离散数学

西安交通大学

计算学院

§ 2.布尔代数

- 布尔代数的定义
- 布尔代数的性质
- 布尔代数中的宏运算
- 有限布尔代数的原子表示

§2. 布尔代数

定义1.布尔代数(Boolean algebra)

有补的分配格(B,$\preccurlyeq$, $*$, $\oplus$, $'$, **0**, **1**) 称为布尔代数。

注：•布尔代数(B,$\preccurlyeq$, $*$, $\oplus$, $'$, 0, 1)简记为B；

•若0=1，则B称为退化的布尔代数。以后， 不讨论此种情况，因此，今后， 假定总有$|B|\geq 2$；

例1.集合代数(2^X, $\subseteq$,$\cap$, $\cup$,$'$, $\varnothing$, X) 是布尔代数。

已知集合代数(2^X, $\subseteq$,$\cap$, $\cup$,$'$, $\varnothing$, X) 是有补的分配格(本章§1例10和例20)，因此是布尔代数。

$\bar{x}$

例2.开关代数 (switching algebra) 。 $(S, \leq, \wedge, \vee, -, 0, 1)$ 是布尔代数。这里：S={0,1}，$0\leq 0$, $0\leq 1$, $1\leq 1$,其运算表如下：

x	y	$x\wedge y$	$x\vee y$
0	0	0	0
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	1

x	$\overline{x}$
0	1
1	0

表2

通过变元代换，显见表2与表1是完全相同的。令

$$h:S\to 2^X \ , h(0)=\varnothing, h(1)=X \quad (\text{这里：} X=\{a\})$$

则易证h是一个双射的同态函数。

开关代数$(S, \leq, \wedge, \vee, -, 0, 1)$与集合代数$(2^X, \subseteq, \cap, \cup, ', \varnothing, X)$ 是同构的(这里X={a})，所以开关代数$(S, \leq, \wedge, \vee, -, 0, 1)$是一个布尔代数。

例3.命题代数($\mathbb{P}$, $\preccurlyeq$, $\wedge$, $\vee$, $\neg$, F, T) 是布尔代数。

这里：$\mathbb{P}$={F,T}， F $\preccurlyeq$ F, F $\preccurlyeq$ T, T $\preccurlyeq$ T,其运算表如下：

P	Q	P$\wedge$Q	P$\vee$Q
F	F	F	F
F	T	F	T
T	F	F	T
T	T	T	T

P	$\neg$P
F	T
T	F

表3

通过变元代换，显见表3与表1是完全相同的。令

h: $\mathbb{P} \rightarrow 2^X$, h (F)= $\varnothing$, h (T)= X (这里 X={a}}

则易证h是一个双射的同态函数。

命题代数($\mathbb{P}$, $\preccurlyeq$, $\wedge$, $\vee$, $\neg$, F, T)与集合代数(2^X, $\subseteq$,$\cap$, $\cup$,$'$, $\varnothing$, X) 是同构的(这里X={a}) ，所以命题代数($\mathbb{P}$, $\preccurlyeq$, $\wedge$, $\vee$, $\neg$, F, T)是一个布尔代数。

注：•利用$\preccurlyeq$，在命题逻辑中可定义逻辑推论(蕴涵)关系$\Rightarrow(\vDash)$。即

$$\alpha\Rightarrow\beta\ (\text{或}\alpha\vDash\beta) \Leftrightarrow \forall v(\alpha(v)\preccurlyeq\beta(v))$$

•**有限布尔代数**：对于布尔代数$(B,\preccurlyeq, *, \oplus, ', 0, 1)$，若$\exists n\in N$，使$|B|=n$，则称其为有限布尔代数；

•集合代数$(\{\varnothing, X\}, \subseteq, \cap, \cup, ', \varnothing, X)$、开关代数$(S, \le, \wedge, \vee, -, 0, 1)$、命题代数$(\mathbb{P}, \preccurlyeq, \wedge, \vee, \neg, F, T)$都是有限布尔代数。

例4.n元集合代数$(2^X, \subseteq, \cap, \cup, ', \varnothing, X)$ 是有限布尔代数。这里：$X=\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$,因此，$|X|=n$，$|2^X|=2^n$。

显然，有限集合代数是有限布尔代数。n元集合代数是有限集合代数，因此是有限布尔代数。

例5.n元(维)开关代数$(S_n, \leq, \wedge, \vee, -, \mathbf{0}, \mathbf{1})$是有限布尔代数。

这里：$S_n=\{(x_1, x_2,\ldots, x_n)：x_i \in S(1\leq i \leq n)\}= S^n$

(其中$S=\{0,1\}$)，$\mathbf{0} = (0,0, \ldots,0)$，$\mathbf{1} = (1,1, \ldots,1)$，并且

$\forall \boldsymbol{x},\boldsymbol{y} \in S_n$，$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$，$\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$

$$\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{y} \Leftrightarrow \forall i(1\leq i \leq n)\ (x_i \leq y_i)$$

$$\boldsymbol{x} \wedge \boldsymbol{y} = (x_1 \wedge y_1, x_2 \wedge y_2, \ldots, x_n \wedge y_n)$$

$$\boldsymbol{x} \vee \boldsymbol{y} = (x_1 \vee y_1, x_2 \vee y_2, \ldots, x_n \vee y_n)$$

$$\overline{\boldsymbol{x}} = (\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n)$$

即n元开关代数的序关系、运算、最小元和最大元的定义都归结为一元开关代数$(S, \leq, \wedge, \vee, -, 0, 1)$。

现在 来证：

$$(S_n, \leq, \wedge, \vee, -, \mathbf{0}, \mathbf{1}) \cong (2^X, \subseteq, \cap, \cup, ', \varnothing, X)$$

