

MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE DE LA DÉCISION ET DES ORGANISATIONS

Valorisation d'options américaines

Auteurs :

Hassbane JAD

El Khiyati ZAKARYA

Dahi LEMRABOTT

Encadrant :

Claisse JULIEN

M1 Mathématiques et Applications

Mai 2020

Table des matières

Introduction	3
1 Évaluation d'options en temps discret	4
1.1 Cadre et notations	4
1.1.1 Les notions utiles	4
1.1.2 Deux hypothèses majeures	5
1.2 Évaluation d'options	6
1.3 Le modèle de Cox Ross & Rubinstein	6
2 Évaluation d'options au sein du modèle de Black & Scholes	9
2.1 Modèle et evaluation d'options	9
2.1.1 Présentation du modèle	9
2.1.2 Formule d'Itô	9
2.1.3 Evaluation d'options	9
2.2 Formules de Black & Scholes	10
2.3 Methode de Monte Carlo	11
2.4 Méthode des différences finies	13
3 Évaluation d'options américaines	15
3.1 Principes généraux	15
3.1.1 Options américaines dans le cadre discret	15
3.1.2 Discrétisation du temps dans le cadre général	16
3.2 Le modèle de CRR	16
3.3 Méthode des différences finies	17
3.4 Monte-Carlo	18
3.4.1 Approche naive	18
3.4.2 Méthode de Tsitsiklis & Van Roy	18
3.4.3 Méthode de Longstaff & Schwartz	19
Conclusion	20

Introduction

Depuis maintenant plusieurs dizaines d'années, l'importance des marchés financiers et leur impact sur l'économie globale n'ont cessé de s'amplifier. Cette expansion n'aurait pu avoir lieu sans l'essor de l'industrie du risque financier. En effet, de nos jours, industriels et investisseurs peuvent jouir de contrats d'assurance protégeant leur activité contre des mouvements contraires du marché.

Le plus classique est l'option vanille, constituant un contrat qui donne à son détenteur le droit, et non l'obligation, d'acheter (dans le cas d'un Call) ou de vendre (ou dans celui d'un Put) à un prix prédéterminé (Strike) un actif spécifique appelé sous-jacent et pouvant être un actif financier risqué, une matière première, une créance, un indice, ou autre.

Parmi elles, nous distinguons deux grandes familles d'options : les européennes et les américaines. Et contrairement aux européennes, dont l'exercice n'est possible qu'à la date d'échéance, les options américaines peuvent être exercées durant toute la période précédant leur maturité.

Elles constituent un des produits dérivés les plus échangés sur les marchés et leur évaluation constitue en ce sens un enjeu majeur dans la finance. Cependant, du fait de leur nature, et d'un point de vue numérique et théorique, elles sont plus délicates à traiter : leur pricing pose de nombreuses difficultés et demeure, aujourd'hui encore, un domaine de recherche actif.

Durant ce projet, nous tentons d'aborder la question de la valorisation d'options américaines. Pour ce faire, nous nous intéressons dans un premier temps au cas des européennes en exploitant différentes méthodes dont on vérifie la fiabilité à l'aide de formules explicites. Puis sur cette base, et dans un second temps, nous poursuivons notre étude concernant le pricing des options américaines avec pour objectif principal de comparer et d'implémenter en Python la méthode CRR, celle des différences finies et l'approche par régression dans le cadre du modèle de Black & Scholes.

Enfin, il est important de noter que durant la présentation de nos résultats numériques, nous utilisons toujours les paramètres suivant : prix initial du sous-jacent $S_0 = 100$, taux d'intérêt $r = 0.1$, volatilité $\sigma = 0.2$, et enfin les paramètres de l'option strike $K = 100$, et échéance $T = 1$.

1 Évaluation d'options en temps discret

1.1 Cadre et notations

Tout d'abord, fixons nous un horizon de temps $T \geq 0$.

Sur cette base, nous considérerons un marché financier au sein duquel se trouvent 2 actifs financiers S^0 et S . En effet, ces deux actifs poseront en quelque sorte la première pierre à l'édifice de notre marché.

La première hypothèse que nous allons faire, ici et dans un premier temps, est qu'un investisseur ne peut intervenir au sein de notre marché uniquement qu'aux dates discrètes t_k . Ainsi, pour ce faire nous subdivisons notre interval en utilisant un pas de temps constant valant $\delta = \frac{T}{N}$. De cette façon nous avons $t_k = k\delta$ avec $k \in \{0, \dots, N\}$.

L'actif S^0 est ce que l'on appelle l'actif sans risque. Il est caractérisé par un taux d'intérêt $r \geq 0$ que l'on suppose constant. Son prix au cours du temps est connu à l'avance et évolue selon la relation $S_{t_k}^0 = S_{t_0}^0 e^{rt_k}$. S constitue quant à lui l'actif risqué de notre marché financier. Son prix ne peut être connu à l'avance : il évolue de manière aléatoire. Naturellement, et dans le but de modéliser cet aspect nous introduisons un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Finalement, nous aurons besoin de la filtration engendrée par l'actif risqué S et que l'on note $\mathbb{F} := \{\mathcal{F}_{t_k}, t_k\}$ où $\mathcal{F}_{t_k} = \sigma(S_{t_i}, i \leq k)$ pour tout $k \in \{0, \dots, N\}$. Intuitivement, elle représente l'information disponible à la date t_k .

1.1.1 Les notions utiles

Une fois les investisseurs placés sur notre marché financier, chacun selon sa nature préférera acheter, en quantité plus importante, un actif plutôt que l'autre et de cette façon allouer sa richesse de manières différentes. Aussi, et uniquement aux dates introduites, les investisseurs ont la possibilité de modifier selon les informations qu'ils possèdent les allocations de leurs richesses.

Mathématiquement, une stratégie de gestion est définie par un processus aléatoire et prévisible $\theta = ((\theta_{t_k}^0, \theta_{t_k}))_{0 \leq k \leq N}$ donant à chaque instant les quantités détenues en actif risqué et non risqué. Ainsi, la valeur à l'instant t_k du portefeuille d'un investisseur adoptant la stratégie θ est donnée par la formule suivante : $V_{t_k}(\theta) = \theta_{t_k}^0 S_{t_k}^0 + \theta_{t_k} S_{t_k}$

Définition 1. On dit d'une stratégie de gestion qu'elle est autofinancée si la variation de sa valeur est uniquement due à la variation des prix des actifs.

Ou encore si pour tout $k \in \{1, \dots, N\}$ elle vérifie la condition d'autofinancement :

$$\Delta V_{t_k}(\theta) = \theta_{t_k}^0 \Delta S_{t_k}^0 + \theta_{t_k} \Delta S_{t_k}$$

Cette notion constitue alors un tremplin dans le but de définir les stratégies que l'on va considérer durant notre étude. En effet, une stratégie est dite admissible si elle est autofinancée, dans $L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et vérifie $V(\theta) \geq 0$ à chaque instant.

Enfin introduisons une définition plus quantitative de la notion d'option européenne.

