В. А. Ильин, Е. И. Моисеев, Оптимальное граничное управление упругой силой на одном конце струны при свободном втором ее конце, *Дифференц. уравнения*, 2005, том 41, номер 1, 105–115

*ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2005, том 41, № 1, с. 105–115*

## УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

*УДК 517.977*

# ОПТИМАЛЬНОЕ ГРАНИЧНОЕ УПРАВЛЕНИЕ УПРУГОЙ СИЛОЙ НА ОДНОМ КОНЦЕ СТРУНЫ ПРИ СВОБОДНОМ ВТОРОМ ЕЕ КОНЦЕ

**© 2005 г. В. А. Ильин, Е. И. Моисеев**

В настоящей работе для большого промежутка времени $T$, равного $2l(n+1)$, где $n$ – любое натуральное число, в терминах обобщенного решения волнового уравнения

$$u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t) = 0, \tag{1}$$

допускающего существование в любой момент времени $t$ конечной энергии, мы находим и предъявляем в явном аналитическом виде оптимальное граничное управление упругой силой $u_x(0,t) = \mu(t)$ на конце $x=0$ струны, которое в предположении свободности второго конца $x=l$ струны доставляет на множестве всех функций $\mu(t)$ из класса $L_2[0,T]$ минимум интегралу упругой граничной энергии

$$\int_0^T \mu^2(t)\,dt \tag{2}$$

при условии, что процесс колебаний переводит струну из произвольно заданного начального состояния $\{u(x,0)=\varphi(x),\ u_t(x,0)=\psi(x)\}$ в произвольно заданное финальное состояние $\{u(x,T)=\widehat{\varphi}(x),\ u_t(x,T)=\widehat{\psi}(x)\}$. При этом $\varphi(x)$ и $\widehat{\varphi}(x)$ являются произвольными функциями из класса $W_2^1[0,l]$, а $\psi(x)$ и $\widehat{\psi}(x)$ – произвольными функциями из класса $L_2[0,l]$.

Найденное нами оптимальное граничное управление $u_x(0,t)=\mu(t)$ представляет собой сумму двух членов $\mu(t)=L(t)+\beta(t)$, первый из которых $L(t)$ при постоянном числе

$$\widehat{\lambda} = 3\frac{\widehat{\varphi}(0) - \varphi(0) - (n+1)\int_0^l[\psi(x)+\widehat{\psi}(x)]\,dx}{ln(n+1)(n+2)} \tag{3}$$

является на всем сегменте $[0,T]$ линейной функцией вида

$$L(t) = \frac{\widehat{\lambda}}{2l}t, \tag{4}$$

а второй из которых $\beta(t)$ является на сегменте $[0,T]=[0,2l(n+1)]$ периодической функцией периода $2l$ и при условии, что функции $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $\widehat{\varphi}(x)$ и $\widehat{\psi}(x)$ продолжены четно относительно точки $x=l$ с сегмента $[0,l]$ на сегмент $[l,2l]$, для любого $m=0,1,2,\ldots,n$ и любого $x$ из сегмента $0\le x\le 2l$ записывается в виде

$$\beta(2lm+x) = \frac{\varphi'(x)+\psi(x)-\widehat{\varphi}'(x)-\widehat{\psi}(x)}{2(n+1)} - \widehat{\lambda}\left(\frac{n}{2}+\frac{x}{2l}\right). \tag{5}$$

Из предъявленного нами явного вида оптимального граничного управления $u_x(0,t)=\mu(t)$ вытекает, что для совершенно произвольных четырех функций $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $\widehat{\varphi}(x)$ и $\widehat{\psi}(x)$ из классов

$$\varphi(x)\in W_2^1[0,l],\quad \psi(x)\in L_2[0,l],\quad \widehat{\varphi}(x)\in W_2^1[0,l],\quad \widehat{\psi}(x)\in L_2[0,l] \tag{6}$$

линейная функция $L(t)$ равномерно на всем сегменте $[0,T] = [0,2l(n+1)]$ имеет порядок $O(1/n) = O(1/T)$, а в случае, когда начальная скорость $\psi(x)$ и финальная скорость $\widehat{\psi}(x)$ удовлетворяют условию $\int_0^l [\psi(x)+\widehat{\psi}(x)]\,dx = 0$, – более высокий порядок $O(1/n^2) = O(1/T^2)$.

Кроме того, при произвольных $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $\widehat{\varphi}(x)$ и $\widehat{\psi}(x)$ из классов (6) для квадрата нормы в $L_2[0,T]$ оптимального граничного управления справедлива оценка

$$\int_0^T \mu^2(t)\,dt = O\left(\frac{1}{T}\right). \tag{7}$$

Подчеркнем, что константы, ограничивающие рост $O$-членов, зависят только от норм функций $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $\widehat{\varphi}(x)$ и $\widehat{\psi}(x)$ в классах (6).

Наконец, из предъявленного явного вида оптимального граничного управления $\mu(t)$ легко устанавливается следующее равенство:

$$\int_0^T \mu(t)\,dt = \int_0^l [\psi(x) - \widehat{\psi}(x)]\,dx. \tag{8}$$

Из предшествующих работ, посвященных оптимизации граничного управления, отметим работы [1] и [2].

В работе [1] найдено и предъявлено в явном аналитическом виде оптимальное граничное управление смещением на одном конце при закрепленном втором конце. Случай оптимизации граничного управления упругой силой на одном конце при закрепленном втором конце разобран в статье, которая будет опубликована в "Докл. РАН".

