سلسلة استعد للبكالوريا رقم (06)

المستوى : ثالثة ثانوي — السنة الدراسية :2009/2008

الشعبـــــة :علوم تجريبية + رياضيات

و تقني رياضي

إعداد الأستاذ
حليلات عمار

{ المحور: الأعداد المركبة }

تمرين مدخل للأعداد المركبة : مثال بومبيلي (Bombelli).

الهدف من هذا النشاط هو حل المعادلة ذات المجهول الحقيقي x : (1) ..... $x^3 = 15x + 4$.

1) أثبت أن $\alpha + \beta$ حل للمعادلة (1) إذا وفقط إذا: (2) .... $\alpha^3 + \beta^3 + 3(\alpha\beta - 5)(\alpha + \beta) - 4 = 0$.

2) ما هي القيمة التي يجب إعطاؤها للعدد $\alpha\beta$ حتى تكتب المعادلة (2) على الشكل $\alpha^3 + \beta^3 = 4$ ؟

ما هي قيمة $\alpha^3\beta^3$ في هذه الحالة ؟

3) تأكد أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $(x - \alpha^3)(x - \beta^3) = x^2 - 4x + 125$.

4) نعتبر المعادلة $x^2 - 4x + 125 = 0$ . . . (3) تأكد أن هذه المعادلة لا تقبل حلولا حقيقية .

5) **نتخيل عدد نرمز له** "i" **حيث** $i^2 = -1$.

أكتب حلول المعادلة (3) في هذه الحالة .

أحسب $(2-i)^3$ و $(2+i)^3$ ، استنتج حلا حقيقيا للمعادلة (1). ثم عين حلول المعادلة (1).

الجزء الأول : العمليات على الشكل الجبري والتمثيل الهندسي

التمرين (01) اكتب الأعداد المركبة التالية على شكلها الجبري :

$z_1 = (2+i)^2$ ، $z_2 = (4+2i)(4-2i)$ ، $z_3 = (2-i)^2(1+2i)^2$ ، $z_4 = (3-2i)^3$

$z_5 = \left(\frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3$ ، $z_6 = \frac{4-6i}{3+2i}$ ، $z_7 = \frac{1+i}{3-i\sqrt{2}}$ ، $z_8 = \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{4n}$ ، $z_9 = \frac{\cos q + i\sin q}{\cos q - i\sin q}$

التمرين (02) حل في المجموعة £ المعادلات ذات المجهول z التالية :

1/ $3z - 2 + i = (1+i)z - 1 - 2i$ ، 2/ $(3-4i)z^2 = iz$ ، 3/ $\frac{z+1}{z-1} = 2i$

التمرين (03) حل في المجموعة £ المعادلات ذات المجهول z التالية :

1/ $z^2 + z\bar{z} - 4 - 6i = 0$ ، 2/ $(1+i)z - (2-i)\bar{z} + 3 + 4i = 0$

3/ $\frac{\bar{z} - 1}{\bar{z} + 1} = i$ ، 4/ $(2z + 1 - i)(i\bar{z} + i - 2) = 0$

إعداد الأستاذ حليلات عمار

التمرين (04) حل في المجموعة ℂ المعادلة ذات المجهول z التالية : $z^2-4\overline{z}-5=0$

التمرين (05) في المستوي المركب المنسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$.

النقط A ، B ، C و D لواحقها على الترتيب : $2-i$ ، $3+2i$ ، $-1+4i$ و $-2+i$

- أثبت أن الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع

التمرين (06) في المستوي المركب المنسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$.

النقط A ، B و C لواحقها على الترتيب : $3-i$ ، $-2+3i$ و $-1-2i$

أ) احسب مجموع هذه اللواحق. ب) فسر النتيجة هندسيا

التمرين (07) في المستوي المركب المنسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$.

النقط A ، B و C لواحقها على الترتيب : $-1+2i$ ، $1+3i$ و 3

أ- عين z_G لاحقة مرجح النقط المثقلة التالية : $(A,-1)$ ، $(B,2)$ ، $(C,1)$

ب- بين أن المستقيمين (AC) و (BG) متوازيان .

ج- ما هي مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق : $-MA^2+2MB^2+MC^2=6$

التمرين (08) في المستوي المركب المنسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$.

نضع $L=\dfrac{z+1}{z-1}$ و M' صورة العدد المركب L .

عين مجموعة النقط M ذات اللاحقة z في كل حالة من الحالات التالية :

أ ــ يكون L عددا حقيقيا .