这里：$X=\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$，即

n元开关代数与n元集合代数是同构的。

从而由n元集合代数是有限布尔代数(例4)，可知n元开关代数$(S_n, \leq, \wedge, \vee, -, \mathbf{0}, \mathbf{1})$也是有限布尔代数。

令：$h\colon S_n \to 2^X$ ，

$\forall \boldsymbol{x} \in S_n$, $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$,

$h(\boldsymbol{x}) = A \in 2^X$ (或$A \subseteq X$)

这里：$A=\{a_i\colon\ a_i \in X \wedge x_i = 1 (1 \leq i \leq n)\}$

因此 $a_i \in h(\boldsymbol{x}) \Leftrightarrow a_i \in A \Leftrightarrow x_i = 1\ (1 \leq i \leq n)$ 。

下面 证明h是一同构函数：

为此， 总设 $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in S_n$， $h(\boldsymbol{x})=A$， $h(\boldsymbol{y})=B$

明显地 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$， $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$

显然有 $h(\mathbf{0}) = \varnothing$, $h(\mathbf{1}) = X$ ；

(1)先证h是双射函数

① h是单射函数

$h(\boldsymbol{x}) = h(\boldsymbol{y})$

$\Rightarrow A=B$

$\Rightarrow a_i \in A \Leftrightarrow a_i \in B \quad (1 \le i \le n)$

$\Rightarrow x_i = 1 \Leftrightarrow y_i = 1 \quad (1 \le i \le n)$

$\Rightarrow x_i = y_i \qquad (1 \le i \le n)$

$\Rightarrow \boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ ；

② h是满射函数

$\forall A\in 2^{X}$ (即$A\subseteq X$)， 构造 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)\in S_n$ ，使得

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{当} a_i \in A \text{时} \\ 0 & \text{当} a_i \notin A \text{时} \end{cases} (1\le i \le n)$$

即 $x_i = 1 \Leftrightarrow a_i \in A \ (1\le i \le n)$

因此 $a_i \in h(\boldsymbol{x}) \quad (1\le i \le n)$

$\Leftrightarrow x_i = 1 \quad (1\le i \le n)$

$\Leftrightarrow a_i \in A \quad (1\le i \le n)$

所以 $h(\boldsymbol{x}) = A$ ；

(2)次证h满足同态公式

①$h(\boldsymbol{x} \wedge \boldsymbol{y}) = h(\boldsymbol{x}) \cap h(\boldsymbol{y})$

因为 $a_i \in h(\boldsymbol{x} \wedge \boldsymbol{y}) \qquad (1 \le i \le n)$

$\Leftrightarrow x_i \wedge y_i = 1 \qquad (1 \le i \le n)$

$\Leftrightarrow x_i = 1 \wedge y_i = 1 \qquad (1 \le i \le n)$

$\Leftrightarrow a_i \in A \wedge a_i \in B \qquad (1 \le i \le n)$

$\Leftrightarrow a_i \in A \cap B \qquad (1 \le i \le n)$

$\Leftrightarrow a_i \in h(\boldsymbol{x}) \cap h(\boldsymbol{y}) \qquad (1 \le i \le n)$

所以 $h(\boldsymbol{x} \wedge \boldsymbol{y}) = h(\boldsymbol{x}) \cap h(\boldsymbol{y})$ ；

②$h(\boldsymbol{x} \vee \boldsymbol{y}) = h(\boldsymbol{x}) \cup h(\boldsymbol{y})$

仿①可证；

③$h(\overline{\boldsymbol{x}}) = [h(x)]'$

$$a_i \in h(\overline{\boldsymbol{x}}) \quad (1 \le i \le n)$$

$$\Leftrightarrow \overline{x}_i = 1 \quad (1 \le i \le n)$$

$$\Leftrightarrow x_i = 0 \quad (1 \le i \le n)$$

$$\Leftrightarrow a_i \notin A \quad (1 \le i \le n)$$

$$\Leftrightarrow a_i \in A' \quad (1 \le i \le n)$$

$$\Leftrightarrow a_i \in [h(x)]' \quad (1 \le i \le n)$$

所以 $h(\overline{\boldsymbol{x}}) = [h(x)]'$ ；

(3)最后证h满足保序性

即　$\boldsymbol{x} \le \boldsymbol{y} \Rightarrow \mathrm{h}(\boldsymbol{x}) \subseteq \mathrm{h}(\boldsymbol{y})$

因为　$a_{\mathrm{i}} \in \mathrm{h}(\boldsymbol{x}) \quad (1 \le \mathrm{i} \le \mathrm{n})$

$\Rightarrow a_{\mathrm{i}} \in \mathrm{A} \quad (1 \le \mathrm{i} \le \mathrm{n})$

$\Rightarrow x_{\mathrm{i}} = 1 \quad (1 \le \mathrm{i} \le \mathrm{n})$

$\Rightarrow y_{\mathrm{i}} = 1 \quad (1 \le \mathrm{i} \le \mathrm{n}) \quad (\boldsymbol{x} \le \boldsymbol{y} \Leftrightarrow \forall \mathrm{i}(1 \le \mathrm{i} \le \mathrm{n})(x_{\mathrm{i}} \le y_{\mathrm{i}}))$

$\Rightarrow a_{\mathrm{i}} \in \mathrm{B} \quad (1 \le \mathrm{i} \le \mathrm{n})$

$\Rightarrow a_{\mathrm{i}} \in \mathrm{h}(\boldsymbol{y}) \quad (1 \le \mathrm{i} \le \mathrm{n})$

所以　$\mathrm{h}(\boldsymbol{x}) \subseteq \mathrm{h}(\boldsymbol{y})$ ；

例6. n元命题代数($\mathbb{P}_{\mathrm{n}}, \preccurlyeq, \wedge, \vee, \neg, \mathbf{F}, \mathbf{T}$) 是有限布尔代数。　这里：$\mathbb{P}_{\mathrm{n}} = \{(\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \ldots, \mathrm{P}_{\mathrm{n}})$：$\mathrm{P}_{\mathrm{i}} \in \mathbb{P} \ (1 \le \mathrm{i} \le \mathrm{n})\} = \mathbb{P}^{\mathrm{n}}$

