Valorisation d'options ~~américaines~~

28 Février 2020

Plan de la présentation

Cadre et notations

- On considère, sur un horizon de temps N ≥ 0, un marché financier formé de 2 actifs S^0 et S.
- Les agents peuvent intervenir sur ce marché aux dates discrètes n $\in \{0, ..., N\}$.
- L'actif S^0 est un actif sans risque qui évolue selon une dynamique déterministe.
- Enfin dans le but de modéliser l'incertitude sur les prix de l'actif S, on introduit un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.
- On note $\mathbb{F} := \{\mathcal{F}_n, n\}$ où $\mathcal{F}_n = \sigma(S_i, i \leq n)$ pour tout n $\in \{0, ..., N\}$

Stratégie financière

- Une stratégie de gestion est définie par un processus aléatoire prévisible $\phi = ((\phi_n^0, \phi_n))_{0 \leq n \leq N}$ donnant à chaque instant les quantités des actifs détenues.
- La valeur du portefeuille à l'instant n est donnée par la formule suivante : $V_n(\phi) = \phi_n^0.S_n^0 + \phi_n.S_n$.
- Condition d'autofinancement : $\phi_n^0.S_n^0 + \phi_n.S_n = \phi_{n+1}^0.S_n^0 + \phi_{n+1}.S_n$.
- Une stratégie ϕ est dite admissible si elle est autofinancée et si $V_n(\phi) \geq 0$ pour tout n $\in \{0, ..., N\}$.

Deux hypothèses majeures

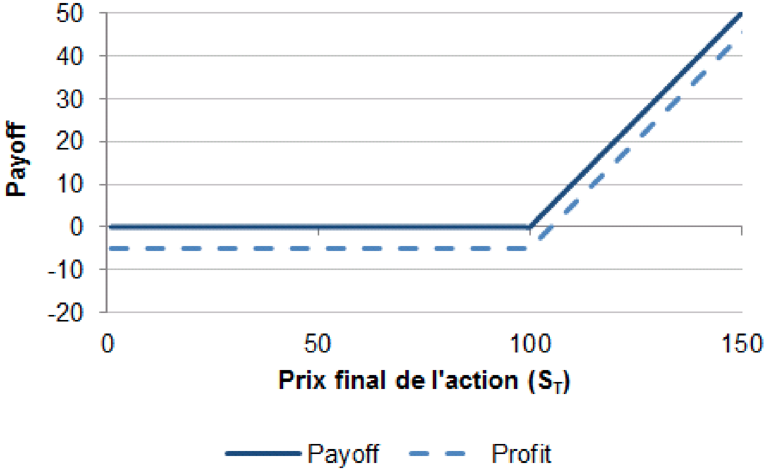
On suppose dans la suite que le marché dans lequel nous nous plaçons est

- Viable : absence d'opportunités d'arbitrage
- Complet : tout actif est simulable.

Options européennes

- On définit une option d'achat européenne (call) sur l'actif S au prix d'exercice K, d'échéance N par une variable aléatoire h, $\mathcal{F}_N$ mesurable, modélisant le profit réalisé $h = (S_N - K)^+$.
- De manière analogue, une option de vente européenne (put) est définit par la donnée de la variable aléatoire $h = (K - S_N)^+$.

Payoff pour l'achat d'un call d'échéance T



Présentation du modèle

- L'actif sans risque évolue selon la dynamique déterministe suivante : $S_n^0 = (1+r)^n$
- Le cours de l'actif risqué est donné entre 2 périodes par la relation $S_{n+1} = S_n.(1+a)$ ou $S_{n+1} = S_n.(1+b)$ avec $-1 \leq a \leq b$

