Sorbonne Université
Formation Cursus de Master en Ingénierie - 2[e]année

Pour le 16/12/2019
LU2ME232 Projet en calcul scientifique

Prédiction de la trajectoire d'un satellite

BENABDESSELAM Zakari et NAMEKI Malo

Table des matières

Introduction

Dans le cadre du projet en calcul scientifique du troisième semestre du Cursus de Master en Ingénierie mécanique, nous avons choisi de prédire la trajectoire d'un satellite autour de la Terre. Notre objectif a été de pouvoir déterminer la trajectoire que le satellite aura à partir de l'altitude de son périgée (point où il est le plus proche de la Terre) et de sa vitesse en ce point. Nous avons incrémenté notre travail en trois étapes : la première a été de programmer la trajectoire elliptique du satellite autour de la Terre, la deuxième d'ajouter ses trajectoires paraboliques et hyperboliques autour de la Terre, et la troisième d'ajouter ses trajectoires autour du Soleil, en se basant sur la trajectoire de la Terre autour du Soleil. Dans un premier temps nous allons présenter le problème physique rencontré. Ensuite nous expliquerons notre démarche pour résoudre ce problème sous la forme d'un programme en C. Puis nous analyserons les résultats obtenus. Enfin nous conclurons sur les résultats de ce projet.

Chapitre 1

Présentation du problème physique

1.1 Principe physique

Pour ce projet nous nous sommes en grande partie aidé d'un manuel de mécanique orbitale écrit par Howard Curtis, professeur à l'université Embry-Riddle aux États-Unis [1].

Un satellite doit avoir une vitesse assez élevée pour être en orbite sans s'écraser sur Terre, mais pas trop car sinon le satellite risque de quitter l'orbite de la Terre. L'excentricité de la trajectoire d'un satellite, notée e, permet de définir si la trajectoire du satellite restera en orbite ou non. Grâce à cette dernière, il est possible de savoir si l'on se trouve dans le cas d'une trajectoire elliptique ($0 < e < 1$ et le satellite est en orbite), d'une trajectoire parabolique ($e = 1$ et le satellite n'est plus en orbite) ou d'une trajectoire hyperbolique ($e > 1$ et le satellite n'est plus en orbite). Cette excentricité peut être trouvée à l'aide des paramètres initiaux que nous nous sommes imposés : une altitude par rapport au centre du corps attracteur (ici l'altitude du périgée) et d'une vitesse en ce point. Il existe donc la relation suivante :

$$e = \frac{h^2}{R_p * \mu}$$

avec $h = R_p * v_p$, $\mu = Mp * G$, où h est le moment cinétique du satellite, R_p la distance entre le centre de la Terre et le périgée de la trajectoire du satellite, μ le paramètre gravitationnel standard, v_p la vitesse du satellite au périgée, M_p la masse de la Terre et du satellite (la masse du satellite étant négligeable par rapport à la masse de la Terre nous ne l'avons pas prise en compte) et G la constante gravitationnelle universelle.

Comme précisé précédemment, à partir de cette excentricité, nous pouvons savoir si le satellite aura une trajectoire elliptique, parabolique ou hyperbolique. Suivant chacun des cas il existe des équations différentes pour arriver à trouver la position x et y du satellite, en un instant t après le passage du point initial étant le périgée.

Dans chacun des cas, pour aboutir aux coordonnées du satellite en un instant t, il est nécessaire de d'abord calculer l'anomalie moyenne (que l'on peut calculer à partir de l'excentricité) et à partir de cette dernière nous pouvons calculer l'anomalie vraie θ (angle entre l'axe du centre de la Terre - périgée et la position du satellite) ainsi que la distance r séparant la Terre du satellite. Dans les cas des trajectoires elliptiques et hyperboliques, il faut entre l'étape du calcul de l'anomalie moyenne et celle de l'anomalie vraie, trouver l'anomalie excentrique de la trajectoire qui permettra de trouver l'anomalie vraie et ainsi pouvoir déterminer la position x et y du satellite.

1.2 Connaître la position du satellite

Pour connaître la position du satellite, nous avons choisi de trouver la position x et y du satellite à partir de coordonnées cylindriques, donc d'un angle θ, qui est ici l'anomalie vraie et d'une distance r, ici celle qui sépare la Terre du satellite. Grâce au manuel de mécanique orbitale, nous y avons trouvé les équations suivantes servants à trouver l'angle θ et la distance r présentés précédemment. Ces équations sont présentées ci dessous suivant les cas de figures :

1.2.1 Trajectoire elliptique

Calcul de l'anomalie elliptique moyenne M_e à un instant t :

$$M_e = \frac{2\pi * t}{T}$$

avec $T = \frac{2\pi}{h^2}(\frac{h}{\sqrt{1-e^2}})^3$, où T est la période de l'orbite du satellite.