В работе [2] на физическом уровне строгости изучалась задача об оптимизации граничного управления упругой силой на одном конце при свободном втором конце, но, несмотря на завышенные требования гладкости на начальные функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ и финальные функции $\widehat{\varphi}(x)$ и $\widehat{\psi}(x)$, явное аналитическое выражение для оптимального граничного управления получено не было.

Переходим к развернутому изложению полученных нами результатов.

При $T = 2l(n+1)$ обозначим символом $Q_T$ "длинный" прямоугольник

$$Q_T = [0 \le x \le l] \times [0 \le t \le T]$$

и в нем рассмотрим впервые введенный в работах [3] и [4] класс функций $\widehat{W_2^1}(Q_T)$, который определяется как множество функций двух переменных $u(x,t)$, непрерывных в замкнутом прямоугольнике $Q_T$ и имеющих в нем обе обобщенные частные производные $u_x(x,t)$ и $u_t(x,t)$, каждая из которых не только принадлежит классу $L_2(Q_T)$, но и принадлежит классу $L_2[0 \le x \le l]$ при каждом $t$ из сегмента $[0,T]$ и классу $L_2[0 \le t \le T]$ при каждом $x$ из сегмента $[0,l]$.

В классе $\widehat{W_2^1}(Q_T)$ будем рассматривать обобщенные решения следующих двух задач для волнового уравнения (1):

1) **смешанной задачи I**, состоящей в решении в $Q_T$ волнового уравнения (1) с начальными условиями $u(x,0) = \varphi(x)$, $u_t(x,0) = \psi(x)$ и граничными условиями $u_x(0,t) = \mu(t)$, $u_x(l,t) = 0$, у которой $\varphi(x) \in W_2^1[0,l]$, $\psi(x) \in L_2[0,l]$, $\mu(t) \in L_2[0,T]$;

2) **задачи граничного управления II**, состоящей в решении в $Q_T$ волнового уравнения (1) с условием свободного конца $u_x(l,t) = 0$, с начальными условиями $u(x,0) = \varphi(x)$, $u_t(x,0) = \psi(x)$ и финальными условиями $u(x,T) = \widehat{\varphi}(x)$, $u_t(x,T) = \widehat{\psi}(x)$, у которой $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $\widehat{\varphi}(x)$ и $\widehat{\psi}(x)$ принадлежат классам (6).

**Определение 1.** *Решением из класса* $\widehat{W}_2^1(Q_T)$ *смешанной задачи* I назовем такую функцию $u(x,t)$ из этого класса, которая удовлетворяет тождеству

$$\int_0^l \int_0^T u(x,t)[\Phi_{tt}(x,t) - \Phi_{xx}(x,t)]\,dx\,dt + \int_0^T \mu(t)\Phi(0,t)\,dt +$$

$$+ \int_0^l \varphi(x)\Phi_t(x,0)\,dx - \int_0^l \psi(x)\Phi(x,0)\,dx = 0 \tag{9}$$

для любой функции $\Phi(x,t)$ из класса $C^{(2)}(\overline{Q}_T)$, подчиненной условиям $\Phi_x(0,t) \equiv 0$, $\Phi_x(l,t) \equiv 0$ при $0 \le t \le T$ и условиям $\Phi(x,T) \equiv 0$, $\Phi_t(x,T) \equiv 0$ при $0 \le x \le l$, и которая, кроме того, удовлетворяет равенствам $u_x(0,t) = \mu(t)$ и $u_x(l,t) = 0$ в классе $L_2[0,T]$, равенству $u(x,0) = \varphi(x)$ в классическом смысле и равенству $u_t(x,0) = \psi(x)$ в классе $L_2[0,l]$.

**Определение 2.** *Решением из класса* $\widehat{W}_2^1(Q_T)$ *задачи граничного управления* II назовем решение $u(x,t)$ из этого класса смешанной задачи I с начальными условиями $u(x,0) = \varphi(x)$, $u_t(x,0) = \psi(x)$ и с такими граничными условиями $u_x(0,t) = \mu(t)$, $u_x(l,t) = 0$, которые обеспечивают выполнение равенства $u(x,T) = \widehat{\varphi}(x)$ в классическом смысле и равенства $u_t(x,T) = \widehat{\psi}(x)$ в классе $L_2[0,l]$.

Несущественное видоизменение метода, развитого в гораздо более общей ситуации в работе [5, гл. 2, § 9], позволяет утверждать, что *для любого* $T > 0$ *смешанная задача* I *может иметь только одно решение из класса* $\widehat{W}_2^1(Q_T)$.

Можно убедиться в том, что при $T > 2l$ задача граничного управления II имеет бесконечно много решений из класса $\widehat{W}_2^1(Q_T)$, т.е. при $T > 2l$ существует бесконечно много функций $\mu(t)$ из класса $L_2[0,T]$ таких, что граничное управление $u_x(0,t) = \mu(t)$ при условии $u_x(l,t) = 0$ переводит процесс колебаний из произвольно заданного начального состояния $\{u(x,0) = \varphi(x),\ u_t(x,0) = \psi(x)\}$ в произвольно заданное финальное состояние $\{u(x,T) = \widehat{\varphi}(x),\ u_t(x,T) = \widehat{\psi}(x)\}$.

Поэтому при $T = 2l(n+1)$, где $n$ – любое натуральное число, естественно возникает задача об отыскании среди всех функций $\mu(t)$ из класса $L_2[0,T]$ оптимального граничного управления упругой силой $u_x(x,t) = \mu(t)$, которое в предположении свободности конца $x = l$ доставляет минимум интегралу упругой граничной энергии (2) при условии выполнения заданных начальных условий $u(x,0) = \varphi(x)$, $u_t(x,0) = \psi(x)$ и заданных финальных условий $u(x,T) = \widehat{\varphi}(x)$, $u_t(x,T) = \widehat{\psi}(x)$.

