément $R$	Causalité résistance	$R$
	Causalité conductance	$1/R$
Élément $C$	Causalité intégrale	$1/Cs$
	Causalité dérivée	$Cs$
Élément $I$	Causalité intégrale	$1/Is$
	Causalité dérivée	$Is$

Tableau 2.3: Gain des éléments passifs.

Les gains de boucles causales fournissent une estimation des dynamiques du modèle, ce qui peut être utile pour faire de la simplification de modèles sur critères dynamiques ou fixer le pas de calcul pour la simulation.

### 2.3.5 L'inversion en langage Bond Graph

Maintenant que le langage Bond Graph a été présenté comme un outil pour la modélisation et l'étude des systèmes mécatroniques, étudions maintenant la possibilité de traiter des modèles inverses en langage Bond Graph (modèles à priori plus pertinents pour le dimensionnement et la commande des systèmes mécatroniques).

Le concept de causalité est une notion clé pour l'exploitation d'un modèle Bond Graph. Basé sur le principe physique de causalité (c.-à-d. si un sous-système  $S_1$  impose un effort à un sous-système  $S_2$  alors  $S_2$  réagit nécessairement en imposant un flux à  $S_1$ ), ce concept permet d'orienter les équations d'un modèle Bond Graph pour le transformer en un modèle de simulation conforme à l'expérimentation choisie. La méthode d'inversion en langage Bond Graph a beaucoup évolué grâce

notamment à l'introduction par Gawthrop de la notion de bicausalité [84]. Vue quelque part comme une extension de la causalité classique, cette notion permet d'envisager de nouveaux schémas de calculs physiquement irréalisables et pourtant mathématiquement possibles (c.-à-d. un sous-système  $S_1$  peut imposer à la fois un effort et un flux à un sous-système  $S_2$ ). Ceci se représente graphiquement comme indiqué Figure 2.21, en décomposant le trait causal en deux demi-trait causaux.

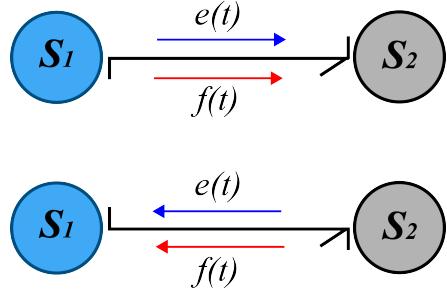


Figure 2.21: Bicausalité.

De nouveaux éléments Bond Graph capables d'imposer (ou de se voir imposer) à la fois un effort et un flux ont également été introduits (Figure 2.22).

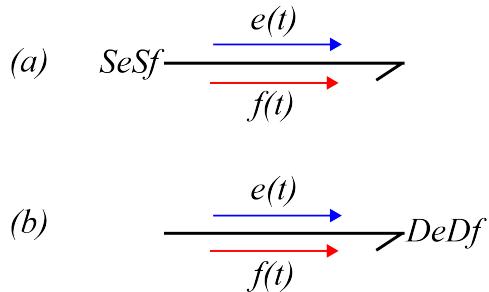


Figure 2.22: Double source imposant l'effort et le flux (a), double détecteur d'effort et de flux (b).

Ainsi, si la causalité Bond Graph pouvait être confondue avec la notion de causalité au sens de la physique, la bicausalité, elle, ne représente plus du tout des relations de cause à effet. Elle est dédiée à la représentation de schémas calculatoires non nécessairement physiques. À ce titre, la bicausalité peut être vue comme une extension de la causalité Bond Graph.

#### a- Affectation de la bicausalité

Comme précédemment, des procédures existent pour attribuer des traits bicausaux aux liens de puissance d'un modèle Bond Graph. Dans ces cas, l'organisation des équations en un modèle global de simulation repose, d'une part, sur la propagation de la bicausalité des éléments doubles sources  $SeSf$  vers les éléments doubles détecteurs  $DeDf$  et, d'autre part, sur une affectation causale (au sens classique) des autres éléments du modèle.

La procédure suivante permet de propager la bicausalité de manière à construire le modèle inverse d'un système à  $m$  entrées et  $m$  sorties. Là encore comme un modèle d'état est recherché, une causalité intégrale sera préférentiellement affectée aux éléments de stockage d'énergie.

1. Dans le modèle Bond Graph en causalité préférentiellement intégrale, choisir un ensemble de lignes de puissance E/S disjointes associées à des chemins causaux E/S disjoints. Si un tel ensemble n'existe pas, alors le modèle n'est pas inversible et la procédure s'arrête.
2. Dans le modèle Bond Graph acausal, remplacer les sources (respectivement les détecteurs) associées aux entrées (respectivement aux sorties) par des doubles détecteurs  $DeDf$  (respectivement des doubles sources  $SeSf$ ).

3. Pour chaque élément dont la causalité est imposée (source, élément non inversible), affecter cette causalité obligatoire et propager cette causalité à travers la structure de jonction en respectant les contraintes de causalité des jonctions 0 et 1 et des éléments *TF* et *GY*.
4. Le long de chaque ligne de puissance choisie à l'étape 1, propager la bicausalité de la double source vers le double détecteur. Puis, propager la causalité à travers le modèle Bond Graph en utilisant les contraintes de causalité des jonctions 0 et 1 et des éléments *TF* et *GY*. Si des conflits causaux ou des boucles causales non résolubles apparaissent, recommencer les étapes précédentes avec un autre ensemble de lignes de puissances E/S disjointes. Si aucun de ces ensembles ne résout les conflits causaux, alors le système n'est pas inversible et la procédure s'arrête.
5. Pour les éléments de stockage d'énergie, affecter une causalité préférentiellement intégrale si possible et la propager à travers le modèle Bond Graph comme à l'étape précédente.
6. S'il reste des éléments *R* non déterminés causalement, affecter une causalité arbitraire sur un de ces éléments et la propager comme précédemment.
7. Répéter l'étape 6 jusqu'à ce que chaque élément *R* soit déterminé causalement.
8. Si le modèle Bond Graph n'est pas complètement déterminé causalement, affecter une causalité arbitraire sur un lien Bond Graph sans trait causal et la propager comme précédemment.
9. Répéter l'étape 8 jusqu'à ce que le modèle bond graph soit complètement déterminé causalement.

### 2.3.6 Les différents contextes dans lesquels la méthode d'inversion peut être utilisée

La méthode par modèles Bond Graph inverses peut être utilisée dans plusieurs contextes d'ingénierie comme :

#### a- Synthèse d'architecture

Au début de la conception de la chaîne d'actionnement, le concepteur connaît uniquement l'architecture de la charge à mouvoir et les trajectoires (c.-à-d. les sorties spécifiées) qu'il doit lui faire suivre. À partir de ces données et de son niveau d'expertise, le concepteur doit alors choisir une architecture de la chaîne d'actionnement a priori adéquate. La méthode propose d'aider le concepteur dans cette tâche. En effet, en explicitant clairement les cheminements des apports d'énergie et de modulations de puissance, l'analyse structurelle permet au concepteur d'établir les conditions d'inversion du modèle, de déterminer quelles sont les sorties indépendamment commandables par les entrées disponibles et de répondre à des questions de type :

- Combien d'actionneurs faut-il pour atteindre les objectifs du cahier des charges ?
- Où placer, le long de la chaîne d'actionnement, les actionneurs et les capteurs nécessaires ?