Dynamique des prix

Prix et stratégie de réplication d'un call

- Étape 1 : Création de l'arbre.
- Étape 2 : Trouver la valeur de l'option à chaque nœud terminal.
- Étape 3 : Trouver la valeur de l'option sur les nœuds antérieurs. On utilise pour ce faire la relation suivante $C_n^i = \frac{1}{1+r}.(C_{n+1}^{i+1}.p + (1-p).C_{n+1}^{i-1})$
- Étape 4 : Expliciter une stratégie de réplication par le même principe

Prix et stratégie de réplication d'un call

Présentation du modèle

- L'évolution de S_t^0 est régie par l'équation différentielle: $dS_t^0 = rS_t^0 dt$
- Le prix de l'actif risqué à l'instant $t, t \in [0, T]$., est donné par la formule: $S_t = S_0 e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma B_t}$

  où μ : le rendement instantané.
  σ : la volatilité.
  B_t : un mouvement Brownien.

Soit $(X_t)_{0\leq t\leq N}$ un processus stochastique de la forme $X_t = X_0 + \int_0^t \mu_s ds + \int_0^t \sigma_s dB_s$.
Autrement dit, on a : $dX_t = \mu_t dt + \sigma_t dB_t$, avec μ_t et σ_t deux processus aléatoires.

Formule d'Ito:

Soit $f(t, X_t)$ une fonction, alors la formule d'Itō s'écrit :
$df(t, X_t) = \partial_t f(t, X_t)dt + \partial_x f(t, X_t)dX_t + \frac{1}{2}\partial^2_{xx} f(t, X_t)\sigma^2 dt$.

Evaluation des options

On veut montrer que le prix du call est donné par
$\mathbb{E}[e^{-rT}(S_T - K)_+]$.
On a $dS_t^0 = rS_t^0 dt$ et $dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dB_t$.
$V_t = \theta_t^0 S_t^0 + \theta_t S_t$ donc
$dV_t = \theta_t^0 dS_t^0 + \theta_t dS_t = \theta_t^0 r S_t^0 dt + \theta_t \mu S_t dt + \theta_t \sigma S_t dB_t$
$dV_t = (rV_t + \theta_t(\mu - r)S_t)\, dt + \theta_t \sigma S_t dB_t$.
Pour un call, on a $V_T = (S_T - K)_+ = \max(S_T - K, 0)$. On applique la formule d'Itō à la fonction $V(t, S_t)$ et donc on obtient :
$dV(t, S_t) = \left(\partial_t V + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \partial_{ss}^2 V + \mu S_t \partial_s V\right) dt + \sigma S_t \partial_s V dB_t$.

Evaluation des options

Donc $\theta_t = \partial_s V(t, S_t)$ et $\partial_t V + \frac{\sigma^2}{2} S_t^2 \partial_{ss}^2 V + rS_t \partial_s V - rV = 0$
où $V(T, s) = (s - K)_+$
Enfin il nous reste à calculer $V(0, s)$ pour trouver le prix du call.
$e^{-rT} V(T, S_T) =$
$V(0, s) + \int_0^T e^{-rT} \left(\partial_t V + \frac{\sigma^2}{2} S_t^2 \partial_{ss}^2 V + rS_t \partial_s V - rV\right) dt +$
$\int_0^T e^{-rT} \sigma S_t \partial_s V dB_t.$
Donc $\mathbb{E}[e^{-rT} V(T, S_T)] = V(0, s)$ où $V(T, S_T) = (S_T - K)_+$

Evaluation des options

Le prix du call est donné par :
$C = \mathbb{E}[e^{-rT}(S_T - K)_+]$
mais par la formule de Black-Scholes, on a:
$C = S_0\Phi(d) - Ke^{-rT}\Phi(d - \sigma\sqrt{T})$
avec $d = \frac{1}{\sigma\sqrt{T}}\left(\ln(\frac{S_0}{K}) + (r + \frac{\sigma^2}{2})T\right)$
r : Taux d'intérêt sans risque.
Φ : Fonction de répartition de la loi $\mathcal{N}(0, 1)$.
K : Prix d'exercice de l'option.
T : Maturité de l'option.

