

离散数学

西安交通大学
计算机学院



离散数学

第三章 集合 (set)

§ 1. 集合理论中的一些基本概念

- 个体与集合之间的关系
- 集合的表示法
- 集合与集合之间的关系
- 幂集

§ 2. 集合代数 集合的基本运算

- 集合的补运算
- 集合的交运算和并运算
- 集合的宏运算

离散数学

第三章 集合 (set)

§ 1 .集合理论中的一些基本概念

集合概念将作为一个不言自明的元概念（基本概念）。它不能用别的术语来精确的定义，只能用别的术语来加以说明。它本身就是用来定义其它概念的概念。

我们来看看一些关于什么是集合的各种不同的说法，以便加深对集合这个元概念的理解。

离散数学

1. 莫斯科大学的那汤松教授说：

凡具有**某种特殊性质**的对象的汇集称之为集。

2. 复旦大学的陈建功教授说：

凡可供吾人思维的，不论它有形或无形，都叫做**物**。具有**某种条件**的物，称它们的**全部**谓之一集。

离散数学

3. 南开大学的杨宗磐教授说：

集就是“乌合之众”。不考虑怎样“乌合”起来的，众可以具体，可以抽象。

这种乌合性被归纳为集合的一条性质

任意性：任意性是说组成集合的元素任意；
构成的法则任意；

什么都可以构成集合，不加任何限制

任意性是集合的四大性质之一。

离散数学

4. 集合论之父G.Cantor (1845-1918) 说:

集合是由**总括某些个体**成一个整体而成的。
对于每个个体，只设其为**可思考的对象**，**辨别它的异同**。个体之间并不需要有任何关系。

离散数学

因此，对于集合，我们接受以下事实：

- (a)承认集合的存在性。即，接受集合概念；
- (b)承认集合是由一些个体（对象）组成的。这些个体称为该集合的成员或元素（member,element）；
- (c)承认个体是可辩认的。即，一个个体要么是一个集合的成员，要么不是；二者必居其一，也只居其一。

离散数学

这种存在性，可辨认性被归纳为集合的一条性质

确定性： 确定性是说集合确定；
个体确定；
集合与个体之间的关系确定。

因此，经典集合的边界是分明的、清晰的。

确定性是集合的四大性质之一。

离散数学

综上所述集合的概念有三要素：

1. 个体（元素）
 2. 个体的可辨认性
 3. 集合（动词，汇到一块）
- ◆ 通常用小写拉丁字母表示个体：a、b、c、d...
 - ◆ 通常用大写拉丁字母表示集合：A、B、C、...
 - ◆ 有时还用德文花写字母表示集合：
 $\mathcal{B}, \wp, \mathcal{R}, \mathcal{E}, \mathcal{F}, \mathcal{M}, \dots$
 - ◆ 关于个体的辨认有赖于各方面公认的知识。

离散数学

一. 个体与集合之间的关系：

个体与集合之间的关系称为属于关系。

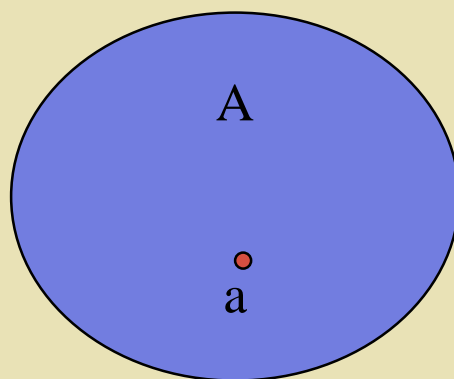
对于某个个体 a 和某个集合 A 而言，只有两种可能：

- (1) a 属于 (belong to) A ，记为 $a \in A$ ，同时称 a 是 A 的元素或 A 的成员。

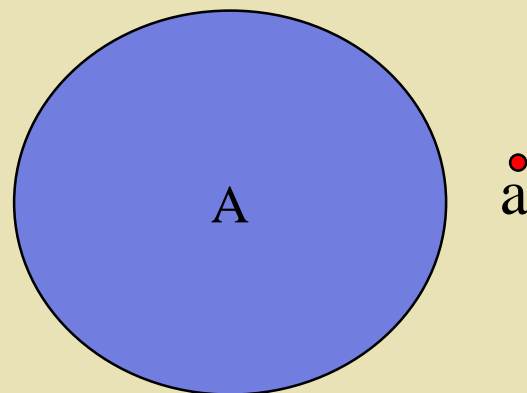
记号 \in 是希腊字 $\epsilon\sigma\tau\iota$ 的第一个字母，意思是“是”。由意大利数学家 G. Peano 首先采用。

离散数学

(2) a 不属于 A , 记为 $a \notin A$ 或 $a \bar{\in} A$, 称 a 不是 A 的元素或 a 不是 A 的成员。



$a \in A$



$a \notin A$

离散数学

- ◆ 判断个体 a 属于 A 还是不属于 A ，必须使用个体的可辨认性，而且个体的可辨认性是无二义性的，即或者 a 属于 A 或者 a 不属于 A ，二者居其一且只居其一。
- ◆ 集合论是一种语言。它可以作为别的学科的描述工具语言。

离散数学

二. 集合的表示法:

我们规定用花括号——{ } 表示集合。

◆ (1)文字表示法:

用文字表示集合的元素，两端加上花括号。

{ 在座的同学 };

{ 奇数 };

{ 去年的下雨天 };

{ 高等数学中的积分公式 };

{ 闭区间 $[0,1]$ 上的连续函数 };

比较粗放。比较适合在对集合中的元素了解甚少、不详，难以用精确的数学语言来刻画时使用。

离散数学

◆ (2)元素列举法（罗列法）：

将集合中的元素逐一列出，两端加上花括号。

$\{ 1, 2, 3, 4, 5 \};$

$\{ \text{风}, \text{马}, \text{牛} \};$

$\{ 2, 4, 6, 8, 10, \dots \};$

$\{ 3, 7, 11, 15, 19, \dots \};$

比较适合集合中的元素有限（较少或有规律），无限（离散而有规律）的情况。

离散数学

◆ (3)谓词表示法:

$\{ x:P(x) \}$ 或者 $\{ x \mid P(x) \}$

其中: P 表示 x 所满足的性质 (一元谓词) 。


$\{ x \mid x \in I \wedge (\text{且}) \ x < 8 \}$

$= \{ \dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 \}$

$\{ x \mid x^2 = 1 \};$

$\{ y \mid y \text{ 是开区间 } (a,b) \text{ 上的连续函数} \};$ (混合表示法)

离散数学


$$\begin{aligned}& \{ \text{使 } x^2 = 1 \text{ 的实数} \} \\&= \{ 1, -1 \} \\&= \{ x \mid x^2 = 1 \}\end{aligned}$$

