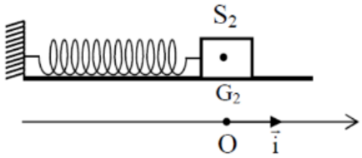
Les Systèmes mécaniques oscillants

Exercice 1 (2011SR): Etude d'un oscillateur mécanique.

On fixe à l'extrémité libre d'un ressort de masse négligeable, à spires non jointives et de raideur K, un solide (S2) de masse $m_2 = 182g$. l'autre extrémité est fixée à un support fixe (Figure 2). Le solide (S2) est susceptible de glisser sur un plan horizontal.



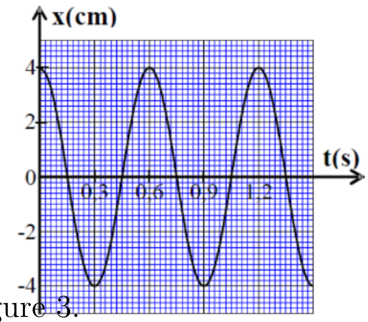


Figure 3

On écarte le solide (S2) de sa position d'équilibre, d'une distance Xm, et on l'abandonne sans vitesse initiale. Pour étudier le mouvement du centre de gravité G2 du solide (S2), on choisit un repère galiléen (O,i), tel que G2 coïncide à l'équilibre avec l'origine O. On repère la position de G2 à un instant t dans le repère
(O,i) , par son abscisse x.
L'équation différentielle du mouvement de G2 s'écrit sous la forme : $\ddot{x}+\frac{K}{m_2}.x = 0$, et sa solution est : $x(t) = X_m.cos(\frac{2\pi}{T_0}.t + \phi)$
Une étude expérimentale a permis de tracer la courbe représentée sur la figure 3.

1. Déterminer graphiquement les grandeurs suivantes :

   L'amplitude X_m, la période propre T_0 et la phase ϕ à l'origine des dates.

2. En déduire la valeur de la raideur K du ressort.

3. On choisit comme état de référence de l'énergie potentielle de pesanteur, le plan horizontal auquel appartient G2 à l'équilibre, et comme état de référence de l'énergie potentielle d'élasticité, lorsque le ressort est non déformé.

   (a) Montrer que l'expression de l'énergie cinétique E_C du solide (S_2) s'écrit sous la forme : $E_c = \frac{K}{2}.(X_m^2 - x^2)$.

   (b) Trouver l'expression de l'énergie mécanique E_m du système solide (S_2) – ressort en fonction de X_m et K, et déduire la valeur de la vitesse V_{G2} au passage de G_2 à la position d'équilibre dans le sens positif.

Exercice 2 (2023SN):Etude du mouvement d'une balançoire

Un enfant oscille à l'aide d'une balançoire (figure2).

Figure 2

On modélise la balançoire avec l'enfant par un pendule formé par un corps solide (S) de masse m et de centre d'inertie G , suspendu en un point O par une tige rigide, de masse négligeable et de longueur pouvant effectuer un mouvement de rotation dans un plan vertical autour d'un axe horizontal Δ passant par O (figure 3) .
On étudie le mouvement du pendule dans un repère $(G_0; \vec{k})$ lié à un référentiel terrestre supposé galiléen.
On écarte le pendule de sa position d'équilibre stable d'un angle petit $\theta_0 = 9°$, dans le sens positif, puis on le lâche sans vitesse initiale à l'instant de date $t_0 = 0$. On repère la position du pendule à un instant de date t par l'abscisse angulaire θ. On néglige tous les frottements et on choisit le plan horizontal passant par G_0 (position de G à l'équilibre stable) comme état de référence de l'énergie potentielle de pesanteur $E_{pp} = 0$.

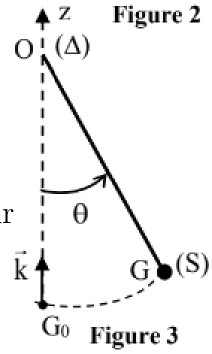


Figure 3

Données :

- Le moment d'inertie du pendule par rapport à l'axe (Δ) est : $J_\Delta = ml^2$

- Accélération de la pesanteur $g = 10m.s^{-2}$; $l = 2,4m$.
- Pour les oscillations de faible amplitude, on prend $cos(\theta) \approx 1 - \frac{\theta^2}{2}$; θ en radian.