Méthode de Monte Carlo

Les méthodes de Monte Carlo permettent d'estimer une quantité δ en l'écrivant sous forme la forme $\delta = \mathbb{E}(h(X))$ où X est une v.a. qui suit une loi $\mathcal{L}$ suivant laquelle on sait simuler. La méthode de Monte Carlo Classique (MCC) consiste à simuler $X_1, ..., X_n$ suivant $\mathcal{L}$ puis d'estimer δ par la moyenne empirique i.e. $\overline{h}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} h(X_i)$

Estimateur Monte Carlo

- On note dans cette partie $C = C(T, S, K, r, \sigma)$
- On a établie que $C = \mathbb{E}(e^{-rT}(S_T - K)_+) = \mathbb{E}(h(B_T))$

$$\text{où} \quad h : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto e^{rT}(S_0 \exp((r - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma x)) \end{array}$$

car $S_T = S_0 \exp((r - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma B_T)$ avec $B_T \sim \mathcal{N}(0, T)$

L'estimateur de Monte Carlo

L'estimateur de Monte Carlo classique s'écrit

$$\hat{C}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} h(Y_i)$$

oú $Y_i \overset{\text{iid}}{\sim} \mathcal{N}(0, T)$

L'intervalle de confiance

- $\mathbb{E}(\hat{C}_n) = C$
- Par LFGN, $\hat{C}_n \xrightarrow[n \to \infty]{p.s.} \mathbb{E}(h(B_T)) = C(S, T)$
- Si l'on note $\nu := \mathbb{V}(h(B_T))$, le théorème centrale limite & Slutsky donnent

$$\sqrt{\frac{n}{\hat{\nu}^2}}(\hat{C}_n - C)) \xrightarrow[n \to \infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1)$$

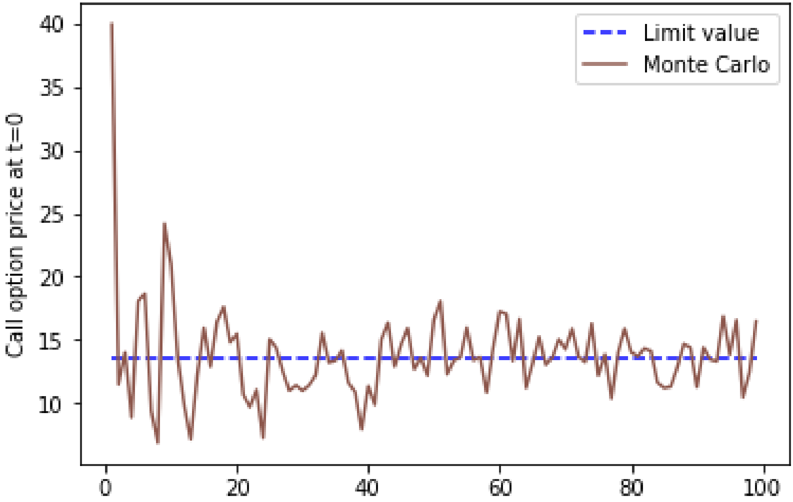
  où $\hat{\nu}$ est un estimateur de ν.
- donc un intervalle de confiance asymptotique de niveau α peut être donné par:
  $IC(1-\alpha) = [\hat{C}_n - q\sqrt{\frac{\hat{\nu}^2}{n}}, \hat{C}_n + q\sqrt{\frac{\hat{\nu}^2}{n}}]$

Résultats

- pour les valeurs numériques on prendra $S_0 = 100$, r $= 0$, T $= 1$, $\sigma = 0.2$ et un échantillon de taille 10000

$\hat{C}_n$	$\hat{\nu}$	$IC(95\%)$	la valeure exacte
13.677	262.96	[13.360, 13.995]	13.589