ب ــ يكون L عددا تخيليا صرفا .

جــ ــ تكون النقط O ، M و M' في استقامية .

التمرين (09) ينسب المستوي المركب لمعلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$.

$z=x+iy$ عدد مركب حيث $z\neq 2i$ و x ، y عددان حقيقيان .

نعتبر العدد المركب L حيث . $L=\dfrac{z-2+i}{z+2i}$

1) أكتب العدد المركب L على الشكل الجبري .

2) عين E مجموعة النقط M ذات اللاحقة z التي يكون من أجلها L حقيقيا .

3) عين F مجموعة النقط M ذات اللاحقة z التي يكون من أجلها L تخيليا صرفا.

4) أنشئ المجموعتين E و F .

التمرين (10) 1/ حل في ℂ المعادلة : $z^2-2i\overline{z}=0$ ....(1)

2/ نسمي O ، A ، B ، C صور حلول المعادلة (1) في المستوي المركب لمعلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$. أثبت أن المثلث ABC متقايس الأضلاع

إعداد الأستاذ
حليلات عمار

التمرين (11) 1/ حل في $\mathbb{C}^2$ الجملة التالية: $\begin{cases} iz_1+(1-i)z_2=-4-3i \\ (1+i)z_1+2iz_2=13+9i \end{cases}$

نسمي A و B صور الحلول z_1 و z_2 على الترتيب في المستوي المركب المنسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$. ونسمي C صورة العدد z حل المعادلة التالية: $(3-i)\overline{z}+5-i=6+2i$

2/ عيّن طبيعة المثلث ABC.

3/ عيّن لاحقة G مركز ثقل المثلث ABC .

التمرين (12) ينسب المستوي المركب لمعلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$.

A ، M و M' نقط من المستوي لواحقها على الترتيب : 1 ، z و $1+z^2$.

- عيّن مجموعة النقط M من المستوي بحيث تكون A ، M و M' على استقامة واحدة

التمرين (13) ينسب المستوي المركب لمعلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$.

z عدد مركب صورته M : نضع $L=(z-2i).(\overline{z}-1)$

عيّن مجموعة النقط M حتى يكون : أ) L حقيقي

ب) L تخيلي صرف

التمرين (14) ينسب المستوي المركب لمعلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$.

z عدد مركب صورته M : نضع $L=(1-z).(1-iz)$

عيّن مجموعة النقط M حتى يكون : أ) L حقيقي ، ب) L تخيلي صرف

التمرين (15) حل في $\mathbb{C}^2$ الجمل ذات المجهول $(z;z')$ التالية :

1/ $\begin{cases} iz_1+(2+i)z_2=4+i \\ z_1-(3-2i)z_2=-3+8i \end{cases}$ ، **2/** $\begin{cases} 2iz+z'=2i \\ 3\overline{z}+i\overline{z'}=1 \end{cases}$

التمرين (16) نعتبر في المستوي المركب لمعلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$ ، النقطتين A و B اللتين لاحقتاهما z_A و z_B على الترتيب حيث : $z_A=2+i$ ، $z_B=-2-2i$

1) عين z_w لاحقة النقطة w مركز الدائرة (Γ) ذات القطر $[AB]$

2) لتكن C النقطة ذات اللاحقة z_C حيث : $z_C=\dfrac{4-i}{1+i}$.

- اكتب z_C على الشكل الجبري

- أثبت أن النقطة C تنتمي إلى الدائرة (Γ) .

إعداد الأستاذ:
حليلات عمار

الجزء الثاني: العمليات على الشكل المثلثي و الأسي

التمرين (17) اكتب الأعداد المركبة التالية على شكلها المثلثي :

$z_1=1+i$ ، $z_2=3-3i$ ، $z_3=-\sqrt{3}-i$ ، $z_4=1-i\sqrt{3}$ ، $z_5=-\sqrt{6}+i\sqrt{2}$

$z_6=-\sqrt{5}-i\sqrt{15}$ ، $z_7=-2+2i$ ، $z_8=\dfrac{5+11i\sqrt{3}}{7-4i\sqrt{3}}$ ، $z_9=\dfrac{1+i}{\sqrt{3}+i}$ ، $z_{10}=\dfrac{2}{1+i\sqrt{3}}$

التمرين (18) عين وأنشئ في كل حالة من الحالات التالية المجموعة Γ للنقط M من المستوي ذات اللاحقة z التي تحقق مايلي :