Définition 2. Une option européenne sur le sous-jacent S , au prix d'exercice K et d'échéance

T est la donnée d'une variable aléatoire h \mathcal{F}_T mesurable, appelée payoff, et modélisant le profit réalisé par son exercice.

En effet, dans le cas d'une option d'achat (aussi appelée Call) $h = (S_T - K)^+$.

Tandis que pour une option de vente (Put), $h = (K - S_T)^+$.

1.1.2 Deux hypothèses majeures

Les principes d'évaluation d'options se basent principalement sur deux hypothèses majeures : l'absence d'opportunités arbitrages, et la complétude de notre marché financier. Nous devons donc d'abord définir les concepts essentiels à leur compréhension.

Définition 3. Une opportunité d'arbitrage est une stratégie de gestion permettant d'assurer de manière certaine, et à partir d'un capital initial nul, un gain positif. Cela se traduit alors par l'existence d'une stratégie admissible θ telle que :

$$V_{t_0}(\theta) = 0,$$

$$\mathbb{P}(V_{t_N}(\theta) \geq 0) = 1,$$

$$\mathbb{P}(V_{t_N}(\theta) > 0) > 0.$$

Ainsi, la première hypothèse dit simplement qu'une telle stratégie ne peut exister au sein de notre marché. On dit dans ce cas là que le marché est viable

La seconde quant à elle, nous assure que toute option européenne est simulables.

Définition 4. En effet, on dit d'un produit financier, de valeur terminale h \mathcal{F}_T -mesurable, qu'il est simulable si il existe une stratégie θ admissible dont la valeur à l'instant T est égale à h , c'est à dire tel que $V_T(\theta) = h$.

Alors θ est une stratégie de réplcation de h .

En conclusion, si le marché financier vérifie les deux hypothèses précédentes alors deux stratégies financières ayant les mêmes valeurs terminales ont nécessairement le même prix à chaque instant. En effet, ne pouvant pas profiter d'écarts temporaires de prix constatés pour créer une opportunité d'arbitrage, si l'on est en mesure de construire à partir de notre actif risqué S une stratégie de gestion dont la valeur terminale coïncide avec h alors le prix de h à tout instant peut être calculé comme la valeur de cette stratégie.

C'est donc sur ce principe fondamental que va reposer l'évaluation d'options européennes.

1.2 Évaluation d'options

Le théorème qui suit est le principal fil conducteur de cette section. Dans un soucis de clarté, nous allons malheureusement omettre la preuve.

Théorème 1.1. *Si un marché est viable et complet alors il existe une unique probabilité \mathbb{P}^* équivalente à \mathbb{P} et sous laquelle le processus de prix actualisé \tilde{S} , définit à tout instant t_k par $\tilde{S}_{t_k} = \frac{S_{t_k}}{S_{t_k}^0}$, est une \mathbb{F} -martingale.*

De manière analogue, nous pouvons parler de la valeur actualisée d'une stratégie de gestion θ que l'on notera par la suite $\tilde{V}(\theta)$.

Il est important de remarquer que pour tout $k \in \{1, \dots, N\}$, $\Delta \tilde{V}_{t_k}(\theta) = \theta_{t_k} \Delta \tilde{S}_{t_k}$

Lemme 1.2. *De manière générale, si $(\theta_n)_{n \geq 0}$ est prévisible dans L^∞ et $(M_n)_{n \geq 0}$ une martingale respectivement à une certaine filtration \mathbb{T} , alors le processus $((\theta.M)_n)_{n \geq 0}$, définit de sorte à ce que $\Delta(\theta.M)_n = \theta_n \Delta M_n$ pour tout $n \geq 0$, est également une \mathbb{T} -martingale.*

Démonstration. Soit $n \geq 1$.

Tout d'abord, nous avons pour tout $k \leq n$, que $\theta_k \Delta M_k$ est \mathcal{T}_k -mesurable et donc \mathcal{T}_n -mesurable. On en déduit de cette manière que $(\theta.M)_n$ est \mathcal{F}_n -mesurable car somme finie de variables aléatoires elles mêmes \mathcal{T}_n -mesurables.

De plus et encore une fois pour tout $k \leq n$, $|\theta_k \Delta M_k| \leq \|\theta_k\|_\infty |\Delta M_k|$ \mathbb{P} -p.s. Cela nous assure que $\theta_k \Delta M_k$ est intégrable. Ainsi, par le même argument, $(\theta.M)_n$ étant une est la somme finie de variables aléatoires intégrables, elle l'est donc aussi.

Enfin, il est aisé de vérifier que $\mathbb{E}(\Delta(\theta.M)_n | \mathcal{T}_{n-1}) = \mathbb{E}(\theta_n \Delta M_n | \mathcal{T}_{n-1}) = \theta_n \mathbb{E}(\Delta M_n | \mathcal{T}_{n-1})$ le processus $(\theta_n)_{n \geq 0}$ étant prévisible il nous assure la deuxième égalité. Nous concluons, par le fait que $(M_n)_{n \geq 0}$ soit une \mathbb{T} -martingale. Nous avons donc $\mathbb{E}(\Delta(\theta.M)_n | \mathcal{T}_{n-1}) = 0$.



Ainsi, si l'on suppose notre marché financier viable et complet, et que l'on se place sous \mathbb{P}^* la mesure de probabilité assurée par le théorème 1.1, le lemme nous dit donc que pour toute stratégie de gestion admissible θ le processus associé $\tilde{V}(\theta)$ est une martingale.

Considérons à présent une option européenne de pay-off h , et θ une stratégie admissible la simulant. C'est à dire telle que $V_T(\theta) = h$.

Par conséquent nous pouvons écrire que,

$$V_0(\theta) = \mathbb{E}^*(\tilde{V}_T(\theta)) = e^{-rT} \mathbb{E}^*(h)$$

et plus généralement que,

$$V_{t_k}(\theta) = e^{-r(T-t_k)} \mathbb{E}^*(h | \mathcal{F}_{t_k}), \forall k \in \{0, \dots, N\}$$

1.3 Le modèle de Cox Ross & Rubinstein

Dans le but d'estimer le prix initial de notre option européenne, nous allons nous intéresser à une première méthode : celle proposée par Cox, Ross & Rubinstein. En effet, cette méthode se

base sur un modèle discret au sein duquel l'évolution du sous-jacent se fait via un arbre et dans un monde "neutre au risque". Avec, sur chaque noeud et selon les paramètres du modèle, un prix possible à une date donnée.

Plus précisément, considérons qu'initialement, le prix de l'actif risqué vaut S_0 et est connu de tous. À partir de là, il peut entre chaque instant avec une certaine probabilité p augmenter en étant multiplié par un facteur u , ou au contraire diminuer en le multipliant cette fois par d . Ainsi, au temps terminal T , le nombre de possibilités de prix pour l'actif risqué est $n + 1$. Il est également possible d'exploiter la structure de l'arbre pour alléger les notations : c'est pourquoi nous faisons la première hypothèse que $ud = 1$. Ainsi dans notre modèle, $\Omega = \{u, d\}^N$.