1. Montrer que l'expression de l'énergie potentielle de pesanteur du pendule à un instant t pour les oscillations de faible amplitude est : $E_{pp} = \frac{1}{2}.mgl\theta^2$.
2. En exploitant la conservation de l'énergie mécanique du pendule :
   (a) Déterminer la vitesse angulaire maximale $\dot{\theta}_{max}$ du centre d'inertie G.
   (b) Etablir l'équation différentielle du mouvement vérifiée par l'abscisse angulaire $\theta(t)$.
   (c) Calculer la période propre de ce pendule sachant qu'il est analogue à un pendule simple de longueur et l de masse m.

Exercice 3 (2013SR): Etude du mouvement d'un pendule pesant.

L'homme a utilisé les hologes depuis longtemps, il a inventé plusieurs types tel que : l'horloge solaire, l'horloge hydraulique, l'horloge à sable... jusqu'à ce que le savant Huygens inventa l'horloge murale en 1657. Le fonctionnement de cette horloge dépend de son balancier, qu'on modélise par un pendule pesant, effectuant des petites oscillations libres sans frottements.

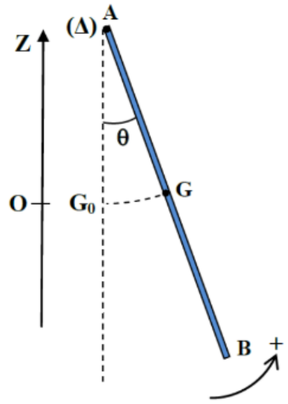


Figure 1

Le pendule étudié est constitué d'une barre homogène AB, de masse m=$0,203kg$, et de longueur $AB = l = 1,5m$, susceptible de tourner dans un plan vertical autour d'un axe horizontal (Δ), fixe et passant par son extrémité A (figure 1).
On étudie le mouvement du pendule dans un repère lié à la terre et supposé galiléen.
On repère à chaque instant le pendule par son abscisse angulaire θ.
Le moment d'inertie de la barre par rapport à l'axe (Δ) est : $J_\Delta = \frac{1}{3}.ml^2$
On admet que dans le cas des petites oscillations que : $sin\theta \approx \theta$ avec θ en rad. Figure 1 On désigne l'intensité de pesanteur par la lettre g.
On écarte le pendule de sa position d'équilibre stable d'un petit angle θ_m dans le sens positif, et on le lâche sans vitesse initiale à un instant choisi comme origine des temps.

1- Etude dynamique du pendule pesant :

1-1- Par application de la relation fondamentale de la dynamique de rotation, établir l'équation différentielle du mouvement du pendule.

1-2- Préciser la nature du mouvement du pendule pesant, et écrire son équation horaire $\theta(t)$ en fonction de t, θ_m et la periode propre T_0.

1-3- Montrer que l'expression de la période propre T_0 est : $T_0 = 2.\pi.\sqrt{\frac{2.l}{3g}}$

1-4- Calculer la valeur de la longueur L du pendule simple synchrone au pendule pesant étudié.

2-Etude énergétique du pendule pesant :

On choisit le plan horizontal contenant le point G0, position du centre de gravité G de la barre à la position d'équilibre stable, comme état de référence de l'énergie potentielle de pesanteur ($E_{PP} = 0$).
La figure 2 représente les variations de l'énergie potentielle de pesanteur $E_{PP}(\theta)$ du pendule étudié dans l'intervalle $[-\theta_m, \theta_m]$ Par exploitation du diagramme d'énergie :

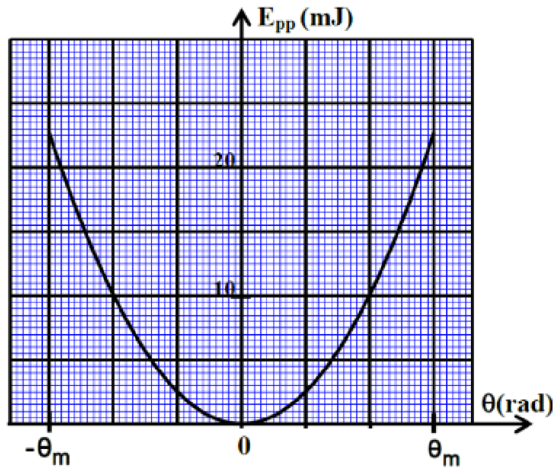


Figure 2

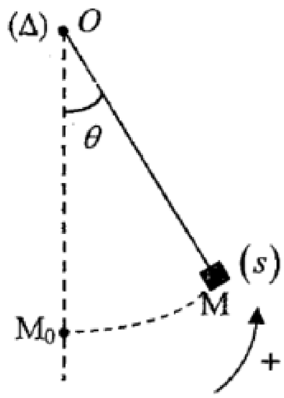
2-1- Donner la valeur de l'énrgie mécanique E_m du pendule.