(其中$\mathbb{P}$={F,T})， $\mathbf{F}$ = (F,F, …,F)，$\mathbf{T}$ = (T,T, …,T)，并且 $\forall \mathbf{P},\mathbf{Q}\in\mathbb{P}_n$， $\mathbf{P} = (P_1, P_2, \ldots , P_n)$ ， $\mathbf{Q} = (Q_1, Q_2, \ldots, Q_n)$

$$P \preccurlyeq Q \Leftrightarrow \forall i(1\leq i \leq n)\ (P_i \preccurlyeq Q_i)$$
$$\mathbf{P} \wedge \mathbf{Q} = (P_1 \wedge Q_1, P_2 \wedge Q_2, \ldots , P_n \wedge Q_n)$$
$$\mathbf{P} \vee \mathbf{Q} = (P_1 \vee Q_1, P_2 \vee Q_2, \ldots , P_n \vee Q_n)$$
$$\neg\mathbf{P} = (\neg P_1 , \neg P_2 , \ldots , \neg P_n)$$

即n元命题代数的序关系、运算、最小元和最大元的定义都归结为一元命题代数($\mathbb{P}, \preccurlyeq , \wedge, \vee , \neg$, F, T) 。

易证： $(\mathbb{P}_n, \preccurlyeq , \wedge, \vee , \neg , \mathbf{F}, \mathbf{T})\cong (2^X, \subseteq ,\cap, \cup ,' , \varnothing, X)$

这里：$X=\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$，即n元命题代数与n元集合代数是同构的。

从而由n元集合代数是有限布尔代数(例4)，可知n元命题代数$(\mathbb{P}_n, \preccurlyeq , \wedge, \vee , \neg , \mathbf{F}, \mathbf{T})$也是有限布尔代数。

定理1.(反身律)

设(B , $\preccurlyeq$, $*$, $\oplus$, $'$, **0**,**1**)是布尔代数。则$\forall x \in$B ,

$(x')'=x$ 。

[证]. $\forall x \in$B ,

$$\begin{cases} x * x' = \mathbf{0} = (x')' * x' & \text{(互补律)} \\ x \oplus x' = \mathbf{1} = (x')' \oplus x' & \text{(互补律)} \end{cases}$$

$\Rightarrow x = (x')'$ (根据上节定理10：分配格有消去律)

$\Rightarrow (x')'=x$ (等号的对称性)

定理2.(消去律之二)

设(B , $\preccurlyeq$, $*$, $\oplus$, $'$, **0**,**1**)是布尔代数。则$\forall x , y , z \in$B ,

$$\left.\begin{array}{l} x \oplus y = x \oplus z \\ x' \oplus y = x' \oplus z \end{array}\right\} \Rightarrow y = z$$
。

[证]. $\forall x, y, z \in B$,

$$
\begin{aligned}
y &= \mathbf{0} \oplus y && (\text{因 } \mathbf{0} \preccurlyeq y) \\
&= (x * x') \oplus y && (\text{互补律}) \\
&= (x \oplus y) * (x' \oplus y) && (\text{分配律}) \\
&= (x \oplus z) * (x' \oplus z) && (\text{条件} x \oplus y = x \oplus z \text{和} x' \oplus y = x' \oplus z) \\
&= (x * x') \oplus z && (\text{分配律}) \\
&= \mathbf{0} \oplus z && (\text{互补律}) \\
&= z && (\text{因 } \mathbf{0} \preccurlyeq z\,)
\end{aligned}
$$

所以，消去律之二在布尔代数中成立。

定理3.(消去律之三)

设(B , ≼, *, ⊕ , ′ , **0**,**1**)是布尔代数。则$\forall x , y , z \in B$,

$$
\left.\begin{aligned} x * y &= x * z \\ x' * y &= x' * z \end{aligned}\right\} \Rightarrow y = z
$$

对偶原理(duality principle)**:**

设$(B, \preccurlyeq, *, \oplus, ', \mathbf{0}, \mathbf{1})$ 是布尔代数，$\succcurlyeq$ 是$\preccurlyeq$ 的逆关系。则

(1)在布尔代数$(B, \preccurlyeq, *, \oplus, ', \mathbf{0}, \mathbf{1})$中实行：

将 $\preccurlyeq$换成$\succcurlyeq$；将 $*$ 换成 $\oplus$；将 $\oplus$ 换成 $*$；

将 $\mathbf{0}$ 换成 $\mathbf{1}$；将 $\mathbf{1}$ 换成 $\mathbf{0}$；

得到的$(B, \succcurlyeq, \oplus, *, ', \mathbf{1}, \mathbf{0})$仍是一布尔代数；

(2)若T是原布尔代数中某个已经证明的定理，那么在定理T的条件和结论中实行：

将 $\preccurlyeq$换成$\succcurlyeq$；将 $*$ 换成 $\oplus$；将 $\oplus$ 换成 $*$；

将 $\mathbf{0}$ 换成 $\mathbf{1}$；将 $\mathbf{1}$ 换成 $\mathbf{0}$；

由此所得到的新的定理T'在原布尔代数中仍然成立。

[证].布尔代数中的对偶原理实质上来源于两个二元运算 $*$ 和 $\oplus$ 所具有的结合律、交换律、幂等律、吸收律、分配律的对称性，半序关系$\preccurlyeq$和其逆关系$\succcurlyeq$的对称性；最小元**0**和最大元**1**的对称性；以及任何元素x与其补元x'的对称性。