Courbe de l'évolution de l'estimateur avec n



pricing de l'option par la méthodes des arbres binomiaux

- $c(t_n, x)$ le prix de l'option à l'instant n si la valeure initiale de l'actif est $= x$ et $T = t_N$
- On a $c(t_n, x) = \frac{pc(t_{n+1}, x(1+a)) + (1-p)c(t_{n+1}, x(1+b)}{1+r}$ avec
  - $a = \exp(-\sigma\sqrt{\frac{T}{N}}) - 1$
  - $b = \exp(\sigma\sqrt{\frac{T}{N}}) - 1$
  - $p = \frac{b-r}{b-a}$
  - on sait calculer c(T, x) pour les différents scénarios ω_i
- pour N = 10000, on obtien c(0,100) = 13.5892 très proche de la valeur exacte 13.5891
- pour N = 10, c(0,100) = 13.6051

pricing de l'option par la méthodes des arbres binomiaux

13.6051	18.4274	24.2895	31.1332	38.8215	47.1943	56.1515	65.6935	75.8584	86.6871	98.2227
0	9.0783	12.9246	17.8652	23.9162	30.9618	38.7860	47.1943	56.1515	65.6935	75.8584
0	0	5.4678	8.2868	12.1850	17.3023	23.6171	30.8931	38.7860	47.1943	56.1515
0	0	0	2.8215	4.6275	7.3813	11.3745	16.7871	23.4839	30.8931	38.7860
0	0	0	0	1.1262	2.0425	3.6329	6.2936	10.5007	16.5288	23.4839
0	0	0	0	0	0.2661	0.5496	1.1352	2.3444	4.8419	10.0000
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Méthode des différences finies

La méthode des differences finies est une technique qui permet d'approcher numériquement les solutions aux équations aux dérivées partielles via une discrétisation de ces equation en temps et en espace.

edp verifiée par le call

- On a déjà établi l'edp vérifiée par le prix d'un call européen:

$$\frac{\partial C(t,S)}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C(t,S)}{\partial S^2} + rS\frac{\partial C(t,S)}{\partial S} - rC(t,S) = 0$$

  dans $[0, T[x\mathbb{R}_+$

- condition aux limites: $C(T,S) = (S-K)_+, \forall S$

Passage au logarithme

On peut se ramner à une edp à coeffecients constants en introduisants le processus $X_t = log(S_t)$.

Passage au logarithme

La fonction $u(t,x) := C(t, e^x)$ vérifie l'edp:

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} + r\frac{\partial u(t,x)}{\partial x} - ru(t,x) = 0$$

ou encore

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) + Au(t,x)$$

où A le générateur infinitésimale du processus X_t,
$A = \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + r\frac{\partial}{\partial x} - r$

Discrétisation de l'edp: discrétisation de l'espace

- On considère que S reste dans un intérvalle $[S_{min}, S_{max}]$ avec S_{min} assez petit et S_{max} assez grand , $X_{min} = log(S_{min})$ et $X_{max} = log(S_{max})$
- on subdivise l'intervalle $[X_{min}, X_{max}]$ en $N+2$ points $x_0 = X_{min} < x_1 < \ldots < x_N < x_{N+1} = X_{max}$ et on note $u(t) = (u_i(t))_{i=0,\ldots,N+1}$ le vecteur des valeurs approchees de $x \mapsto u(t,x)$ en ces points.
- les conditions aux bords:

$$\begin{cases} u_0(t) = 0 \\ u_{N+1}(t) = exp(X_{max}) - e^{-r(T-t)}K \end{cases}$$