أ) $|z+1+2i|=|z-4|$ ، ب) $|z-3i|=2$ ، $|\bar{z}-2+i|=1$

التمرين (19) **بيّن – مع التعليل – صحة أو خطأ الجمل التالية :**

1) العدد المركب : $\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}$ طويلته 1

2) العدد المركب $\left(1-\sqrt{2}\right)e^{i\frac{\pi}{3}}$ عمدة له $\frac{\pi}{3}$

3) عمدة للعدد المركب $2+3i$ معاكسة لعمدة للعدد المركب $2-3i$

4) $\frac{\pi}{3}-3$ عمدة للعدد المركب $\sin 3+i\cos 3$

5) $5-i$ و $\dfrac{5-i}{3\pi+4\sqrt{2}-1}$ لهما نفس العمدة.

التمرين (20) ليكن العدد المركب Z حيث : $Z=\dfrac{\sqrt{3}+i}{1-i}$

1) احسب طويلة العدد المركب Z و عمدة له .

2) اكتب Z على الشكل الجبري .

3) استنتج $\cos\frac{5\pi}{12}$ و $\sin\frac{5\pi}{12}$

4) بيّن ان : $\left(\frac{Z}{\sqrt{2}}\right)^{12n}$ عدد حقيقي

التمرين (21) عين عمدة لكل عدد من الأعداد المركبة التالية :

1/ $\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)\left(\cos\frac{\pi}{7}+i\sin\frac{\pi}{7}\right)$ ، 2/ $\left(\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4}\right)\left(\cos\frac{\pi}{7}+i\sin\frac{\pi}{7}\right)$

3/ $-2\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)\left(\cos\frac{\pi}{7}+i\sin\frac{\pi}{7}\right)$ ، 4/ $e^{i\frac{\pi}{3}}\times e^{-i\frac{\pi}{2}}$ ، 5/ $e^{i\pi}+e^{i\frac{\pi}{3}}$

إعداد الأستاذ
حليلات عمار

التمرين (22) z ، v و u أعداد مركبة حيث:

$z=\left(3+\sqrt{3}\right)+i\left(-3+\sqrt{3}\right)$ ، $u=3+i\sqrt{3}$ و $v=\dfrac{z}{u}$.

1) أكتب v على الشكل الجبري .

2) عين الطويلة وعمدة لكل من الأعداد المركبة u ، v و z .

3) استنتج $\cos\dfrac{p}{12}$ و $\sin\dfrac{p}{12}$.

4) أثبت أن العدد z^{2010} تخيلي صرف .

التمرين (23) 1/ عين الشكل المثلثي ثم الشكل الجبري للعدد المركب : $z=\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{1+i}$

2/ استنتج القيم المضبوطة لـــ $\cos\dfrac{5p}{12}$ و $\sin\dfrac{5p}{12}$

التمرين (24) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{u};\vec{v}\right)$

عين ثم أنشئ في تمثيلات مختلفة ما يلي :

1) المجموعة g للنقط M من المستوي ذات اللاحقة z بحيث الأعداد : z ، $\dfrac{1}{z}$ و $z-1$ لها نفس الطويلة .

2) المجموعة z للنقط M من المستوي ذات اللاحقة z بحيث يكون z^2 تخيليا صرفا.

3) المجموعة C للنقط M من المستوي ذات اللاحقة z بحيث : $z+\overline{z}+|z|^2=0$

التمرين (25) يعطى العددان المركبان : $z_1=2+3i$ ، $z_2=2+i$

1) اكتب $z_1^2-z_2^2$ على شكله المثلثي ثم الشكل الأسي

2) أكتب العدد المركب $\left(\dfrac{z_1^2-z_2^2}{8\sqrt{2}}\right)^{2008}$ على شكله الجبري .

التمرين (26) عين و أنشئ في كل حالة المجموعة d للنقط ذات اللاحقة z والتي تحقق :

1) $z=2e^{iq}$ و q تمسح المجال $\left[0;2p\right[$

2) $z=re^{i\frac{p}{3}}$ و r يمسح المجال $\left]0;+\infty\right[$

3) $z=ke^{i\frac{p}{4}}$ و k يمسح ¡

إعداد الأستاذ:
حليلات عمار

التمرين (27) في كل حالة من الحالات المقترحة أدناه ، عين الطويلة وعمدة للعدد المركب z

أ ـ $z=4\left(\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4}\right)$. ب ـ $z=-3\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$.

جـ ـ $z=\sqrt{5}\left(\sin\frac{\pi}{6}+i\cos\frac{\pi}{6}\right)$. د ـ $z=\sin\frac{\pi}{6}-i\cos\frac{\pi}{6}$.