Notons aussi, qu'en introduisant les différents rendements $\xi_{t_k} = S_{t_k}/S_{t_{k-1}}$, nous obtenons que $\mathcal{F}_{t_k} = \sigma(\xi_{t_1}, \dots, \xi_{t_k})$ pour tout k dans $\{0, \dots, N\}$.

Lemme 1.3. *Lorsque le marché est viable, nous avons que : $u > e^{r\delta} > d$.*

Démonstration. En effet, le marché étant viable considérons la mesure de probabilité \mathbb{P}^* équivalente à \mathbb{P} et sous laquelle \tilde{S} est une \mathbb{F} -martingale.

Nous avons donc pour tout $k \in \{1, \dots, N\}$, $\mathbb{E}^*(\xi_{t_k} | \mathcal{F}_{t_{k-1}}) = e^{r\delta}$

Et par conséquent, $\mathbb{E}^*(\xi_{t_k}) = e^{r\delta}$. Ainsi comme ξ_{t_k} est à valeur dans $\{u, d\}$, avec probabilité strictement positive de prendre l'une ou l'autre valeur, et que \mathbb{P}^* est équivalente à \mathbb{P} , nous avons donc nécessairement que $u > e^{r\delta} > d$.



Montrons également que sous \mathbb{P}^* , les rendements sont indépendants et équidistribués.

En effet, soit $k \in \{1, \dots, N\}$, nous avons donc que $\mathbb{E}^*(\xi_{t_k} | \mathcal{F}_{t_{k-1}}) = e^{r\delta}$.

En d'autres termes, $u\mathbb{E}^*(1_{\xi_{t_k}=u} | \mathcal{F}_{t_{k-1}}) + d\mathbb{E}^*(1_{\xi_{t_k}=d} | \mathcal{F}_{t_{k-1}}) = e^{r\delta}$. Or d'autre part,

$$\mathbb{E}^*(1_{\xi_{t_k}=u} | \mathcal{F}_{t_{k-1}}) + \mathbb{E}^*(1_{\xi_{t_k}=d} | \mathcal{F}_{t_{k-1}}) = 1.$$

Ainsi on résout et on trouve donc que

$$\mathbb{E}^*(1_{\xi_{t_k}=u} | \mathcal{F}_{t_{k-1}}) = \frac{e^{r\delta} - d}{u - d} := p^*$$

De plus, par une récurrence immédiate et d'après la formule de Bayes, nous avons que pour tout $n \geq 1$, $\mathbb{P}^*(\xi_1 = x_1, \dots, \xi_n = x_n) = p_1 \dots p_n$, avec $p_i = p^*$ si $x_i = u$ et $1 - p^*$ si $x_i = d$.

Cela prouve donc que les rendements sont bien indépendants et équidistribués, avec

$$\mathbb{P}^*(\xi_k = u) = p^* = 1 - \mathbb{P}^*(\xi_k = d)$$

pour tout k dans $\{1, \dots, N\}$.

Concernant maintenant le call européen de pay-off h , notons $c(t_k, x)$ son prix à l'instant t_k si la valeur initiale de l'actif est x et $T = t_n$. Nous avons donc par un conditionnement, et pour tout k dans $\{1, \dots, N\}$,

$$c(t_k, x) = e^{-r\delta}(p^*c(t_{k+1}, xu) + (1 - p^*)c(t_{k+1}, xd))$$

Cette formule constitue la base de l'évaluation d'options au sein du modèle de CRR. En effet, en

partant des noeuds terminaux, dont on sait la valeur (pay-off), et par des itérations descendantes on arrive à trouver le prix de l'option au temps t_0 .

Résultats : Ainsi pour $N = 100$ et $u = e^{\sigma\sqrt{\frac{T}{N}}}$.

	Valeur approchée	Valeur exacte
Put européen	3.7325	3.7534
Call européen	13.2488	13.2696

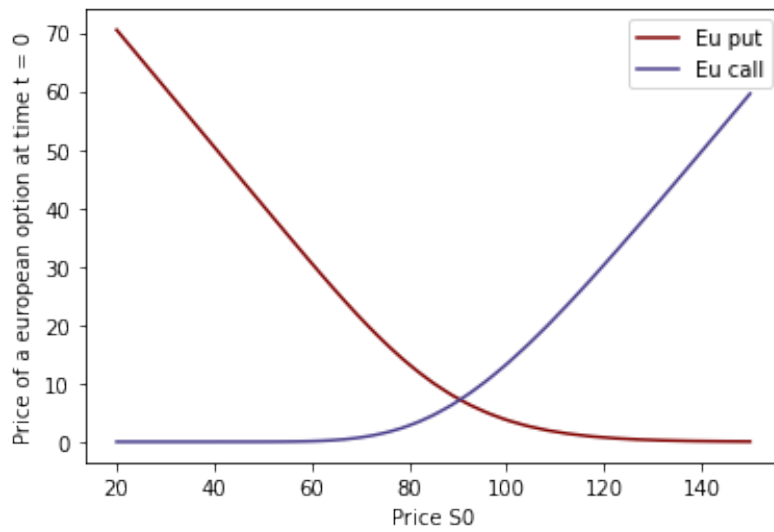


FIGURE 1 – Estimation du prix d'un put et d'un call européen en fonction de S_0 .

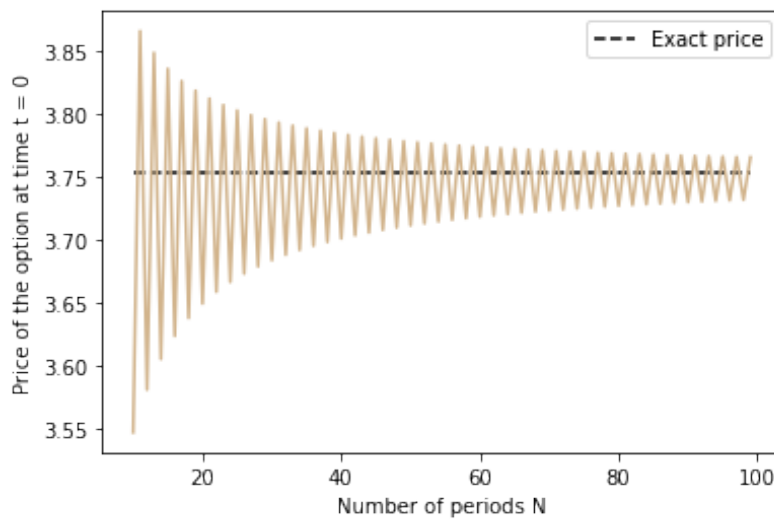


FIGURE 2 – Évolution et convergence du prix d'un put européen, estimé par la méthode CRR, en fonction de N .

2 Évaluation d'options au sein du modèle de Black & Scholes

2.1 Modèle et evaluation d'options

2.1.1 Présentation du modèle

Par opposition au modèle de CRR introduit plus haut, le modèle de Black & Scholes constitue quant à lui un modèle de marché en temps continu. En effet, nous considérons à présent que notre actif sans risque S^0 évolue selon la dynamique : $S_t^0 = e^{rt}$ pour tout t dans $[0, T]$ et où r est le taux d'intérêt introduit précédemment.