Выполнение заданных начальных условий и заданных финальных условий позволит нам определить те условия связи, которые следует присоединить к интегралу (2) при отыскании его минимума.

Пусть $u(x,t)$ – то решение из класса $\widehat{W}_2^1(Q_T)$ смешанной задачи I, которое является решением из этого класса задачи граничного управления II, т.е. удовлетворяет условию $u(x,T) = \widehat{\varphi}(x)$ в классическом смысле и условию $u_t(x,t) = \widehat{\psi}(x)$ в классе $L_2[0,l]$. Это решение $u(x,t)$ мы представим в виде суммы двух функций $u(x,t) = \widetilde{u}(x,t) + \widehat{u}(x,t)$, где $\widetilde{u}(x,t)$ – решение из класса $\widehat{W}_2^1(Q_T)$ смешанной задачи I с начальными условиями $\widetilde{u}(x,0) = \varphi(x)$, $\widetilde{u}_t(x,0) = \psi(x)$ и с граничными условиями $\widetilde{u}_x(0,t) = \widetilde{\mu}(t)$, $\widetilde{u}_x(l,t) = 0$, в которых упругая граничная сила $\widetilde{\mu}(t)$ при условии, что функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ продолжены четно относительно точки $x = l$ с сегмента $[0,l]$ на сегмент $[l,2l]$, определяется равенством

$$\widetilde{\mu}(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}[\varphi'(t) + \psi(t)] & \text{при} \quad 0 \le t \le 2l, \\ 0 & \text{при} \quad 2l < t \le 2l(n+1) = T. \end{cases} \tag{10}$$

Чтобы предъявить явный аналитический вид указанного решения $\widetilde{u}(x,t)$ во всем прямоугольнике $Q_T$, разобьем этот прямоугольник на сумму трех не имеющих общих внутренних точек областей $\Delta_1$, $\Delta_2$ и $\Delta_3$, где $\Delta_1$ – треугольник, ограниченный отрезками прямых $t=0$, $x=l$ и $x-t=0$, $\Delta_2$ – треугольник, ограниченный отрезками прямых $x=0$, $x-t=0$ и $x+t-2l=0$, а $\Delta_3$ – "длинная" трапеция, ограниченная отрезками прямых $x=0$, $x=l$, $x+t-2l=0$ и $t=T$.

Докажем, что решение $\widetilde{u}(x,t)$ определяется равенством

$$\widetilde{u}(x,t)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\left[\varphi(x+t)+\varphi(x-t)+\int\limits_0^{x+t}\psi(\tau)\,d\tau-\int\limits_0^{x-t}\psi(\tau)\,d\tau\right] & \text{в } \Delta_1,\\ \dfrac{1}{2}\left[\varphi(x+t)+\varphi(0)+\int\limits_0^{x+t}\psi(\tau)\,d\tau\right] & \text{в } \Delta_2,\\ C_0=\varphi(0)+\int\limits_0^{l}\psi(\tau)\,d\tau=\mathrm{const} & \text{в } \Delta_3.\end{cases}\qquad(11)$$

Так как функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, продолженные четно относительно точки $x=l$ с сегмента $[0,l]$ на сегмент $[l,2l]$, принадлежат классам $W_2^1[0,2l]$ и $L_2[0,2l]$ соответственно, то из равенства (11) вытекает, что функция $\widetilde{u}(x,t)$ принадлежит классу $\widehat{W_2^1}$ в каждой из областей $\Delta_1$, $\Delta_2$ и $\Delta_3$. Отсюда и из того, что функция $\widetilde{u}(x,t)$ сохраняет непрерывность при переходе через границу областей $\Delta_1$ и $\Delta_2$ и при переходе через границу областей $\Delta_2$ и $\Delta_3$, вытекает, что функция $\widetilde{u}(x,t)$ принадлежит классу $\widehat{W_2^1}(Q_T)$.

Далее тривиально проверяется выполнение условий $\widetilde{u}_x(0,t)=\widetilde{\mu}(t)$ и $\widetilde{u}_x(l,t)=0$ в классе $L_2[0,T]$, условия $\widetilde{u}(x,0)=\varphi(x)$ в классическом смысле и условия $\widetilde{u}_t(x,0)=\psi(x)$ в классе $L_2[0,l]$.

Остается доказать, что функция $\widetilde{u}(x,t)$ удовлетворяет тождеству (9), в которой $u(x,t)=\widetilde{u}(x,t)$, $\mu(t)=\widetilde{\mu}(t)$, а $\Phi(x,t)$ – произвольная функция из определения 1.

Из тождества

$$\widetilde{u}(x,t)\{\Phi_{tt}(x,t)-\Phi_{xx}(x,t)\}\equiv$$
$$\equiv\{[\widetilde{u}(x,t)\Phi_t(x,t)]_t-[\widetilde{u}(x,t)\Phi_x(x,t)]_x\}+\{\widetilde{u}_x(x,t)\Phi_x(x,t)-\widetilde{u}_t(x,t)\Phi_t(x,t)\}$$

вытекает, что

$$\int\limits_0^l\int\limits_0^T\widetilde{u}(x,t)\{\Phi_{tt}(x,t)-\Phi_{xx}(x,t)\}\,dx\,dt=I_1+I_2,\qquad(12)$$

