Royaume du Maroc
Ministère de l'Éducation nationale,
du Préscolaire et des Sports

année scolaire *2023-2024*

Établissement : *Lycée SKHOR qualifiant*

Devoir Surveillé N°3 - S2
2ème année baccalauréat Sciences Mathématiques

–Mécanique–

Etude énergétique d'un pendule pesant(2010SR)

On considère un pendule pesant effectuant des oscillations libres non amorties . Le pendule étudié est une tige AB homogène de masse m et de longueur $AB = l = 60,0cm$ pouvant tourner dans un plan vertical autour d'un axe Δ horizontal passant par son extrémité A , figure (2).
Le moment d'inertie de la tige par rapport à l'axe Δ est : $J_\Delta = \frac{1}{3}.ml^2$
On étudie le mouvement du pendule dans un repère lié au référentiel terrestre que l'on suppose galileen . On repère à chaque instant la position du pendule par l'abscisse angulaire θ qui est l'angle que fait la tige avec la verticale passant par A . On choisit le plan horizontal passant par G_0 , position du centre d'inertie de la tige AB dans la position d'équilibre stable , comme état de référence pour l' énergie potentielle de pesanteur($E_p = 0$) .
On admet dans le cas de faibles oscillations que $cos\theta \approx 1 - \frac{\theta^2}{2}$ et on prend $g = 9,80m.s^{-2}$

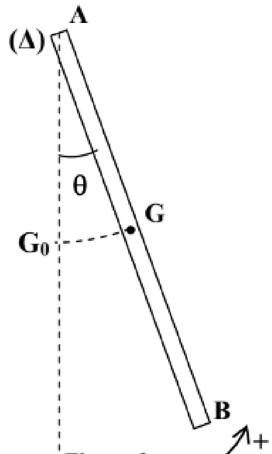


Figure 2

1- Equation différentielle du mouvement du pendule

1. Montrer que l'expression de l'énergie potentielle de pesanteur Ep de la tige peut s'écrire sous la forme $E_p = m.g.\frac{l}{2}(1 - cos(\theta))$.
2. Dans le cas de faibles oscillations , écrire l'expression de l'énergie mécanique E_m de la tige à un instant t en fonction de m , l , g , θ et $\frac{d\theta}{dt}$
3. Déduire l'équation différentielle vérifiée par l'abscisse angulaire dans le cas de faibles oscillations.

2- Etude énergétique

On lance la tige AB à partir de sa position d'équilibre stable avec une vitesse initiale qui lui permet d'acquérir une énergie mécanique E_m . La figure 3 donne le diagramme de l'évolution de l'énergie potentielle E_p et de l'énergie mécanique E_m de la tige AB pour deux expériences différentes .Dans chaque expérience la tige est lancée à partir de sa position d'équilibre stable avec une vitesse initiale donnée ; elle acquiert dans chaque expérience une énergie mécanique donnée :
- dans l'expérience (1) : $E_m = E_{m1}$
- dans l'expérience (2) : $E_m = E_{m2}$

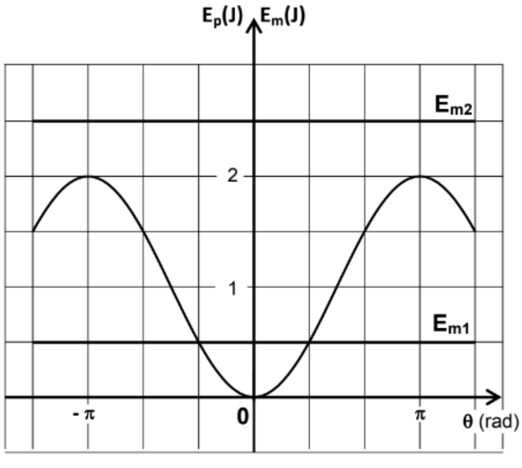


Figure 3

1. Déterminer à l'aide du graphe, de la figure (3), la nature du mouvement de la tige dans chaque expérience .
2. Préciser à partir du graphe la valeur maximale de l'abscisse angulaire θ du pendule dans l'expérience (1). En déduire la masse m de la tige.
3. Au cours de l'expérience (2) , l'énergie cinétique de la tige varie entre une valeur minimale $E_{c(min)}$ et une valeur maximale $E_{c(max)}$.Trouver la valeur de Ec(min) et celle de Ec(max)