Concernant l'actif risqué, l'évolution de son processus de prix $(S_t)_{t \geq 0}$ est donnée, pour tout t dans $[0, T]$, par la relation suivante :

$$S_t = S_0 e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma B_t}$$

où $B = (B_t)_{t \geq 0}$ est un mouvement Brownien standard,
 μ une constante appelée rendement instantané,
et σ la volatilité (également supposée constante).

2.1.2 Formule d'Itô

C'est à l'aide de la formule d'Itô, que nous allons pouvoir établir l'équation aux dérivées partielles vérifiée par une option européenne ainsi que l'interprétation de cette équation en terme d'espérance.

Théorème 2.1. *Soit X un processus stochastique de la forme $dX_t = \mu_t dt + \sigma_t dB_t$, avec μ_t et σ_t deux processus aléatoires pour tout t dans $[0, T]$.*

Soit f une fonction de classe $C^{1,2}$. La formule d'Itô s'écrit :

$$df(t, X_t) = \partial_t f(t, X_t) dt + \partial_x f(t, X_t) dX_t + \frac{1}{2} \partial_{xx}^2 f(t, X_t) \sigma_t^2 dt.$$

2.1.3 Evaluation d'options

L'objectif maintenant est de prouver, comme dans le cas discret, que le prix d'un call européen est donné par $\mathbb{E}[e^{-rT}(S_T - K)_+]$.

Par hypothèse du modèle nous avons que $dS_t^0 = rS_t^0 dt$ et $dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dB_t$. Précisons également que pour toute stratégie de gestion θ , la condition d'autofinancement devient $dV_t(\theta) = \theta_t^0 dS_t^0 + \theta_t dS_t$. Ou encore, $dV_t(\theta) = \theta_t^0 r S_t^0 dt + \theta_t \mu S_t dt + \theta_t \sigma S_t dB_t$. En remplaçant S_t^0 et S_t par leurs expressions, nous obtenons que, $dV_t(\theta) = (rV_t(\theta) + \theta_t(\mu - r)S_t) dt + \theta_t \sigma S_t dB_t$. Finalement en fixant $\mu = r$, $dV_t(\theta) = rV_t(\theta) dt + \theta_t \sigma S_t dB_t$.

Pour une option européenne de strike K et d'échéance T rappelons que le payoff se note h . Nous introduisons alors la fonction C correspondant à la valeur du portefeuille associé à la stratégie simulant notre option et donc définit de sorte à ce que $\forall t$ dans $[0, T]$, $C(t, S_t) = V_t(\theta)$ et en particulier $C(T, S_T) = V_T(\theta) = h$. Par exemple, dans le cas d'un call $C(T, S_T) = (S_T - K)_+$.

Il suffit maintenant d'appliquer la formule d'Itô à la fonction C :

$$dC(t, S_t) = \left(\partial_t C(t, S_t) + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \partial_{ss}^2 C(t, S_t) + r S_t \partial_s C(t, S_t) \right) dt + \sigma S_t \partial_s C(t, S_t) dB_t.$$

C'est donc par identification que nous obtenons, pour tout t dans $[0, T]$,

$$\theta_t = \partial_s C(t, S_t), \text{ et } \partial_t C(t, S_t) + \frac{\sigma^2}{2} S_t^2 \partial_{ss}^2 C(t, S_t) + r S_t \partial_s C(t, S_t) - r C(t, S_t) = 0.$$

où $C(T, x) = (x - K)_+$

L'identification étant possible du fait que la décomposition d'un processus d'Ito est unique. Effectivement, intuitivement les incréments du mouvement Brownien variant beaucoup ("infinitement") plus vite, les deux termes ne peuvent se compenser. Il nous reste plus qu'à calculer $C(0, S_0)$ pour trouver le prix de notre option.

Nous appliquons alors une seconde fois la formule d'Itô, cette fois à la fonction $e^{-rT} C$, nous obtenons donc que :

$$e^{-rT} C(T, S_T) = C(0, s) + \int_0^T e^{-rt} \left(\partial_t C(t, S_t) + \frac{\sigma^2}{2} S_t^2 \partial_{ss}^2 C(t, S_t) + r S_t \partial_s C(t, S_t) - r C(t, S_t) \right) dt + \int_0^T e^{-rt} \sigma S_t \partial_s C(t, S_t) dB_t.$$

En passant à l'espérance : $\mathbb{E}[e^{-rT} C(T, S_T)] = C(0, S_0)$ où $C(T, S_T) = (S_T - K)_+$.

En effet, le processus $(\int_0^u e^{-rt} \sigma S_t \partial_s C(t, S_t) dB_t)_{u \geq 0}$ étant une martingale, son espérance est constante au cours du temps et vaut sa valeur initiale, c'est à dire 0.

2.2 Formules de Black & Scholes

Dans ce qui suit, nous allons tenter de donner une formule permettant le calcul explicite du prix d'une option européenne de type Call/Put.

Nous avons précédemment établi que son prix est donné par $C = e^{-rT} \mathbb{E}[(S_T - K)_+]$. Cependant, dans le cas particulier du modèle de Black & Scholes et pour les options européennes uniquement, nous pouvons déterminer une formule exacte.

Théorème 2.2. *Le prix d'un call européen est donné par la formule suivante :*

$$C = S_0 \Phi(d) - K e^{-rT} \Phi(d - \sigma \sqrt{T})$$

avec $d = \frac{1}{\sigma \sqrt{T}} \left(\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right) T \right)$

Φ est la fonction de répartition de la loi $\mathcal{N}(0, 1)$,

K le strike,

et enfin T l'échéance.

Démonstration. Soit X une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ avec $\sigma > 0$. Posons $Z = e^X$ et $K > 0$ une constante. Notre preuve se fera alors en trois étapes.

Étape 1 : calcul de $\mathbb{E}[Z]$ et $\mathbb{P}(Z \geq K)$.

En effet, posons $X = \mu + \sigma Y$ où $Y \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Ainsi, $\mathbb{E}[Z] = \mathbb{E}[e^{\mu + \sigma Y}] = e^\mu \mathbb{E}[e^{\sigma Y}]$.

$$\text{Or, } \mathbb{E}[e^{\sigma Y}] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x^2 - 2\sigma x)}{2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}((x-\sigma)^2 - \sigma^2)} dx = e^{\frac{\sigma^2}{2}}.$$

Nous pouvons donc en conclure que $\mathbb{E}[Z] = e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}}$.

$$\text{De plus, } \mathbb{P}(Z \geq K) = \mathbb{P}(X \geq \ln(K)) = \mathbb{P}\left(Y \geq \frac{\ln(K) - \mu}{\sigma}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{\ln(K) - \mu}{\sigma}\right).$$

En posant $\tilde{K} = \frac{\ln(K) - \mu}{\sigma}$ nous obtenons donc $\mathbb{P}(Z \geq K) = 1 - \Phi(\tilde{K})$.