Discrésitation des opérateurs différentielles

On note $h = \frac{X_{max} - X_{min}}{N+2}$ le pas de discrétisation en sepace

- la dérivée parielles $\frac{\partial u}{\partial x}(t, x_i)$ est remplacée par $\frac{u_{i+1}(t) - u_{i-1}(t)}{2h}$
- de même $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x_i)$ et remplacée par $\frac{\frac{u_{i+1}(t) - u_i(t)}{h} - \frac{u_i(t) - u_{i-1}(t)}{h}}{h} = \frac{u_{i+1}(t) - 2u_i(t) + u_{i-1}(t)}{h^2}$

l'edp discrétisée en espace

Cette discrétisation en espace permet de se ramner à une equation différentielle ordinaire:

$$\begin{cases} \dfrac{du(t)}{dt} + \tilde{A}u(t) = 0 \\ u(T) = ((e^{x_i} - K)_+)_i \end{cases}$$

avec

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \beta & \gamma & & 0 \\ \alpha & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \gamma \\ 0 & & \alpha & \beta \end{pmatrix}.$$

où

$$\alpha = \frac{\sigma^2}{2h^2} - \frac{1}{2h}(r - \frac{\sigma^2}{2})$$
$$\beta = -\frac{\sigma^2}{h^2} - r$$
$$\gamma = \frac{\sigma^2}{2h^2} + \frac{1}{2h}(r - \frac{\sigma^2}{2})$$

Discretisation en temps

On discrétise alors cette equation en temps:

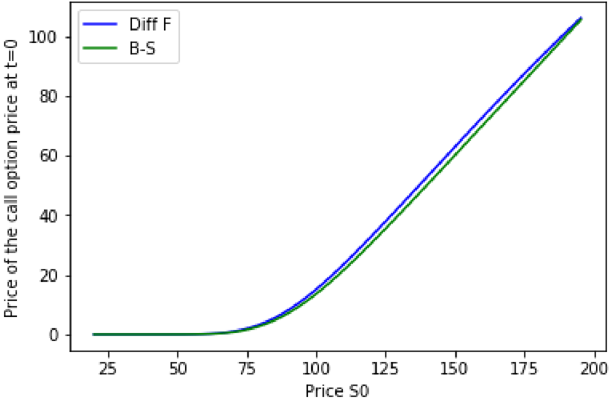
- $t_0 = 0 < t_1 < ... < t_n = T$ et k le pas de discrétisation en temps.
- Schéma d'Euler explicite: l'EDO devient

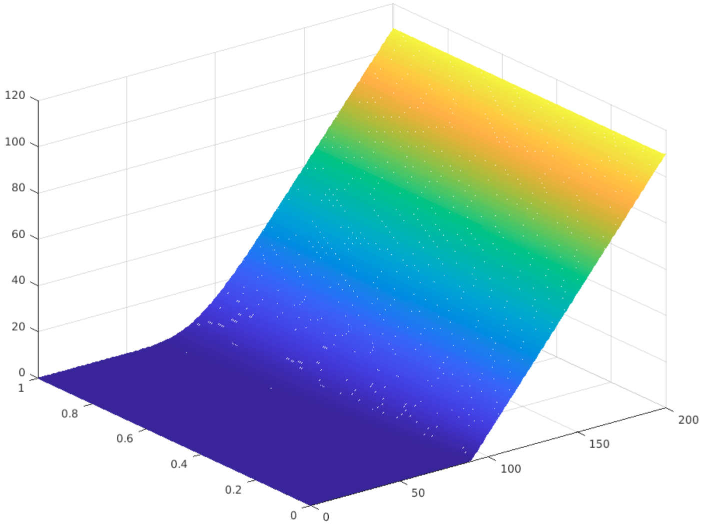
$$\begin{cases} u^j = u^{j+1} + k\tilde{A}u^{j+1}, \forall j = 0, ..., n-1 \\ u^n = u(T) \end{cases}$$

où u^j la valeur approchée de $u(t_j)$ $\forall j$

Résultats

Pour r $= 0$, $\sigma = 0.2$, $T = 1$, $K = 90$, $S_{min} = 20$, $S_{max} = 200$, $N = 100$, $n = 1000$




120
100
80
60
40
20
0
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0
50
100
150
200

The End