Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова
Факультет Вычислительной Математики и Кибернетики
Кафедра оптимального управления

Курсовая Работа

Оптимизация по Парето управляемого процесса колебаний

Выполнил студент 313 гр.
Захватаев Михаил Дмитриевич

Научный руководитель:
д.ф.-м.н., профессор
М. М. Потапов

Москва 2020

Содержание

1 Введение

Задачи управления для волнового уравнения рассматривали авторы учебника [1], авторы научных статей: [2, 3, 4]. Насчёт задач векторной (многокритериальной) оптимизации работ меньше. Её, например, рассматривали авторы научной статьи [5]

2 Постановка задачи

2.1 Исходная краевая задача

Сформулируем задачу, которая описывает колебательный процесс струны длины l с управлением силой на левом конце, заставляющим колебаться струну, и свободным правым концом. Тогда фазовая траектория (смещение струны от положения равновесия) $y = y(t, x; u)$, соответствующее управлению $u = u(t)$, является решением данной задачи:

$$\begin{cases} y_{tt} = y_{xx}, \quad (t, x) \in Q = (0, T) \times (0, l), \\ -y_x|_{x=0} = u(t), \quad y_x|_{x=l} = 0, \quad t \in (0, T), \\ y|_{t=0} = 0, \quad y_t|_{t=0} = 0, \quad x \in (0, l). \end{cases} \tag{1}$$

Значения $T > 0$ и $l > 0$ считаются известными. Граничные управления $u = u(t)$ выбираются из гильбертова пространства $H = L^2(0, T)$.

2.2 Цели

Введем 4 функционала:

$$J_1(u) = \int_0^l |y(T;x;u) - f_1(x)|^2 dx \to \inf \tag{2.1}$$

$$J_2(u) = \int_0^l |y_t(T;x;u) - f_2(x)|^2 dx \to \inf \tag{2.2}$$

$$J_3(u) = \int_0^T |y(T;l;u) - g(t)|^2 dt \to \inf \tag{2.3}$$

$$J_4(u) = \int_0^T u^2(t) dt \to \inf \tag{2.4}$$

Смысл минимизации:

(2.1) Задача минимизации функционала $J_1(u)$ отражает наше желание приблизить финальное состояние системы (1) к заданному профилю $f_1(x)$

(2.2) Задача минимизации функционала $J_2(u)$ отражает наше желание приблизить финальную скорость системы (1) к заданному профилю $f_2(x)$

(2.3) Задача минимизации функционала $J_3(u)$ отражает наше желание приблизить движение правого конца системы (1) к заданной траектории $g(t)$

(2.4) Задача минимизации функционала $J_4(u)$ отражает наше желание свести затраты энергии системы (1) к минимуму

2.3 Теория

Наша цель - минимизировать векторный критерий:

$$J(u) = (J_1(u), J_2(u), J_3(u), J_4(u))$$

Когда имеется один критерий оптимальности, стремление ЛПР (лицо, принимающее решение) обычно проявляется в том, чтобы получить наибольшее, либо наименьшее значение этого критерия. Например, при решении различного рода экономических задач такой показатель, как затраты обычно стремятся минимизировать, а доход – максимизировать.

Если задан не один, а сразу несколько критериев оптимальности, то для определенности для каждого из них необходимо указать «направление заинтересованности» ЛПР. По этой причине далее рассмотрение ограничивается случаем, когда ЛПР стремится к получению по возможности больших значений всех компонент векторного критерия $J(u)$.

Далее мы воспользуемся теорией из учебника [6] "Принятие решений при многих критериях"

Определение Альтернатива (точка) $u_0 \in U$ называется оптимальной по Парето, если не существует такой альтернативы $u \in U$, что $J_i(u) \leq J_i(u_0), i = 1, ..., n$, и хотя бы одно неравенство выполнено как строгое, т.е. $J(u) \neq J(u_0)$. Все парето-оптимальные решения образуют множество Парето $P_J(u)$.

