PARTIE I : SAUT DU PLONGEUR DANS L'AIR

Dans tout l'exercice le mouvement du centre d'inertie du plongeur de masse $m = 70kg$ est étudié dans le repère d'axes (Ox, Oy) .

On prendra pour la valeur du champ de pesanteur $g = 9,81m.s^{-2}$ et on considèrera que le référentiel terrestre est galiléen. On note y_0 l'ordonnée du centre d'inertie du plongeur à l'instant où il quitte le tremplin et v_0 sa vitesse initiale formant un angle $\alpha = 30°$ avec l'horizontale.

On donne $v_0 = 5m.s^1$ et $y_0 = 4,0m$.

① Établir les équations horaires du mouvement du centre d'inertie G du plongeur.

- système étudié : plongeur
- les forces extérieurs : seul son poids $\vec{P}$ il est en chute libre
- d'après la 2^{me}loi de Newton on a :

$$m\vec{a} = \vec{P} \Rightarrow m\vec{a} = m\vec{g} \Rightarrow \vec{a} = \vec{g}$$

en projetant sur les axes on trouve

$$\vec{a} = \begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = -g \end{cases}$$

En intégrant on obtient les composantes du vecteur vitesse

$$\vec{v} = \begin{cases} v_x = constante = v_0cos(\alpha) \\ v_y = -gt + v_0sin(\alpha) \end{cases}$$

et par intégration encore une fois on obtient

$$\vec{OG} = \begin{cases} x = v_0cos(\alpha) \times t \\ y = \frac{1}{2}gt^2 + v_0sin(\alpha) \times t + y_0 \end{cases}$$

② Déterminer l'équation cartésienne de la trajectoire. En déduire sa nature. à partir de l'équation $x(t)$ on tire $t = \frac{x}{v_0cos(\alpha)}$ qu'on remplace dans sl'expression de $y(t)$ on trouve

$$y = \frac{-g \times x^2}{2v_0^2 \times cos^2(\alpha)} + x \times tan\alpha + y_0 \Rightarrow y = -0,26x^2 + 0,58x + 4$$

③ Déterminer les coordonnées du centre d'inertie G du plongeur lorsque ses mains touchent l'eau on donne que $y_1 = 1m$ (voir figure 1). Quand les mains touchent l'eau : $y_1 = 1 = -0,26x_1^2 + 0,58x_1 + 4$

$$-0,26x_1^2 + 0,58x_1 + 4 - 1 = 0 \Rightarrow -0,26x_1^2 + 0,58x_1 + 3 = 0 \Rightarrow x_1 = 4,7m$$

l'autre valeur étant négative est impossible

④ Calculer la durée tp du plongeon.

$$t_1 = \frac{x_1}{v_0cos(\alpha)} \Rightarrow t_1 = \frac{4,7}{5cos(30)} \Rightarrow t_1 = 1,1s$$

⑤ Déterminer la hauteur maximale H atteinte par le plongeur au cours du plongeon. La hauteur est maximale quand y est maximale $v_y = 0m/s$ soit

$$0 = -gt + v_0sin(\alpha) \Rightarrow gt = v_0sin(\alpha) \Rightarrow t = \frac{v_0sin(\alpha)}{g} \Rightarrow t = 0,25s$$