التمرين (28) I) z_1 و z_2 عددان مركبان حيث: $|z_1|=|z_2|=1$

- برهن ان العدد $\left(\frac{z_1+z_2}{1+z_1.z_2}\right)$ حقيقي

II) z_1 و z_2 عددان مركبان مختلفان لهما نفس الطويلة .

- أثبت أن العدد المركب $\left(\frac{z_1+z_2}{z_1-z_2}\right)$ تخيليا صرف

التمرين (29) A ؛ B و C نقط من المستوي لواحقها على الترتيب

$z_1=1$ ، $z_2=2i$ و $z_3=-1-i$.

1) أحسب $|z_2-z_1|$ و $|z_3-z_1|$.

2) أحسب $Arg\left(\frac{z_2-z_1}{z_3-z_1}\right)$. 3) استنتج طبيعة المثلث ABC.

التمرين (30) 1/ أكتب على الشكل الجبري كل من الأعداد المركبة التالية :

$$2\sqrt{3}e^{-i\frac{2\pi}{3}} \text{ ؛ } \frac{1}{2}e^{i\pi} \text{ ؛ } \sqrt{5}e^{i\frac{3\pi}{2}} \text{ ؛ } 6e^{i\frac{3\pi}{4}} \text{ ، } e^{-i2\pi} \text{ ، } 2e^{i\frac{\pi}{3}} \text{ ، } e^{i\frac{\pi}{2}}$$

2/أكتب الأعداد المركبة التالية على الشكل الأسّي .

$z_4=-1$ ؛ $z_3=\frac{5}{4}i$ ؛ $z_2=3\sqrt{3}-3i$ ؛ $z_1=2-2i$.

3/ أعط شكلا أسيّا لكل من الأعداد المركبة التالية .

$$z_4=3\left(\cos\frac{\pi}{7}-i\sin\frac{\pi}{7}\right) \text{ ؛ } z_3=\left(1-\sqrt{2}\right)e^{i\frac{\pi}{4}} \text{ ؛ } z_2=\left(\sqrt{3}+i\sqrt{3}\right)e^{i\frac{\pi}{3}} \text{ ؛ } z_1=\left(2\sqrt{3}+6i\right)e^{i\frac{\pi}{2}}$$

التمرين (31) المستوي المركب منسوب إلى المعلم $(O;\vec{u};\vec{v})$ (وحدة الرسم $4cm$).

نعتبر النقط A ، B ، C و D ذات اللواحق على الترتيب $a=1$ ، $b=e^{i\frac{\pi}{3}}$ ،

$c=\frac{3+i\sqrt{3}}{2}$ و $d=\frac{\sqrt{3}}{2}e^{-i\frac{\pi}{6}}$.

1) أكتب c على الشكل الأسّي و d على الشكل الجبري .

2) مثل النقط A ، B ، C و D في المعلم ثم برهن أن الرباعي $OACB$ هو معين .

التمرين (32) احسب :

$$z_1=\left(1+i\sqrt{3}\right)^5+\left(1-i\sqrt{3}\right)^5 \quad ، \quad z_2=\frac{(1+i)^4}{\left(\sqrt{3}-i\right)^3} \quad ، \quad z_3=\left(\frac{\sqrt{2}+i\sqrt{6}}{2(1-i)}\right)^{1990}$$

التمرين (33) عيّن الطويلة وعمدة لكل عدد مركب مما يلي :

1) $z_1=1+\cos\alpha+i\sin\alpha$ و $\alpha\in[0;2\pi[$ ، 2) $z_2=1-\cos\alpha+i\sin\alpha$ و $\alpha\in[0;2\pi[$

3) $z_3=\dfrac{1+i\tan\theta}{1-i\tan\theta}$ و $\theta\in\left]\dfrac{-\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$ ، 4) $z_4=\dfrac{1}{1-i\tan\theta}$ و $\theta\in\left]\dfrac{-\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$

التمرين (34) نعتبر العددين المركبين z_1 ، z_2 حيث : $z_1=-\sqrt{3}+i$ و $z_2=\sqrt{2}-\sqrt{2}i$

1) أكتب z_1 و z_2 على الشكل الأسي .

2) استنتج الطويلة وعمدة للعدد المركب L حيث : $L=\dfrac{-\sqrt{3}+i}{\sqrt{2}-\sqrt{2}i}$

3) اكتب العدد المركب L على الشكل الجبري .