где

$$I_1=\iint\limits_{Q_T}\{[\widetilde{u}(x,t)\Phi_t(x,t)]_t-[\widetilde{u}(x,t)\Phi_x(x,t)]_x\}\,dx\,dt,\qquad(13)$$

$$I_2=\int\limits_0^l\int\limits_0^T\{\widetilde{u}_x(x,t)\Phi_x(x,t)-\widetilde{u}_t(x,t)\Phi_t(x,t)\}\,dx\,dt.\qquad(14)$$

К интегралу (13) применяем формулу Грина

$$\iint\limits_{Q_T}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial t}\right)dx\,dt=\int\limits_\Gamma P\,dx+Q\,dt,$$

в которой через $\Gamma$ обозначен контур, ограничивающий прямоугольник $Q_T$. В результате получаем, что

$$I_1=-\int\limits_\Gamma\widetilde{u}(x,t)\Phi_t(x,t)\,dx-\int\limits_\Gamma\widetilde{u}(x,t)\Phi_x(x,t)\,dt.\qquad(15)$$

Так как $\Phi_t(x,T) \equiv 0$ при $0 \le x \le l$, $\Phi_x(0,t) \equiv 0$, $\Phi_x(l,t) \equiv 0$ при $0 \le t \le T$ и $\widetilde{u}(x,0) = \varphi(x)$, то из (15) следует, что

$$I_1 = -\int_0^l \varphi(x)\Phi_t(x,0)\,dx. \tag{16}$$

Для подсчета $I_2$ обозначим через $U(x,t)$ функцию, совпадающую с $\widetilde{u}(x,t) - \varphi(0)$ в треугольнике $\Delta_2$ и в "длинной" трапеции $\Delta_3$, а в треугольнике $\Delta_1$ равную

$$U(x,t) = \frac{1}{2}\left[\varphi(x+t) - \varphi(x-t) + \int_0^{x+t} \psi(\tau)\,d\tau + \int_0^{x-t} \psi(\tau)\,d\tau\right].$$

Легко проверяется, что функция $U(x,t)$ принадлежит классу $\widehat{W}_2^1(Q_T)$ и что почти всюду в $Q_T$ справедливы равенства

$$U_t(x,t) = \widetilde{u}_x(x,t), \quad U_x(x,t) = \widetilde{u}_t(x,t). \tag{17}$$

Равенства (17) позволяют переписать (14) в виде

$$I_2 = \int_0^l \left[\int_0^T U_t(x,t)\Phi_x(x,t)\,dt\right] dx - \int_0^T \left[\int_0^l U_x(x,t)\Phi_t(x,t)\,dx\right] dt. \tag{18}$$

Вычисляя внутренние интегралы в (18) по частям, получаем, что

$$I_2 = \int_0^l [U(x,T)\Phi_x(x,T) - U(x,0)\Phi_x(x,0)]\,dx - \int_0^l \int_0^T U(x,t)\Phi_{xt}(x,t)\,dx\,dt -$$

$$- \int_0^T [U(l,t)\Phi_t(l,t) - U(0,t)\Phi_t(0,t)]\,dt + \int_0^l \int_0^T U(x,t)\Phi_{tx}(x,t)\,dx\,dt. \tag{19}$$

Учитывая взаимное уничтожение в (19) двойных интегралов и принимая во внимание равенства

$$\Phi_x(x,T) \equiv 0, \quad U_x(x,0) = \widetilde{u}_t(x,0) = \psi(x), \quad U_t(0,t) = \widetilde{u}_x(0,t) = \widetilde{\mu}(t), \quad U_t(l,t) = \widetilde{u}_x(l,t) = 0$$

и получаемые интегрированием по частям соотношения

$$-\int_0^l U(x,0)\Phi_x(x,0)\,dx = -U(l,0)\Phi(l,0) + U(0,0)\Phi(0,0) + \int_0^l U_x(x,0)\Phi(x,0)\,dx =$$

$$= -U(l,0)\Phi(l,0) + U(0,0)\Phi(0,0) + \int_0^l \psi(x)\Phi(x,0)\,dx,$$

$$-\int_0^T U(l,t)\Phi_t(l,t)\,dt = -U(l,T)\Phi(l,T) + U(l,0)\Phi(l,0) + \int_0^T U_t(l,t)\Phi(l,t)\,dt = U(l,0)\Phi(l,0),$$

$$\int_0^T U(0,t)\Phi_t(0,t)\,dt = U(0,T)\Phi(0,T) - U(0,0)\Phi(0,0) - \int_0^T U_t(0,t)\Phi(0,t)\,dt =$$

$$= -U(0,0)\Phi(0,0) - \int_0^T \widetilde{\mu}(t)\Phi(0,t)\,dt,$$

мы получим из (19), что

$$I_2 = \int_0^l \psi(x)\Phi(x,0)\,dx - \int_0^T \widetilde{\mu}(t)\Phi(0,t)\,dt. \tag{20}$$

Из равенств (12), (16) и (20) вытекает справедливость тождества (9), в котором $u(x,t) = \widetilde{u}(x,t)$, $\mu(t) = \widetilde{\mu}(t)$.

Тем самым мы доказали, что функция (11) является решением из класса $\widehat{W}_2^1(Q_T)$ смешанной задачи I с начальными условиями $\widetilde{u}(x,0) = \varphi(x)$, $\widetilde{u}_t(x,0) = \psi(x)$ и с граничными условиями $\widetilde{u}_x(0,t) = \widetilde{\mu}(t)$, $\widetilde{u}_x(l,t) = 0$.