Changement des conditions initiales du mouvement d'un oscillateur non amorti(2010SN)

Un système mécanique oscillant est un système qui effectue un mouvement périodique de va et vient autour de sa position d'équilibre stable.
Un pendule élastique horizontal est constitué d'un solide (S) de masse m lié à l'extrémité d'un ressort à spires non jointives , de masse négligeable de raideur K . L'autre extrémité du ressort est liée à un support fixe ,figure (2).
A l'équilibre , le centre d'inertie G du solide(S) coïncide avec l'origine O du repère d'espace $(O, \vec{i})$ lié à la Terre .
On écarte le solide (S) de sa position d'équilibre dans le sens positif jusqu'à ce que son centre d'inertie G coïncide avec un point A situé à une distance d du point O . On considère les deux cas suivants :
- 1er cas : On abandonne à t = 0 le corps (S) au point A sans vitesse initiale .
- 2ème cas : On lance à t = 0 , le corps (S) à partir du point A dans le sens négatif avec une vitesse initiale $\vec{v_A}$.

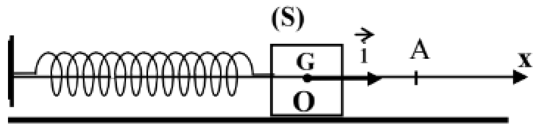


Figure 2

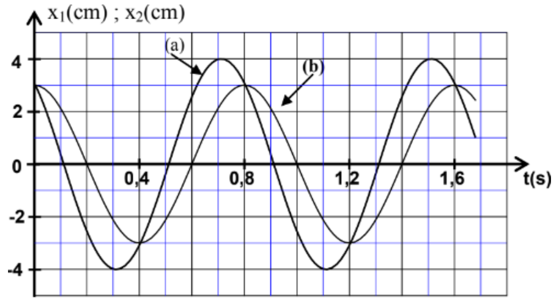


Figure 3

Dans les deux cas le solide (S) effectue un mouvement oscillatoire autour de sa position d'équilibre O .

1. Etablir l'équation différentielle que vérifie l'abscisse x du centre d'inertie G du solide .
2. Trouver l'expression littérale de la période propre T0 de l'oscillateur pour que l'équation $x(t) = X_m.cos(\frac{2.\pi}{T_0}.t + \phi)$ soit solution de l'équation différentielle.
3. On obtient à l'aide d'un dispositif approprié la courbe d'évolution des abscisses x_1 et x_2 du centre d'inertie G du corps (S) successivement dans le 1er et le 2ème cas comme l'indique la figure (3) . Préciser , en justifiant la réponse , la courbe correspondante au mouvement de l'oscillateur dans le 1er cas .
4. On considère l'oscillateur dans le 2ème cas et on désigne l'amplitude de son mouvement par x_{m2} et la phase à l'origine des dates par ϕ_2.
   (a) Déterminer à partir du graphe, figure (3) la valeur de la distance d et la valeur de l'amplitude x_{m2} .
   (b) En appliquant la conservation de l'énergie mécanique , montrer que l'amplitude x_{m2} peut s'écrire sous la forme :
   $$X_{m2} = \sqrt{\frac{m.v_A^2}{K} + d^2}$$
   (c) Trouver l'expression de $tan(\phi_2)$ en fonction de d et x_{m2} .