L'analyse structurelle fournit ainsi de nouveaux critères de sélection, voire de synthèse d'architecture. En assurant un minimum de vérification quant à l'adéquation architecture/cahier des charges, elle permet d'éliminer, sans aucun calcul numérique, un certain nombre d'architectures qui se révéleraient, par la suite, inappropriées.

#### b- Aide à la rédaction du cahier des charges

L'analyse structurelle permet également de déterminer les ordres de dérivation minimaux que doivent présenter les sorties spécifiées pour générer, à partir du modèle inverse, des entrées physiquement réalisables. Ceci constitue à nouveau une aide précieuse pour le concepteur puisqu'il sait alors quel type de trajectoires il peut imposer à son système. En connaissance de cause, il peut ainsi adapter le cahier des charges ou bien, si cela n'est pas possible, revenir sur l'architecture du système. Quoi qu'il en soit, dans les deux cas, le concepteur est capable de détecter exactement la cause d'une mauvaise

formulation de son problème de conception. Il peut vérifier si son problème est bien posé en termes d'inversion, et ce sans effectuer une seule simulation. L'utilité a notamment été démontrée par [86] dans le cas d'une direction assistée électrique pour automobile.

### c- Dimensionnement

Un problème de dimensionnement d'une chaîne d'actionnement consistait à sélectionner dans un catalogue les sous-systèmes ou les composants adéquats de la chaîne d'actionnement de manière à satisfaire le cahier des charges imposé [91]. En réalité, dans ce type de problème, les données sont la charge à actionner et les objectifs que cette charge doit accomplir (données fixées par le cahier des charges) tandis que les inconnues sont :

- Au niveau de développement système : les sous-systèmes de la chaîne d'actionnement tels que dispositifs de fourniture d'énergie, modulateurs de puissance, actionneurs et éléments d'adaptation d'énergie.
- Au niveau de développement sous-système : les composants de chaque sous-système.

Jusqu'à présent, les méthodes de sélection (méthodes de Newton et de Coeuillet) étaient basées sur des critères statiques : les grandeurs maximales à ne pas dépasser étaient établies à partir du cahier des charges dans des situations de vie jugées critiques. À ce titre, ces critères n'exploitaient pas la totalité des spécifications (ne prennent pas en compte des critères dynamiques) et pouvaient rendre pratique la sélection non pertinente. Pour contrer cet inconvénient, une approche par modèle inverse est possible. Un modèle inverse peut intuitivement être défini comme un second modèle qui, mis en cascade avec le modèle direct, permet d'obtenir en sortie les variables d'entrée du modèle direct. Globalement, le processus d'inversion consiste alors à partir du modèle direct, à dériver successivement les variables de sortie et à effectuer un certain nombre de transformations de manière à exprimer les variables physiques d'entrée en fonction des variables physiques de sortie, de leurs dérivées et des variables d'état. De nombreux travaux témoignent d'ores et déjà de l'intérêt porté à la résolution mathématique d'un tel problème d'inversion [85, 86].

Amara et SCAVARDA proposent une méthode de dimensionnement basée sur des modèles Bond Graph inverses [87], puis cette méthode est formalisée par [88, 89, 90].

La méthode de dimensionnement par modèles Bond Graph inverses se déroule en quatre étapes [91] :

#### *Étape 1 : Adéquation*

Le cahier des charges porte généralement sur la caractérisation de la charge à mouvoir et sur les tâches que celle-ci doit effectuer. Aussi, après lecture du cahier des charges, le concepteur peut construire le modèle Bond Graph de la charge et connaît la trajectoire que celle-ci doit suivre. L'étape d'adéquation consiste alors à partir du modèle bond graph causal de la charge (Figure 2.23) de manière à vérifier que le modèle est inversible et que les trajectoires spécifiées dans le cahier des charges ont été correctement choisies. Le concepteur s'assure ainsi qu'il y a une certaine adéquation et que les spécifications fixées par le cahier des charges sont effectivement atteignables par la structure du modèle choisi.

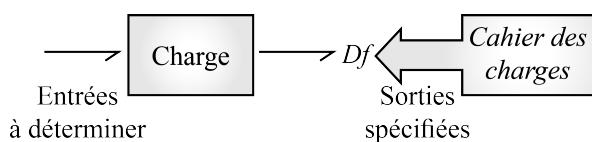


Figure 2.23: Dimensionnement par modèles Bond Graph inverses : étape d'adéquation modèle/cahier des charges.

### Étape 2 : Spécification

Cette étape consiste à construire graphiquement, grâce au principe de bicausalité, le modèle Bond Graph inverse associé au problème de dimensionnement puis à le simuler de manière à calculer les évolutions des variables d'effort  $e_{out}(t)$  et de flux  $f_{out}(t)$  nécessaires en entrée de la charge pour que celle-ci suive parfaitement la trajectoire spécifiée  $y_{spec}(t)$  (Figure 2.24). Cette étape permet ainsi de remonter les spécifications au niveau de l'entrée de la charge alors qu'elles étaient initialement rédigées au niveau de sa sortie.

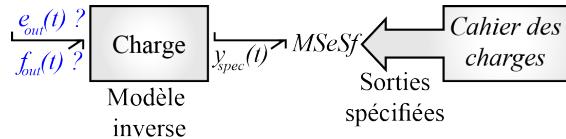


Figure 2.24: Dimensionnement par modèles bond graph inverse : étape de spécification.

### Étape 3 : Sélection

Exploiter le modèle Bond Graph inverse ainsi obtenu pour déterminer directement les inconnues du problème de dimensionnement et sélectionner un actionneur à partir des spécifications imposées. Pour cela, comme les variables d'effort et de flux requises en entrée de la charge correspondent aux variables d'effort et de flux à fournir en sortie de l'actionneur, il suffit de comparer les évolutions calculées aux caractéristiques de sortie d'actionneurs existants (Figure 2.25). L'étape de sélection consiste ainsi à consulter les données constructrices d'une bibliothèque d'actionneurs et à comparer les maximums des variables calculées  $e_{out}(t)$ ,  $f_{out}(t)$  et  $e_{out}(t).f_{out}(t)$  aux variables d'effort  $e_{max,out}$ , de flux  $f_{max,out}$  et de puissance  $P_{max,out}$  maximales que peuvent fournir chacun des actionneurs de cette bibliothèque. Seuls les actionneurs capables de fournir au moins  $\max\{e_{out}(t)\}$ ,  $\max\{f_{out}(t)\}$  et  $\max\{e_{out}(t).f_{out}(t)\}$  sont retenus. Les autres actionneurs ne satisfaisant pas ces critères de sélection sont automatiquement éliminés : ils ne permettront pas de réaliser la tâche spécifiée dans le cahier des charges. Parmi les actionneurs retenus, plusieurs sont finalement sélectionnés sur de nouveaux critères non pris en compte jusqu'alors (encombrement, prix, etc.). Ces derniers devront être testés individuellement grâce à l'étape de validation.