Étape 2 : calcul de $\mathbb{E}[Z 1_{Z \geq K}]$.

$$\mathbb{E}[Z1_{Z \geq K}] = e^\mu \mathbb{E} \left[e^{\sigma Y} \mathbb{1}_{Y \geq \tilde{K}} \right] = \frac{e^\mu}{\sqrt{2\pi}} \int_{\tilde{K}}^{+\infty} e^{\sigma x} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{e^\mu}{\sqrt{2\pi}} \int_{\tilde{K}}^{+\infty} e^{\frac{\sigma^2}{2}} e^{\frac{(x-\sigma)^2}{2}} dx$$

$$\text{Ainsi par un changement de variable, } \mathbb{E}[Z1_{Z \geq K}] = e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\tilde{K}-\sigma}^{+\infty} e^{\frac{x^2}{2}} dx = e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}} \left(1 - \Phi(\tilde{K} - \sigma) \right)$$

Étape 3 : Conclusion.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[(Z - K)_+] &= \mathbb{E}[Z1_{Z \geq K}] - \mathbb{E}[K1_{Z \geq K}] \\ \text{D'où, } \mathbb{E}[(Z - K)_+] &= e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}} \left(1 - \Phi\left(\frac{\ln(K) - \mu - \sigma^2}{\sigma}\right) \right) - K \left(1 - \Phi\left(\frac{\ln(K) - \mu}{\sigma}\right) \right) \\ \text{Enfin, } \mathbb{E}[(Z - K)_+] &= e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}} \Phi\left(-\frac{\ln(K) - \mu - \sigma^2}{\sigma}\right) - K \Phi\left(-\frac{\ln(K) - \mu}{\sigma}\right). \end{aligned}$$

En appliquant cela à $S_T = S_0 e^{(r - \frac{\sigma^2}{2})T + \sigma B_T}$ et comme $(r - \frac{\sigma^2}{2})T + \sigma B_T \sim \mathcal{N}((r - \frac{\sigma^2}{2})T, \sigma^2 T)$ (car $B_T \sim \mathcal{N}(0, T)$), nous avons que $\mathbb{E}[e^{-rT}(S_T - K)_+] = S_0 \Phi(d) - K e^{-rT} \Phi(d - \sigma\sqrt{T})$ avec $d = \frac{1}{\sigma\sqrt{T}} \left(\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + (r + \frac{\sigma^2}{2})T \right)$.

♣

De manière analogue, et avec les mêmes notations on prouve que le prix d'un put européen est donné quant à lui par :

$$P = -S_0 \Phi(-d) + K e^{-rT} \Phi(-d + \sigma\sqrt{T})$$

Ces deux formules constituent un atout majeur dans le but de vérifier les méthodes implémentées et les résultats numériques obtenus.

2.3 Méthode de Monte Carlo

Au vu de la première relation établie section 2.1.3, il est naturel de vouloir estimer le prix de l'option à l'instant initial par la méthode de Monte Carlo.

Principe de la méthode : Effectivement, les méthodes de Monte Carlo permettent d'estimer une quantité δ en l'écrivant sous forme la forme $\delta = \mathbb{E}(h(X))$ où X est une v.a. qui suit une loi \mathcal{L} suivant laquelle on sait simuler. En particulier, la méthode de Monte Carlo Classique (MCC) consiste à simuler X_1, \dots, X_n suivant \mathcal{L} puis d'estimer δ par la moyenne empirique i.e. $\bar{h}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n h(X_i)$. En effet, si l'on note C le prix de l'option d'achat à l'instant initial, nous savons que

$$C = \mathbb{E}(e^{-rT}(S_T - K)_+) = \mathbb{E}(h(B_T))$$

$$\text{et où } h : \begin{aligned} &\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ &x \mapsto e^{-rT} (S_0 \exp((r - \frac{\sigma^2}{2})T + \sigma x)) \end{aligned}$$

car, $S_T = S_0 \exp((r - \frac{\sigma^2}{2})T + \sigma B_T)$ avec $B_T \sim \mathcal{N}(0, T)$

L'estimateur de Monte Carlo classique s'écrit donc :

$$\hat{C}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n h(Y_i)$$

où $Y_i \stackrel{\text{iid}}{\sim} \mathcal{N}(0, T)$

À noter aussi que

- (H1) les v.a. $h(Y_i)$ sont intégrables
- (H2) les v.a. $h(Y_i)$ sont de carré intégrables

Propriétés de l'estimateur :

- L'estimateur est sans biais, i.e, $\mathbb{E}(\hat{C}_n) = C$
- L'estimateur est consistant. En effet, au vu de (H1), on a par la Loi Forte des Grands Nombres

$$\hat{C}_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.s.} \mathbb{E}(h(B_T)) = C$$

Au vu de (H2), et si l'on note $\nu := \mathbb{V}(h(B_T))$, le théorème centrale limite & Slutsky nous permettent d'écrire :

$$\sqrt{\frac{n}{\hat{\nu}^2}}(\hat{C}_n - C) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1)$$

où $\hat{\nu}$ est un estimateur consistant¹ de ν . Donc

$$\mathbb{P}\left(\sqrt{\frac{n}{\hat{\nu}^2}}|\hat{C}_n - C| \leq q_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \alpha$$

où $\alpha \in [0, 1]$ et $q_{1-\frac{\alpha}{2}}$ le quantile d'ordre $1 - \frac{\alpha}{2}$ de la loi $\mathcal{N}(0, 1)$.

On peut ainsi construire un intervalle de confiance asymptotique de niveau α :

$$IC(1 - \alpha) = [\hat{C}_n - q\sqrt{\frac{\hat{\nu}^2}{n}}, \hat{C}_n + q\sqrt{\frac{\hat{\nu}^2}{n}}]$$

Remarque. Le principe de la méthode reste le même pour estimer le prix d'un put européen. On notera \hat{P}_n cet estimateur.

Résultats numériques : Pour les valeurs numériques prises² et un échantillon de taille 100 000 on obtient les estimations,

- Pour le Call :

\hat{C}_n	$\hat{\nu}$	$IC(95\%)$	la valeur exacte
13.198	257.92	[13.195 , 13.395]	13.269

- Pour le Put :

\hat{P}_n	$\hat{\nu}$	$IC(95\%)$	la valeur exacte
3.7297	48.567	[3.6865 , 3.7729]	3.7534

Nous remarquons une variance assez grande, afin d'améliorer la précision des estimations à taille d'échantillon fixée, nous aurions pu introduire des méthodes de réduction de la variance, variables antithétique, une variable de contrôle, échantillonnage préférentiel ou encore des méthodes de stratification.