Отсюда и из того, что функция $u(x,t)$ является решением из класса $\widehat{W}_2^1(Q_T)$ той смешанной задачи I, которая приводит к решению общей задачи граничного управления II, вытекает, что функция $\widehat{u}(x,t) = u(x,t) - \widetilde{u}(x,t)$ является решением смешанной задачи I с начальными условиями $\widehat{u}(x,0) \equiv 0$, $\widehat{u}_t(x,0) = 0$ и с граничными условиями $\widehat{u}_x(0,t) = \widehat{\mu}(t)$, $\widehat{u}_x(l,t) = 0$, у которой

$$\widehat{\mu}(t) = \mu(t) - \widetilde{\mu}(t). \tag{21}$$

Докажем теперь следующее

**Утверждение.** *При $T = 2l(n+1)$ единственное решение $u(x,t) = \widehat{u}(x,t)$ из класса $\widehat{W}_2^1(Q_T)$ смешанной задачи I, у которой $\widehat{u}(x,0) \equiv 0$, $\widehat{u}_t(x,0)$ является нулевым элементом класса $L_2[0,l]$, $\widehat{u}_x(l,t)$ является нулевым элементом класса $L_2[0,T]$, а $\widehat{u}_x(0,t) = \widehat{\mu}(t)$ является произвольным элементом класса $L_2[0,T]$, определяется равенством*

$$\widehat{u}(x,t) = -\sum_{k=0}^{n} \int_0^{t-x-2kl} \underline{\widehat{\mu}}(\tau)\,d\tau - \sum_{k=1}^{n+1} \int_0^{t+x-2kl} \underline{\widehat{\mu}}(\tau)\,d\tau, \tag{22}$$

*в котором символ $\underline{\widehat{\mu}}(t)$ обозначает функцию, совпадающую с $\widehat{\mu}(t)$ при $0 \le t \le T$ и равную нулю при $t < 0$.*

Действительно, из принадлежности $\widehat{\mu}(t)$ классу $L_2[0,T]$ вытекает, что функция $\widehat{u}(x,t)$, определяемая равенством (22), принадлежит классу $\widehat{W}_2^1(Q_T)$, а из равенства нулю $\underline{\widehat{\mu}}(\tau)$ при $\tau < 0$ вытекает, что $\widehat{u}(x,0) \equiv 0$.

Дифференцируя равенство (22) по $x$ и по $t$, получаем

$$\widehat{u}_x(x,t) = \sum_{k=0}^{n} \underline{\widehat{\mu}}(t-x-2kl) - \sum_{k=1}^{n+1} \underline{\widehat{\mu}}(t+x-2kl), \tag{23}$$

$$\widehat{u}_t(x,t) = -\sum_{k=0}^{n} \underline{\widehat{\mu}}(t-x-2kl) - \sum_{k=1}^{n+1} \underline{\widehat{\mu}}(t+x-2kl). \tag{24}$$

Из равенства (23) сразу же вытекают справедливые в классе $L_2[0,T]$ равенства $\widehat{u}_x(0,t) = \widehat{\mu}(t)$, $\widehat{u}_x(l,t) = 0$, а из равенства (24) вытекает справедливое в классе $L_2[0,l]$ соотношение $\widehat{u}_t(x,0) = 0$.

Остается доказать, что функция (22) удовлетворяет для любой функции $\Phi(x,t)$ из определения 1 тождеству (9), в котором $u(x,t)=\widehat{u}(x,t)$, $\mu(t)=\widehat{\mu}(t)$ и отсутствуют интегралы, содержащие $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, т.е. доказать, что двойной интеграл

$$I=\int\limits_0^l\int\limits_0^T \widehat{u}(x,t)[\Phi_{tt}(x,t)-\Phi_{xx}(x,t)]\,dx\,dt \tag{25}$$

равен $-\int_0^T \widehat{\mu}(t)\Phi(0,t)\,dt$.

Производя интегрирование по частям и учитывая, что $\Phi_t(x,T)\equiv 0$, $\widehat{u}(x,0)\equiv 0$ при $0\le x\le l$ и что $\Phi_x(0,t)\equiv 0$, $\Phi_x(l,t)\equiv 0$ при $0\le t\le T$, получаем

$$I=\int\limits_0^l\left[\int\limits_0^T \widehat{u}(x,t)\Phi_{tt}(x,t)\,dt\right]dx-\int\limits_0^T\left[\int\limits_0^l \widehat{u}(x,t)\Phi_{xx}(x,t)\,dx\right]dt=$$

$$=\int\limits_0^l[\widehat{u}(x,T)\Phi_t(x,T)-\widehat{u}(x,0)\Phi_t(x,0)]\,dx-\int\limits_0^l\int\limits_0^T \widehat{u}_t(x,t)\Phi_t(x,t)\,dx\,dt-$$

$$-\int\limits_0^T[\widehat{u}(l,t)\Phi_x(l,t)-\widehat{u}(0,t)\Phi_x(0,t)]\,dt+\int\limits_0^l\int\limits_0^T \widehat{u}_x(x,t)\Phi_x(x,t)\,dx\,dt=$$

$$=\int\limits_0^l\int\limits_0^T \widehat{u}_x(x,t)\Phi_x(x,t)\,dx\,dt-\int\limits_0^l\int\limits_0^T \widehat{u}_t(x,t)\Phi_t(x,t)\,dx\,dt. \tag{26}$$

Из (26) с помощью равенств (23) и (24) получим, что

$$I=\int\limits_0^l\left\{\int\limits_0^T\left[\sum_{k=0}^{n}\underline{\widehat{\mu}}(t-x-2kl)-\sum_{k=1}^{n+1}\underline{\widehat{\mu}}(t+x-2kl)\right]\Phi_x(x,t)\,dt\right\}dx-$$

$$-\int\limits_0^T\left\{\int\limits_0^l\left[-\sum_{k=0}^{n}\underline{\widehat{\mu}}(t-x-2kl)-\sum_{k=1}^{n+1}\underline{\widehat{\mu}}(t+x-2kl)\right]\Phi_t(x,t)dx\right\}dt.$$