Mesure de la masse d'un corps à l'intérieur d'une navette spatiale en orbite(2008SR)

Lors des recherches à l'intérieur d'une navette spatiale en orbite autour de la Terre, un astronaute mesure les masses de quelques corps en utilisant un dispositif constitué d'un compartiment (A) de masse m = 200 g, susceptible de glisser sans frottements sur un plan horizontal. Le compartiment est relié aux extrémités de deux ressorts (R1) et (R2) de même raideur K et de même longueur à vide l0, et dont les autres extrémités sont fixées à deux supports

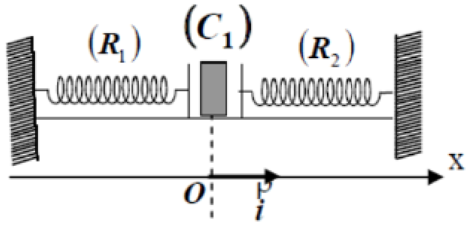


Figure 1

fixes. A l'équilibre, les deux ressorts sont allongés.
Avant l'utilisation du dispositif en orbite, il a été testé sur Terre. Un corps (C_1) de masse $M = 100g$, est posé à l'intérieur du compartiment (A).
Le système (S) formé du compartiment (A) et du corps (C_1) est écarté de sa position d'équilibre G_0 coïncidant avec l'origine de l'axe (O,i) , vers la droite d'une distance X_m et lâché sans vitesse initiale.

Le centre de gravité G du système (S), effectue des oscillations autour de sa position d'équilibre de telle sorte que les ressorts restent allongés. Un ordinateur muni d'une carte d'acquisition, permet d'obtenir la courbe représentative des variation de l'abscisse x du centre de gravité G au cour du temps (Figure 2).

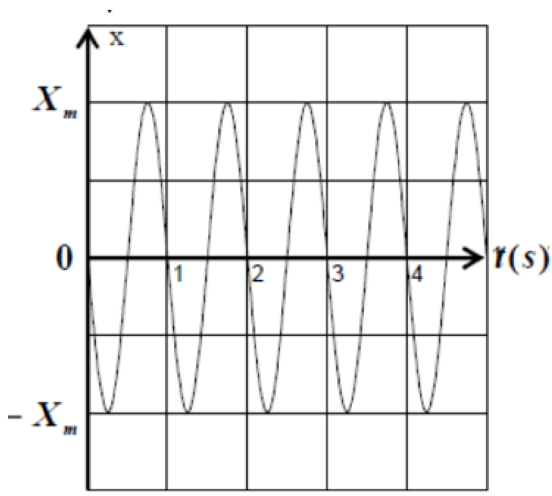


Figure 2

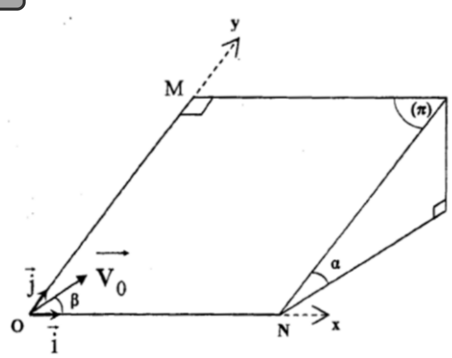
1. Montrer que les deux ressorts ont la même longueur initiale à l'équilibre : $\Delta l_1 = \Delta l_2 = \Delta l_0$
2. Montrer que l'abscisse x du centre de gravité G du système (S) vérifie l'équation différentielle :

$$\ddot{x} + \frac{2K}{m + M_1}x = 0$$

3. La solution de cette équation différentielle s'écrit sous la forme : $x(t) = X_m.cos(\frac{2.\pi.t}{T_0} + \phi)$.
   (a) Trouver à partir de la courbe, la phase ϕ du mouvement.
   (b) En utilisant l'équation différentielle et sa solution, trouver l'expression de la période propre T_0 du mouvement en fonction de : M_1, m et K.
   (c) Par exploitation du graphe de la figure 2, calculer la valeur de la raideur K du ressort. On prendra $\pi^2 = 10$.
   (d) L'astronaute réalise la même expérience, en utilisant le même corps (C_1) et le même dispositif, dans une navette spatiale en orbite autour de la terre, il trouve la même valeur de la période T_0. Que conclure ?
   (e) L'astronaute utilise le même dispositif précédent pour mesurer la masse M_2 d'un corps (C_2) en orbite, il trouve que la période propre des oscillations du système est $T'0$=$1,5s$. En déduire la valeur de M2.