1. Nous prenons l'estimateur par défaut du langage python !
2. Cf Introduction

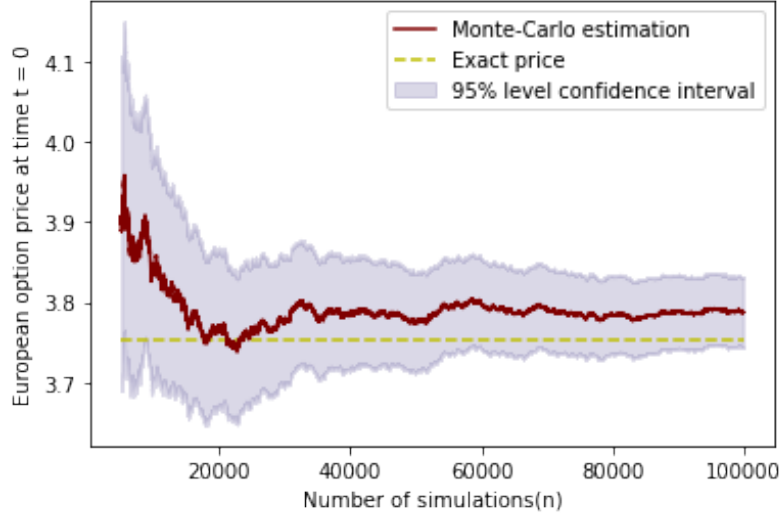


FIGURE 3 – Évolution de l'estimation du prix d'un put européen \hat{P}_n et son intervalle de confiance au niveau 95% en fonction de n

2.4 Méthode des différences finies

Initialement introduite en physique, la méthode des différences finies permet d'approcher numériquement les solutions d'équations aux dérivées partielles. C'est donc sur la base d'une discrétisation en temps et en espace que nous résolvons, de manière itérative, une EDP donnée.

Principe de la méthode : En effet, par la formule d'Itô, nous avons établis que le prix d'une option d'achat européenne vérifie l'équation suivante :

$$\frac{\partial C}{\partial t}(t, S_t) + \frac{\sigma^2}{2} S_t^2 \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}(t, S_t) + r S_t \frac{\partial C}{\partial x}(t, S_t) - r C(t, S_t) = 0$$

avec t dans $[0, T]$, S_t dans \mathbb{R}_+ , et pour condition aux limites : $C(T, S_T) = (S_T - K)_+$.

Passage au logarithme : Nous pouvons nous ramener à une EDP à coefficients constants en introduisant le processus $X_t = \log(S_t)$. En effet, la fonction $u(t, x) := C(t, e^x)$ vérifie l'équation suivante :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) + r \frac{\partial u}{\partial x}(t, x) - r u(t, x) = 0$$

ou encore

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) + A u(t, x) = 0$$

avec A le générateur infinitésimal du processus X_t , vérifiant $A = \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + r \frac{\partial}{\partial x} - r$

Discrétisation de l'espace : Nous faisons l'hypothèse que notre processus de prix S évolue au sein d'un interval $[S_{min}, S_{max}]$ avec S_{min} assez petit et S_{max} assez grand. Notons alors $X_{min} = \log(S_{min})$ et $X_{max} = \log(S_{max})$.

Nous subdivisons l'intervalle $[X_{min}, X_{max}]$ en $N + 1$ points, $x_0 = X_{min} < x_1 < \dots < x_N < x_{N+1} = X_{max}$ et notons $u(t) = (u_i(t))_{i=0, \dots, N}$ le vecteur des valeurs approchées de la fonction $x \mapsto u(t, x)$ en ces points.

Enfin, les conditions aux bords :

$$\begin{cases} u_0(t) = 0 \\ u_N(t) = e^{X_{max}} - e^{-r(T-t)}K \end{cases}$$

Concernant les opérateurs différentielles, notons $h = \frac{X_{max}-X_{min}}{N+1}$ le pas de discrétisation de notre espace.

De cette façon, la dérivée partielle $\frac{\partial u}{\partial x}(t, x_i)$ est alors remplacée par

$$\frac{u_{i+1}(t) - u_{i-1}(t)}{2h}.$$

Tandis que $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x_i)$ devient

$$\frac{\frac{u_{i+1}(t)-u_i(t)}{h} - \frac{u_i(t)-u_{i-1}(t)}{h}}{h} = \frac{u_{i+1}(t) - 2u_i(t) + u_{i-1}(t)}{h^2}$$

Cette discrétisation en espace permet de se ramner à une equation différentielle ordinaire :

$$\begin{cases} \frac{du(t)}{dt} + \tilde{A}u(t) = 0 \\ u(T) = ((e^{x_i} - K)_+)_{i=0,\dots,N} \end{cases}$$

avec

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \beta & \gamma & & 0 \\ \alpha & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \gamma \\ 0 & & \alpha & \beta \end{pmatrix}.$$

et où, $\alpha = \frac{\sigma^2}{2h^2} - \frac{1}{2h}(r - \frac{\sigma^2}{2})$
 $\beta = -\frac{\sigma^2}{h^2} - r$
 $\gamma = \frac{\sigma^2}{2h^2} + \frac{1}{2h}(r - \frac{\sigma^2}{2})$

Discrétisation en temps à l'aide des θ -schémas : Fixons d'abord $\theta \in [0, 1]$.

Considérons ensuite k un pas de temps supposé constant. En effet, nous subdivisons cette fois l'intervalle $[0, T]$ de sorte à avoir $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$ et $k = \frac{T}{n+1}$.

Notre schéma numérique est finalement décrit par :

$$\begin{cases} (I - \theta k \tilde{A})u^j = (I + (1 - \theta)k \tilde{A})u^{j+1}, \quad \forall j = 0, \dots, n-1 \\ u^n = u(T) \end{cases}$$

et où u^j la valeur approchée de $u(t_j)$ pour tout j .

Lorsque $\theta = 0$, nous parlons de schéma d'Euler explicite. Pour $\theta = 1/2$, de schéma de Crank Nicholson. Et enfin, quand $\theta = 1$ de schéma d'Euler implicite.

Dans la pratique, le schéma Euler-Explicite a l'avantage d'être le plus rapide à dérouler, car nous n'avons pas besoin d'inverser quelconque matrice. Cependant, il présente des problèmes d'instabilité et contrairement à lui, les schéma implicites ($\theta > 0$) sont plus lents mais plus stable.

Résultats numériques : Pour $S_{min} = 20$, $S_{max} = 200$, $N = 100$, $n = 1000$, $\theta = 1$.

	valeur approchée	la valeur exacte
Put européen	3.7489	3.7534
Call européen	13.270	13.269

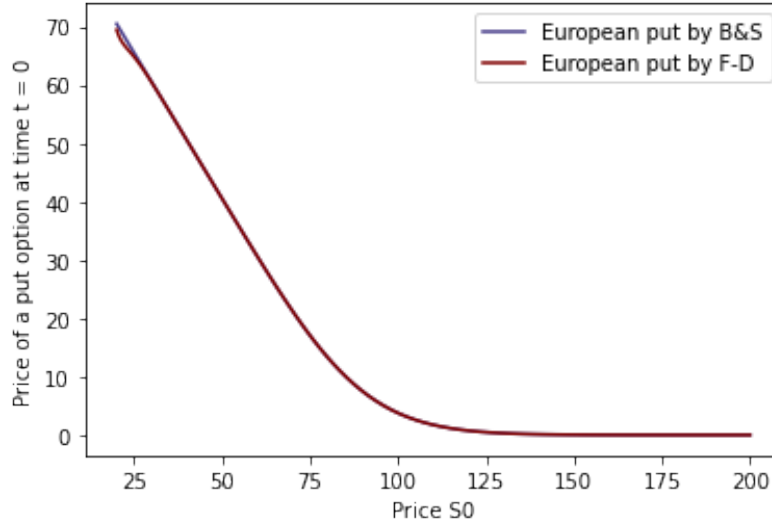


FIGURE 4 – Tracé du prix d'un put européen estimé par la méthode des différences finies en fonction de S_0 .