比较适合在对集合中的元素性质了解甚详，
且易于用精确的数学语言来刻画时使用。

离散数学

- ◆ **外延(extension)**：集合 $\{ x \mid P(x) \}$ 称为性质谓词 $P(x)$ 的外延；
- ◆ **内涵(intension, connotation)**：性质谓词 $P(x)$ 称为集合 $\{ x \mid P(x) \}$ 的内涵；
由此看到，采用谓词法定义集合，关键是要得出内涵 $P(x)$ 。
- ◆ **概括原理**：集合 $\{ x \mid P(x) \}$ 恰由那些满足性质谓词 $P(x)$ 的元素组成。即
$$x \in \{ x \mid P(x) \} \Leftrightarrow (\text{当且仅当}) \quad P(x) \text{真}。$$

离散数学

◆ 悖论(paradox):

所谓悖论是指这样一个所谓的命题P，由P真立即推出P假；由P假立即推出P真；即

$$P真 \Leftrightarrow P假。$$

◆ 理发师悖论:

某偏远小山村仅有一位理发师。这位理发师规定：他只给那些不给自己刮脸的人刮脸。

那么要问：这位理发师的脸由谁来刮？

如果他给自己刮脸，那么，按他的规定，他不应该给自己刮脸；

如果他不给自己刮脸，那么，按他的规定，他应该给自己刮脸。

离散数学

- ◆ 罗素悖论(Russell paradox(1902)):

罗素1902年在集合论中也发现了如下的悖论。他构造了这样一个集合

$$S = \{ x \mid x \notin x \}$$

然后他提出问题: $S \in S$?

如果 $S \in S$, 那么, 按罗素给S的定义, 则应有 $S \notin S$;

如果 $S \notin S$, 那么, 按罗素给S的定义, 则应有 $S \in S$;

罗素悖论的发现, 几乎毁灭集合论, 动摇数学的基础, 倾危数学的大厦。直接引发了数学的第三次危机。

离散数学

◆ 三大悖论

1900年前后，在集合论中出现了三个著名的悖论。

罗素悖论

康托尔悖论

布拉列-福尔蒂悖论

离散数学

为了解决集合论中的悖论问题，人们产生了类型论和形式化公理化集合论(ZF和ZFC公理系统)，以求排除集合论中的悖论。

在公理化集合论中，人们引进了类(class)的概念。

类 { 不包含悖论的类(**OK**类)——集合(可进行运算)
包含悖论的类(固有类)——非集合(不能进行运算)

本章我们所讲解的集合论是‘朴素 (naive)’集合论；所讨论的集合一般也不会产生悖论。

离散数学

三. 集合的名字:

(1)大写的拉丁字母:

例如 $A=\{x \mid x=1\}$, $B=\{-1,1\}$;

(2)小写的希腊字母:

例如 $\alpha=\{a,b,c\}$, $\beta=\{n:n\in\mathbb{N}\wedge 3 \mid n\}$;

(3)花写的德文字母:

例如 $\wp=\{y:y\in\mathbb{R}\wedge 0\leq y\leq 1\}$,

$\Re=\{u:u\in\mathbb{I}\wedge u+3\geq 0\}$;

不够用时可以加下标。同一个集合可以有几个名字。

离散数学

四. 集合的相等 (equality) :

外延性原理: 两个集合相等, 当且仅当, 它们的成员完全相同。即

$$A=B \iff \forall x(x \in A \iff x \in B) \quad ;$$

两个集合不相等, 记为 $A \neq B$;

根据这个定义, 关于集合我们可得下列性质:

离散数学

(1) 无序性:

集合中的元素是无序的。例如

$$\{a,b,c\} = \{b, a, c\} = \{b, c, a\}$$

因此，为了方便，我们可任意书写集合中元素的顺序。

但一般情况下，通常采用字母序、字典序；有时，还需要强行命名一种序；

无序性是集合的四大性质之一。

离散数学

(2)无重复性:

集合中元素的重复是无意义的。例如

$$\{a, a, a, a, b, b, b, c, c\} = \{a, b, c\}$$

包 (bag) : 若允许元素重复称为包。例如

$$\{a, a, a, a, b, b, b, c, c\}$$

一般记为 $\{4a, 3b, 2c\}$

无重复性是集合的四大性质之一。

任意性 确定性 无序性 无重复性

离散数学

五. 空集（empty,null,void set）：记为 \emptyset

空集是没有成员的集合。即

$\forall x (x \notin \emptyset)$ （所谓的空集公理）；

所以 $\emptyset = \{ \}$ ；

空集是集合（作这点规定是运算封闭性的要求）。

空集是唯一的。因为若有两个空集，则它们有完全相同的元素（都没有任何元素），所以它们相等，是同一集合。

离散数学

六. 全集（universe of discourse）：记为 X

全集是所要研究的问题所需的全部对象（元素）所构成的集合。

全集给个体（研究的对象）划定适当的范围。

全集一般用一个矩形框来表示：



离散数学

七. 单元素集合 (singleton set) :

只含一个元素的集合称为单元素集。

例如 $\{a\}$; $\{\text{张三}\}$;

◆ $\emptyset \in \{\emptyset\}$?

左边是空集 \emptyset ; 右边不是空集, 而是单元素集合, 有一个成员 \emptyset ;

◆ 这说明: 差别在于级别。即, 右边的集合级别高。

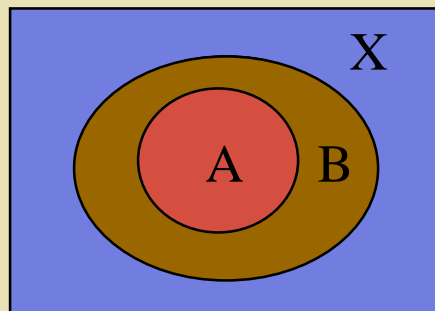
◆ 单元素集合是构造复杂集合的‘原子’。

离散数学

八. 子集 (subset) :

对于两个集合A, B, 若A中的每个元素 x 都是B的一个元素, 则称A包含在B中 (或者说B包含A), 记为 $A \subseteq B$ 。同时称A是B的子集 (称B是A的超集(superset))。即

$$A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x(x \in A \Rightarrow x \in B)。$$



离散数学

- ◆ 真子集（proper subset）：

称A是B的真子集或者说A真包含在B中（或者说B真包含A），记为 $A \subset B$ 。即

$$A \subset B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge A \neq B \quad。$$

- ◆ 子集的两种特殊情况（平凡子集）：

(1)空集（见下面定理2）；

(2)每个集合自己（见下面定理1的(1)）；

离散数学

九. 集合与集合之间的关系:

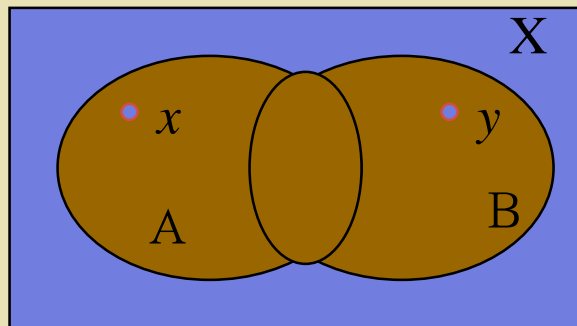
集合与集合之间的关系有四种。列举如下

(1) B包含A, $A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x(x \in A \Rightarrow x \in B)$;

(2) A包含B, $B \subseteq A \Leftrightarrow \forall x(x \in B \Rightarrow x \in A)$;

(3) A等于B, $A=B \Leftrightarrow \forall x(x \in B \Leftrightarrow x \in A)$
 $\Leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A$;

(4) A与B互不包含, $\neg(A \subseteq B) \wedge \neg(B \subseteq A)$
 $\Leftrightarrow \exists x(x \in A \wedge x \notin B) \wedge \exists y(y \in B \wedge y \notin A)$;



离散数学

定理1. 设 A, B, C 为任意三个集合。那么

(1) 自反性: $A \subseteq A$ (每个集合是它自己的子集) ;

(2) 反对称性: $A \subseteq B \wedge B \subseteq A \Rightarrow A = B$;

(3) 传递性: $A \subseteq B \wedge B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$;

这说明包含关系 \subseteq 是集合间的半序关系(参见第二章 § 6)。

离散数学

[证明]. (采用逻辑法)

$$(1) \quad \forall x(x \in A \Rightarrow x \in A)$$

$$\Rightarrow A \subseteq A$$

所以包含关系 \subseteq 是自反的;

离散数学

$$(2) A \subseteq B \wedge B \subseteq A$$

$$\Rightarrow \forall x (x \in A \Rightarrow x \in B) \wedge \forall x (x \in B \Rightarrow x \in A)$$

$$\Rightarrow \forall x ((x \in A \Rightarrow x \in B) \wedge (x \in B \Rightarrow x \in A))$$

$$\Rightarrow \forall x (x \in A \Leftrightarrow x \in B)$$

$$\Rightarrow A = B$$

所以包含关系 \subseteq 是反对称的；

离散数学

$$(3) A \subseteq B \wedge B \subseteq C$$

$$\Rightarrow \forall x(x \in A \Rightarrow x \in B) \wedge \forall x(x \in B \Rightarrow x \in C)$$

$$\Rightarrow \forall x((x \in A \Rightarrow x \in B) \wedge (x \in B \Rightarrow x \in C))$$

$$\Rightarrow \forall x(x \in A \Rightarrow x \in C)$$

$$\Rightarrow A \subseteq C$$

所以包含关系 \subseteq 是传递的。

离散数学

定理2. 空集是任一集合的子集。即

$$\emptyset \subseteq A \quad .$$

[证明].(采用逻辑法)

$$\forall x(x \notin \emptyset) \quad (\text{空集的定义})$$

$$\Leftrightarrow \forall x \neg (x \in \emptyset)$$

$$\Rightarrow \forall x (\neg (x \in \emptyset) \vee x \in A)$$

$$(\text{析取构成式: } \neg p \Rightarrow (\neg p \vee q))$$

$$\Rightarrow \forall x (x \in \emptyset \Rightarrow x \in A)$$

$$(\text{联结词归约: } (\neg p \vee q) \Leftrightarrow (p \rightarrow q))$$

$$\Rightarrow \emptyset \subseteq A \quad .$$

离散数学

定理2. 空集是任一集合的子集。即

$$\emptyset \subseteq A \quad .$$

[证明].(反证法)



离散数学

十. 幂集(power set):

定义1. 幂集

一个集合A的所有子集构成的集合称为A的幂集。记为 2^A ，即

$$2^A = \{ B \mid B \subseteq A \} \text{。}$$

显然，A的两个平凡子集 \emptyset 和A 都属于A的幂集。即

$$\emptyset \in 2^A, A \in 2^A \text{。}$$

离散数学

例1. 若 $A=\{1,2,3\}$, 则

$$2^A = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}.$$

注: (1) 包含关系 \subseteq 两边必须是集合, 并且这两个集合的级别(广义上)相同;

(2) 属于关系 \in 左边是元素(广义上), 右边是集合, 两边级别差一级。

离散数学

定义2. 基数

一个有穷集合（有限集合——元素个数有限的集合） A 中元素的个数称为 A 的基数。记为 $|A|$ (或 $\#A$, \bar{A})。

显然基数有以下两个性质：

(1) 齐性： $|\emptyset|=0$ ；

(2) 非负性： $|A| \geq 0$ （对任何集合 A ）；

另外，由于 $2^{\emptyset} = \{\emptyset\}$ ，所以 $|2^{\emptyset}| = 1$ 。

一般地，关于幂集有以下结果

离散数学

定理3. 若A是有限集合， 则有 $|2^A| = 2^{|A|}$ 。

这个定理也说明，我们为什么把一切子集构成的集合称为幂集。

[证明]. 由于集合A有限，故可设

$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ ，于是

$|A| = n$ 。A的子集按其基数大小可分为0, 1, 2, ..., n共n+1类。

离散数学

A的所有k个元素的子集（基数为k的类）为从n个元素中取k个元素的组合数 C_n^k 。另外，因 $\emptyset \subseteq A$ ，故（按加法原理）

$$|2^A| = 1 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^k + \dots + C_n^n = \sum_{k=0}^n C_n^k$$

但由于二项式定理 $(x+y)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k x^k y^{n-k}$

令 $x=y=1$ ，则有 $2^n = \sum_{k=0}^n C_n^k$ ，

从而，有 $|2^A| = 2^n = 2^{|A|}$ 。

离散数学

定理4. 若A, B是两个集合, 那么,
 $A=B \Leftrightarrow 2^A = 2^B$ 。

[证明]. \Rightarrow) : 由幂集的定义

$$\forall x \in 2^A$$

$$\Rightarrow x \subseteq A \quad (\text{幂集的定义})$$

$$\Rightarrow x \subseteq B \quad (\text{条件: } A=B)$$

$$\Rightarrow x \in 2^B \quad (\text{幂集的定义})$$

$$\Rightarrow 2^A \subseteq 2^B$$

同理可证 $2^B \subseteq 2^A$

因此 $2^A = 2^B$ (集合相等定义)