mouvement d'un sportif sur un plan incliné (2009 SR)

Un sportif de masse $m = 60kg$, glisse sur un plan (π) incliné d'un angle $\alpha = 12°$ par rapport au plan horizontal. Le plan (π) a la forme d'un rectangle de longueur OM et de largeur $ON = 20m$ (Figure 1).
On modélise le sportif par un solide (S) de masse m et de centre d'inertie G. On étudie le mouvement de G dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$: où $(O, \vec{i})$ est horizontal, et $(O, \vec{j})$
parallèle à la ligne de plus grande pente du plan (π).
On néglige tous les frottements. On prendra :$g = 9,80m.s^{-2}$



1- Etude d'un mouvement plan sur un plan incliné : A l'instant t = 0, le centre d'inertie G du sportif passe en O origine du repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ avec une vitesse de vecteur $\vec{v_0}$, contenu dans le plan

(π), et faisant un angle β avec l'axe $(O, \vec{i})$.

1. Montrer que les composantes du vecteur vitesse, à un instant t, vérifient les équations différentielles : $\frac{dV_x}{dt} = 0$ et $\frac{dV_y}{dt} = -g.sin\alpha$

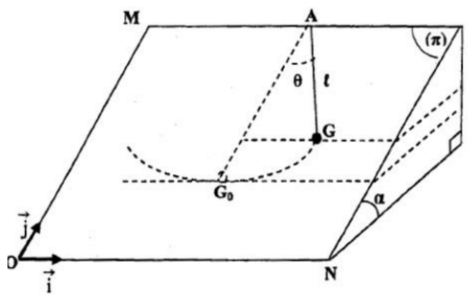
2. Trouver l'équation de la trajectoire de G dans le repère $(o, \vec{i}, \vec{j})$

3. Dans le cas où $\beta = 60°$:

   (a) Calculer la valeur de v_0 pour que G passe au point N.

   (b) Trouver les expressions des coordonnées x_S et y_S, du point S, sommet de la trajectoire de G, en fonction de v_0, α, β et g.

2 - Etude d'un mouvement oscillatoire sur un plan incliné :



Le sportif tient le bout d'une corde dont l'autre extrémité est fixée au point A se trouvant au haut du plan incliné (π). Il commence à effectuer des petites oscillations autour de sa position d'équilibre AG_0 parallèle à l'axe $(O, \vec{j})$.
Pour étudier le mouvement du sportif tenant la corde, on le modélise par un pendule simple, constitué d'un solide de masse m et de centre d'inertie G, accroché à un fil inextensible, de masse négligeable, parallèle au plan (π) et de longueur l = 12 m (Figure 2)
On repère, à chaque instant, la position de G par l'abscisse angulaire θ formé entre la corde et la droite (AG_0).
On prendra comme état de références de l'énergie potentielle de pesanteur $(Epp = 0)$, le plan horizontal passant par G_0.
Le moment d'inertie J_Δ par rapport à l'axe de rotation (Δ) passant par A est : $J_\Delta = ml^2$

1. Montrer que l'énergie mécanique du pendule s'écrit

$$\frac{1}{2}.ml^2.[\frac{g.sin\alpha}{l}.\theta^2 + (\frac{d\theta}{dT})^2]$$

2. En déduire l'équation différentielle vérifiée par l'abscisse angulaire.

3. Trouver, par utilisation de l'équation différentielle et de sa solution, l'expression de T_0. Calculer sa valeur.

4. Calculer, au passage du centre d'inertie G par G_0, l'intensité de la tension $\vec{T}$ appliquée par la corde sur le solide, dans le cas où $\theta_m = 12°$.