3 Évaluation d'options américaines

À la différence des européennes, les options américaines peuvent être exercées à n'importe quel instant précédant la maturité T rendant ainsi leur évaluation plus délicate. Introduisons donc quelques nouveaux outils utiles à leur évaluation.

3.1 Principes généraux

3.1.1 Options américaines dans le cadre discret

Tout d'abord, considérons le modèle discret introduit lors de la première partie. C'est à dire, un modèle composé de N périodes, puis notons P_{t_k} le prix d'un put américaine à l'instant t_k .

À chaque date t_k , le détenteur de l'option américaine doit prendre la décision de : l'exercer ou bien attendre un instant t_i ($i \geq k + 1$) plus profitable. En effet, l'objectif ici est de maximiser son gain. Pour un put par exemple, il s'agit alors de choisir entre : $(K - S_{t_k})_+$ et $\mathbb{E}(e^{-ir\delta}(K - S_{t_i}) + |\mathcal{F}_{t_k})$ pour $i = k, \dots, N$.

Valoriser ce genre d'options à l'instant t_k revient donc naturellement à calculer le maximum entre toutes les valeurs mises en jeu. Et pour ce faire, nous allons résoudre ce problème en utilisant le principe de programmation dynamique à horizon fini.

Nous procédons alors de la manière suivante :

À l'instant T , le détenteur de l'option n'a d'autre choix que d'exercer son option dont la valeur est $(K - S_T)_+$. À l'instant d'avant t_{N-1} , $P_{t_{N-1}} = \max((K - S_{t_{N-1}})_+, \mathbb{E}(e^{-r\delta}(K - S_T)_+ | \mathcal{F}_{t_{N-1}}))$.
Et de manière générale,

$$P_{t_k} = \max((K - S_{t_k})_+, \mathbb{E}(e^{-r\delta} P_{t_{k+1}} | \mathcal{F}_{t_k}))$$

où $k \leq N - 1$.

3.1.2 Discrétisation du temps dans le cadre général

Dans le cadre d'un modèle en temps continu comme celui de Black & Scholes, le prix du put américain est donné par l'expression :

$$P_0 = \sup_{\tau \in \mathcal{T}_{0,T}} \mathbb{E}[e^{-r\tau}(K - S_\tau)_+]$$

où $\mathcal{T}_{0,T} = \{ \text{Temps d'arrêt à valeurs dans } [0, T] \}$.

Ainsi, pour pouvoir approcher numériquement le prix d'une telle option, et dans le but d'exploiter le principe précédemment introduit, nous allons considérer une discrétisation du temps, supposant ainsi que l'on ne peut intervenir sur le marché qu'aux m dates suivantes $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{m-1} < t_m = T$ avec $t_i = i \frac{T}{m} \forall i = 0, \dots, m$.

Une première approximation du prix du put américain est donnée alors par la relation :

$$\sup_{\tau \in \mathcal{T}_{0,T}^m} \mathbb{E}[e^{-r\tau}(K - S_\tau)_+]$$

où $\mathcal{T}_{0,T}^m = \{ \text{Temps d'arrêt à valeurs dans } t_0, \dots, t_m \}$.

Dans un premier temps, notons $v(t_i, x)$ la valeur à l'instant t_i de l'option américaine sachant que $S_{t_i} = x$. Notons aussi $\bar{v}^m(t_i, x)$ l'approximation de cette dernière obtenue par la discrétisation ci-dessus. Hormis dans le théorème 3.1, nous allons dans ce qui suit toujours confondre les deux.

On pourra alors calculer le prix de notre option américaine par la relation :

$$\begin{cases} v(t_m, S_T) = (K - S_T)_+ \\ v(t_i, S_i) = \max((K - S_{t_i})_+, e^{-r \frac{T}{m}} \mathbb{E}(v(t_{i+1}, S_{t_{i+1}}) | S_{t_i})) \end{cases}$$

Le théorème suivant quant à lui assure la validité de notre approximation.

Théorème 3.1. $\sup_{i=0, \dots, m} |v^m(t_i, S_i) - v(t_i, S_i)| = O(\frac{1}{\sqrt{m}})$

3.2 Le modèle de CRR

Le principe demeure le même. En effet, nous raisonnons par récurrence descendante en partant des noeuds terminaux de l'arbre pour arriver à l'instant initial.

Cependant, au vu de ce que nous avons présenté plus haut, et dans le but de savoir si l'on garde ou non l'option à un certain moment, il est nécessaire de systématiquement, et donc à chaque noeud de l'arbre, comparer l'ancienne valeur actualisée calculée et le payoff de l'option.

Il est également intéressant de noter que le modèle CRR converge, pour un nombre de périodes N

infiniment grand, vers le modèle de Black & Scholes.

Résultats numériques : Pour $N = 100$ et $u = e^{\sigma\sqrt{\frac{T}{N}}}$.

	valeur approchée	la valeur exacte
Put américain	4.8086	-
Call américain	13.248	13.269

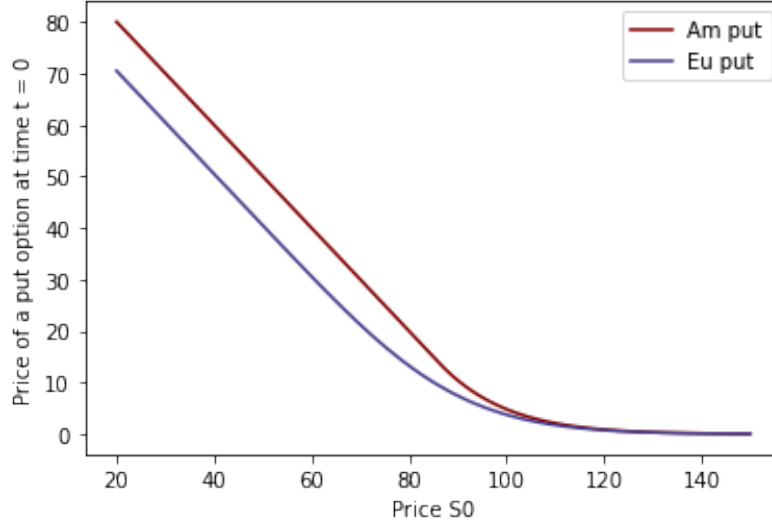


FIGURE 5 – Comparaison du prix d'un put EU et AM estimés par la méthode de CRR et en fonction de S_0 .

3.3 Méthode des différences finies

Par récurrence descendante, on a :

$$v(t_{n-1}, x) = \max \left((K - x)_+, e^{-r\frac{T}{n}} \mathbb{E} [(K - S_T)_+ | S_{t_{n-1}} = x] \right)$$

$$\text{Donc } v(t_i, x) = \max \left((K - x)_+, e^{-r\frac{T}{n}} \mathbb{E} [v(t_{i+1}, S_{t_{i+1}}) | S_{t_i} = x] \right) \quad \forall i = 0, \dots, n$$

Au temps t_n , on pose : $v(t_n, x) = (K - x)_+$.