注：•布尔代数$(B, \succcurlyeq, \oplus, *, ', \mathbf{1}, \mathbf{0})$称为原布尔代数$(B, \preccurlyeq, *, \oplus, ', \mathbf{0}, \mathbf{1})$的对偶布尔代数。实际上，它们互为对偶；

•定理T′称为原定理T的对偶定理。实际上，它们互为对偶。

定理4.(de Morgan律)　设(B , $\preccurlyeq$, $*$, $\oplus$, $'$, $\mathbf{0}$, $\mathbf{1}$)是布尔代数。则$\forall x , y , z \in$ B ，

(1) $(x * y)' = x' \oplus y'$ ；

(2) $(x \oplus y)' = x' * y'$ 。

[证]**.**根据对偶原理可得(2)， 只须证(1) 即可：

$\forall x , y , z \in$ B ，

由于 $(x * y) * (x' \oplus y')$

$= ((x * y) * x') \oplus ((x * y) * y')$　(分配律)

$= ((x * x') * y) \oplus (x * (y * y'))$　(结合律、交换律)

$= (\mathbf{0} * y) \oplus (x * \mathbf{0})$　(互补律)

$= \mathbf{0} \oplus \mathbf{0}$　(因 $\mathbf{0} \preccurlyeq x$及$\mathbf{0} \preccurlyeq y$)

$= \mathbf{0}$　(因自反性 $\mathbf{0} \preccurlyeq \mathbf{0}$)

及
$$
\begin{aligned}
&(x * y) \oplus (x' \oplus y') \\
&= (x \oplus (x' \oplus y')) * (y \oplus (x' \oplus y')) && (\text{分配律}) \\
&= ((x \oplus x') \oplus y') * (x' \oplus (y \oplus y')) && (\text{结合律、交换律}) \\
&= (\mathbf{1} \oplus y') * (x' \oplus \mathbf{1}) && (\text{互补律}) \\
&= \mathbf{1} * \mathbf{1} && (\text{因 } x' \preccurlyeq \mathbf{1} \text{及} y' \preccurlyeq \mathbf{1}) \\
&= \mathbf{1} && (\text{因自反性 } \mathbf{1} \preccurlyeq \mathbf{1})
\end{aligned}
$$

所以，$(x * y)' = x' \oplus y'$ 。

定理5.设$(B, \preccurlyeq, *, \oplus, ', \mathbf{0}, \mathbf{1})$是布尔代数。则$\forall x, y \in B$，以下四条等价

(1) $x \preccurlyeq y$　　$(\Leftrightarrow x * y = x \Leftrightarrow x \oplus y = y$ (§ 1定理4))；

(2) $y' \preccurlyeq x'$　　$(\Leftrightarrow x' * y' = y' \Leftrightarrow x' \oplus y' = x')$；

(3) $x * y' = \mathbf{0}$ ；

(4) $x' \oplus y = \mathbf{1}$ 。

[证].采用环形证法。即(1)⇒(2)⇒(3)⇒(4)⇒(1)

(1)⇒(2):

$$\begin{aligned} x' * y' &= (x \oplus y)' && \text{(de Morgan律)} \\ &= y' && \text{(因 (1) } x \preccurlyeq y\text{)} \end{aligned}$$

$\Rightarrow y' \preccurlyeq x'$　　(§ 1定理4)

(2)⇒(3)：

$$x * y' = x * (x' * y') \qquad (\text{因 (2) } y' \preccurlyeq x')$$
$$= (x * x') * y' \qquad (\text{结合律})$$
$$= \mathbf{0} * y' \qquad (\text{互补律})$$
$$= \mathbf{0} \qquad (\text{因 } \mathbf{0} \preccurlyeq y')$$

(3)⇒(4)：

$$x' \oplus y$$
$$= (x' \oplus y) \oplus \mathbf{0} \qquad (\text{因 } \mathbf{0} \preccurlyeq x' \oplus y)$$
$$= (x' \oplus y) \oplus (x * y') \qquad (\text{因(3) } x * y' = \mathbf{0})$$
$$= ((x' \oplus y) \oplus x) * ((x' \oplus y) \oplus y') \qquad (\text{分配律})$$
$$= ((x \oplus x') \oplus y) * (x' \oplus (y \oplus y')) \qquad (\text{结合律、交换律})$$
$$= (\mathbf{1} \oplus y) * (x' \oplus \mathbf{1}) \qquad (\text{互补律})$$
$$= \mathbf{1} * \mathbf{1} \qquad (\text{因 } x' \preccurlyeq \mathbf{1} \text{及} y \preccurlyeq \mathbf{1})$$
$$= \mathbf{1} \qquad (\text{因自反性 } \mathbf{1} \preccurlyeq \mathbf{1})$$

(4)⇒(1):

$$
\begin{aligned}
x * y &= (x * y) \oplus \mathbf{0} && (\text{因 } \mathbf{0} \preccurlyeq x * y\ ) \\
&= (x * y) \oplus (x * x') && (\text{互补律}) \\
&= x * (y \oplus x') && (\text{分配律}) \\
&= x * (x' \oplus y) && (\text{交换律}) \\
&= x * \mathbf{1} && (\text{因(4) } x' \oplus y = \mathbf{1}\ ) \\
&= x && (\text{因 } x \preccurlyeq \mathbf{1}\ ) \\
\Rightarrow x &\preccurlyeq y && (\ \S 1\text{定理4}\ )
\end{aligned}
$$

有限集合代数是有限布尔代数(例4)；

有限布尔代数是否是有限集合代数呢？

下面的斯笃(stone)定理回答了这个问题，答案是肯定的；这就为 利用熟悉、简单的有限集合代数来研究、简化有限布尔代数奠定了理论基础。

定义3.原子(atom)　设$(B,\preccurlyeq, *, \oplus, ', \mathbf{0}, \mathbf{1})$是布尔代数。

a是B 的一个原子

$\Leftrightarrow a\in B \wedge a \neq \mathbf{0} \wedge (\forall x\in B)(a * x = \mathbf{0} \vee a * x = a)$

$\Leftrightarrow a\in B \wedge a \neq \mathbf{0} \wedge (\forall x\in B)(x\neq 0 \Rightarrow a * x = \mathbf{0} \vee a \preccurlyeq x)$ 。

注：•令 S={a：a∈B ∧a是原子}　称S为B的原子集；

•定义中$a \neq \mathbf{0}$ 说明原子a不能是最小元；

•定义中后一等价式说明：任一非最小元($x\neq 0$)，要么与原子不可比较($a * x = \mathbf{0}$)，要么比原子大($a \preccurlyeq x$)。

例7.