2-2- Trouver la valeur absolue de la vitesse angulaire $\dot{\theta}$ du pendule au passage par la position repérée par l'abscisse angulaire : $\theta = \frac{2}{3}.\theta_m$

Exercices Supplémentaires

Exercice 4 (2009SR):Etude d'un oscillateur mécanique

Les oscillateurs sont utilisés dans plusieurs domaines d'industrie, et quelques appareils de sport, de jeux et autres. Parmi ces oscillateurs, la balançoire considérée comme pendule. Un enfant se balance à l'aide d'une balançoire constituée d'une barre utilisé comme siège, suspendue à l'aide de deux câbles fixés à un support fixe.
On modélise le système Enfant + Balançoire par un pendule simple constitué d'un :



- Câble inextensible, de masse négligeable, et de longueur l ;
- Solide (S) de masse m.

Le pendule est susceptible de tourner autour d'un axe horizontal fixe (Δ) perpendiculaire au plan vertical.
Données :

- Le moment d'inertie du pendule par rapport à l'axe (Δ) est : $J_\Delta = ml^2$
- Accélération de la pesanteur $g = 10m.s^{-2}$; $l = 3m$; $m = 18Kg$.
- Pour les oscillations de faible amplitude, on prend $cos(\theta) \approx 1 - \frac{\theta^2}{2}$; θ en radian.
- On néglige les dimensions de (S) par rapport à la longueur du fil, ainsi que tous les frottements.

1. Etude dynamique du pendule : On écarte le pendule de sa position d'équilibre d'un angle $\theta_m = \frac{\pi}{20}$ dans le sens
positif, et on l'abandonne sans vitesse initiale à l'instant $t = 0$. On repère la position du pendule à un instant t par son abscisse angulaire θ entre le pendule et la verticale passant par O, tel que $\theta = (\vec{OM_0}, \vec{OM})$

1-1- Par application de relation fondamentale de la dynamique de rotation autour d'un axe fixe, montrer que l'équation différentielle du mouvement du pendule dans un repère galiléen lié à la terre s'écrit sous la forme : $\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0$

1-2- Calculer la valeur de la période propre T_0 du pendule.

1-3- Ecrire l'équation horaire du mouvement du pendule.

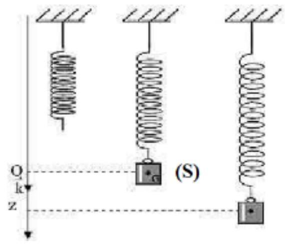
1-4- Par application de la deuxième loi de Newton, et sa projection sur les axes du repère de Freinet, exprimer l'intensité T de la tension du câble à l'instant t en fonction de : m, g, θ, l et v (Vitesse linéaire du solide (S)). Calculer la valeur de T à l'instant $t = \frac{T_0}{4}$

2. Etude énergétique : On communique au pendule précédent initialement au repos à t = 0, une énergie cinétique de valeur $E_C = 264,6J$, qui le fait tourner dans le sens positif.

1. Ecrire l'expression de l'énergie potentielle de pesanteur E_{pp} du pendule à un instant t en fonction de θ, m, l et g.
2. Le plan horizontal passant par M_0 et choisi comme état de référence de l'énergie potentielle de pesanteur. A l'aide d'une étude énergétique, déduire la valeur maximale θ_m de l'abscisse angulaire.

Exercice 5 : Pendule élastique vertical

Un ressort a spires non jointives de masse négligeable de constante de raideur K est lié a un corps (S), supposé ponctuel et de masse m, qui peut se d´eplacer verticalement dans le champ de pesanteur terrestre. (voir figure ci-contre) .
On choisit comme origine de l'énergie potentielle de pesanteur la position d'équilibre O et comme origine de l'énergie potentielle elastique l'etat ou le ressort n'est pas allongé



1. Déterminer l'allongement Δl_0 du ressort dans la position d'´equilibre du corps (S) .
2. Etablir l'´equation différentielle du mouvement de (S) vérifié par sa position $z(t)$
3. Déterminer l'expression de l'énergie potentielle totale du système et calculer sa valeur dans la position d'équilibre
4. En déduire l'expression de l'énergie mécanique du système
5. Montrer que l'énergie mécanique du système se conserve et calculer la vitesse maximale v_{max}
6. Retrouver l'équation différentielle par méthode énergétique:

Exercice 6: Pendule élastique deux ressorts

un solide S de masse $m = 800g$ est accroché à l'extrémité de deux ressorts identiques de constante de raideur $k = 40N/m$ (voir figure 1) à la date t = 0s,on déplace le solide de sa position d'équilibre O sur l'axe horizontal OX dans le sens positif de $x_0 = 4cm$ et lui communique une vitesse initiale $v_0 = 0,2m/s$ dans le sens négatif les frottements sont supposées négligeables.