4) استنتج قيمتي : $\cos\dfrac{13\pi}{12}$ و $\sin\dfrac{13\pi}{12}$

التمرين (35) لتكن A ، B ، C و D أربع نقط لواحقها على التوالي :

$a=-1+i$ ، $b=-1-i$ ، $c=2i$ ، $d=2-2i$

1) احسب الطويلة وعمدة كل من العددين المركبين : $\dfrac{c-a}{d-a}$ و $\dfrac{c-b}{d-b}$

2) استنتج طبيعة كل من المثلثين ACD و BCD

3) بيّن أن النقط A ، B ، C و D تنتمي إلى دائرة يطلب تحديد مركزها ونصف قطرها

التمرين (36) 1) برهن أنّ : $\dfrac{2}{1-e^{i\frac{\pi}{5}}}=\dfrac{e^{i\frac{2\pi}{5}}}{\sin\frac{\pi}{10}}$

2) أحسب المجموع $1+e^{i\frac{\pi}{5}}+e^{i\frac{2\pi}{5}}+e^{i\frac{3\pi}{5}}+e^{i\frac{4\pi}{5}}$.

3) عين قيمة لكل من المجموعين S و T حيث $S=\sum_{k=0}^{4}\cos\dfrac{k\pi}{5}$ و $T=\sum_{k=0}^{4}\sin\dfrac{k\pi}{5}$.

التمرين (37) : 1) بيّن أن : $e^{i\frac{\pi}{11}}+e^{i\frac{3\pi}{11}}+e^{i\frac{5\pi}{11}}+e^{i\frac{7\pi}{11}}+e^{i\frac{9\pi}{11}}=\dfrac{ie^{-i\frac{\pi}{22}}}{2\sin\frac{\pi}{22}}$

2) استنتج أن : $\cos\dfrac{\pi}{11}+\cos\dfrac{3\pi}{11}+\cos\dfrac{5\pi}{11}+\cos\dfrac{7\pi}{11}+\cos\dfrac{9\pi}{11}=\dfrac{1}{2}$

الجزء الثالث: المعادلات من الدرجة الثانية بمعاملات حقيقية

التمرين (38)**: عيّن الجذرين التربيعيين لكل من الأعداد المركبة التالية :

$1+4\sqrt{5}i$ ، -4 ، $2i$ ، $-3-4i$ ، $-15+8i$ ، $8-6i$

التمرين (39) **حل في المجموعة $\mathbb{C}$ كلا من المعادلات التالية :**

1/ $z^2+2z+10=0$ ، 2/ $z^2+4=0$ ، 3/ $z^2-8\sqrt{3}z+64=0$

4/ $z^2-3z+3=0$ ، 5/ $(z+2i-1)(z^2-2z+2)=0$ ،

6/ $z^2+4z+5=0$ ، 7/ $4z^2-2z+1=0$ ، 8/ $z^2-z+1=0$

9/ $z^2-2z\cos\alpha+1=0$ حيث α عدد ثابت من المجال $]0;\pi[$

التمرين (40) تعطى المعادلة : $z^4-4z^3+14z^2-36z+45=0 \;.......(1)$

1/ أوجد الأعداد الحقيقية a ، b و c بحيث تكتب المعادلة على الشكل :

$$(z^2+9)(az^2+bz+c)=0$$

2/ حل عندئذ المعادلة المعادلة (1)

التمرين (41) تعطى في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول المركب z

$$(E): z^3+2z^2-16=0$$

1) برهن أن العدد 2 حل للمعادلة (E) ثم بين أن المعادلة (E) تكتب على الشكل :

$(z-2)(az^2+bz+c)=0$ ، حيث a ، b و c أعداد حقيقية يطلب تعيينها

2) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة (E)

3) اكتب الحلول على الشكل الأسي .

4) المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$. لتكن A ، B و D نقط المستوي التي لاحقاتها على الترتيب $z_A=-2-2i$ ، $z_B=2$ و $z_D=-2+2i$.

أ) مثل النقط A ، B و D ثم عين z_C لاحقة النقطة C حتى يكون الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع ثم مثل النقطة C .

ب) النقطتان E و F صورتا العددين المركبين z_E و z_F على الترتيب والعرفتين كما يلي :

$$z_E-z_B=e^{-i\frac{\pi}{2}}(z_C-z_B) \quad \text{و} \quad z_F-z_D=e^{i\frac{\pi}{2}}(z_C-z_D)$$

- اوجد z_E و z_F

ج) تحقق أن $\dfrac{z_F-z_A}{z_E-z_A}=i$ ثم استنتج طبيعة المثلث AEF .