离散数学

\Leftarrow): 一方面,

$$\begin{aligned} & \underline{A \subseteq A} && (\text{自反性}) \\ \Rightarrow & A \in 2^A && (\text{因为 } 2^A = \{B : B \subseteq A\}) \\ \Rightarrow & A \in 2^B && (\text{充分性条件: } 2^A = 2^B) \\ \Rightarrow & A \subseteq B && (\text{因为 } 2^B = \{A : A \subseteq B\}) \end{aligned}$$

另一方面,

$$\begin{aligned} & \underline{B \subseteq B} && (\text{自反性}) \\ \Rightarrow & B \in 2^B && (\text{因为 } 2^B = \{A : A \subseteq B\}) \\ \Rightarrow & B \in 2^A && (\text{充分性条件: } 2^A = 2^B) \\ \Rightarrow & B \subseteq A && (\text{因为 } 2^A = \{B : B \subseteq A\}) \end{aligned}$$

因此, 由包含关系的反对称性, 得到

$$\underline{A=B} \quad \circ$$

离散数学

§ 2. 集合的基本运算

定义1. 补(余或非)运算 ((absolute)complment)

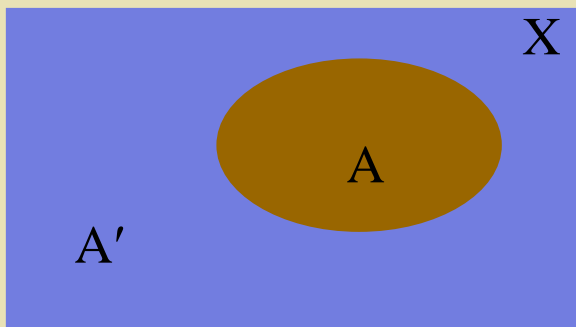
设 X 是全集。对任何集合 $A \subseteq X$ ，使得

$$A' = \{ x \mid x \in X \wedge x \notin A \}$$

(当全集明确时， $A' = \{ x \mid x \notin A \}$)

称'为集合的补运算。称 A' 是 A 关于 X 的补集。

补运算有时也记为 \bar{A} ，或 $\sim A$ 或 $\neg A$ 。



离散数学

例1. $X=\{a,b,c,d,e,f\}$, $A=\{a,c,d\}$ 。则
 $A' = \{b,e,f\}$ 。

定理1. 补运算基本定理

设 X 是全集， A ， B 是 X 的子集。则

- (1)反身律(对合律): $(A')' = A$;
- (2)换质位律 (逆否律) ; $A \subseteq B \Rightarrow B' \subseteq A'$;
- (3) $A = B \Rightarrow A' = B'$;
- (4)零壹律: $X' = \emptyset$, $\emptyset' = X$ 。

离散数学

[证明]. (采用逻辑法)

(1) $(A')' = A$;

对任何元素 $x \in X$, $x \in (A')'$

$$\Rightarrow x \notin A'$$

$$\Rightarrow x \in A$$

所以 $(A')' \subseteq A$;

对任何元素 $x \in X$, $x \in A$

$$\Rightarrow x \notin A'$$

$$\Rightarrow x \in (A')'$$

所以 $A \subseteq (A')'$ 。

离散数学

$$(2) A \subseteq B \Rightarrow B' \subseteq A'$$

对任何元素 $x \in X$, $x \in B'$

$$\Rightarrow x \notin B$$

$$\Rightarrow x \notin A \quad (\text{条件: } A \subseteq B)$$

$$\Rightarrow x \in A'$$

所以 $B' \subseteq A'$;

对吗???

离散数学

(4)零壹律: $X' = \emptyset$, $\emptyset' = X$ 。

对任何元素 x , $x \in X'$

$$\Leftrightarrow x \notin X$$

$$\Leftrightarrow x \in \emptyset$$

对吗? ? ?

所以 $X' = \emptyset$;

对任何元素 x , $x \in \emptyset'$

$$\Leftrightarrow x \notin \emptyset$$

$$\Leftrightarrow x \notin X'$$

(已证 : $X' = \emptyset$)

$$\Leftrightarrow x \in X$$

所以 $\emptyset' = X$ 。

离散数学

定义2. 交运算, 并运算
(intersection, union)

设 X 是全集。

(1) 二元运算 \cap :

对任何集合 $A, B \subseteq X$, 使得

$$A \cap B = \{ x \mid x \in A \wedge x \in B \}$$

称 \cap 为集合的交运算。称 $A \cap B$ 为 A 与 B 的交集。

\cap 英语读作cap (帽子)。

若 $A \cap B = \emptyset$, 则称 A 与 B 互不相交
((pairwise)disjoint)。

离散数学

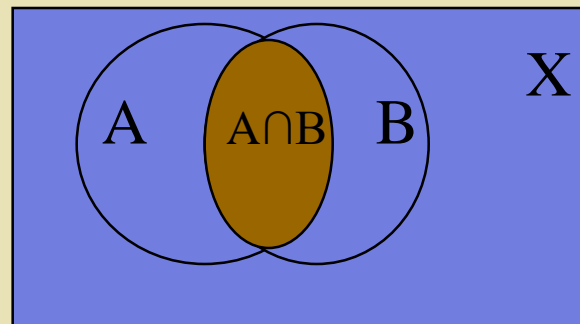
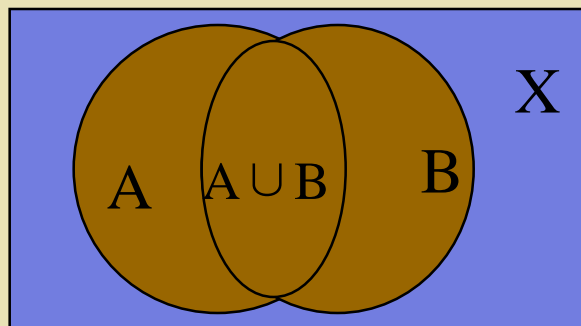
(2)二元运算 \cup :

对任何集合 $A, B \subseteq X$, 使得

$$A \cup B = \{ x \mid x \in A \vee x \in B \}$$

称 \cup 为集合的并运算。称 $A \cup B$ 为 A 与 B 的并集。

\cup 英语读作 **cup** (酒杯) 。



离散数学

例2. 设 $X=\{a,b,c,d,e,f\}$, $A=\{a,c,d,f\}$, $B=\{b,d,f\}$ 。

则 $A \cap B = \{d,f\}$

$A \cup B = \{a,b,c,d,f\}$

定理2. 交、并、补运算的基本定理

设 X 是全集, A, B, C 是 X 的三个子集。则

(1) 幂等律: $A \cap A = A$, $A \cup A = A$;

(2) 互补律: $A \cap A' = \emptyset$, $A \cup A' = X$;