on remplace dans $y(t)$

$$y_{max} = -5(0,25)^2 + 5sin(30)(0,25) + 4 = ...$$

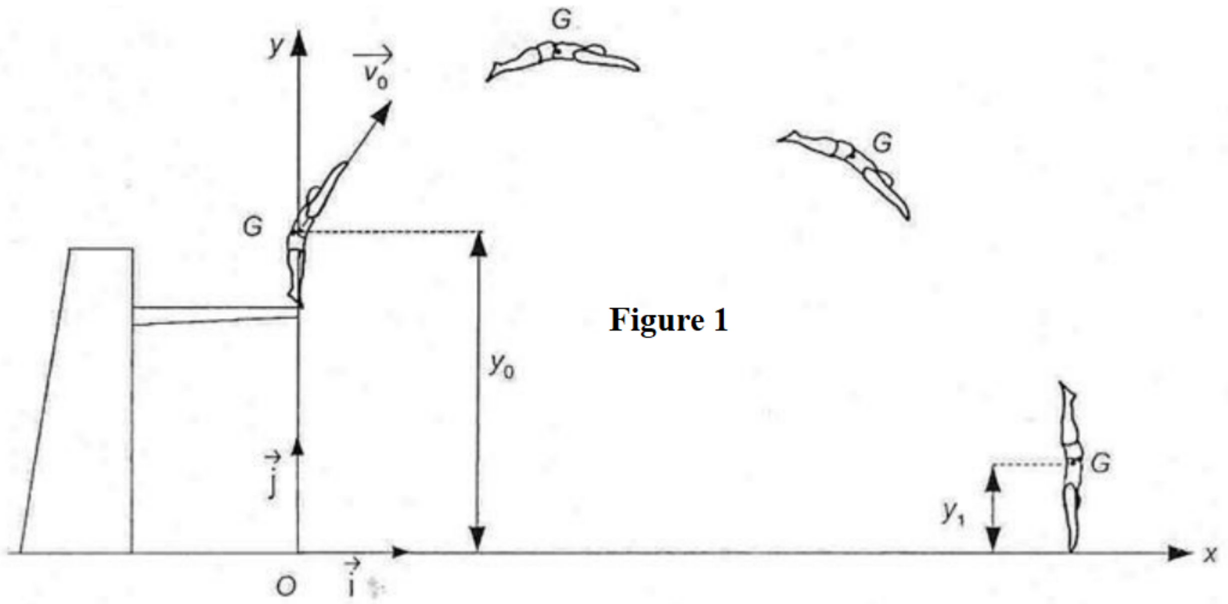

Figure 1

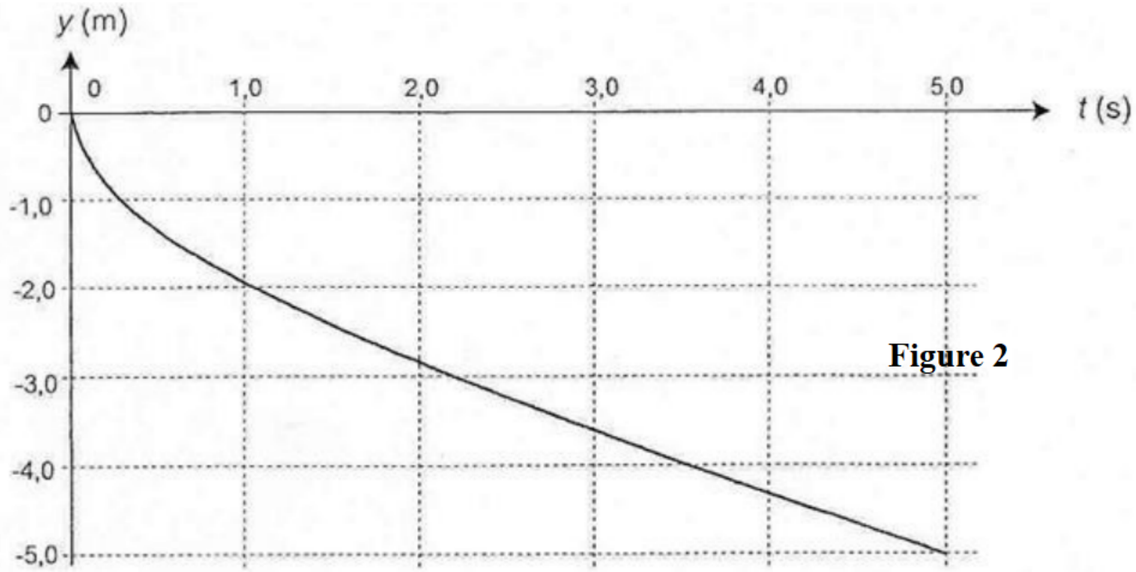

Figure 2

PARTIE II: MOUVEMENT DU PLONGEUR DANS L'EAU

Le mouvement du centre d'inertie G du plongeur est considéré comme vertical dans cette partie. La profondeur du bassin dans lequel évolue le plongeur est de 5,0 m.

1. La figure 2 résulte d'une simulation et représente l'évolution de l'altitude y du centre d'inertie du plongeur au cours du temps.

   On précise que l'on a pris comme origine des dates l'instant où le centre d'inertie atteint la surface de l'eau.

   Pour pouvoir remonter, le plongeur doit redresser son buste.

   On estime que le plongeur agit activement pour amorcer sa remontée 1,0 s après que son centre d'inertie a atteint la surface de l'eau.

   De plus, on considère que le centre d'inertie du plongeur se situe toujours à 1,0 m de ses mains tendues.

   Au moment où il amorce sa remontée, les mains du plongeur ont-elles atteint le fond du bassin ? Justifier la réponse.

   Lorsque le plongeur amorce sa remontée à la date t = 1,0 s, et d'après la courbe de la figure 2 on trouve $y = 2,0m$

   son centre d'inertie est donc situé à 2 m sous la surface de l'eau (et ses mains sont situées à $2m + 1m = 3m$ sous la surface de l'eau.

La profondeur du bassin étant de 5,0 m, ainsi , les mains du plongeur ne touchent pas le fond lorsqu'il amorce sa remontée.