3 Метод решения

3.1 Свёртка векторного критерия

Для нахождения парето-оптимальных точек в задачах многокритериальной оптимизации обычно используют свертку векторного критерия.

$$J(u) = (J_1(u), J_2(u), J_3(u), J_4(u)) \to p - \min \tag{3.1}$$

Будем использовать достаточно популярную линейную свёртку:

$$J(u) = \lambda_1 J_1(u) + \lambda_2 J_2(u) + \lambda_3 J_3(u) + \lambda_4 J_4(u) \tag{3.2}$$

Числовые коэффициенты λ_i в выражении (3.2) называют весами или весовыми коэффициентами, а само выражение - линейной свёрткой критериев $J_i(u)$.
Весовые коэффициенты λ_i должны быть *положительными* при всех $i = 1, 2, 3, 4$ и удовлетворять соотношению:

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 1$$

Данная свёртка обеспечивает нормированность обобщённого критерия. Суть этой операции состоит в том, чтобы избавиться от различий в размерности, которая может иметь место у отдельных частных критериев, а также - в приведении множеств их возможных значений к одному и тому же фиксированному отрезку $[0, 1]$
Минимизируя свёртку $J(\lambda, u)$ при фиксированных λ_i можно получать парето-оптимальные альтернативы (точки).

3.2 Метод градиентного спуска

3.2.1 Описание

Данный метод позволяет нам найти локальный экстремум(в нашем случае минимум) функционала $J(u)$ с помощью движения вдоль градиента. Основная идея заключается в том, чтобы идти в направлении наискорейшего спуска. Это направление задаётся антиградиентом $-\nabla J$

$$u_{k+1} = u_k - \alpha_k \nabla J(u_k) \tag{3.2.1}$$

где α_k - задаёт скорость градиентного спуска. α_k может быть выбрана:

- постоянной (в этом случае метод может расходиться);
- убывающей в процессе градиентного спуска;
- гарантирующей наискорейший спуск для поиска минимума $J(u)$: $\alpha_k = argmin_\alpha J(u_{k+1}) = argmin_\alpha J(u_k - \alpha \nabla J(u_k))$

3.2.2 Алгоритм

1. Пусть задано некоторое начальное приближение u_0 и необходимая точность рассчёта ε
2. На каждом шаге рассчитываем u_{k+1} по уже известной формуле (3.2.1), выбирая α_k, гарантирующую наискорейший спуск.
3. Выбираем и проверяем одно из условий остановки: $|u_{k+1} - u_k| > \varepsilon, \quad |J(u_{k+1}) - J(u_k)| > \varepsilon \quad$ или $\quad \|\nabla J(u_{k+1})\| > \varepsilon$
   - Если одно из условий выполненно, то переходим к следующему шагу: $k = k + 1$ и возвращаемся ко 2му шагу.
   - Иначе найдено $u = u_{k+1}$

4 Аналитические рассчёты

4.1 Нахождение производных

Для применения метода градиентного спуска нам необходимо найти найти производные частных критериев J_i'.
Продемонстрируем рассчёт для нахождения $J_3'(u)$.

- Запишем искомое решение в операторном виде:

$$A_3 u = y(t,l,u), \text{ где } A_3 : H = L^2(0,T) \to L^2(0,T) = F$$

- Функционалы J_1, J_2, J_3 квадратичные, вида: $J_i = \|A_i u - f_i\|_F^2$, где $A_i \in L(H \to F)$

$$J_3(u) = \|A_3 u - g\|^2_{L^2(0,T)}$$

- Введём сопряжённый к A оператор A^*.

$$J_3'(u) = 2A_3^*(A_3 u - g), \quad A_3^* : F \to H$$

Для $\forall v \in L^2(0,T)$ справедливо $\langle A_3 u, v\rangle = \langle u, A_3^* v\rangle$

$$\underbrace{\int_0^T y(t,l,u)v(t)dt}_{+\mathbf{0}} = \int_0^T u(t)\boxed{?}\,dt$$