Далее с помощью интегрирования по частям внутренних интегралов мы придем к равенству

$$I=\int\limits_0^l\left\{\left[\sum_{k=0}^{n}\int\limits_0^{t-x-2kl}\underline{\widehat{\mu}}(\tau)\,d\tau-\sum_{k=1}^{n+1}\int\limits_0^{t+x-2kl}\underline{\widehat{\mu}}(\tau)\,d\tau\right]\Phi_x(x,t)\Big|_{t=0}^{t=T}\right\}dx-$$

$$-\int\limits_0^l\int\limits_0^T\left[\sum_{k=0}^{n}\int\limits_0^{t-x-2kl}\underline{\widehat{\mu}}(\tau)\,d\tau-\sum_{k=1}^{n+1}\int\limits_0^{t+x-2kl}\underline{\widehat{\mu}}(\tau)\,d\tau\right]\Phi_{xt}(x,t)\,dx\,dt-$$

$$-\int\limits_0^T\left\{\left[\sum_{k=0}^{n}\int\limits_0^{t-x-2kl}\underline{\widehat{\mu}}(\tau)\,d\tau-\sum_{k=1}^{n+1}\int\limits_0^{t+x-2kl}\underline{\widehat{\mu}}(\tau)\,d\tau\right]\Phi_t(x,t)\Big|_{x=0}^{x=l}\right\}dt+$$

$$+\int\limits_0^l\int\limits_0^T\left[\sum_{k=0}^{n}\int\limits_0^{t-x-2kl}\underline{\widehat{\mu}}(\tau)\,d\tau-\sum_{k=1}^{n+1}\int\limits_0^{t+x-2kl}\underline{\widehat{\mu}}(\tau)\,d\tau\right]\Phi_{tx}(x,t)\,dx\,dt. \tag{27}$$

Теперь заметим, что двойные интегралы в правой части (27) взаимно уничтожаются, подстановка при $t = T$ обращается в нуль вследствие того, что $\Phi_x(x,T) \equiv 0$ при $0 \le x \le l$, подстановка при $t = 0$ обращается в нуль вследствие того, что при $t = 0$ и при всех $0 \le x \le 2l$ верхние пределы всех интегралов по переменной $\tau$ неположительны, подстановка при $x = l$ обращается в нуль в силу того, что при $x = l$ обращается в нуль выражение, стоящее в квадратных скобках.

Для получения выражения для $I$ нам остается подсчитать в правой части (27) результат подстановки при $x = 0$. Мы получим, что

$$I = \int\limits_0^T \left[\int\limits_0^t \widehat{\mu}(\tau)\,d\tau\right] \Phi_t(0,t)\,dt. \tag{28}$$

Производя в (28) интегрирование по частям, мы придем к равенству

$$I = \Phi(0,T)\int\limits_0^T \widehat{\mu}(\tau)\,d\tau - \int\limits_0^T \widehat{\mu}(t)\Phi(0,t)\,dt = -\int\limits_0^T \widehat{\mu}(t)\Phi(0,t)\,d\tau.$$

Тем самым мы получили для интеграла (25) выражение, устанавливающее справедливость для $\widehat{u}(x,t)$ тождества (9), взятого при $u(x,t) = \widehat{u}(x,t)$, $\mu(t) = \widehat{\mu}(t)$ и при отсутствии интегралов, содержащих $\varphi(x)$ и $\psi(x)$. Доказательство утверждения завершено.

Переходим теперь к отысканию условий связи, которые следует присоединить к интегралу (2) для отыскания его минимума.

Так как $\widehat{u}(x,t) = u(x,t) - \widetilde{u}(x,t)$, $u(x,T) = \widehat{\varphi}(x)$, $u_t(x,T) = \widehat{\psi}(x)$, $\widetilde{u}(x,T) = C_0 = \varphi(0) + \int_0^l \psi(\tau)\,d\tau$, $\widetilde{u}_t(x,T) = 0$, то $\widehat{u}(x,T) = \widehat{\varphi}(x) - C_0$, $\widehat{u}_t(x,T) = \widehat{\psi}(x)$.

Поэтому, полагая в (23) и (24) $t = T = 2l(n+1)$, мы придем к следующим равенствам элементов $L_2[0,l]$:

$$\widehat{\varphi}'(x) = \sum_{k=0}^{n} \widehat{\mu}[2l(n+1-k) - x] - \sum_{k=1}^{n+1} \widehat{\mu}[2l(n+1-k) + x], \tag{29}$$

$$\widehat{\psi}(x) = -\sum_{k=0}^{n} \widehat{\mu}[2l(n+1-k) - x] - \sum_{k=1}^{n+1} \widehat{\mu}[2l(n+1-k) + x]. \tag{30}$$

В равенствах (29) и (30) мы опустили черту под $\widehat{\mu}$, ибо при всех $0 \le x \le 2l$ все стоящие в квадратных скобках аргументы неотрицательны.

Полусумма равенств (29) и (30) дает условие связи

$$-\sum_{k=1}^{n+1} \widehat{\mu}[2l(n+1-k) + x] = \frac{1}{2}[\widehat{\varphi}'(x) + \widehat{\psi}(x)], \tag{31}$$

являющееся равенством элементов $L_2[0,l]$.