图 1

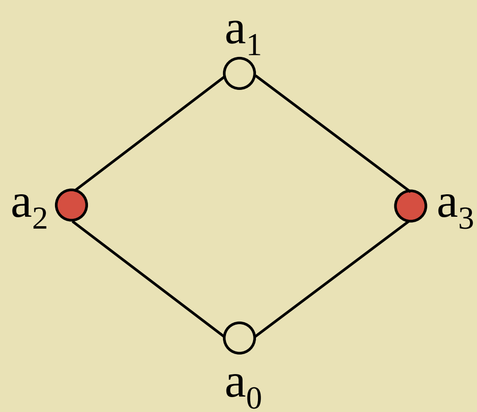

图 2

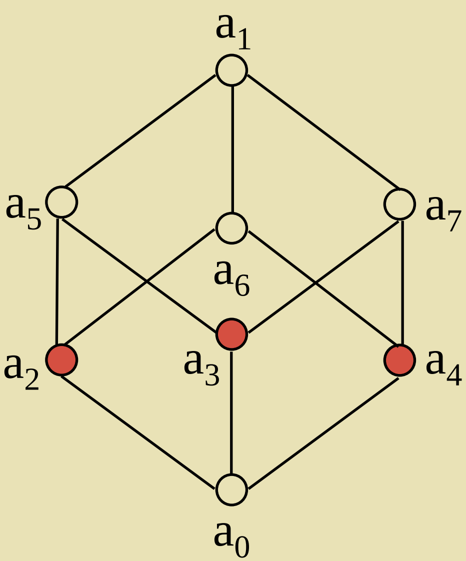

图3

定理9.设$(B,\preccurlyeq, *, \oplus, ', \mathbf{0}, \mathbf{1})$是布尔代数，并且$a\in B$ 。

a是B 的一个原子$\Leftrightarrow$ a是$\mathbf{0}$的一个直接后继；

即　a是B 的一个原子

$\Leftrightarrow \mathbf{0}\preccurlyeq a \wedge a \neq \mathbf{0} \wedge(\forall x\in B)(\mathbf{0}\preccurlyeq x \wedge x\preccurlyeq a\Rightarrow x=\mathbf{0} \vee x=a)$ 。

[证].先证$\Rightarrow$):

①已知$a \neq \mathbf{0}$　(原子的定义)；

②显然$\mathbf{0}\preccurlyeq a$　($\mathbf{0}$是B的最小元及$a\in B$)；

③ $(\forall x\in B)(\mathbf{0}\preccurlyeq x \wedge x\preccurlyeq a\Rightarrow x=\mathbf{0} \vee x=a)$

对于任何元素$x\in B$，

$\mathbf{0}\preccurlyeq x \wedge x\preccurlyeq a$

$\Rightarrow a * x = x$　(本节定理5(1)及$x\preccurlyeq a$)

$\Rightarrow x=\mathbf{0} \vee x=a$　(a是原子，故 $a * x =\mathbf{0} \vee a * x = a$)

由①②③可知，　a是$\mathbf{0}$的直接后继；

次证 $\Leftarrow$)：

①已知 $a\in B$ ；

②已知 $a \neq \mathbf{0}$ 　　(a是**0**的直接后继)；

③$(\forall x\in B)(a * x = \mathbf{0} \vee a * x = a)$ (采用二分法)；

对于任何元素 $x\in B$ ，分情况论证如下：

(甲) x 与a可比较：

(I) $x=\mathbf{0}$ ，则有 $a * x = \mathbf{0}$ 　　(本节定理5(1)及 $\mathbf{0}\preccurlyeq a$)

(II) $x\neq\mathbf{0}$

(a) $x\preccurlyeq a$

$\Rightarrow \mathbf{0}\prec x \wedge x\preccurlyeq a$ 　(**0**是B的最小元及 $x\neq\mathbf{0}$)

$\Rightarrow x=a$ 　　　　(a是**0**的直接后继)

$\Rightarrow a * x = a$ 　　(幂等律)

(b) $a\preccurlyeq x$，则有 $a * x = \mathbf{a}$ 　(本节定理5(1))

(乙)x与a不可比较：

可设 $\mathrm{a} * x = t$，于是

$$\mathrm{a} * x = t$$

$\Rightarrow t \leqslant \mathrm{a}$ (因 t是a和x 的下界，

或因$\mathrm{a} \oplus t = \mathrm{a} \oplus (\mathrm{a} * x) = \mathrm{a}$ (吸收律)

及本节定理5(1))

$\Rightarrow \mathbf{0} \leqslant t \wedge t \leqslant \mathrm{a}$ ($\mathbf{0}$是B的最小元)

$\Rightarrow t = \mathbf{0} \vee t = \mathrm{a}$ (a是$\mathbf{0}$的直接后继)