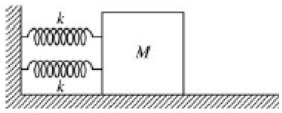
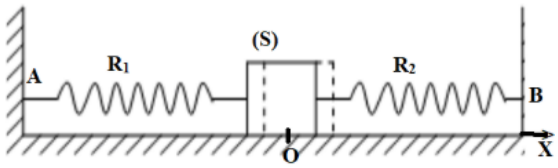


Figure 1

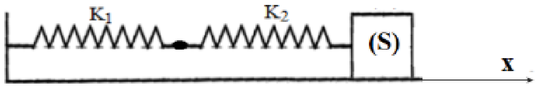
1. appliquer la 2ème loi de Newton pour trouver l'équation différentielle vérifiée par l'abscisse $x(t)$
2. Retrouver cette équation différentielle par conservation de l'énergie mécanique E_m
3. Trouver les dates du passage du solide par l'origine en allant dans le sens positif
4. la solution de l'équation différentielle est : $x(t) = X_m.cos(\frac{2\pi t}{T} + \phi)$. Trouver X_m;T; et ϕ

Exercice 7 :oscillations

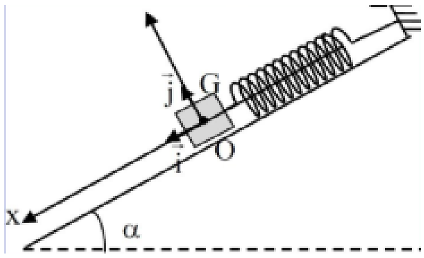


un solide S de masse $m = 200g$ est astreint à se mouvoir horizontalement sur un plan sans frottement à l'aide de deux ressort à spires non jointives de masses négligeable de longueur à vide l_{01} et l_{02} de raideurs respectives ; k_1=$20N/m$ et k_2.(voir figure) la distance $AB > l_{01} + l_{02}$.

1. Etudier l'équilibre et en déduire la relation entre les allongement Δl_{01} et Δl_{02}
2. On écarte S de $x_0 = 2cm$ dans le sens positif et on lui communique une vitesse initiale v_0=$-0,2m/s$ à la date $t = 0s$. il effectue alors des oscillations rectiligne sinusoidales de période propre $T_0 = 4s$
   (a) Montrer que l'équation différentielle vérifiée par l'abscisse x(t) est :$\ddot{x} + \frac{K_e}{m}x = 0$ préciser l'expression de ke en fonction de k_1 et k_2.
3. dans le dispositif qui suit, les ressorts sont de masses négligeable , de constantes de raideurs respectifs K1 et k2 et la masse du corps (S) est m Trouver l'équation différentielle vérifiée par $x(t)$ par deux méthodes

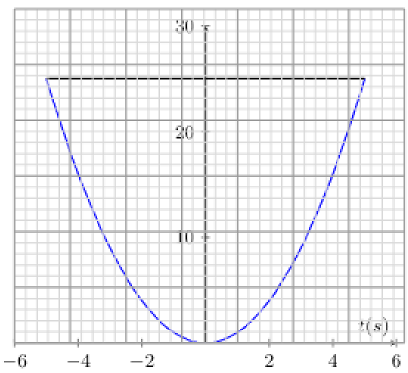


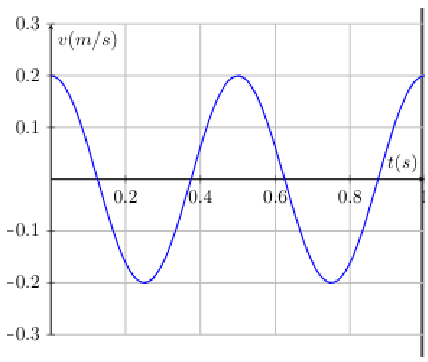
Exercice 8 :Pendule élastique incliné



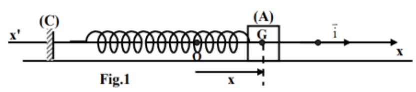
On considère le dispositif ci-contre où le ressort est à spires non jointives de masse négligeable de raideur K et le solide (S) est considéré comme ponctuel de masse m à l'équilibre , il se trouve en O . l'allongement du ressort est Δl_0