(2') 零壹律: $A \cap X = A$, $A \cup X = X$;

(全集是交的幺元, 并的零元)

(2'') 零壹律: $A \cap \emptyset = \emptyset$, $A \cup \emptyset = A$;

(空集是交的零元, 并的幺元)

离散数学

(3) 上界: $A \subseteq A \cup B$, $B \subseteq A \cup B$;

下界: $A \cap B \subseteq A$, $A \cap B \subseteq B$;

(3') 上确界: $A \subseteq C \wedge B \subseteq C \Rightarrow A \cup B \subseteq C$;

(并集 $A \cup B$ 是同时包含 A 和 B 的集合中最小的一个)

(3'') 下确界: $C \subseteq A \wedge C \subseteq B \Rightarrow C \subseteq A \cap B$;

(交集 $A \cap B$ 是同时被 A 和 B 所包含的集合中最大的一个)

离散数学

(4)吸收律: $A \cap (A \cup B) = A$, $A \cup (A \cap B) = A$

(5)交换律: $A \cap B = B \cap A$, $A \cup B = B \cup A$;

(6)结合律: $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$,
 $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$;

(7)分配律: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$,
 $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;

离散数学

$$(3') \quad A \subseteq C \wedge B \subseteq C \Rightarrow A \cup B \subseteq C;$$

[证明]. (采用逻辑法)

对任何元素 $x \in X$,

$$x \in A \cup B$$

$$\Rightarrow x \in A \vee x \in B$$

$$\Rightarrow x \in C \vee x \in C \quad (\text{已知条件: } A \subseteq C, B \subseteq C)$$

$$\Rightarrow x \in C \quad (\text{幂等律: } p \vee p \Leftrightarrow p)$$

所以, $A \cup B \subseteq C$ 。

离散数学

$$(7) \quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C), \\ A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C);$$

先证: $A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap C)$
(采用元素法)

对任何元素 $x \in X$, 若 $x \in A \cap (B \cup C)$, 则 $x \in A$, 且 $x \in B \cup C$ 。于是 $x \in A$, 且 $x \in B$ 或者 $x \in C$ 。

若 $x \in B$, 则 $x \in A$ 且 $x \in B$, 于是 $x \in A \cap B$;

若 $x \in C$, 则 $x \in A$ 且 $x \in C$, 于是 $x \in A \cap C$;

综合 $x \in A \cap B$ 或者 $x \in A \cap C$, 因此

$$x \in (A \cap B) \cup (A \cap C);$$

所以, $A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap C)$ 。

离散数学

次证: $(A \cap B) \cup (A \cap C) \subseteq A \cap (B \cup C)$ (采用包含法)

由(3)有 $A \cap B \subseteq A$, $A \cap B \subseteq B \subseteq B \cup C$ (逐步放大法)。

于是根据(3'')可得 $A \cap B \subseteq A \cap (B \cup C)$

同理可得 $A \cap C \subseteq A \cap (B \cup C)$

于是根据(3')可得

$$(A \cap B) \cup (A \cap C) \subseteq A \cap (B \cup C) \quad \circ$$

最后, 根据包含关系的反对称性, 就得到

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \quad \circ$$

离散数学

定理3. de Morgan律（也叫对偶律）

设A, B为两个集合。则

$$(1) (A \cup B)' = A' \cap B',$$

$$(2) (A \cap B)' = A' \cup B'.$$

离散数学

[证明]. 只证(1) $(A \cup B)' = A' \cap B'$

先证: $(A \cup B)' \subseteq A' \cap B'$ (采用包含法)

由定理2(3)有 $A \subseteq A \cup B$, $B \subseteq A \cup B$

于是由定理1(2)可得 $(A \cup B)' \subseteq A'$, $(A \cup B)' \subseteq B'$

再用定理2(3''), 就有 $(A \cup B)' \subseteq A' \cap B'$;

次证: $A' \cap B' \subseteq (A \cup B)'$ (采用逻辑法)

对任何元素 $x \in X$,

$$x \in A' \cap B'$$

离散数学

$$\Rightarrow x \in A' \wedge x \in B'$$

$$\Rightarrow x \notin A \wedge x \notin B$$

$$\Rightarrow x \notin A \cup B$$

(否则 $x \in A \cup B$

$\Rightarrow x \in A \vee x \in B$, 这与 $x \notin A \wedge x \notin B$ 矛盾)

$$\Rightarrow x \in (A \cup B)'$$

所以 $A' \cap B' \subseteq (A \cup B)'$

最后, 根据包含关系的反对称性, 就得到

$$(A \cup B)' = A' \cap B' \quad \circ$$

离散数学

定理4 设 A , B 为两个集合。则下面三式等价。

(1) $A \subseteq B$;

(2) $A \cup B = B$;

(3) $A \cap B = A$ 。

$$(1) \Leftrightarrow (2) \Leftrightarrow (3) \Leftrightarrow (1)$$

离散数学

[证明]. (采用循环论证法)

(1) \Rightarrow (2): (采用包含法) $A \subseteq B \Rightarrow A \cup B = B$

首先, 根据定理2(3), 我们得到 $B \subseteq A \cup B$;

其次, 由已知条件 $A \subseteq B$, 及自反性 $B \subseteq B$, 根据定理2(3'), 我们得到 $A \cup B \subseteq B$;

最后, 根据包含关系的反对称性, 我们就得到

$$A \cup B = B \text{ .}$$

离散数学

(2) \Rightarrow (3): (采用变换法) $A \cup B = B \Rightarrow A \cap B = A$

$$\begin{aligned} A \cap B &= A \cap (A \cup B) && \text{(根据(2) } A \cup B = B\text{)} \\ &= A && \text{(根据定理2(4)吸收律)} \end{aligned}$$

即 $A \cap B = A$ 。

(3) \Rightarrow (1): (采用: 包含法) $A \cap B = A \Rightarrow A \subseteq B$

$$\begin{aligned} A &= A \cap B && \text{(根据(3) } A \cap B = A\text{)} \\ &\subseteq B && \text{(根据定理2 (3) } A \cap B \subseteq B\text{)} \end{aligned}$$

即 $A \subseteq B$ 。

离散数学

定义3 . 差运算(difference)

设 X 是全集。

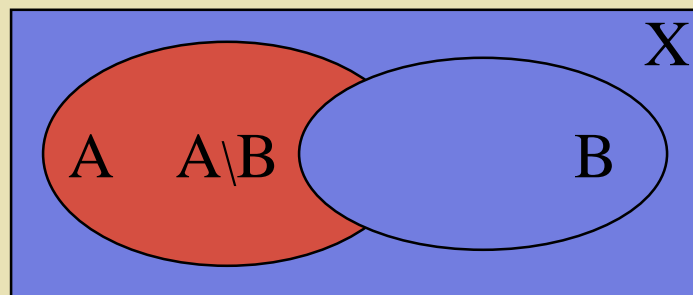
二元运算 \setminus :

