М.М. Потапов 28 декабря 2020 г.

Данные для тестирования правильности вычисления градиента $J_1'(u)$ в точке $u = 0$

В задаче на квадрате $Q = (0,1)\times(0,1)$ при выборе тестового оптимального управления вида

$$-y_x|_{x=0} = u_*(t) = \cos t, \quad t \in (0,1), \tag{1}$$

решение $y = y(t,x)$ в верхнем левом треугольнике будет иметь вид

$$y(t,x) = \int_0^{t-x} \cos s\, ds = \sin(t-x), \quad x < t < 1\,. \tag{2}$$

На всякий случай проверим, действительно ли выполняется граничное условие (1):

$$y_x(t,x) \overset{(2)}{=} \cos(t-x)\,(-1)|_{x=0} = -\cos t, \quad t \in (0,1),$$

т. е. всё в порядке. Найдём финальное состояние

$$y|_{t=1} = \sin(1-x) = -\sin(x-1) = f^0(x), \quad x \in (0,1)\,, \tag{3}$$

и возьмём именно его в качестве целевого состояния в функционале

$$J_1(u) = \int_0^1 \big(y(1,x;u) - f^0(x)\big)^2\, dx\,. \tag{4}$$

Градиент $J_1'(u)$ вычисляется по правилу

$$J_1'(u) = 2\psi(t,0), \quad t \in (0,1), \tag{5}$$

где $\psi = \psi(t,x)$ — решение волнового уравнения с финальными условиями

$$\psi|_{t=1} = 0, \quad \psi_t|_{t=1} = -w(x), \quad x \in (0,1), \tag{6}$$

и однородными граничными условиями Неймана:

$$\psi_x|_{x=0} = 0, \quad \psi_x|_{x=1} = 0, \quad t \in (0,1). \tag{7}$$

В условиях (6) при вычислении градиента следует брать

$$w(x) = y(1,x;u) - f^0(x), \quad x \in (0,1)\,, \tag{8}$$

в частности, при $u = u(t) = 0$ (начальное приближение) получим

$$w(x) = y(1,x;0) - f^0(x) \overset{(3)}{=} 0 + \sin(x-1) = \sin(x-1), \quad x \in (0,1)\,, \tag{9}$$

В характеристическом квадрате $K = \{|x| < t < 2-|x|\}$ решение ψ волнового уравнения полностью определяется по формуле Даламбера через значения ψ и ψ_t на диагонали $t = 1, \ x \in (-1,1)$этого квадрата:

$$\psi(t,x) = \frac{1}{2} \int_{x-(t-1)}^{x+(t-1)} \big(-w(\xi)\big)\, d\xi\,. \tag{10}$$

Чтобы обеспечить выполнение левого граничного условия (7), достаточно продолжить функцию $w(x)$ **чётно**, положив

$$w(x) = w(-x) = \sin(-x-1), \quad x \in (-1,0)\,. \tag{11}$$

Тогда из (9) – (11) находим интересующее нас значение

$$\begin{aligned}
\psi(t,0) = \frac{1}{2} \int_{-t+1}^{t-1} \big(-w(\xi)\big)\, d\xi = \big[-t+1>0,\ t-1<0\big] = \frac{1}{2} \int_{t-1}^{1-t} w(\xi)\, d\xi = \\
= \frac{1}{2} \Big(\int_{t-1}^{0} + \int_{0}^{1-t} \Big) w(\xi)\, d\xi = \frac{1}{2} \int_{t-1}^{0} w(-\xi)\, d\xi + \frac{1}{2} \int_{0}^{1-t} w(\xi)\, d\xi = \\
= \frac{1}{2} \int_{t-1}^{0} \sin(-\xi-1)\, d\xi + \frac{1}{2} \int_{0}^{1-t} \sin(\xi-1))\, d\xi = \\
= \frac{1}{2} \Big[\cos(-\xi-1)\Big|_{\xi=t-1}^{\xi=0} - \cos(\xi-1)\Big|_{\xi=0}^{\xi=1-t} \Big] = \\
= \frac{1}{2} \Big[\cos(-1) - \cos(1-t-1) - \cos(1-t-1) + \cos(-1) \Big] = \\
= \cos 1 - \cos t, \quad t \in (0,1)\,.
\end{aligned} \tag{12}$$

Это означает, что

$$J_1'(0) \overset{(5)}{=} 2\psi(t,0) = 2\,\big(\cos 1 - \cos t\big), \quad t \in (0,1)\,.$$