$\Rightarrow \mathrm{a} * x = \mathbf{0} \vee \mathrm{a} * x = \mathrm{a}$

于是，总有 $\mathrm{a} * x = \mathbf{0} \vee \mathrm{a} * x = \mathrm{a}$；

综上①②③所证，a是B 的原子。

注：•此定理具体到集合代数，原子就是那些单元素集合。因为单元素集合在包含关系下是空集(最小元)的直接后继。即，

对于一般集合代数，有原子集$S=\{\{a\}:a\in X\}$；

对于n元集合代数，这里$X=\{a_1, a_2,\ldots, a_n\}$，有原子集

$S= \{\{a_1\}, \{a_2\}, \ldots, \{a_n\}\}$ 。

定理10. 设$(B,\preccurlyeq, *, \oplus, ', \mathbf{0}, \mathbf{1})$是布尔代数，并且a,b 都是B的原子。则

(1) $a * b \neq \mathbf{0} \Rightarrow a=b$；

(2) $a \neq b \Rightarrow a * b = \mathbf{0}$ 。

[证]. (2)是(1)的逆否；于是只证(1)

$a * b \neq \mathbf{0}$

$\Rightarrow a * b =a \wedge a * b = b$ (a是原子$\wedge$ b 是原子)

$\Rightarrow a=b$

定理11.设(B,≼, ∗, ⊕, ′ , **0**, **1**)是有限布尔代数，|B|=n， S是B的原子集。则 $(\forall x \in B)(x \neq \mathbf{0} \Rightarrow (\exists a \in S)(a \preccurlyeq x))$

[证]. 若x已是原子，则由$x \preccurlyeq x$ (≼的自反性)，记a为x，就有$a \preccurlyeq x$，定理得证；

若x不是原子，则必有$x_1 \neq \mathbf{0}$，$x_1 \neq x$，使$\mathbf{0} \preccurlyeq x_1 \wedge x_1 \preccurlyeq x$(否则，$x$是**0**的直接后继，由本节定理9，$x$是原子，与已设$x$不是原子矛盾)；

若x_1是原子，则由$x_1 \preccurlyeq x$，记a为x_1，就有$a \preccurlyeq x$，定理得证；

若x_1不是原子，则必有$x_2 \neq \mathbf{0}$，$x_2 \neq x_1$，使$\mathbf{0} \preccurlyeq x_2 \wedge x_2 \preccurlyeq x_1$(否则，$x_1$是**0**的直接后继，由本节定理9，$x_1$是原子，与已设$x_1$不是原子矛盾)；

若x_2是原子，则由$x_2 \preccurlyeq x_1$，记a为x_2，从$a \preccurlyeq x_1 \wedge x_1 \preccurlyeq x$ ($\preccurlyeq$的传递性)，就有$a \preccurlyeq x$;

若x2不是原子，则必有$x_3 \neq \mathbf{0}$，$x_3 \neq x_2$，使$\mathbf{0} \preccurlyeq x_3 \wedge x_3 \preccurlyeq x_2$(否则，$x_2$是**0**的直接后继，因而由本节定理9，$x_2$是原子，与已设$x_2$不是原子矛盾);

重复以上过程。从B的有限性可知，一定存在某个x_k ($k \leq n$)，x_k是原子，使得$\mathbf{0} \preccurlyeq x_k \wedge x_k \preccurlyeq x_{k-1}$，从而有

$$\mathbf{0} \preccurlyeq x_k \preccurlyeq x_{k-1} \preccurlyeq \ldots \preccurlyeq x_3 \preccurlyeq x_2 \preccurlyeq x_1 \preccurlyeq x$$

根据$\preccurlyeq$的传递性可知 $x_k \preccurlyeq x$，记a为x_k，于是a是原子，并且 $a \preccurlyeq x$，定理得证。

注：•此定理说明在任一非最小元素x的下方，一定有原子a存在；或者形象的，拿图论的语言来说，就是在结点x所处的从0结点到1结点的某条路上，在0结点上方，x结点下方，一定有原子结点a存在。

例7.

图 1

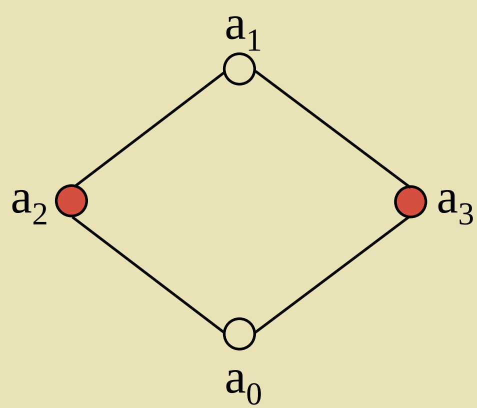

图 2

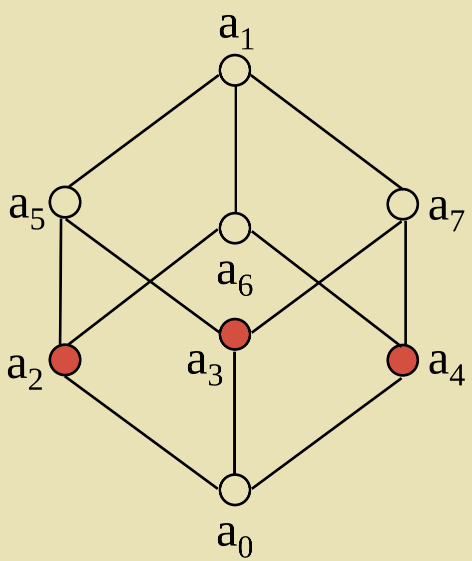

图3

定理12.(可表示性定理)

设(B,≼, ∗, ⊕, ′ , **0**, **1**)是有限布尔代数。 对任何元素 x∈B， $x \neq \mathbf{0}$ ， 令 S(x)={a： a∈S ∧ a≼x}

则一定有 $x = \bigoplus\limits_{a \in S(x)} a$ (元素x的原子表示式)。

[证]. 首先， 令 $y = \bigoplus\limits_{a \in S(x)} a$ ， 则

一方面，显然有 y≼x(因为对每个原子a∈S(x)，都有a≼x，根据上确界的最小性，就有 $y = \bigoplus\limits_{a \in S(x)} a \preccurlyeq x$)；