- Домножим 1е уравнение системы (1) на некоторую функцию $\psi = \psi(t,x) \in C^2(\overline{Q})$ и проинтегрируем по прямоугольнику
Для $\forall \psi \in \overline{Q}$ верно: $\iint\limits_Q \underbrace{(y_{xx} - y_{tt})}_{=\mathbf{0}} \psi\, dt\, dx = 0$

1). $\iint\limits_Q y_{xx}\psi = \int\limits_0^T y_x\psi\Big|_{x=0}^{x=l} dt - \iint\limits_Q y_x\psi_x =$

$$= \int_0^T u(t)\psi(t,0)\,dt - \int_0^T y\psi_x\Big|_{x=0}^{x=l} dt + \iint_Q y\psi_{xx} =$$

$$= \int_0^T u(t)\underbrace{\psi(t,0)}_{=\mathbf{0}}\,dt - \int_0^T y(t,l)\underbrace{\psi_x(t,l)}_{=\mathbf{0}}\,dt + \iint_Q y\psi_{xx}$$

$$\mathbf{2}).\ -\iint\limits_Q y\psi_{tt} = \int\limits_0^l y_t\psi\Big|_{t=0}^{t=T}dx + \iint\limits_Q y_t\psi_t =$$

$$-\int\limits_0^l y_t(T,x)\psi(T,x)\,dx + \int\limits_0^l y\psi_t\Big|_{t=0}^{t=T}dx - \iint\limits_Q y\psi_{tt} =$$

$$-\int\limits_0^l y_t(T,x)\underbrace{\psi(T,x)}_{=\mathbf{0}}dx + \int\limits_0^l y\underbrace{\psi_t(T,x)}_{=\mathbf{0}}dx - \iint\limits_Q y\psi_{tt}$$

- Тогда из 1). и 2). получаем задачу (4.3) для ψ.
Таким образом, если от ψ потребовать (4.3), то $A_3^* v = \psi(t,0)$.
И получаем:

$$\boxed{J_3'(u) = 2\psi(t,0)}$$

- Проделав аналогичные действия для (2.1) и (2.3), получим краевые задачи и производные для соответствующих функционалов:

$$\begin{cases} \psi_{tt} = \psi_{xx} \quad \text{в} \quad Q = [0;l]\times[0;T], \\ \psi_x|_{x=0} = 0, \quad \psi_x|_{x=l} = 0, \quad 0 < t < T, \\ \psi|_{t=T} = 0, \quad \psi_t|_{t=T} = -v(x), \quad 0 < x < l \end{cases} \tag{4.1}$$

$$\underline{J_1' = 2\psi(t,0)}$$

$$\begin{cases} \psi_{tt} = \psi_{xx} \quad \text{в} \quad Q = [0;l]\times[0;T], \\ \psi_x|_{x=0} = 0, \quad \psi_x|_{x=l} = 0, \quad 0 < t < T, \\ \psi|_{t=T} = v(x), \quad \psi_t|_{t=T} = 0, \quad 0 < x < l \end{cases} \tag{4.2}$$

$$\underline{J_2'(u) = 2\psi(t,0)}$$

$$\begin{cases} \psi_{tt} = \psi_{xx} \quad \text{в} \quad Q = [0;l]\times[0;T], \\ \psi_x|_{x=0} = 0, \quad \psi_x|_{x=l} = v(t), \quad 0 < t < T, \\ \psi|_{t=T} = 0, \quad \psi_t|_{t=T} = 0, \quad 0 < x < l \end{cases} \tag{4.3}$$

$$\underline{J_3'(u) = 2\psi(t,0)}$$

$$\underline{J_4'(u) = 2u} \tag{4.4}$$

Тогда можем записать градиент в виде $\nabla J(u) = \sum_{i=1}^4 \lambda_i J_i'(u)$