对任何集合 $A, B \subseteq X$,

使得 $A \setminus B = \{ x \mid x \in A \wedge x \notin B \}$ 称为集合的差运算。称 $A \setminus B$ 为 A 和 B 的差集。

差集有时也称为相对补(relative complement)。

而余运算可看成绝对补。即 $A' = X \setminus A$ 。



离散数学

例3. $X=\{a,b,c,d,e,f\}$, $A=\{a,c,d,f\}$ $B=\{b,d,f\}$ 。
则 $A \setminus B = \{a,c\}$, $B \setminus A = \{b\}$ 。

- 由差运算、交运算、补运算的定义知

$$A \setminus B = A \cap B'。$$

- 由于差运算可以由交、并、补运算线性表出，因此称差运算为**宏运算**。

离散数学

定理5.差运算基本定理

设 X 是全集， A ， B ， C 是 X 的三个子集。则

(1) $A \setminus B \subseteq A$;

(2) $A \subseteq B \Rightarrow A \setminus B = \emptyset$;

(3) $A \setminus A = \emptyset$;

(4) $X \setminus A = A'$; $A \setminus X = \emptyset$;

(5) $A \setminus \emptyset = A$; $\emptyset \setminus A = \emptyset$;

(6) $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$ (交对差的分配律) ;

(7) $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$;

(8) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$ (相对补的de Morgan律);

(9) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$ (相对补的de Morgan律)。

离散数学

[证明]. (采用包含法和变换法(公式法)法)

(1) $A \setminus B \subseteq A$

$$A \setminus B = A \cap B'$$

$$A \cap B' \subseteq A$$

(根据定理2 (3) $A \cap B' \subseteq A$);

$$A \setminus B \subseteq A$$

(2) $A \subseteq B \Rightarrow A \setminus B = \emptyset$

$$A \setminus B = A \cap B'$$

$$= (A \cap B) \cap B'$$

(由已知条件 $A \subseteq B$ 根据定理4(3)有 $A \cap B = A$)

$$= A \cap (B \cap B') \quad (\text{结合律})$$

$$= A \cap \emptyset \quad (\text{互补律 } B \cap B' = \emptyset)$$

$$= \emptyset \quad (\text{零壹律});$$

离散数学

(6) $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$

$$A \cap (B \setminus C)$$

$$= A \cap (B \cap C')$$

$$= \emptyset \cup (A \cap B \cap C') \quad (\text{零壹律, 结合律})$$

$$= (B \cap \emptyset) \cup (A \cap B \cap C') \quad (\text{零壹律})$$

$$= (B \cap A \cap A') \cup (A \cap B \cap C') \quad (\text{互补律, 结合律})$$

$$= (A \cap B \cap A') \cup (A \cap B \cap C') \quad (\text{交换律})$$

$$= (A \cap B) \cap (A' \cup C') \quad (\text{分配律})$$

$$= (A \cap B) \cap (A \cap C)' \quad (\text{de Morgan律})$$

$$= (A \cap B) \setminus (A \cap C) \quad ;$$

离散数学

$$(7) A \setminus (B \setminus C)$$

$$= A \setminus (B \cap C')$$

$$= A \cap (B \cap C')'$$

$$= A \cap (B' \cup C)$$

(de Morgan律, 反身律)

$$= (A \cap B') \cup (A \cap C)$$

(分配律)

$$= (A \setminus B) \cup (A \cap C) \quad ;$$

$$(8) A \setminus (B \cup C)$$

$$= A \cap (B \cup C)'$$

$$= A \cap (B' \cap C')$$

(de Morgan律)

$$= (A \cap A) \cap (B' \cap C')$$

(幂等律)

$$= (A \cap B') \cap (A \cap C')$$

(结合律, 交换律)

$$= (A \setminus B) \cap (A \setminus C) \quad ;$$

离散数学

$$(9) A \setminus (B \cap C)$$

$$= A \cap (B \cap C)'$$

$$= A \cap (B' \cup C')$$

(de Morgan律)

$$= (A \cap B') \cup (A \cap C')$$

(分配律)

$$= (A \setminus B) \cup (A \setminus C) \quad .$$

$$(A \setminus B) \cup B = A \cup B$$

$$(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$$

离散数学

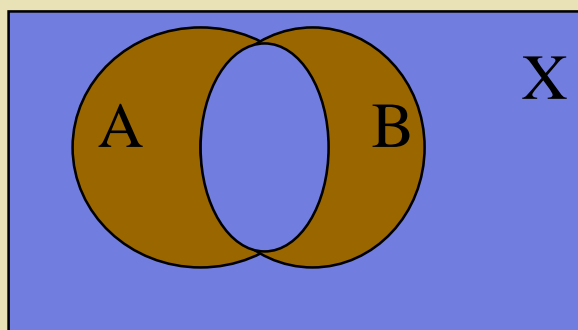
定义4. 对称差（环和）运算(symmetric difference)

设 X 是全集。 二元运算 \oplus :

对任何集合 $A, B \subseteq X$, 使得

$$A \oplus B = \{x \mid (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in B \wedge x \notin A) \}$$

称为集合的对称差运算。称 $A \oplus B$ 为 A 和 B 的对称差集。



$A \oplus B$

离散数学

- ◆由环和运算和并、差运算的定义可知

$$A \oplus B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

- ◆由环和运算和交、并、余运算的定义可知

$$A \oplus B = (A \cap B') \cup (B \cap A')$$

因此环和运算也是宏运算。

例4. 设 $X = \{a, b, c, d, e, f\}$, $A = \{a, c, d, f\}$, $B = \{b, d, f\}$

则 $A \setminus B = \{a, c\}$,

$B \setminus A = \{b\}$,

$A \oplus B = \{a, b, c\}$ 。

离散数学

定理6 .环和运算基本定理

设 X 是全集， A, B, C 是 X 的三个子集。则

$$(1) A \oplus B = (A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \cup B) \cap (A' \cup B') ;$$

$$(2) A \oplus \emptyset = A \quad (\text{空集是环和的么元}) ;$$

$$A \oplus X = A' ;$$

$$(3) A \oplus A = \emptyset \quad (\text{自己是自己 (环和) 的逆元}) ;$$

$$A \oplus A' = X ;$$

$$(4) A' \oplus B' = A \oplus B ;$$

$$(5) (A \oplus B)' = A' \oplus B = A \oplus B' ;$$

$$(6) \text{交换律: } A \oplus B = B \oplus A ;$$

$$(7) \text{结合律: } A \oplus (B \oplus C) = (A \oplus B) \oplus C ;$$

$$(8) \text{分配律: } A \cap (B \oplus C) = (A \cap B) \oplus (A \cap C) \quad (\text{交对环和的});$$