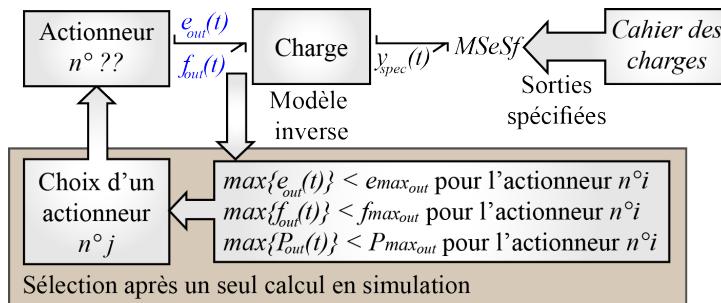


Figure 2.25: Dimensionnement par modèles bond graph inverse : étape de sélection.

### Étape 4 : Validation

Si un actionneur a été choisi à l'étape précédente, celui-ci n'a été sélectionné que sur des critères portant sur ses variables de sortie. Il convient donc de vérifier ce qui se passe, entre autres, au niveau de ses variables d'entrée, de ses variables internes et de ses temps de fonctionnement, grâce à la dernière étape du dimensionnement de l'actionneur, étape dite de validation. Pour cela, cette étape consiste à (Figure 2.26) :

1. Modéliser l'actionneur choisi à l'étape de sélection ;
2. Coupler le modèle de l'actionneur au modèle de la charge ;

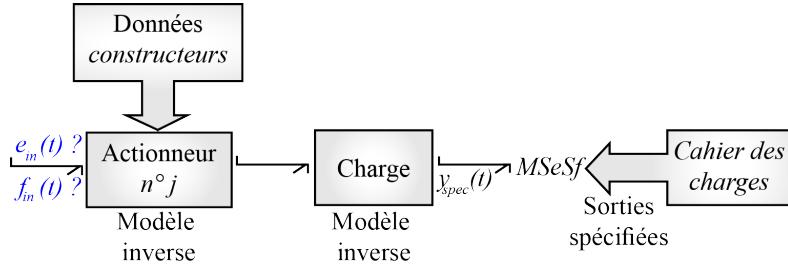


Figure 2.26: Dimensionnement par modèles bond graph inverse : étape de validation.

3. Vérifier que le modèle Bond Graph charge + actionneur est structurellement inversible et que le cahier des charges est en adéquation avec la structure de ce modèle (même démarche que pour l'étape d'adéquation) ;
4. Si le modèle charge + actionneur est inversible, construire le modèle Bond Graph inverse correspondant et le simuler de manière à calculer les évolutions des variables d'effort  $e_{in}(t)$  et de flux  $f_{in}(t)$  requises en entrée de l'actionneur pour que la charge suit parfaitement la trajectoire spécifiée ;
5. Valider ou infirmer le choix de l'actionneur en traçant les évolutions calculées  $e_{in}(t)$  et  $f_{in}(t)$  dans un plan (effort, flux) et en superposant le gabarit d'entrée de l'actionneur précédemment sélectionné (Figure 2.27 où les courbes sont paramétrées en fonction du temps).

#### d- Détermination de la commande en boucle ouverte

La méthode d'inversion permet de déterminer également la commande en boucle ouverte du système. Il suffit pour cela :

1. De modéliser chaque composant préalablement dimensionné.
2. De déclarer la commande, c'est-à-dire l'entrée du groupe fonctionnel « modulateur de puissance » comme une inconnue et de considérer les dispositifs de fourniture d'énergie et les trajectoires de sortie du système comme des données connues (c.-à-d. en langage Bond Graph, les sources du système sont laissées inchangées tandis que les détecteurs des variables de sortie sont transformés en doubles sources imposant les trajectoires spécifiées).
3. D'inverser le modèle global conformément aux entrées et sorties du système qui ont été déclarées (notons qu'alors seul le modèle du dispositif de fourniture d'énergie n'est pas inversé).
4. de lancer le calcul inverse en simulation afin d'obtenir l'évolution de la commande en boucle ouverte nécessaire pour, qu'à partir de l'apport d'énergie présupposé, le système suive exactement les trajectoires imposées par le cahier des charges.

Remarque : En réalité, plusieurs cas peuvent apparaître lors de la détermination de la commande en boucle ouverte :

- soit le dispositif de fourniture d'énergie est fixé (cas étudié ci-dessus) ;
- soit le dispositif de fourniture d'énergie n'est pas fixé et reste à dimensionner.

Dans ce dernier cas, la détermination de la commande en boucle ouverte n'est plus aussi directe que ce nous avons présenté précédemment. Cependant, deux manières de procéder peuvent être imaginées :

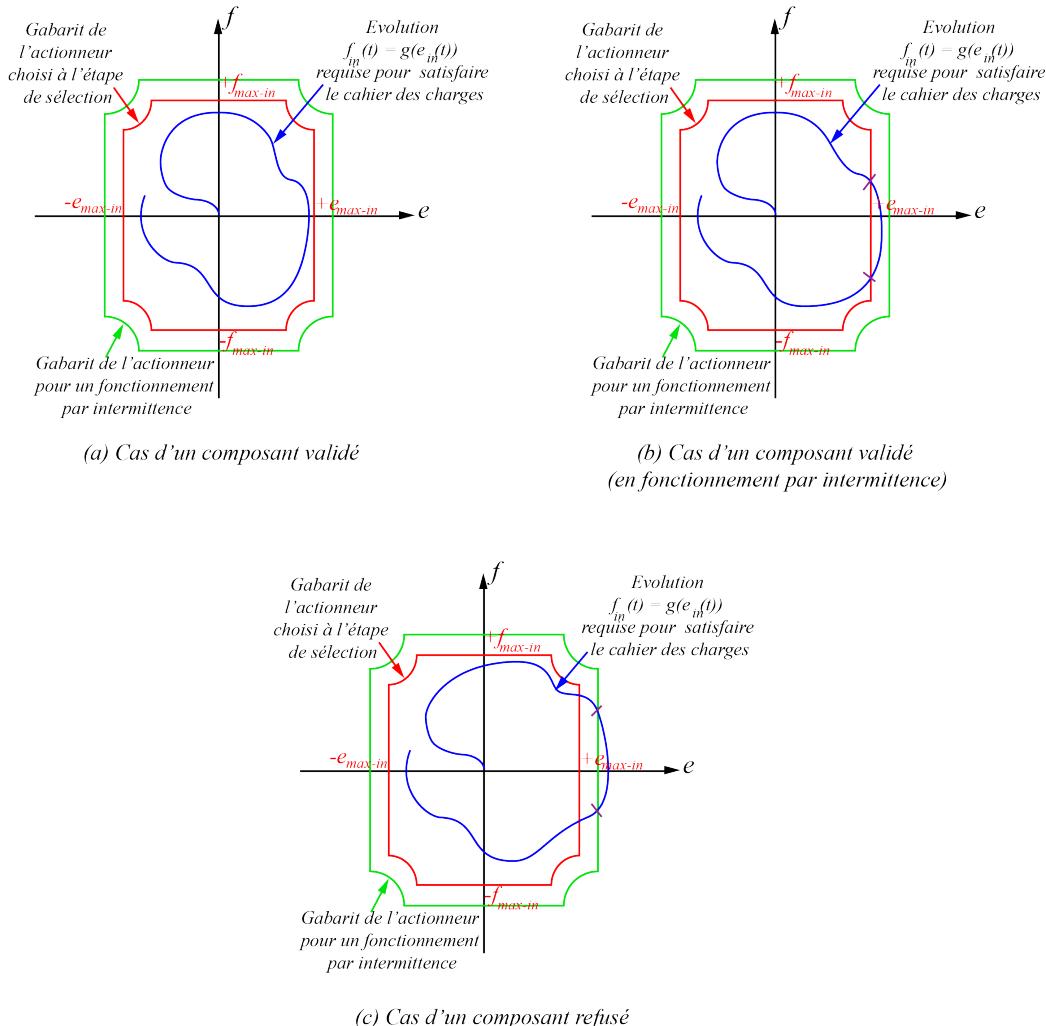


Figure 2.27: Dimensionnement par modèles Bond Graph inverses : étape de validation (suite).