另一方面， 必有x≼y；为证x≼y ，根据定理5， 只须证$x * y' = \mathbf{0}$即可。(采用反证法)

否则，$x * y' \neq \mathbf{0}$,

那么，根据定理11，一定有原子a∈S存在，使得 $\mathbf{0} \preccurlyeq a \preccurlyeq x * y'$。

由于 $x * y' \preccurlyeq x$， $x * y' \preccurlyeq y'$，从而由≼的传递性有a≼x，这说明a∈S(x)，从而a≼ y(因y是S(x)中诸原子的上确界)；

同时由≼的传递性， 又有a≼ y'；故此a≼$y * y' = \mathbf{0}$(下确界的最大性及互补律)，但$\mathbf{0}$≼a，于是由≼的反对称性有a= $\mathbf{0}$。这就与a是原子(a ≠ $\mathbf{0}$)矛盾；

综合这两方面，再次由≼的反对称性可得 $x=y$ 。

注：•此定理说明B的任一非最小元素x，都可由在它下面的(即小于它的)全部原子来表示。

定理13.设$(B,\preccurlyeq, *, \oplus, ', \mathbf{0}, \mathbf{1})$是有限布尔代数。设$b,a_1, a_2, \ldots, a_n \in S$都是原子。令 $x=\bigoplus_{i=1}^{n} a_i$ ，那么

$$b\preccurlyeq x \Rightarrow b\in\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}。$$

[证]. 采用反证法。否则，$b\notin\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$，故$\forall i(1\le i\le n)$，$b\ne a_i$ 。由于b, a_i 都是原子，故根据定理10(2)可得$\forall i(1\le i\le n)$， $b * a_i = \mathbf{0}$。于是 有

$$\begin{aligned} b &= b * x && \text{(条件：}b\preccurlyeq x\text{)} \\ &= b * (\bigoplus_{i=1}^{n} a_i) \\ &= \bigoplus_{i=1}^{n} (b * a_i) && \text{(分配律)} \\ &= \bigoplus_{i=1}^{n} 0 \\ &= 0 && (b * a_i = \mathbf{0}\ (\forall i(1\le i\le n))) \end{aligned}$$

这与已知b是原子$(b \ne \mathbf{0})$矛盾。

定理14.(原子表示式的唯一性定理)　设(B,$\preccurlyeq$, $*$, $\oplus$, $'$, **0**, **1**)是有限布尔代数。则 B中任何非最小元素x的原子表示式是唯一的。即　对任何元素$x\in$B，$x\neq\mathbf{0}$ ，那么

$$x=\bigoplus_{a\in S_1} a \wedge x=\bigoplus_{b\in S_2} b \Rightarrow S_1=S_2(=S(x))$$

这里：S_1 , $S_2\subseteq S$

[证]. ① 先证：$S_1\subseteq S_2$

$\forall a\in S,\ a\in S_1\Rightarrow a\preccurlyeq x$　　($x=\bigoplus_{a\in S_1} a$)

$\Rightarrow a\in S_2$　(定理13及　$x=\bigoplus_{b\in S_2} b$)

所以$S_1\subseteq S_2$;

②次证：$S_2\subseteq S_1$

$\forall b\in S,\ b\in S_2\Rightarrow b\preccurlyeq x$　　($x=\bigoplus_{b\in S_2} b$)

$\Rightarrow b\in S_1$　(定理13及 $x=\bigoplus_{a\in S_1} a$)

所以$S_2\subseteq S_1$;

综合① ②，有 $S_1= S_2$ 。

注：•定理12及14说明B的任一非最小元素x，都可由在它下面的(即小于它的)全部原子来表示。

•而所有的原子都小于最大元**1**，故最大元**1**可由全部原子唯一的表示为：

$$1=\bigoplus_{a\in S} a$$

•另外，最小元**0**也可形式的表示为：$0=\bigoplus_{a\in\Phi} a$。

定理15.(斯笃(stone)定理)

设(B,≼, *, ⊕, ′ , **0**, **1**)是一有限布尔代数，S是B的所有原子的集合。则

有限布尔代数(B,≼, *, ⊕, ′ , **0**, **1**)与有限集合代数

(2^S, ⊆ ,∩, ∪ , −, ∅, X)同构。

[证]. (1)首先构造自然映射：　h:B→ 2^S

使得$\forall x\in B$，$x\neq \mathbf{0}$，$h(x)=S(x)=\{a：a\in S \wedge a\preccurlyeq x\}\in 2^S$

$h(\mathbf{0})=\varnothing\in 2^S$

h是函数(后者唯一)：$\forall x, y \in B$，

$x = y$

$\Rightarrow \forall a \in S,\ a \preccurlyeq x \Leftrightarrow a \preccurlyeq y$ (≼的传递性，定理13)

$\Rightarrow \{a;\ a \in S \wedge a \preccurlyeq x\} = \{a:\ a \in S \wedge a \preccurlyeq y\}$

$\Rightarrow S(x) = S(y)$

$\Rightarrow h(x) = h(y)$；

(2)h是双射函数：

①h是满射：$\forall A \in 2^S$(即$A \subseteq S$)，令 $x = \bigoplus_{a \in A} a$ ，

则 $h(x) = S(x)$

$= \{a:\ a \in S \wedge a \preccurlyeq x\}$

$= A$ (定理13)；

②h是单射：$\forall x, y \in \mathrm{B}$,

$h(x)=h(y)$

$\Rightarrow S(x)=S(y)$

$$\Rightarrow x = \bigoplus_{a\in S(x)} a \qquad (\text{定理}12)$$

$$= \bigoplus_{a\in S(y)} a \qquad (\, S(x)=S(y)\,)$$

$$= y \qquad (\text{定理}12)\,;$$

(3)h满足同态公式：$\forall x, y \in \mathrm{B}$，$x, y \neq \mathbf{0}$ ， ①$h(x * y) = h(x) \cap h(y)$