Ensuite au temps t_{n-1} , on cherche u solution de

$$\begin{cases} \partial_t u + \sigma^2 x^2 \partial_{xx}^2 u + rx \partial_x u - ru = 0 \\ u(t_n, x) = (K - x)_+ \end{cases}$$

On rappelle qu'on peut trouver u à l'aide de la méthode des différences finies pour les options européennes puisque u vérifie l'équation de Black-Scholes.

Enfin on calcule $v(t_{n-1}, x) = \max((K - x)_+, u(t_{n-1}, x))$.

Ainsi on obtient le prix du put américain.

Résultats numériques : Pour $m = 10$

	valeur approchée	la valeur exacte
Put américain	262.96	[13.360, 13.995]
Call américain	262.96	[13.360, 13.995]

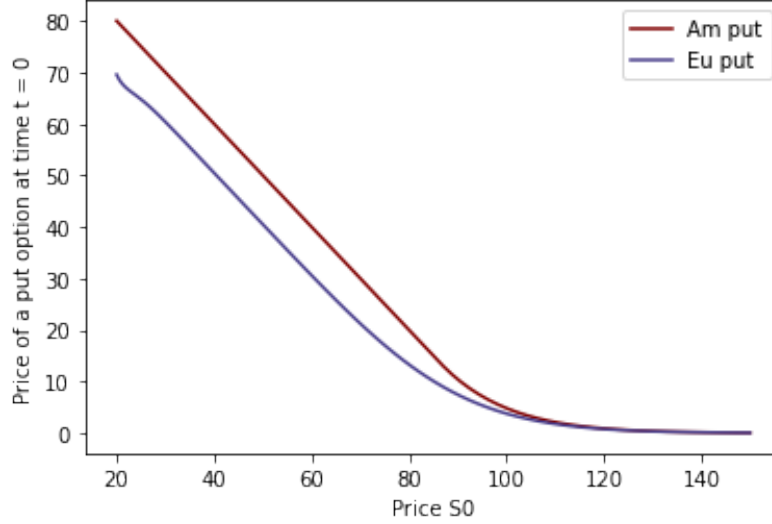


FIGURE 6 – Comparaison du prix d'un put EU et AM estimés par la méthode des DF et en fonction de S_0 .

3.4 Monte-Carlo

3.4.1 Approche naive

le terme $\mathbb{E}(v(t_{i+1}, S_{t_{i+1}} | S_{t_i}))$ dans (3.1.2) nous laisse penser à des méthodes MC pour estimer cette esperance conditionnelle. la facon la plus intuitive (mais naive?) pour ce faire, consiste n copies independante de S_0 blabla

3.4.2 Méthode de Tsitsiklis & Van Roy

Pricipe de la méthode L'idée est d'approcher l'esperance conditionnelle $\mathbb{E}(v(t_{i+1}, S_{t_{i+1}} | S_{t_i}))$ par la projection de $v(t_{i+1}, S_{t_{i+1}})$ sur $L^2(S_{t_i})$ L'algorithme consiste en le choix d'une base (ϕ_1, \dots, ϕ_l) de $L^2(S_{t_i})$ puis faire une régression linéaire de $v(t_{i+1}, S_{t_{i+1}})$ sur $(\phi_1(S_{t_i}), \dots, \phi_l(S_{t_i}))$ L'implémentation de l'algorithme de Tsitsiklis & Van Roy, pour pricer un Put américain par exemple, se déroule comme suit :

1. On génère n trajectoires indépendante du processus des prix S
2. On initialise la valeur de notre option à l'instant T par : $V_m^j = (K - S_m^j)_+$ pour $j = 1, \dots, n$
3. de manière descendante, pour $i = m-1, \dots, 1$, On estime le terme correspondant à l'espérance conditionnelle que l'on notra Y_i par une régression linéaire de V_{i+1} sur $(\phi_1(S_{t_i}), \dots, \phi_l(S_{t_i}))_{j=1, \dots, n}$ et l'on pose $V_i^j = \max((K - S_{t_i}^j)_+, e^{-r \frac{T}{m}} Y_i^j)$
 V_i étant le vecteur dont les composantes sont V_i^1, \dots, V_i^n

4. finalement, l'estimation du prix de l'option à l'instant initial sera donnée par

$$V_0 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n V_1^j$$

3.4.3 Méthode de Longstaff & Schwartz

L'idée de la méthode de Longstaff & Schwartz est d'approcher le temps d'arrêt optimal au lieu de la valeur de l'option.

L'implémentation de la méthode de Longstaff & Schwartz est comme suit :

1. On simule n trajectoires indépendantes du processus des prix S
2. initialiser le processus des temps d'arrêt la valeur de l'option à l'instant terminal par $\tau_m = T$ et $V_m^j = (K - S_m^j)_+$ pour $j = 1, \dots, n$.
3. de manière descendante, pour $i = m-1, \dots, 1$, Comme dans la méthode de Tsitsiklis & Van Roy on estime le terme correspondant à l'espérance conditionnelle que l'on notera Y_i par une régression linéaire de V_{i+1} sur $(\phi_1(S_{t_i}), \dots, \phi_l(S_{t_i}))_{j=1, \dots, n}$. On garde le vecteur des coefficients de régression α_i et l'on pose, pour tout $j = 1, \dots, n$
 $V_i^j = (K - S_{t_i}^j)_+$ si $(K - S_{t_i}^j)_+ \geq e^{-r \frac{T}{m}} Y_i^j$, $V_i^j = V_{i+1}^j$ sinon.
 V_i étant le vecteur dont les composantes sont V_i^1, \dots, V_i^n
4. On obtient une estimation du prix de l'option par

$$V_0 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n V_1^j$$

5. On simule \tilde{n} nouvelles trajectoires indépendantes du processus des prix S . et grâce aux coefficients que l'on a gardé de l'étape 3, on estime pour chacune des \tilde{n} trajectoires simulées, le temps d'arrêt optimal correspondant en effectuant la récurrence³ descendante suivante, pour $i = m-1, \dots, 1$ pour $j = 1, \dots, \tilde{n}$, $\tau_i^j = t_i$ si $(K - S_{t_i}^j)_+ \geq e^{-r \frac{T}{m}} \sum_{k=1}^l \alpha_k^i \phi(S_{t_i}^j)$, $\tau_i = \tau_{i+1}$ sinon.
6. Enfin, on donne un estimateur faiblement biaisé, d'une valeur sous-optimale du prix de l'option par :

$$\tilde{V}_0 = \frac{1}{\tilde{n}} \sum_{j=1}^{\tilde{n}} (K - S_{\tau_i^j}^j)_+$$

Contrairement aux deux estimateurs précédents, ce dernier est construit à partir de réalisations indépendantes ce qui nous permet donc d'appliquer le théorème central limite et construire un intervalle de confiance comme dans la partie sur la méthode de Monte-Carlo pour les options européennes.

3. l'initialisation est faite dans une étape précédente

Conclusion

Blablabla