1. Trouver l'expression de Δl_0 en fonction de m , g et α
2. Déterminer l'équation différentielle vérifié par la position x(t).
3. on choisit comme référence de l'énergie potentielle totale, l'état d'équilibre du système. montrer que l'expression de l'énergie totale est : $E_p = \frac{1}{2}.K.x^2$
4. Déterminer X_m; K ;T_0; m.

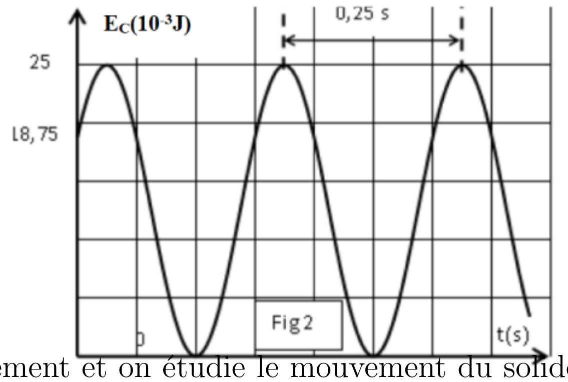




Exercice 9 :Pendule élastique



Un pendule élastique horizontal est constitué par un solide (S) de masse m = 500 g, attaché à l'une des extrémités d'un ressort horizontal, parfaitement élastique, de raideur K et de masse négligeable par rapport à celle du solide, l'autre extrémité du ressort étant fixe (figure 1).



On néglige tout type de frottement et on étudie le mouvement du solide (S) relativement à un repère galiléen $(O, \vec{i})$ horizontal, d'origine O coincidant avec la position d'équilibre du centre d'inertie du solide. On écarte le solide (S) de sa position d'équilibre d'une distance Xm puis on le lˆache sans vitesse. Lorsque le solide passe par sa position d'abscisse $x_0(x_0! = 0)$ avec une vitesse initiale v_0 $(v_0! = 0)$ en se dirigeant dans le sens positif, on déclenche le chronomètre (c'est l'instant $t = 0s$) pour commencer l'étude du mouvement.

1. En appliquant la 2eme loi de Newton au solide (S), tablir l'équation différentielle de son mouvement. Quelle est la nature de ce mouvement?
2. Montrer que $x(t) = X_m sin(\omega_0 t + \omega_x)$ est une solution de l'éequation différentielle précédente à condition que la pulsation ω_0 vérifie une expression qu'on donnera en fonction de K et m. Donner l'expression de la période propre T_0 des oscillations du solide (S).
3. Déduire l'expression de la vitesse du solide en fonction de X_m, ω_0, t et ϕ_x
4. Montrer que x_0 et v_0 vérifient la relation $x_{02} + \frac{v_0^2}{\omega_0^2} = X_m^2$
5. Un ordinateur muni d'une interface et d'un capteur a enregistrée les variations de l'énergie cinétique du solide (S) au cours du temps t, le graphe obtenu sur l'écran de l'ordinateur est donné par la figure 2.
   (a) Donner l'expression de l'éenergie mécanique E du système $S_0 = (S) + ressort$ en fonction de x, v, K et m avec x élongation du solide (S) et v sa vitesse à un instant t quelconque.
   (b) Montrer que l'énergie E est constante puis donner son expression en fonction de m et V_m; V_m amplitude de la vitesse v du solide.
   (c) Etablir l'expression de l'énergie cinétique du solide (S) en fonction m, V_m, ω_0, t et ϕ. Montrer qu'on peut l'écrire sous la forme :
   $$E_c = \frac{E_{cmax}}{2}(1 + cos(2\omega_0.t + 2\phi_x))$$
   (d) En utilisant le graphe, trouver : V_m, T_0, X_m, ϕ_x la phase initiale de l'élongation $x(t)$
   (e) Ecrire la loi horaire du mouvement.
   (f) Calculer l'abscisse initiale $x_0(x(t = 0))$ du solide (S) dans le repère $(O, \vec{i})$, d´eduire sa vitesse initiale v_0. Dans quel sens débute le mouvement du solide (S) ?
   (g) Calculer la raideur K du ressort.

"The physical universe and its buzzing machinery, its fantastical scenery."