Équation (à résoudre) reliant l'anomalie excentrique E à l'anomalie elliptique moyenne M_e :

$$M_e = E - e \sin E$$

Calcul de l'anomalie vraie θ à partir de l'anomalie excentrique E :

$$\theta = 2 \arctan \frac{\tan \frac{E}{2}}{\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}}$$

Calcul de la distance r à partir de l'anomalie vraie θ :

$$r = \frac{h^2/\mu}{1 + e * \cos\theta}$$

1.2.2 Trajectoire parabolique

Calcul de l'anomalie parabolique moyenne M_p à un instant t :

$$M_p = \frac{\mu^2 * t}{h^3}$$

Calcul de l'anomalie vraie θ à partir de l'anomalie parabolique moyenne M_p :

$$\theta = 2\arctan\left((3M_p + \sqrt{(3M_p)^2 + 1})^{\frac{1}{3}} - (3M_p + \sqrt{(3M_p)^2 + 1})^{-\frac{1}{3}}\right)$$

Calcul de la distance r à partir de l'anomalie vraie θ :

$$r = \frac{h^2}{\mu} \frac{1}{1 + \cos\theta}$$

1.2.3 Trajectoire hyperbolique

Calcul de l'anomalie hyperbolique moyenne M_h à un instant t :

$$M_h = \frac{\mu^2}{h^3}(e^2 - 1)^{\frac{3}{2}} * t$$

Équation (à résoudre) reliant l'anomalie excentrique F à l'anomalie hyperbolique moyenne M_h :

$$M_h = e\sinh F - F$$

Calcul de l'anomalie vraie θ à partir de l'anomalie excentrique E :

$$\theta = 2\arctan\left(\sqrt{\frac{e+1}{e-1}}\tanh\frac{F}{2}\right)$$

Calcul de la distance r à partir de l'anomalie vraie θ :

$$r = \frac{h^2}{\mu} \frac{1}{1 + e\cos\theta}$$

Nous avons maintenant les équations ainsi que la "recette de cuisine" nécessaire à la résolution du problème et à sa modélisation.

Chapitre 2

Résolution et méthodes numériques

Il est à présent nécessaire de trouver les coordonnées x ou y de la trajectoire du satellite à chaque instant t. Pour ce faire nous nous sommes inspirés du programme DogTracking réalisé en début de semestre. Nous avons divisé notre programme en quatre codes avec leurs headers correspondants, ainsi que d'un fichier regroupant les données initiales : main.c, SatelliteTracking.c, SatelliteTracking.h, DiskFcts.c, DiskFcts.h, ScreenFcts.c, ScreenFcts.h et donneesinitiales.txt. Dans le code SatelliteTracking.c nous y avons regroupé les différentes équations précédentes.

Cependant il nous restait à résoudre les équations reliants l'anomalie elliptique ou hyperbolique moyenne à l'anomalie excentrique et à convertir les coordonnées cylindriques en coordonnées cartésiennes.

Pour résoudre le premier point nous nous sommes servis de programmes MatLab présents dans le manuel de mécanique orbitale respectivement en annexe D11 et D12 que nous avons convertis en fonctions écrites en langage C (ces programmes utilisent la méthode de Newton).

Pour le second point nous nous sommes servis des conversions traditionnelles entre système cylindrique et sytème cartésien, en prenant comme référence le centre de la Terre de coordonnées x_p et y_p :

$$x = x_p + r\cos\theta$$

$$y = y_p + r\sin\theta$$

Nous avons ensuite ajouté le mouvement de la Terre autour du Soleil. Pour cela nous avons programmé la trajectoire de la Terre autour du satellite dans la fonction TrajectoirePlanete. Ainsi, à chaque instant t nous avons la position de la Terre par rapport au Soleil et la position du satellite par rapport à la Terre. Par conséquent nous avons la position du satellite autour du Soleil.

Pour chaque instant t, les coordonnées cartésiennes des positions de la Terre et du satellite sont écrites respectivement dans les fichiers TrajectoirePlanete.txt et TrajectoireSatellite.txt. Pour visualiser ces trajectoires, il suffit de copier coller le contenu de ces fichiers dans le logiciel Desmos, sans oublier de cocher l'option zoom carré (sinon une orbite circulaire aurait la forme d'une patatoïde). À noter que nous avons rajouté l'option du référentiel dans lequel on souhaite se trouver. Si l'utilisateur du programme souhaite se placer dans un référentiel géocentrique, alors la fonction TrajectoirePlanete sera remplacée par l'écriture de 0 pour les coordonnées de la Terre à chaque instant t.