إعداد الأستاذ
حليلات عمار

{ التدريب على حل تمارين بكالوريات }

التمرين (01) 1- حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2-2z+2=0$

نرمز للحلين بـــ z_1 و z_2 حيث z_1 هو الحل ذي الجزء التخيلي السالب

- بين أن $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{2008}$ عدد حقيقي .

2- المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$. لتكن A ، B و C نقط المستوي التي لاحقاتها على الترتيب $-1+i$ ، z_1 و z_2 .

ليكن Z العدد المركب حيث : $Z=\frac{z_2+1-i}{z_1+1-i}$

أ) انطلاقا من التعريف $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ ومن الخاصية $e^{i(\theta_1+\theta_2)}=e^{i\theta_1}\times e^{i\theta_2}$

برهن أن : $e^{-i\theta}=\frac{1}{e^{i\theta}}$ وأن $\frac{e^{i\theta_1}}{e^{i\theta_2}}=e^{i(\theta_1-\theta_2)}$ حيث θ و θ_1 و θ_2 أعداد حقيقية

ب) أكتب Z على الشكل الآسي

ج) أكتب Z على الشكل المثلثي

التمرين (02) المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ})$

ليكن كثير الحدود $f(z)$ للمتغير المركب z حيث أن :

$f(z)=z^3+(14-i\sqrt{2})z^2+(74-14i\sqrt{2})z-74i\sqrt{2}$.

1) أوجد الأعداد الحقيقية a ، b و c بحيث يكون لكل عدد مركب z :

$$f(z)=(z-i\sqrt{2})(z^2+az+b)=0$$

2)حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z : $f(z)=0$.

نسمي A ، B ، C صور الأعداد : $-7+5i$ ، $-7-5i$ ، $i\sqrt{2}$ و على الترتيب .

3) لتكن D النقطة التي لاحقتها $1+i$.عين النقطة لاحقة النقطة E حيث $ABDE$ متوازي الأضلاع .

4) لتكن F النقطة التي لاحقتها $1+11i$. نضع $\omega=\frac{(z_A-z_D)}{(z_F-z_B)}$.

أ) أكتب ω على الشكل الجبري .

ب) أكتب ω على الشكل الأسي .

5) - أثبت أن المستقيمين (AD) و (BF) متعامدان.

- استنتج طبيعة الرباعي $ABDF$.

التمرين (03) 1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ ، كلا من المعادلتين :

$z^2-2(1+\sqrt{3})z+5+2\sqrt{3}=0$. ؛ $z^2-2z+5=0$

2) في المستوي المزود بالمعلم $(O;\vec{u};\vec{v})$ ، نعتبر النقط A ، B ، C و D صور الأعداد المركبة $1+2i$ ، $1+\sqrt{3}+i$ ، $1-2i$ و $1+\sqrt{3}-i$ على الترتيب .

أ ــ ما هي طبيعة المثلث ABC ؟

ب ــ أكتب معادلة للدائرة $\mathcal{C}$ المحيطة بالمثلث ABC .

ج ــ أثبت أن النقطة D تنتمي إلى الدائرة $\mathcal{C}$.

د ــ أنشئ $\mathcal{C}$ والنقط A ، B ، C و D في المعلم المعطى .

التمرين (04) نعتبر كثير الحدود للمتغيّر المركب z المعرّف بـــ :

. $P(z)=z^4-6z^3+24z^2-18z+63$

1. أ ــ أحسب $P(i\sqrt{3})$ و $P(-i\sqrt{3})$.

ب ــ برهن أنّه توجد أعداد حقيقية a ، b و c بحيث من أجل كل عدد مركب z

.$P(z)=(z^2+3)(az^2+bz+c)$

2. حل في $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z ، $P(z)=0$.

. المستوي المركّب منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$.

أ ــ مثّل النقط A ، B ، C و D ذات اللواحق على الترتيب $z_A=i\sqrt{3}$ ، $z_B=-i\sqrt{3}$

، $z_C=3+2i\sqrt{3}$ و $z_D=\overline{z_C}$

ب ــ أثبت أنّ النقط A، B، C و D تنتمي إلى نفس الدائرة.

4. لتكن النقطة E نظيرة D بالنسبة إلى المبدأ O .

بيّن أن $\dfrac{z_C-z_B}{z_E-z_B}=e^{-i\frac{\pi}{3}}$ ثمّ عيّن طبيعة المثلث BEC .