- une première où des hypothèses sur la commande sont formulées afin de dimensionner le dispositif de fourniture d'énergie. Une fois ce dispositif de fourniture d'énergie fixé, la commande en boucle ouverte est ensuite déterminée selon les étapes évoquées précédemment ;
- une deuxième où des spécifications supplémentaires sont prises en compte afin de remonter les objectifs simultanément sur la commande et le dispositif de fourniture d'énergie.

### 2.3.7 Exemple d'application : système d'actionnement d'un axe d'une machine à commande numérique

Considérons ici la modélisation d'un système d'actionnement d'un axe d'une machine à commande numérique (Figure 2.28). Supposons que le problème de dimensionnement est de trouver un moteur électrique adéquat pour assurer la fonction d'actionnement et que le problème de commande est de commander le système pour atteindre une position désirée.

#### a- Modélisation

La démarche de modélisation d'un système en Bond Graph est illustrée sur le système d'actionnement d'un axe d'une machine à commande numérique (Figure 2.28). Ce système permet de déplacer une masse mobile positionnée au niveau d'une liaison glissière. Il se compose d'une source de tension contrôlable, d'un moteur à courant continu, d'un système de transmission vis-écrou, d'une table mobile et

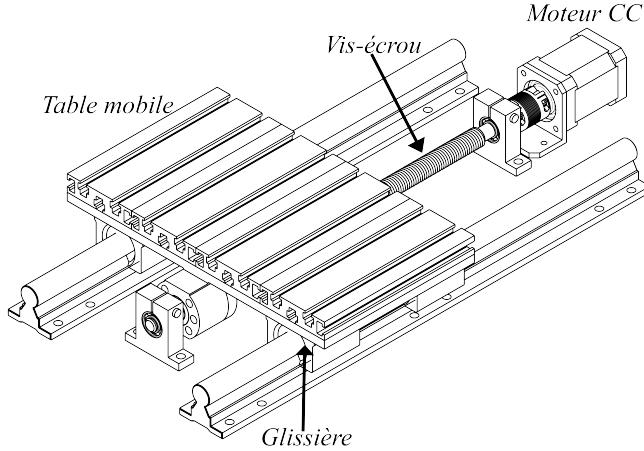


Figure 2.28: Système d'actionnement d'un axe d'une machine à commande numérique.

des capteurs de déetections (capteurs de vitesse et de position). Le schéma technologique du système est illustré sur la Figure 2.29 :

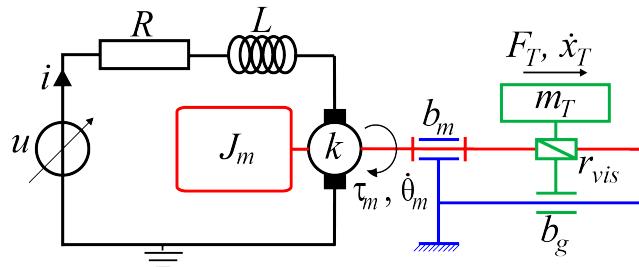


Figure 2.29: Schéma technologique d'un système d'actionnement d'un axe d'une machine à commande numérique actionnée par un moteur à courant continu.

Ce système est caractérisé par :

- Un circuit électrique composé d'une source de tension  $u$ .
- Un moteur à courant continué modélisé par une résistance électrique  $R$  et une bobine de paramètre constant  $L$  en série.
- Un couplage électromécanique de constante de couple  $k$ .
- Un arbre de sortie moteur, d'inertie  $J_m$ , supposé infiniment raide et soumis à des frottements visqueux de coefficient  $b_m$ .
- Un système vis-écrou de rapport  $r_{vis}$
- Le frottement au niveau de la liaison glissière de coefficient  $b_g$ .
- La masse de la table mobile  $m_T$ .

Pour modéliser ce système en langage Bond Graph, il convient tout d'abord de construire son modèle Word Bond Graph (Figure 2.30). Conformément à l'approche systémique, celui-ci est composé de quatre composants qui sont : la source de tension, le moteur électrique, le système vis-écrou et la

table mobile. Un capteur peut éventuellement être ajouté si nous supposons vouloir observer la vitesse de translation et la position de la table mobile.

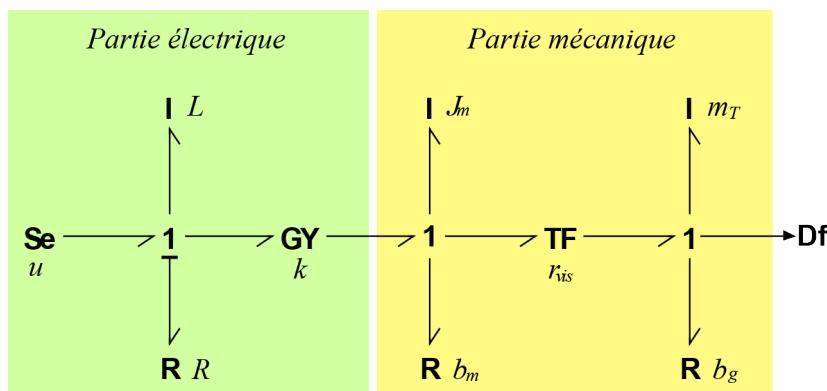


Figure 2.30: Modèle word bond graph d'un système d'actionnement d'un axe d'une machine à commande numérique actionnée par un moteur à courant continu.

La seconde phase de construction du modèle consiste à associer un modèle bond graph à chaque composant et à identifier ainsi les différents phénomènes énergétiques impliqués au sein de ceux-ci. Ici, après une analyse phénoménologique du système, nous obtenons un modèle Bond Graph (Figure 2.31) où :

Pour la partie électrique, la tension imposée aux bornes du circuit d'induit est représentée par une source d'effort  $Se$ . Au niveau du moteur électrique, la dissipation d'énergie par effet joule au niveau de la résistance interne du moteur est représentée par un élément  $R$ . Le stockage d'énergie magnétique dans l'inductance du moteur est représenté par un élément inertiel  $I$ . Une jonction 1 permet de coupler ces éléments qui sont parcourus par un même courant. L'élément  $GY$  permet de décrire le couplage électromagnétique au sein du moteur permettant de transformer le courant électrique en couple mécanique avec un rapport constant  $k$ .