$$(9) \text{消去律: } A \oplus B = A \oplus C \Rightarrow B = C .$$

离散数学

[证明].(采用变换法(公式法))只证(5), (7), (9)

$$(5)(A \oplus B)'$$

$$= ((A \cap B') \cup (A' \cap B))'$$

$$= (A \cap B')' \cap (A' \cap B)'$$
 (de Morgan律)

$$= (A' \cup B) \cap (A \cup B')$$
 (de Morgan律, 反身律)

$$= ((A' \cup B) \cap A) \cup ((A' \cup B) \cap B')$$
 (分配律)

$$= (A' \cap A) \cup (B \cap A) \cup (A' \cap B') \cup (B \cap B')$$

$$(分配律, 结合律)$$

$$= (A \cap A') \cup (A \cap B) \cup (A' \cap B') \cup (B \cap B')$$
 (交换律)

$$= \emptyset \cup (A \cap B) \cup (A' \cap B') \cup \emptyset$$
 (互补律)

$$= (A \cap B) \cup (A' \cap B')$$
 (零壹律)

离散数学

$$A' \oplus B = (A' \cap B') \cup (A'' \cap B)$$

$$= (A' \cap B') \cup (A \cap B)$$

(反身律)

$$= (A \cap B) \cup (A' \cap B')$$

(交换律)

$$A \oplus B' = (A \cap B'') \cup (A' \cap B')$$

$$= (A \cap B) \cup (A' \cap B')$$

(反身律)

所以 $(A \oplus B)' = A' \oplus B = A \oplus B' = (A \cap B) \cup (A' \cap B')$ ；

离散数学

$$(7) A \oplus (B \oplus C)$$

$$= (A \cap (B \oplus C)') \cup (A' \cap (B \oplus C))$$

$$= (A \cap ((B \cap C) \cup (B' \cap C'))) \cup (A' \cap ((B \cap C') \cup (B' \cap C)))$$

(根据本定理的(5)的证明)

$$= (A \cap B \cap C) \cup (A \cap B' \cap C') \cup (A' \cap B \cap C') \cup (A' \cap B' \cap C)$$

(分配律, 结合律)

$$(A \oplus B) \oplus C$$

$$= ((A \oplus B) \cap C') \cup ((A \oplus B)' \cap C)$$

$$= (((A \cap B') \cup (A' \cap B)) \cap C') \cup (((A \cap B) \cup (A' \cap B')) \cap C)$$

(根据本定理的(5)的证明)

$$= (A \cap B' \cap C') \cup (A' \cap B \cap C') \cup (A \cap B \cap C) \cup (A' \cap B' \cap C)$$


(分配律, 结合律)

$$= (A \cap B \cap C) \cup (A \cap B' \cap C') \cup (A' \cap B \cap C') \cup (A' \cap B' \cap C)$$

(交换律, 结合律)

所以 $A \oplus (B \oplus C) = (A \oplus B) \oplus C$;

离散数学



(9) $B = \emptyset \oplus B$

$$= (A \oplus A) \oplus B$$

$$= A \oplus (A \oplus B)$$

$$= A \oplus (A \oplus C)$$

$$= (A \oplus A) \oplus C$$

$$= \emptyset \oplus C$$

$$= C$$

(根据本定理的(2))

(根据本定理的(3))

(根据本定理的(7)结合律)

(已知条件 $A \oplus B = A \oplus C$)

(根据本定理的(7)结合律)

(根据本定理的(3))

(根据本定理的(2)) 。



定义5.环积运算

设 X 是全集，二元运算

$$\otimes : 2^X \times 2^X \rightarrow 2^X$$

对任何集合 $A, B \subseteq X$ ，使得

$$A \otimes B = \{x : (x \in A \vee x \notin B) \wedge (x \in B \vee x \notin A)\}$$

称为集合的环积运算。称 $A \otimes B$ 为 A 和 B 的环积集。

◆由环积运算和交、并、余运算的定义可知

$$A \otimes B = (A \cup B') \cap (B \cup A')$$

因此环积运算也是宏运算。

定理7.环积运算基本定理

设 X 是全集， A ， B ， C 是 X 的三个子集。则

$$(1) A \otimes B = (A \cap B) \cup (A' \cap B') = (A \cap B) \cup (A \cup B)' ;$$

$$(2) A \otimes B = (A \oplus B)' = A' \oplus B = A \oplus B' ;$$

$$(3) A \otimes \emptyset = A' ;$$

$$A \otimes X = A \quad (\text{全集是环积的么元}) ;$$

$$(4) A \otimes A = X \quad (\text{自己是自己(环积)的逆元}) ;$$

$$A \otimes A' = \emptyset ;$$

$$(5) A' \otimes B' = A \otimes B ;$$

$$(6) (A \otimes B)' = A' \otimes B = A \otimes B' ;$$

$$(7) \text{交换律: } A \otimes B = B \otimes A ;$$

$$(8) \text{结合律: } A \otimes (B \otimes C) = (A \otimes B) \otimes C ;$$

$$(9) \text{分配律: } A \cup (B \otimes C) = (A \cup B) \otimes (A \cup C) \text{ (并对 } \otimes \text{ 的)} ;$$

$$(10) \text{消去律: } A \otimes B = A \otimes C \Rightarrow B = C .$$

[证明].(采用变换法(公式法))只证(9)

$$(9) A \cup (B \otimes C)$$

$$= A \cup ((A \cup B') \cap (A' \cup B))$$

$$= (A \cup B \cup C') \cap (A \cup B' \cup C) \quad (\text{分配律, 结合律})$$

$$= X \cap (A \cup B \cup C') \cap X \cap (A \cup B' \cup C) \quad (\text{零壹律})$$

$$= (A \cup B \cup A') \cap (A \cup B \cup C') \cap (A \cup C \cup A') \cap (A \cup B' \cup C)$$

$$(\text{互补律, 零壹律, 交换律, 结合律})$$

$$= ((A \cup B) \cup ((A' \cap C'))) \cap ((A' \cap B') \cup (A \cup C))$$

$$(\text{交换律, 结合律, 分配律})$$

$$= ((A \cup B) \cup ((A \cup C)')) \cap ((A \cup B)' \cup (A \cup C))$$

$$(\text{de Morgan律})$$

$$= (A \cup B) \otimes (A \cup C) \quad ;$$

离散数学

定义5.