التمرين (05) ينسب المستوي المركب لمعلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

$z=x+iy$ عدد مركب حيث $z\neq 2i$ و x ، y عددان حقيقيان .

نعتبر العدد المركب L حيث . $L=\dfrac{z+8+4i}{z-2i}$

1) أكتب العدد المركب L على الشكل الجبري .

2) عين E مجموعة النقط M ذات اللاحقة z التي يكون من أجلها L حقيقيا

3) عين F مجموعة النقط M ذات اللاحقة z التي يكون من أجلها L تخيليا صرفا.

4) أنشئ المجموعتين E و F .

إعداد الأستاذ:
حليلات عمار

التمرين (06) المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ}\right)$

ليكن كثير الحدود $P(z)$ للمتغير المركب z حيث أن :

$$P(z)=z^3-\left(1+i\sqrt{2}\right)z^2+\left(1+i\sqrt{2}\right)z-i\sqrt{2}$$

1/ أ- بيّن أن المعادلة $P(z)=0$ تقبل حلا تخيليا صرفا z_0 يطلب تعيينه .

ب- عين عددين حقيقيين a و b حتى يكون من أجل كل عدد مركب z ،

$$P(z)=\left(z-z_0\right)\left(z^2+az+b\right)$$

ج- حل عندئذ في $\mathbb{C}$ المعادلة : $P(z)=0$

2/ نعتبر النقط A ، B و C ذات اللواحق $a=i\sqrt{2}$ ، $b=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ ، $c=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$

أ- عين لاحقة النقطة G مرجح النقط A ، B و C المرفقة بالمعاملات (-3) ، $\left(1+\sqrt{6}\right)$ و $\left(1-\sqrt{6}\right)$ على الترتيب

ب- بيّن أن النقطة G مركز الدائرة المحيطة بالمثلث ABC

التمرين (07) 1/ z_1 و z_2 عددان مركبان ، حل جملة المعادلتين التالية : $\begin{cases} z_1\sqrt{3}-z_2=-2 \\ z_1-z_2\sqrt{3}=-2i \end{cases}$

2/ ينسب المستوي المركب لمعلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ (الوحدة $4cm$)

نعتبر النقطتين A ، B لواحقهما على الترتيب : $z_A=-\sqrt{3}+i$ ، $z_B=-1+i\sqrt{3}$

أ) اكتب z_A و z_B على الشكل الأسي

ب) مثل A ، B.

ج) احسب الطويلة وعمدة للعدد المركب $\frac{z_A}{z_B}$ ثم استنتج طبيعة المثلث ABO وقيس للزاوية $\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}\right)$

3/ عين لاحقة النقطة C حتى يكون الرباعي $ACBO$ معين ثم مثل النقطة C وعين مساحة المثلث ABC بـــــ cm^2

التمرين (08) 1- حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2-2z+2=0$

نرمز للحلين بـــ z_1 و z_2 حيث z_1 هو الحل ذي الجزء التخيلي الموجب .

2- أ- اكتب الحلين z_1 و z_2 على الشكل الأسي .

ب- برهن أنه لكل عدد طبيعي n يكون : $\frac{z_1^n-z_2^n}{i}=2^{\frac{n+2}{2}}.\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)$

3- ينسب المستوي المركب لمعلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ عين مجموعة النقط M من المستوي التي لاحقتها z بحيث يكون : $\left|z-z_1\right|^2+\left|z-z_2\right|^2=4$

إعداد الأستاذ
حليلات عمار

التمرين (09) **1** - z_1 و z_2 عددان مركبان حيث $z_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ ، $z_2 = -\sqrt{3} - i$

اكتب كلا من z_1 و z_2 على شكله الأسي .

2- في المستوي المزود بالمعلم $\left(O; \vec{u}; \vec{v}\right)$. نعتبر العدد المركب $L = -2\left(\sin q + i\cos q\right)$

حيث q عدد حقيقي ، ولتكن النقط A ، B و M صور الأعداد المركبة z_1 ، z_2 ، L على الترتيب . أ- احسب الطويلة وعمدة للعدد المركب L بدلالة q

ب- نضع : $q = \frac{2p}{3}$ - اثبت أن المثلث ABM قائم .

التمرين (10) 1- في مجموعة الأعداد المركبة £ ، نعتبر كثير الحدود :

$$P(z) = z^3 - (2-3i)z^2 + 9z - 18 + 27i$$

أ) بين أن $P(z)$ يكتب على الشكل : $P(z) = \left(z^2+9\right)\left(z - 2 + 3i\right)$

ب) حل في £ المعادلة : $P(z) = 0$

ج) تحقق أن المعادلة تقبل حلين مترافقين يطلب كتابتهما على الشكل الأسي .