4.2 Разностная схема

Дискретизацию систему (1) выполним при помощи разностной схемы "крест":

$$\begin{cases} \frac{y_i^{n+1}-2y_i^n+y_i^{n-1}}{\tau^2} = \frac{y_{i+1}^n-2y_{i-1}^n+y_{i-1}^n}{h^2}, \quad i=\overline{1,N-1}, \quad n=\overline{2,M} \\ \frac{y_1^n-y_0^n}{h} = -u(t), \quad y_l^n=0, \quad n=\overline{0,M} \end{cases} \tag{4.2}$$

Значение сеточной функции на верхнем слое $n+1$ рассчитывается по 3м значением слоя n и по одному значению слоя $n-1$

$$y_i^{n+1} = 2y_i^n - y_i^{n-1} + (\frac{\tau}{h})^2(y_{i-1}^n - 2y_i^n + y_{i+1}^n)$$

Схема устойчива при $\frac{\tau}{h} \leq 1$

5 Метод SR1

5.1 Идея

Рассмотрим задачу гладкой безусловной оптимизации:

$$\min_{x \in \mathbb{R}} f(x),$$

где $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ - дважды непрерывно дифференциремая функция.

На каждом итерационном шаге необходимо вычислить:
1). Новую точку: $x_{k+1} = x_k - \alpha H_k \nabla f(x_k)$
2). Обновление матрицы $H_k \to H_{k+1}$

Идея Квазиньютоновских методов состоит в том, чтобы не считать Гессиан на каждом шаге, (т.к. эта операция затратна) а искать его аппроксимацию:

$$\lim_{k \to \infty} H_k \to H$$

Применяя Квазиньютоновский метод SR1 будем приближать обратный Гессиан H^{-1}, при помощи симметричной коррекции ранга 1:

$$H_{k+1} = H_k + \frac{(s_k - H_k y_k)(s_k - H_k y_k)^T}{\langle s_k - H_k y_k, y_k \rangle}$$

где $s_k = x_{k+1} - x_k$ $y_k = \nabla f(x_{k+1}) - \nabla f(x_k)$

5.2 Программная реализация

//TODO

5.3 Тестовые функции для метода SR1

Параметры метода:
1). Начальное приближение: произвольный вектор $x \in \mathbb{R}^{100}$
2). Шаг: $\alpha = 0.1$
3). Условие остановки: $||\nabla f(x)||_2^2 < \varepsilon = 10^{-4}$

5.3.1 Тестовая функция 1

$f = \sum_{i=0}^{n-1}(x^2)$, где $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$
Время: 1.54 сек.

5.3.2 Тестовая функция 2

$f = \sum_{i=0}^{n-1}(x^2)$, где $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$
Время: 56.6 сек

5.3.3 Тестовая функция 3

$f = \sum_{i=0}^{n-1}(x^2)$, где $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$
Время: 2мин20сек

Список литературы

[1] М.М.Потапов А.В.Разгулин Ф.П. Васильев, М.А. Куржанский. Приближенное решение двойственных задач управления и наблюдения. 2010.

[2] Знаменская Л.Н. Управление колебаниями струны в классе обобщённых решений из l2. *Дифференциальные уравнения*, 38:666–672, 2008.

[3] Ильин В.А. Граничное управление процессом колебаний струны на одном конце при закрепленном втором конце и при условии существования конечной энергии. *Докл.*, 378:743–747, 2001.

[4] Потапов М.М. О сильной сходимости разностных аппроксимаций для задач граничного управления и наблюдения для волнового уравнения. *ЖВ МиМФ*, 38:387–397, 1998.

[5] Mehdi Rezai Bahrmand Hassan Zarei. Multiobjective optimal control of the linear wave equation. *Ain Shams Engineering Journal*, 5:1299–1305, 2014.

[6] В. Д. Ногин. *Принятие решений в многокритериальной среде.* Физматлит, Москва, 2002.