(1) 初级交:
$$\bigcap_{k=1}^n A_k = A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n$$
$$= \{x \mid (\forall k \in \mathbb{N})(1 \leq k \leq n)(x \in A_k)\}$$
$$\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n \cap \dots$$
$$= \{x \mid (\forall k \in \mathbb{N})(k \geq 1)(x \in A_k)\}$$

(2) 初级并:
$$\bigcup_{k=1}^n A_k = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$$
$$= \{x \mid (\exists k \in \mathbb{N})(1 \leq k \leq n)(x \in A_k)\}$$
$$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n \cup \dots$$
$$= \{x : (\exists k \in \mathbb{N})(k \geq 1)(x \in A_k)\}$$

离散数学

(3) 广义交: $\bigcap_{\gamma \in \Gamma} A_{\gamma} = \{x : (\forall \gamma \in \Gamma)(x \in A_{\gamma})\}$

(4) 广义并: $\bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_{\gamma} = \{x : (\exists \gamma \in \Gamma)(x \in A_{\gamma})\}$

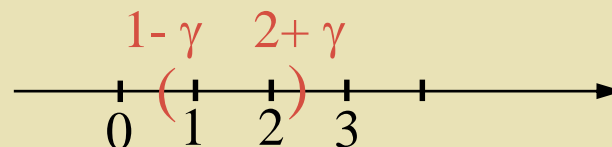
这里: γ —称为索引, 下标, 指标;

Γ —称为索引集, 下标集, 指标集。

例6. $\Gamma=(0,1)$, $A_{\gamma} = (1-\gamma, 2+\gamma)$ 。 则

$$\bigcap_{\gamma \in \Gamma} A_{\gamma} =$$

$$\bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_{\gamma} =$$



离散数学

(3) 广义交: $\bigcap_{\gamma \in \Gamma} A_{\gamma} = \{x : (\forall \gamma \in \Gamma)(x \in A_{\gamma})\}$

(4) 广义并: $\bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_{\gamma} = \{x : (\exists \gamma \in \Gamma)(x \in A_{\gamma})\}$

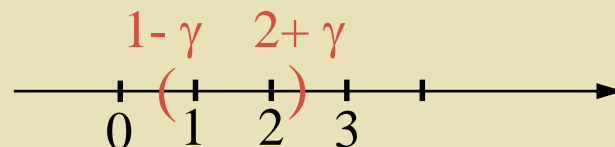
这里: γ —称为索引, 下标, 指标;

Γ —称为索引集, 下标集, 指标集。

例6. $\Gamma=(0,1)$, $A_{\gamma} = (1-\gamma, 2+\gamma)$ 。 则

$$\bigcap_{\gamma \in \Gamma} A_{\gamma} = [1, 2] \quad ;$$

$$\bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_{\gamma} = (0, 3) \quad \circ$$



离散数学

定理8.

(1) 分配律:

$$A \cap \left(\bigcap_{\gamma \in \Gamma} A_{\gamma} \right) = \bigcap_{\gamma \in \Gamma} (A \cap A_{\gamma})$$

$$A \cup \left(\bigcap_{\gamma \in \Gamma} A_{\gamma} \right) = \bigcap_{\gamma \in \Gamma} (A \cup A_{\gamma})$$

$$A \cap \left(\bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_{\gamma} \right) = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} (A \cap A_{\gamma})$$

$$A \cup \left(\bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_{\gamma} \right) = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} (A \cup A_{\gamma})$$

(2) de Morgan律:

$$\left(\bigcap_{\gamma \in \Gamma} A_{\gamma} \right)' = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_{\gamma}'$$

$$\left(\bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_{\gamma} \right)' = \bigcap_{\gamma \in \Gamma} A_{\gamma}'$$

离散数学

[证明].(采用逻辑法)

(1)只证第三式

对任何元素 $x \in X$,

$$\begin{aligned} & x \in A \cap \left(\bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_{\gamma} \right) \\ \Leftrightarrow & x \in A \wedge x \in \bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_{\gamma} \\ \Leftrightarrow & x \in A \wedge (\exists \gamma \in \Gamma)(x \in A_{\gamma}) \\ \Leftrightarrow & (\exists \gamma \in \Gamma)(x \in A \wedge x \in A_{\gamma}) \end{aligned}$$

(量词前移: $p \wedge \exists x A(x) \Leftrightarrow \exists x (p \wedge A(x))$)

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow & (\exists \gamma \in \Gamma)(x \in A \cap A_{\gamma}) \\ \Leftrightarrow & x \in \bigcup_{\gamma \in \Gamma} (A \cap A_{\gamma}) \end{aligned}$$

所以 $A \cap \left(\bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_{\gamma} \right) = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} (A \cap A_{\gamma})$;

离散数学

(2) 只证第二式

对任何元素 $x \in X$,

$$x \in \left(\bigcap_{\gamma \in \Gamma} A_{\gamma} \right)'$$

$$\Leftrightarrow x \notin \bigcap_{\gamma \in \Gamma} A_{\gamma}$$

$$\Leftrightarrow \neg \left(x \in \bigcap_{\gamma \in \Gamma} A_{\gamma} \right)$$

$$\Leftrightarrow \neg (\forall \gamma \in \Gamma)(x \in A_{\gamma})$$

$$\Leftrightarrow (\exists \gamma \in \Gamma) \neg (x \in A_{\gamma})$$

(量词对偶律: $\neg \forall x A(x) \Leftrightarrow \exists x \neg A(x)$)

$$\Leftrightarrow (\exists \gamma \in \Gamma)(x \notin A_{\gamma})$$

$$\Leftrightarrow (\exists \gamma \in \Gamma)(x \in A_{\gamma}')$$

$$\Leftrightarrow x \in \bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_{\gamma}'$$

所以 $\left(\bigcap_{\gamma \in \Gamma} A_{\gamma} \right)' = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_{\gamma}'$ 。

离散数学

要求

- ◆ 掌握集合、子集、全集、空集、单元素集等概念
- ◆ 掌握集合的四大性质:任意性(抽象性)、确定性、无序性、无重复性
- ◆ 熟悉常用的表示集合的方法以及用文氏图来表示集合的方法
- ◆ 能够判定元素与集合,集合与集合之间的关系
- ◆ 理解两个集合间的包含关系和相等关系(外延性原理)的定义和性质,能够利用这些定义、性质来证明两个更复杂的集合的包含和相等。
- ◆ 掌握幂集的定义及计算有限集的幂集所含元素个数,所使用的计算、证明的方法和思想。
- ◆ 理解**差别在于级别!**的判定集合间关系的思想。
- ◆ 掌握集合的五种基本运算:交、并、余(补)、差和对称差(环和)的定义,并熟记集合运算的基本定理(公式),能够熟练的利用它们来证明更复杂的集合公式。

离散数学

◆ 第三章 集合 到此已经结束！