Вместо того, чтобы брать полуразность равенств (29) и (30) и получать в $L_2[0,l]$ второе условие связи, мы заметим, что правые части равенств (22) и (24) при замене в них $x$ на $(2l - x)$ сохраняют свои значения. Поэтому если мы продолжим функции $\widehat{u}(x,t)$, $\widehat{u}_t(x,t)$, $\widehat{\varphi}(x)$ и $\widehat{\psi}(x)$ четно относительно точки $x = l$ с сегмента $[0,l]$ на сегмент $[l,2l]$, то равенство (22) будет справедливо на сегменте $[0,2l]$, а вытекающее из него условие связи (31) будет справедливо в $L_2[0,2l]$.

Читатель легко убедится в том, что справедливость равенства (31) в $L_2[l,2l]$ эквивалентна справедливости в $L_2[0,l]$ соотношения, являющегося полуразностью равенств (29) и (30).

Перепишем теперь условие связи (31) в терминах искомого граничного управления $\mu(t)$.

Так как $\widehat{\mu}(t) = \mu(t) - \widetilde{\mu}(t)$ и так как для $\widetilde{\mu}(t)$ справедливо при условии четного продолжения функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ с сегмента $[0, l]$ на сегмент $[l, 2l]$ вытекающее из (10) равенство

$$\widetilde{\mu}[2l(n+1-k)+x] = \begin{cases} \frac{1}{2}[\varphi'(x)+\psi(x)] & \text{при} \quad k = n+1, \\ 0 & \text{при} \quad k = 0, 1, \ldots, n, \end{cases}$$

то (31) переходит в справедливое в классе $L_2[0, 2l]$ условие связи

$$-\sum_{k=1}^{n+1} \mu[2l(n+1-k)+x] = \frac{1}{2}[\widehat{\varphi}'(x) + \widehat{\psi}(x) - \varphi'(x) - \psi(x)]. \tag{32}$$

Однако условия связи (32) еще недостаточно для отыскания минимума интеграла (2), ибо это условие не изменяет своего вида при замене в нем $\widehat{\varphi}(x)$ и $\varphi(x)$ на $\widehat{\varphi}(x) + C_1$ и $\varphi(x) + C_2$, где $C_1$ и $C_2$ – любые постоянные.

Для получения второго условия связи воспользуемся тем, что

$$\widehat{u}(0, T) = \widehat{u}[0, 2l(n+1)] = \widehat{\varphi}(0) - C_0, \tag{33}$$

где $C_0 = \varphi(0) + \int_0^l \psi(\tau)\, d\tau$. В силу (22) равенство (33) можно переписать в виде

$$-\sum_{k=0}^{n} \int\limits_0^{2l(n+1-k)} \widehat{\mu}(\tau)\, d\tau - \sum_{k=1}^{n+1} \int\limits_0^{2l(n+1-k)} \widehat{\mu}(\tau)\, d\tau = \widehat{\varphi}(0) - C_0. \tag{34}$$

Учтем теперь, что $\widehat{\mu}(t) = \mu(t) - \widetilde{\mu}(t)$ и что в силу (10) и в силу того, что $\varphi(0) = \varphi(2l)$, $\int_0^{2l} \psi(\tau)\, d\tau = 2\int_0^l \psi(\tau)\, d\tau$, для любого $k = 0, 1, 2, \ldots, n$ справедливо равенство

$$\int\limits_0^{2l(n+1-k)} \widetilde{\mu}(\tau)\, d\tau = \int\limits_0^{2l} \widetilde{\mu}(\tau)\, d\tau = \frac{1}{2} \int\limits_0^{2l} [\varphi'(\tau) + \psi(\tau)]\, d\tau =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\varphi(2l) - \varphi(0) + \int\limits_0^{2l} \psi(\tau)\, d\tau\right] = \int\limits_0^l \psi(\tau)\, d\tau. \tag{35}$$

Из равенств $\widehat{\mu}(t) = \mu(t) - \widetilde{\mu}(t)$, (34), (35) и из того, что $C_0 = \varphi(0) + \int_0^l \psi(\tau)\, d\tau$, получим второе условие связи

$$-\sum_{k=0}^{n} \int\limits_0^{2l(n+1-k)} \mu(\tau)\, d\tau - \sum_{k=1}^{n+1} \int\limits_0^{2l(n+1-k)} \mu(\tau)\, d\tau = \widehat{\varphi}(0) - \varphi(0) - 2(n+1) \int\limits_0^l \psi(\tau)\, d\tau. \tag{36}$$

Итак, задача оптимизации сведена нами к отысканию такой функции $\mu(t)$ из класса $L_2[0, T]$, которая доставляет минимум интегралу (2) при наличии условий связи (32) и (36).

Для решения этой задачи переобозначим для любого $m$, равного $0, 1, 2, \ldots, n$, и для любого $x$ из сегмента $0 \le x \le 2l$ функцию $\mu(2lm + x)$ через $\mu_m(x)$. При этом задача сведется к отысканию минимума суммы

$$\sum_{m=0}^{n} \int\limits_0^{2l} \mu_m^2(x)\, dx \tag{2'}$$

с условиями связи

$$\sum_{m=0}^{n} \mu_m(x) = \frac{1}{2}[\varphi'(x) + \psi(x) - \widehat{\varphi}'(x) - \widehat{\psi}(x)], \qquad (32')$$

$$\sum_{m=0}^{n} [2(n-m)+1] \int_0^{2l} \mu_m(x)\,dx = \widehat{\varphi}(0) - \varphi(0) - 2(n+1)\int_0^{l} \psi(\tau)\,d\tau. \qquad (36')$$