Pour la partie mécanique, le stockage de l'énergie cinétique de l'arbre en rotation est représenté par un élément inertiel  $I$ . La dissipation d'énergie par frottement visqueux au niveau de la liaison pivot est représentée par un élément  $R$ . Une jonction 1 permet de coupler ces éléments de même vitesse. L'élément  $TF$  représente le comportement du système vis-écrou considéré comme parfait. De manière similaire à la représentation BG de la dynamique de l'arbre moteur en rotation, la représentation BG de la dynamique de la masse mobile est réalisée par le couplage à l'aide d'une jonction 1 d'un élément  $I$  et d'un élément  $R$ . Le stockage d'énergie cinétique de la masse mobile en translation est représenté par un élément inertiel  $I$  et la dissipation par frottement visqueux de la masse sur son support est représentée par un élément  $R$ , l'élément  $Df$  caractérise le capteur de vitesse, supposé ici idéal.



*Figure 2.31: Modèle Bond Graph acausal d'un système d'actionnement d'un axe d'une machine à commande numérique actionnée par un moteur à courant continu.*

D'après le modèle Bond Graph acausal (Figure 2.31), on sait qu'il y a deux phénomènes de stockage d'énergie. Par contre le Bond Graph acausal ne nous renseigne pas si les deux variables d'état sont indépendantes (causalité intégrale possible sur les 2  $I$ ) ou non (un  $I$  devra être mis en causalité dérivée). C'est l'affectation de la causalité qui le dira. La propagation de la causalité permet d'aboutir au bond graph causal de la Figure 2.32 :

Le modèle Bond Graph de la Figure 2.32 met en évidence un problème d'affectation de causalité sur une jonction 1 à droite. L'élément  $I$  est en causalité dérivée. Celle-ci peut être résolue, car les deux

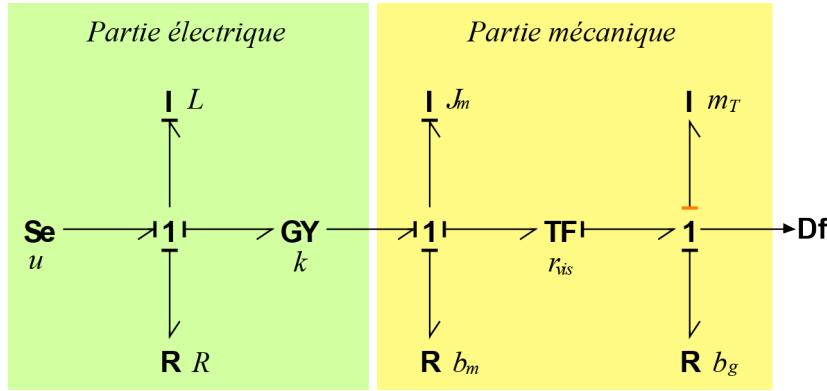


Figure 2.32: Modèle bond graph causal d'un système d'actionnement d'un axe d'une machine à commande numérique actionnée par un moteur à courant continu.

éléments  $I$  ( $J_m$  et  $m_T$ ) sont placés en série, en faisant l'addition de leurs deux valeurs (résistances et inerties) en respectant le rapport de transformation.

Les expressions de l'énergie cinétique et la fonction de dissipation de la partie mécanique est données par (Équations 2.13 et 2.14) :

$$E_c = \frac{1}{2} J_m \dot{\theta}_m^2 + \frac{1}{2} m_T \dot{x}^2 \quad (2.13)$$

$$D = \frac{1}{2} b_m \dot{\theta}_m^2 + \frac{1}{2} b_g \dot{x}^2 \quad (2.14)$$

Avec,  $\dot{\theta} = \frac{\dot{x}}{r_{vis}}$  donc :

$$E_c = \frac{1}{2} \left( \frac{J_m}{r_{vis}^2} + m_T \right) \dot{x}^2 = \frac{1}{2} J_{eq} \dot{x}^2 \quad (2.15)$$

$$D = \frac{1}{2} \left( \frac{b_m}{r_{vis}^2} + b_g \right) \dot{x}^2 = D = \frac{1}{2} b_{eq} \dot{x}^2 \quad (2.16)$$

Les paramètres  $J_{eq} = \frac{J_m}{r_{vis}^2} + m_T$  et  $b_{eq} = \frac{b_m}{r_{vis}^2} + b_g$  représentent l'inertie et le frottement équivalents de deux éléments  $I$  ( $J_m$  et  $m_T$ ) et  $R$  ( $b_m$  et  $b_g$ ). Le Bond Graph simplifié est donné sur la Figure 2.33.

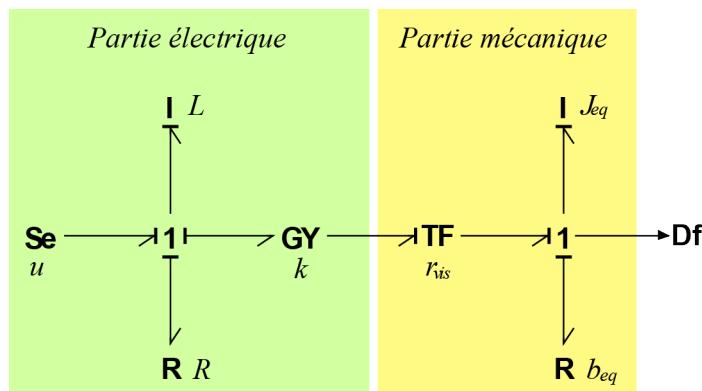


Figure 2.33: Modèle bond graph simplifié causal d'un système d'actionnement d'un axe d'une machine à commande numérique actionnée par un moteur à courant continu.

**Remarque :** Le problème de la causalité dérivée (Figure 2.32) peut être résolu par l'addition d'un élément parasite (élément  $C$  par exemple) entre les deux inerties.

Une simulation du comportement dynamique du système a été faite sous le logiciel *20-Sim* pour les paramètres présentés dans le Tableau 2.4.

Composants	Grandeurs	Valeurs
Moteur	Inductance	$L = 488 \times 10^{-6} H$
	Résistance	$R = 12.4 \Omega$
	Constante de couple frottement pivot	$k = 18.1 \times 10^3 N.m.A^{-1}$ $b_m = 27 \times 10^4 N.m.s.rad^{-1}$
Vis-écrou	Inertie du moteur	$J_m = 2.25 \times 10^7 kg.m^2$
	Rapport de réduction	$r_{vis} = 0.019$
Charge	Masse de la table	$m_T = 2 kg$
	frottement glissière	$b_g = 0.0015 N.s.m^{-1}$

Tableau 2.4: Valeurs des grandeurs du dispositif (Moteur à courant continu+Vis-écrou).

La Figure 2.34 montre la vitesse de translation de la table mobile pour une tension constante de 12V, pour cette tension la vitesse maximale atteinte par la table mobile est de 0.122m/s.