2- في المستوي المركب ، نعتبر النقط A ، B و C ذات اللاحقات $3i$ ، $-3i$ و $2-3i$

أ) عين طويلة و عمدة العدد المركب a الذي يحقق : $z_A - z_B = a\left(z_C - z_B\right)$

ب) استنتج طبيعة المثلث ABC .

3- أ- عين z_G لاحقة مرجح النقط المثقلة التالية : $(A,1)$ ، $(B,2)$ ، $(C,-2)$

ب- عين مجموعة النقط M من المستوي حيث : $MA^2 + 2MB^2 - 2MC^2 = 25$

التمرين (11) نعتبر العدد المركب $j = \frac{-1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2}$

1/ اكتب العدد j على الشكل الأسي

2/ تحقق من أن : $j^2 = \overline{j}$ ثم احسب $1 + j + j^2$

3/ ينسب المستوي المركب لمعلم متعامد ومتجانس $\left(O; \vec{i}; \vec{j}\right)$ ، نعتبر النقط A ، B و C ذات اللاحقات 1 ، j و j^2 على الترتيب . أ) مثل النقط A ، B و C

ب) برهن أن المثلث ABC متقايس الأضلاع

ج) M_1 ، M_2 و M_3 نقط من المستوي لواحقها على الترتيب z_1 ، z_2 و z_3 ، برهن أن المثلث $M_1M_2M_3$ متقايس الأضلاع إذا وفقط إذا تحقق : $z_1 + jz_2 + j^2z_3 = 0$

التمرين (12) r عدد حقيقي موجب تماما و q عدد حقيقي كيفي .

1) حل في £ المعادلة ذات المجهول z : $z^2 - 2i\left(r\cos\frac{q}{2}\right)z - r^2 = 0$

- اكتب الحلين على الشكل الأسي .

2) في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O; \vec{u}; \vec{v}\right)$ نعتبر النقطتين A و B صورتي الحلين . عين q حتى يكون OAB متقايس الأضلاع

إعداد الأستاذ:
حليلات عمار

يقول الشاعر أبو القاسم الشابي:

الهدية

إذا ما طمحت إلى غاية لبست المنى وخلعت الحذر

ولم أتخوف وعور الشعاب ولا كبة اللهب المستعر

ومن لا يحب صعود الجبال يعش ابد الدهر بين الحفر

الصبر هو زاد العظماء والجد والكفاح شعارهم وأتركك لبيت يوجهه الشافعي لمن يعيش يحلم دون أن يعمل لما يحلم به شيئا:

و أبيت سهران الدجى وتبيته نوما وتبغي بعد ذاك لحاقي

وقد قالوا: إن العلم عزيز؛ إذا أعطيته كلك أعطاك بعضه. أقول فكيف إذا أعطيته بعضك، بل توافه وقتك، فما عساك أن تنال منه

POINT DE VUE HISTORIQUE

***Il n'existe pas de réel dont le carré soit strictement négatif**. Pourtant dès le 16ème siècle les algébristes italiens dont le plus célèbre d'entre-eux Jérôme Cardan n'hésitent pas à utiliser le symbole $\sqrt{-a}$ lorsque a est un nombre réel strictement positif pour représenter le résultat de l'extraction impossible de la racine carrée du nombre négatif -a. Ils décrivent en détail les règles de cacul permettant de manipuler ces nouveaux nombres appelés par eux **"NOMBRES IMPOSSIBLES".En 1572 Bombelli montre à l'aide de la formule de Cardan que la racine x=4 de l'équation** $x^3-15x-4=0$ **peut s'écrire** $\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}+\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}=4$. A l'origine il s'agissait seulement de donner des racines à toutes les équations du second degré. Les résultats obtenus dans l'étude des équations du 3ème degré allaient familiariser les mathématiciens avec ces symboles et mettre en évidence leur rôle comme intermédiaire commode de calcul dans de nombreux cas. Pour ces raisons sommes toutes empiriques, les mathématiciens utilisaient avec une confiance croissante les nombres IMAGINAIRES depuis le début du 17ème siècle. Dès 1629 A.Girard soupçonnait que toute équation de degré n à n racines réelles ou complexes. Ce sont les mathématiciens du 19ème siècle qui ont construit les nombres complexes à partir des quantités connues et qui leur ont donné une "réalité mathématique".

***Extrait de l'encyclopédie Universalis**.