Разложим теперь функции $\mu_m(x)$, $\varphi'(x)$, $\psi(x)$, $\widehat{\varphi}'(x)$ и $\widehat{\psi}(x)$ в ряд Фурье по произвольной ортонормированной в $L_2[0,2l]$ системе функций $\{v_j(x)\}$, содержащей в качестве нулевой функции постоянную $v_0(x) = 1/\sqrt{2l}$. Обозначим $j$-е коэффициенты Фурье указанных функций соответственно через $\mu_{mj}$, $\varphi'_j$, $\psi_j$, $\widehat{\varphi}'_j$ и $\widehat{\psi}_j$. Тогда с использованием равенства Парсеваля задача оптимизации сведется к отысканию минимума суммы

$$\sum_j \sum_{m=0}^{n} \mu_{mj}^2 \qquad (2'')$$

со взятым для любого номера $j$ условием связи

$$\sum_{m=0}^{n} \mu_{mj} = \frac{1}{2}[\varphi'_j + \psi_j - \widehat{\varphi}'_j + \widehat{\psi}_j] \qquad (32'')$$

и с условием связи

$$\sum_{m=0}^{n} [2(n-m)+1]\mu_{m0} = \frac{1}{\sqrt{2l}}\left[\widehat{\varphi}(0) - \varphi(0) - 2(n+1)\int_0^{l} \psi(\tau)\,d\tau\right], \qquad (36'')$$

взятым для номера $j = 0$.

Учитывая, что инфимум суммы (конечной или бесконечной) не меньше суммы инфимумов ее слагаемых, будем для каждого фиксированного номера $j$ искать минимум суммы

$$\sum_{k=0}^{n} \mu_{mj}^2 \qquad (2''')$$

с одним условием связи $(32'')$ при $j \neq 0$ и с двумя условиями связи (условием $(32'')$, записанным для $j = 0$, и условием $(36'')$) при $j = 0$.

Решая указанную задачу обычным методом Лагранжа и обозначая через $\widehat{\lambda}$ постоянную (3), мы получим, что для любого номера $m$

$$\mu_{mj} = \begin{cases} \dfrac{1}{2(n+1)}[\varphi'_j + \psi_j - \widehat{\varphi}'_j - \widehat{\psi}_j] & \text{при} \quad j \neq 0, \\ \dfrac{1}{2(n+1)}[\varphi'_0 + \psi_0 - \widehat{\varphi}'_0 - \widehat{\psi}_0] + \dfrac{\widehat{\lambda}}{\sqrt{2l}}\left(m - \dfrac{n}{2}\right) & \text{при} \quad j = 0. \end{cases}$$

Из полученного нами представления для коэффициента Фурье $\mu_{mj}$ вытекает, что для любого $m = 0, 1, 2, \ldots, n$ и любого $x$ из сегмента $0 \le x \le 2l$

$$\mu_m(x) = \mu(2lm + x) = \frac{\varphi'(x) + \psi(x) - \widehat{\varphi}'(x) - \widehat{\psi}(x)}{2(n+1)} + \widehat{\lambda}\left(m - \frac{n}{2}\right). \qquad (37)$$

Приведенное в начале статьи выражение для оптимального граничного управления $\mu(t)$ в виде суммы $L(t) + \beta(t)$ линейной функции (4) и периодической функции (5) получается из (37) добавлением и вычитанием члена $\widehat{\lambda}\dfrac{x}{2l}$.

Для доказательства того, что найденное нами значение $\mu(t)$ действительно является оптимальным граничным управлением, достаточно проверить, что решение $u(x,t)$ смешанной задачи I с начальными условиями $u(x,0)=\varphi(x)$, $u_t(x,0)=\psi(x)$ и с граничными условиями $u_x(0,t)=\mu(t)$, $u_x(l,t)=0$, в которых $\mu(t)$ – найденная нами функция, удовлетворяет условию $u(x,T)=\widehat{\varphi}(x)$ в классическом смысле и условию $u_t(x,T)=\widehat{\psi}(x)$ в классе $L_2[0,l]$, т.е. является решением из класса $\widehat{W}_2^1(Q_T)$ общей задачи граничного управления II.

В заключение заметим, что справедливость равенства (8) вытекает из формулы (37) и из того, что

$$\int\limits_0^T \mu(t)\,dt = \sum_{m=0}^n \int\limits_0^{2l} \mu_m(x)\,dx, \quad \sum_{m=0}^n \left(m-\frac{n}{2}\right)=0, \quad \int\limits_0^{2l} \varphi'(x)\,dx = 0, \quad \int\limits_0^{2l} \widehat{\varphi}'(x)\,dx = 0,$$

$$\int\limits_0^{2l} \psi(x)\,dx = 2\int\limits_0^{l} \psi(x)\,dx, \quad \int\limits_0^{2l} \widehat{\psi}(x)\,dx = 2\int\limits_0^{l} \widehat{\psi}(x)\,dx.$$

Настоящая работа частично поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (проект НШ-2042.2003.1) и программой "Университеты России" (проект УР.03.03.004).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ильин В.А., Моисеев Е.И.* // Докл. РАН. 2004. Т. 399. № 6. С. 727–731.
2. *Акуленко Л.Д.* // Прикл. математика и механика. 1981. Т. 45. Вып. 6. С. 1095–1103.
3. *Ильин В.А.* // Дифференц. уравнения. 2000. Т. 36. № 11. С. 1513–1518.
4. *Ильин В.А.* // Дифференц. уравнения. 2000. Т. 36. № 12. С. 1670–1686.
5. *Ильин В.А.* // Успехи мат. наук. 1960. Т. 15. № 2. С. 97–154.

Московский государственный университет
им. М.В. Ломоносова,
Математический институт им. В.А. Стеклова РАН,
г. Москва

Поступила в редакцию
03.11.2004 г.