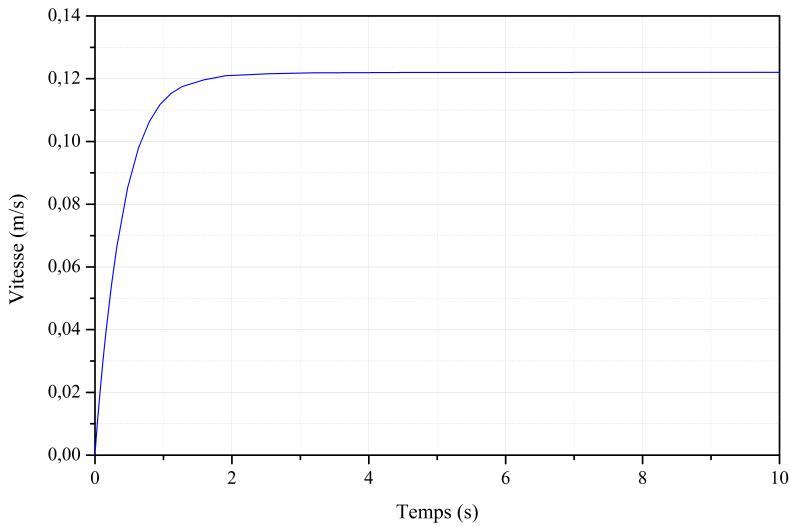


Figure 2.34: Simulation du système: vitesse de translation de la table mobile.

## b- Dimensionnement

Comme nous l'avons présenté à la section 2.3.6, la méthode permet de sélectionner, de vérifier puis de valider chaque composant de la chaîne d'actionnement. Pour notre exemple, supposons que le problème de dimensionnement est de sélectionner le moteur électrique approprié pour assurer le mouvement de la table mobile. La tâche critique à effectuer consiste à déplacer la table mobile de masse  $m_T$  d'un point  $P_0$  de coordonnées ( $x_0 = 0, y_0 = 0$ ) à un point  $P_1$  de coordonnées ( $x_1 = 0.02m, y_1 = 0$ ) puis revenir vers le point  $P_0$  en un temps  $T = 1s$  (Figure 2.35) suivant le profil de vitesse décrit par la Figure 2.36. Pour sélectionner le moteur adéquat à cette situation, on va suivre les étapes décrites à la section 2.3.6.

### Étape 1 : Adéquation

L'analyse du modèle Bond Graph direct de la Figure 2.37 indique :

- qu'il existe une ligne de puissance entrée/sortie (c.-à-d. un chemin d'acheminement de l'énergie) entre l'élément Bond Graph portant la variable d'entrée  $u(t)$  et celui portant la variable de sortie  $v_T(t)$ .

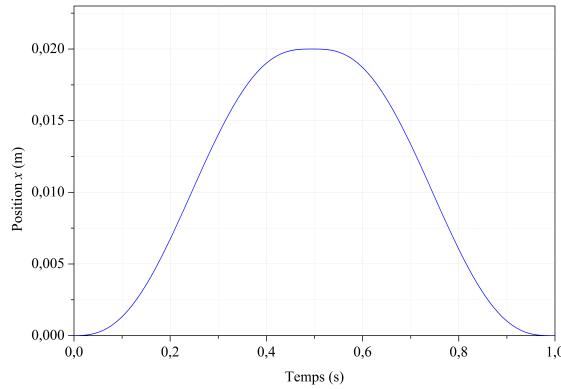


Figure 2.35: Trajectoire de la position de la table imposée par le cahier des charges .

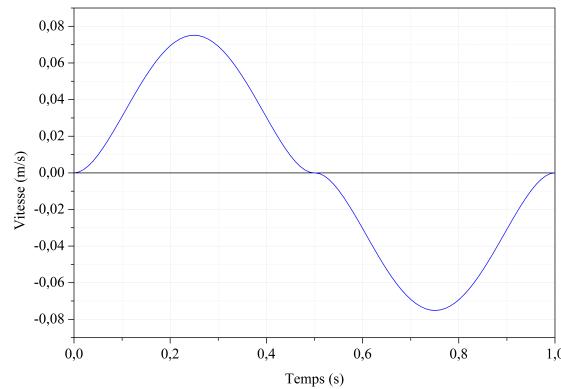


Figure 2.36: Profil de vitesse spécifié.

- qu'il existe un chemin causal entré/sorti (c.-à-d. une relation analytique) entre la variable d'entrée  $u(t)$  et la variable de sortie  $v_T(t)$ .

Le modèle est donc structurellement inversible [91] par rapport au couple de variables  $(u(t)$  et  $v_T(t))$ . Il est aussi inversible par rapport au couple de variables  $(\tau_m$  et  $v_T(t))$ . Connaissant la vitesse de déplacement de la table ( $v_T(t)$ ), on peut calculer le couple moteur ( $\tau_m$ ) que doit fournir l'actionneur pour répondre aux critères de dimensionnement établis par le cahier des charges.

### Étape 2 : Spécification

L'objectif de l'étape de spécification est de calculer le couple  $\tau_m(t)$  et la vitesse angulaire  $\omega_m(t)$  requit en sortie du moteur électrique tout en respectant les contraintes de vitesse établies par le cahier des charges (Figures 2.35 et 2.36). Pour ce faire, il convient donc d'inverser le modèle précédent (Figure

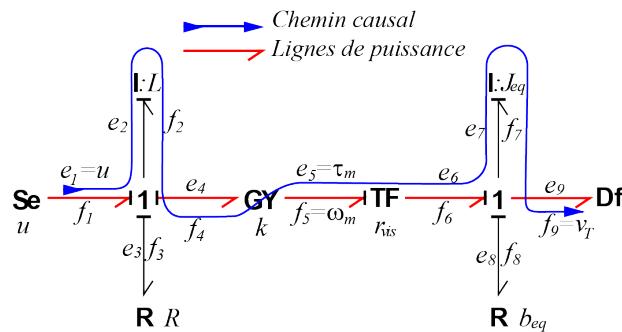


Figure 2.37: Dimensionnement du moteur électrique : étape d'adéquation.

2.37) par rapport au couple de variables ( $\tau_m$  et  $v_T(t)$ ) tel qu'il est montré à la Figure 2.38.

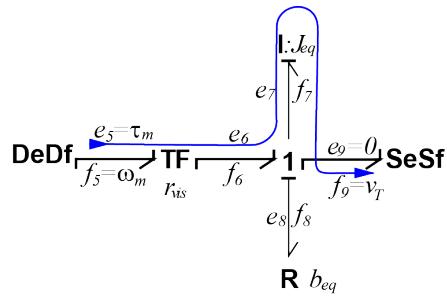


Figure 2.38: Dimensionnement du moteur électrique : étape de spécification.

Du Bond Graph inverse de la Figure 2.38, les équations pour calculer le couple et la vitesse angulaire du moteur sont obtenues, à partir de la jonction 1 on peut écrire (Équation 2.17),

$$\begin{cases} e_6 = e_7 + e_8 + e_9 \\ f_6 = f_7 = f_8 = f_9 \end{cases} \quad (2.17)$$

Comme  $f_9 = v_T$ ,  $e_9 = 0$  (capteur supposé idéal),  $e_8 = b_{eq}f_8 = b_{eq}v_T$  et  $e_7 = J_{eq} \frac{df_7}{dt} = J_{eq} \frac{dv_T}{dt}$  alors :

$$\begin{cases} e_6 = b_{eq}v_T + J_{eq} \frac{dv_T}{dt} \\ f_6 = v_T \end{cases} \quad (2.18)$$

à partir de l'élément  $TF$  on a :

$$\begin{cases} \tau_m = e_5 = r_{vis}e_6 \\ \omega_m = f_5 = \frac{v_T}{r_{vis}} \end{cases} \quad (2.19)$$

Le schéma bloc du calcul est montré dans la Figure 2.39.