② On se propose de modéliser le mouvement du centre d'inertie du plongeur dans l'eau s'il n'amorçait pas de remontée.

On note V le volume du plongeur et ρ la masse volumique de l'eau de la piscine.

Le plongeur est soumis, entre autres, à une force de frottement fluide dont le sens est opposé celui du vecteur vitesse et dont la valeur peut être modélisée par $f = k.v_y^2$ où k comme une constante. et v_y est la composante du vecteur vitesse du centre d'inertie sur l'axe vertical orienté vers le haut

2.1 Nommer les forces qui s'exercent sur le plongeur lors de ce mouvement. Les représenter, sans souci d'échelle, en son centre d'inertie G. Dans l'eau le plongeur est soumis à

- son poids $\vec{P} = m\vec{g}$
- La poussée d'Archimède : $\vec{F_A} = -\rho \times V \times \vec{g}$
- la force de frottement fluide $\vec{f}$ d'intensité $f = k.v_y^2$

2.2 En appliquant la deuxième loi de Newton, montrer que l'équation différentielle qui régit le mouvement du centre d'inertie du plongeur est donnée par :

$$\frac{m}{k}.\frac{dv_y}{dt} - v_y^2 = \frac{g}{k}.(\rho.V - m)$$

.

d'après la 2^{me}loi de Newton on a :

$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{F_A} + \vec{f}$$

$$m\frac{d\vec{v_y}}{dt} = m\vec{g} - \rho.V\vec{g} + \vec{f}$$

en projetant sur (Oy) orienté vers le haut

$$m\frac{dv_y}{dt} = -mg + \rho.Vg + kv_y^2 \Rightarrow \frac{m}{k}.\frac{dv_y}{dt} - v_y^2 = \frac{g}{k}.(\rho.V - m)$$

2.3 En déduire, en la justifiant, l'expression en régime permanent de la valeur v_p du vecteur vitesse. En régime permanent $v_p = constante$ donc

$$\frac{dv_p}{dt} = 0 \Rightarrow -v_p^2 = \frac{g}{k}.(\rho.V - m) \Rightarrow v_p = -\sqrt{\frac{g(m - \rho V)}{k}}$$

2.4 Calculer v_p . On prendra $\rho = 10^3 kg.m^{-3}$; $V = 6,5.10^{-2} m^3$ et $k = 150 kg.m^{-1}$. $v_p =_0, 57m/s$

2.5 En exploitant la courbe , dire si le plongeur a atteint le régime permanent avant que ses mains ne touchent le fond. Le régime permanent correspond àa la partie rectiligne de la courbe de la figure 2 en utilisant la règle on remarque que ce régime est atteint à la date $t = 3s$ du coup on lit sur la même courbe $y_P = -3,5m$

L'extrémité de ses mains se trouvent alors à $-3,5 - 1 = -4,5 > -5m$.

les mains du plongeur ne touchent pas le fond .

③ La méthode de résolution numérique d'Euler, permet de calculer de façon approchée la valeur algébrique de la vitesse instantanée verticale v_y à différentes dates. On note :

- $v_y(t_n)$ la valeur algébrique de la vitesse à l'instant de date t_n ;
- la valeur algébrique $v_y(t_{n+1})$ à la date $t_{n+1} = t_n + \Delta t$ est calculée en utilisant la relation suivante :

$$v_y(t_{n+1}) = v_y(t_n) + a_y(t_n).\Delta t$$

où a_y est la composante de l'accélération selon l'axe (Oy) etΔt est le pas de calcul.

Compte tenu des valeurs numériques , l'équation différentielle obtenue précédemment permet d'obtenir la relation suivante :

$$a_y(t) = 2,14v_y^2(t) - 0,7$$

$\Delta t = 1,2.10^{-2}$ s.

En utilisant la relation (1) pour le calcul de $v_y(t_{n+1})$ et la relation (2) pour celui de $a_y(t_n)$, compléter avec des valeurs numériques le tableau suivant : la méthode d'Euler :

$$v_y(t_(n+1)) = a_y(t_n)\Delta t + v_y(t_n) = 9,75 \times 1,2.10^{-2} - 2,21 = -2,09$$

$$a_y(t_(n+1)) = 2,14 \times v_y(t_(n+1))^2(t) - 0,7 = 2,14(-2,09)^2 - 0,7 = 8,65$$

Date en s	$v_y enm.s^{-1}$	$a_y enm.s^{-2}$
$t_n = 0,144s$	$v_y(t_n) = -2,21$	$a_y(t_n) = 9,75$
$t_(n+1) = 0,156s$	$v_y(t_(n+1)) = -2,09$	$a_y(t_(n+1)) = 8,65$
$t_n = 0,168s$	$v_y(t_(n+2)) = -1,99$	$a_y(t_(n+2)) = 7,77$