Nous avons rencontré une erreur de segmentation lors de l'essai d'une trajectoire hyperbolique (boucle infinie) et n'avons pas pu la résoudre jusqu'à maintenant, c'est pourquoi nous avons limité notre programme aux trajectoires elliptiques et paraboliques (en cas de trajectoire hyperbolique le programme renvoit "Le code ne permet pas de calculer cette trajectoire"). La fonction hyperbolique censé calculer une trajectoire hyperbolique est consultable pour le correcteur dans SatelliteTracking.c mais n'est pas appelée dans le main.c.

Chapitre 3

Résultats

Pour vérifier la cohérence des trajectoires obtenues, nous avons pris des paramètres de cas connus comme ceux de l'orbite géostationnaire et ceux de la Lune.

3.1 Orbite géostationnaire

Pour l'orbite géostationnaire nous avons pris comme données initiales une distance du périgée de $42500km$ et une vitesse de $3074m.s^{-1}$ [3]. Nous avons obtenu le graphique suivant :

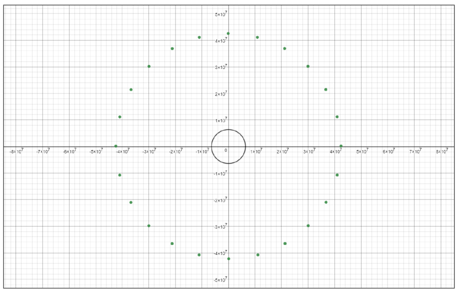

Figure 3.1 – Orbite géostationnaire dans le référentiel géocentrique (en noir la Terre).

Tout d'abord à première vue nous observons une trajectoire circulaire ce qui est cohérent avec l'orbite géostationnaire. Plus précisément, nous avons demandé au programme de nous renvoyer la période de l'orbite, qui est ici de 23,9h ce qui est cohérent avec la période d'environ 24h d'une orbite géostationnaire.

En augmentant la vitesse par exemple, nous observons l'aplatissement de l'ellipse. Si cette vitesse devient trop importante alors nous serons en trajectoire hyperbolique et nous aurons atteint les limites de notre programme.

3.2 Orbite lunaire

Pour l'orbite lunaire nous avons pris comme données initiales une distance du périgée de $363300km$ et une vitesse de $1082m.s^{-1}$ [2]. Une partie du graphique obtenu est le suivant :

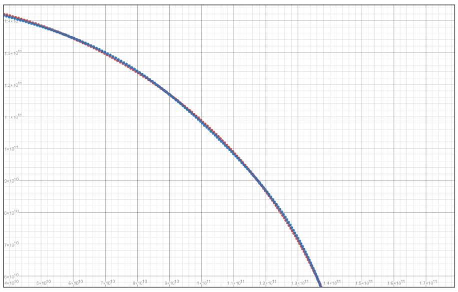

FIGURE 3.2 – Trajectoires de la Lune (en bleu) et de la Terre (en rouge) autour du Soleil(référentiel héliocentrique)

Encore une fois à première vue nous observons une trajectoire en vague de la Lune autour du Soleil ce qui est cohérent. Plus précisément, la période de l'orbite de la Lune est affichée à 654h contre 655,7h dans la réalité. De plus, en observant la trajectoire sinusoïdale de la Lune, on observe que cette dernière fait environ 11-12 sinusoïdes lors d'un tour complet du Soleil, ce qui est cohérent avec les 13 révolutions effectuée chaque année.

Discussion et conclusions

En conclusion le programme remplit son rôle, il permet de fournir des trajectoires elliptiques cohérentes du satellite autant dans un référentiel géocentrique qu'héliocentrique, la trajectoire elliptique de la Terre est également cohérente dans le référentiel héliocentrique.

Le programme a également ses limites, en effet il ne représente pas la réalité car plusieurs paramètres n'ont pas été pris en compte afin de pouvoir simplifier la compréhension et réduire la charge de code sur l'ordinateur. Par exemple, l'influence des autres planètes ne semble pas négligeable pour pouvoir faire une étude précise de la trajectoire d'un satellite. Il s'agit probablement de la raison expliquant les légers décalages entre ce qu'affiche notre code ainsi que ses résultats et la réalité, dans le cas des orbites géostationnaires et lunaires.

Afin de mettre un terme à ce programme, nous essayerons plus tard de résoudre le problème des trajectoires hyperboliques pour qu'il soit complet. Les trajectoires paraboliques étant extrêmement difficiles à obtenir (voir impossible sans imposer $e = 1$), notre programme ne permet de traiter que les trajectoires elliptiques.

Bibliographie

[1] Howard D. Curtis. *Orbital Mechanics for Engineering Students - Third Edition*. Elsevier aerospace engineering series. 2010.

[2] NASA. Moon Fact Sheet. `https://nssdc.gsfc.nasa.gov/planetary/factsheet/moonfact.html`.

[3] Wikipédia. Orbite géostationnaire, October 2019. `https://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Orbite_g%C3%A9ostationnaire&oldid=163591237`.