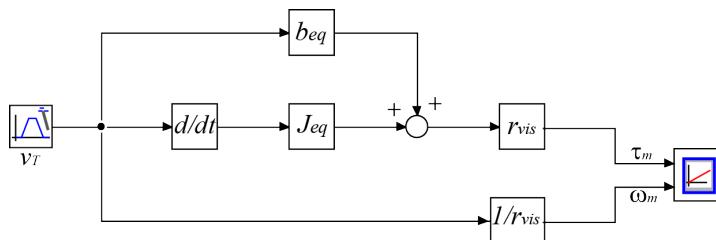


Figure 2.39: Schéma bloc du calcul de  $\tau_m$  et  $\omega_m$ .

La Figure 2.40 montre les spécifications en sortie du moteur électrique obtenues après la simulation numérique.

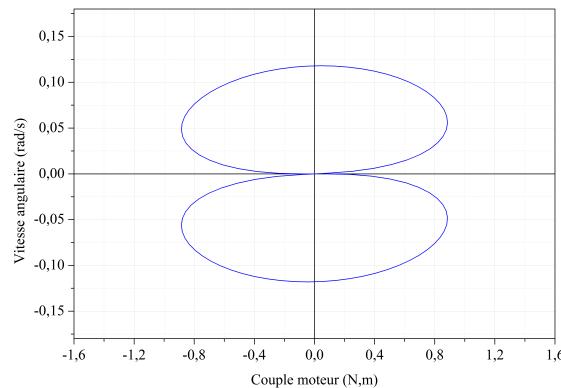


Figure 2.40: Domaines de fonctionnement requis en sortie du moteur électrique.

### Étape 3 : Sélection

En comparant les spécifications précédemment calculées (Figure 2.40) aux gabarits de sortie de deux moteurs électriques à courant continu de 25A et de 45A (Figure 2.41), on peut alors constater que le moteur de 25A est clairement sous-dimensionné pour satisfaire le cahier des charges. Le moteur sélectionné est donc celui de 45A.

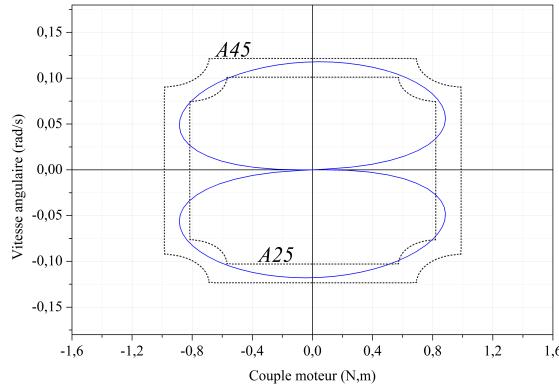


Figure 2.41: Dimensionnement du moteur électrique : étape de sélection.

### Étape 4 : Validation

Enfin, pour valider le choix du moteur de 45A, il convient de le modéliser et d'inverser à nouveau le modèle, cette fois-ci par rapport au couple de variables  $(v_T(t), u(t))$  où  $u(t)$  est la tension d'entrée du moteur (Figure 2.42). À partir de l'élément *GY* et la jonction 1 de la partie électrique, on peut écrire (Équations 2.20 et 2.21) :

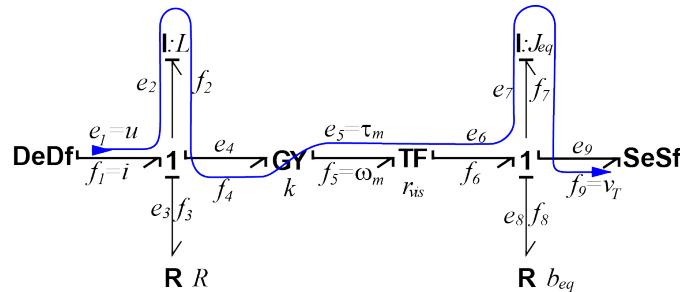


Figure 2.42: Dimensionnement du moteur électrique : étape de validation.

$$\begin{cases} e_4 = kf_5 \\ f_4 = \frac{e_5}{k} \end{cases} \quad (2.20)$$

$$\begin{cases} e_1 = e_2 + e_3 + e_4 \\ f_1 = f_2 = f_3 = f_4 \end{cases} \quad (2.21)$$

Avec  $f_1 = i(t)$ ,  $e_1 = u(t)$ ,  $e_2 = L \frac{di(t)}{dt}$  et  $e_3 = Ri(t)$ , donc:

$$\begin{cases} u(t) = L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) + e_4 \\ i(t) = f_4 \end{cases} \quad (2.22)$$

Le schéma bloc du calcul (Figure 2.43) de ce nouveau modèle permet de calculer les évolutions de la tension  $u(t)$  et de l'intensité de courant  $i(t)$  requises en entrée du moteur d'assistance pour satisfaire le cahier des charges. La Figure 2.44 montre les performances attendues pour la partie électrique du moteur pour le profil de la vitesse imposé.

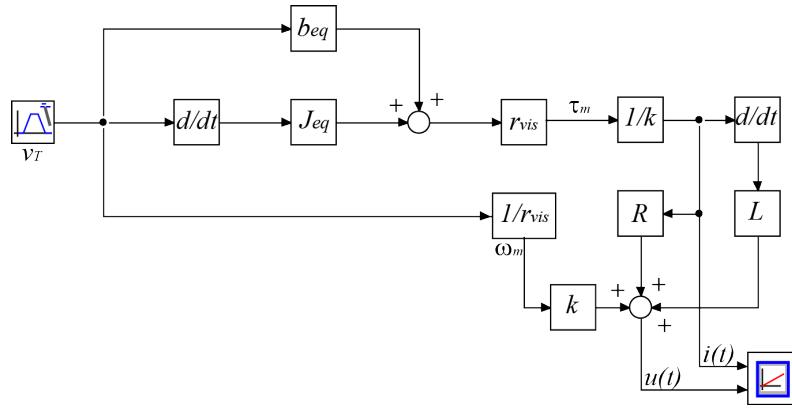
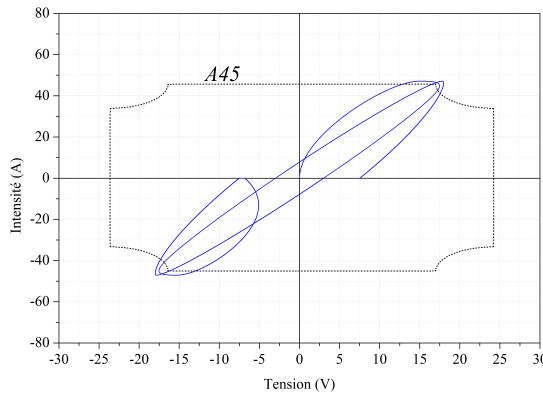
Figure 2.43: Schéma bloc du calcul de  $u(t)$  et  $i(t)$ ..

Figure 2.44: Domaines de fonctionnement requis en entrée du moteur électrique.

En superposant les performances calculées avec le gabarit d'entrée du moteur de 45A, on peut alors déduire que celui-ci est globalement validé.

### c- Commande

Pour commander un système par le Bond Graph Inverse, il faut suivre les étapes suivantes :

1. Choisir la grandeur du système à commander (pour notre exemple on va contrôler la position de la table mobile), cette grandeur devient une source d'entrée pour le Bond Graph Inverse.
2. Commencer à construire le Bond Graph Inverse, en se basant sur le principe de la bicausalité.
3. Extraire les équations bicausal à partir du Bond Graph Inverse et les exploiter pour développer la commande du système en boucle ouverte.
4. Pour établir la loi de commande de boucle fermée, on impose la dynamique de l'erreur.

Pour notre exemple (Figure 2.28), l'objectif est de contrôler la position  $x$  de la table mobile, du Bond Graph Inverse de la Figure 2.42, les équations de la commande en boucle ouverte sont obtenues.

$$\begin{cases} e_6 = e_7 + e_8 + e_9 \\ f_6 = f_7 = f_8 = f_9 \end{cases} \quad (2.23)$$

Comme  $f_9 = v_T$ ,  $e_9 = 0$  (capteur supposé idéal),  $e_8 = b_{eq}f_8 = b_{eq}v_T$  et  $e_7 = J_{eq} \frac{df_7}{dt} = J_{eq} \frac{dv_T}{dt}$  alors.

$$\begin{cases} e_6 = b_{eq}v_T + J_{eq} \frac{dv_T}{dt} \\ f_6 = v_T = \dot{x} \end{cases} \quad (2.24)$$

Pour une commande en boucle fermée, on impose la dynamique de l'erreur  $\epsilon = x_{ref} - x$ , en écrivant  $\ddot{\epsilon} + k_1\dot{\epsilon} + k_2\epsilon = 0$ , où  $k_1$  et  $k_2$  représentent la dynamique des correcteurs choisis. De cette manière, si on remplace  $v_T$  par  $\dot{x}_{ref} - \dot{\epsilon}$  dans 2.24 l'expression de la commande est :

$$\begin{cases} e_6 = b_{eq}\dot{x} + J_{eq}(\ddot{x}_{ref} - \ddot{\epsilon}) = b_{eq}\dot{x} + J_{eq}(\ddot{x}_{ref} + k_1(\dot{x}_{ref} - \dot{x}) + k_2(x_{ref} - x)) \\ f_6 = v_T = \dot{x} \end{cases} \quad (2.25)$$

À partir de l'élément  $TF$ , on a :

$$\begin{cases} \tau_m = e_5 = r_{vis}e_6 \\ \omega_m = f_5 = \frac{v_T}{r_{vis}} \end{cases} \quad (2.26)$$

À partir de l'élément  $GY$  et la jonction 1 de la partie électrique on peut écrire 2.27 et 2.28 :

$$\begin{cases} e_4 = kf_5 \\ f_4 = \frac{e_5}{k} \end{cases} \quad (2.27)$$

$$\begin{cases} u(t) = L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) + e_4 \\ i(t) = f_4 \end{cases} \quad (2.28)$$

Nous pouvons déduire le schéma bloc de la commande du modèle bicausal du Bond Graph à partir de ces équations (Figure 2.45).

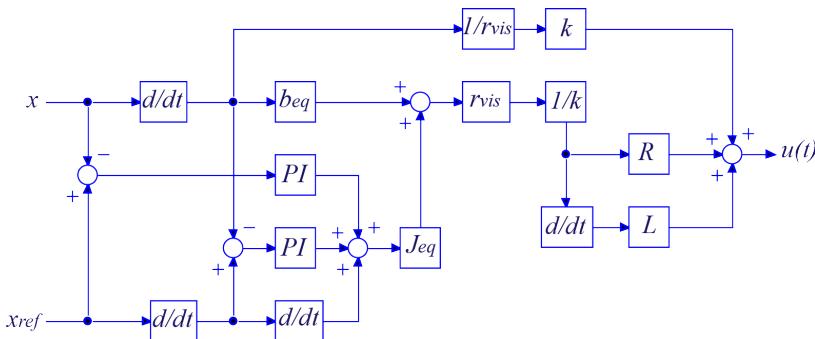


Figure 2.45: Schéma bloc de la commande issue de Bond Graph Inverse.

La structure générale de la commande est présentée sur la Figure 2.46.

Afin d'obtenir l'évolution de la commande en boucle fermée, une simulation du modèle est faite (Figure 2.47), on constate que le système suit exactement la trajectoire imposée ( $x_{ref}$ ).

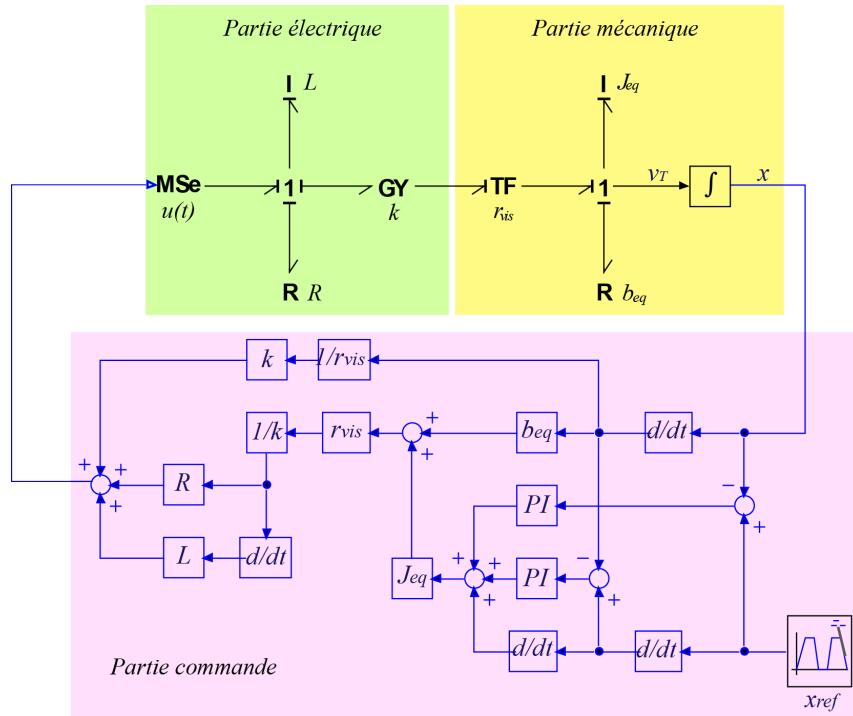


Figure 2.46: Modèle bond graph du système et sa commande.

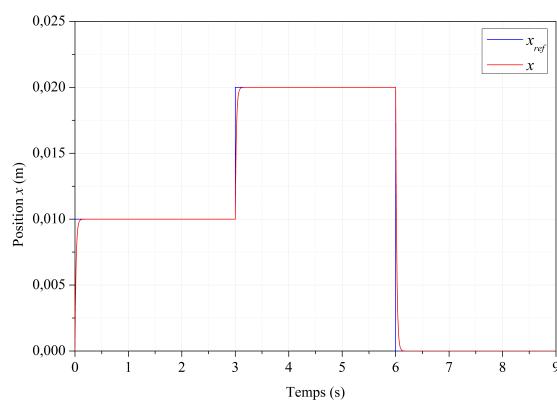


Figure 2.47: Position de la table mobile.