$h(x * y)$

$= S(x * y)$

$= \{a：a \in S \wedge a \preccurlyeq x * y\}$

$= \{a：a \in S \wedge (a \preccurlyeq x \wedge a \preccurlyeq y)\}$

(见注：由a是原子易证：$a \preccurlyeq x * y \Leftrightarrow a \preccurlyeq x \wedge a \preccurlyeq y$)

$= \{a：(a \in S \wedge a \in S) \wedge (a \preccurlyeq x \wedge a \preccurlyeq y)\}$ ($\wedge$的幂等律)

$= \{a：(a \in S \wedge a \preccurlyeq x) \wedge (a \in S \wedge a \preccurlyeq y)\}$ ($\wedge$的结合律、交换律)

$= \{a：(a \in S \wedge a \preccurlyeq x)\} \cap \{a：(a \in S \wedge a \preccurlyeq y)$

$= S(x) \cap S(y)$

$= h(x) \cap h(y)$

当x , y至少有一为 **0** 时，易直接验证如上的同态公式也成立；

②$h(x\oplus y)= h(x) \cup h(y)$

$$
\begin{aligned}
& h(x\oplus y) \\
&= S(x\oplus y) \\
&= \{a：\ a\in S\wedge a\preccurlyeq x\oplus y\} \\
&= \{a：\ a\in S\wedge(a\preccurlyeq x\vee a\preccurlyeq y)\}
\end{aligned}
$$

(见注：由a是原子易证：$a\preccurlyeq x\oplus y \Leftrightarrow a\preccurlyeq x \vee a\preccurlyeq y$)

$$
\begin{aligned}
&= \{a：\ (a\in S\wedge a\preccurlyeq x)\vee(a\in S\wedge a\preccurlyeq y)\} \quad (\wedge\text{对}\vee\text{的分配律}) \\
&= \{a：\ (a\in S\wedge a\preccurlyeq x)\}\cup\{a：\ (a\in S\wedge a\preccurlyeq y)\} \\
&= S(x) \cup S(y) \\
&= h(x) \cup h(y)
\end{aligned}
$$

当x , y至少有一为 **0** 时，易直接验证如上的同态公式也成立；

③$h(x') = \overline{h(x)}$

$h(x')$

$= S(x')$

$= \{a：a \in S \wedge a \preccurlyeq x'\}$

$= \{a：a \in S \wedge \neg(a \preccurlyeq x)\}$

(见注：由a是原子易证：$a \preccurlyeq x' \Leftrightarrow \neg(a \preccurlyeq x)$)

$= S \setminus \{a：a \in S \wedge a \preccurlyeq x\}$

$= \overline{S(x)}$

$= \overline{h(x)}$

当x为 **0** 或**1**时，易直接验证如上的同态公式也成立；

(4)h具有保序性： $\forall x, y \in B$， $x, y \neq \mathbf{0}$ ，

$x \preccurlyeq y \Rightarrow h(x) \subseteq h(y)$

$x \preccurlyeq y \Rightarrow \{a: a \in S \wedge a \preccurlyeq x\} \subseteq \{a: a \in S \wedge a \preccurlyeq y\}$

(因$x \preccurlyeq y \Rightarrow (\forall a \in S, a \preccurlyeq x \Rightarrow a \preccurlyeq y)$($\preccurlyeq$的传递性))

$\Rightarrow S(x) \subseteq S(y)$

$\Rightarrow h(x) \subseteq h(y)$

(5)h具有齐性：显然 $\begin{cases} h(\mathbf{0}) = \varnothing \\ h(\mathbf{1}) = S \end{cases}$

由同构函数的定义可知h是从$(B, \preccurlyeq, *, \oplus, ', \mathbf{0}, \mathbf{1})$ 到$(2^S, \subseteq, \cap, \cup, -, \varnothing, X)$的同构函数，因而有限布尔代数$(B, \preccurlyeq, *, \oplus, ', \mathbf{0}, \mathbf{1})$与有限集合代数$(2^S, \subseteq, \cap, \cup, -, \varnothing, X)$同构。

注：•定理15证明(3)①： $a \preccurlyeq x * y \Leftrightarrow a \preccurlyeq x \wedge a \preccurlyeq y$；

先证$\Rightarrow$)：(采用反证法)否则，$\neg(a \preccurlyeq x \wedge a \preccurlyeq y)$，于是则有

$\neg(a \preccurlyeq x \wedge a \preccurlyeq y)$

$\Rightarrow \neg(a \preccurlyeq x) \vee \neg(a \preccurlyeq y)$ (de Morgan律)

$\Rightarrow a * x = \mathbf{0} \vee a * y = \mathbf{0}$ (因a是原子)

$\Rightarrow a * (x * y) = (a * x) * y$ (结合律)

$= \mathbf{0} * y$ (因$a * x = \mathbf{0}$)

$= \mathbf{0}$ (因$\mathbf{0} \preccurlyeq a$)

$\Rightarrow \neg(a \preccurlyeq x * y)$ (因a是原子)

而这与必要性条件$a \preccurlyeq x * y$矛盾；

次证$\Leftarrow$)：

$a \preccurlyeq x \wedge a \preccurlyeq y$ (说明a是一下界)

$\Rightarrow a \preccurlyeq x * y$ (下确界的最大性)；

• 定理15证明(3) ②： $a \preccurlyeq x \oplus y \Leftrightarrow a \preccurlyeq x \vee a \preccurlyeq y$；

先证⇒)：(采用反证法)否则，$\neg(a \preccurlyeq x \vee a \preccurlyeq y)$，于是则有

$\neg(a \preccurlyeq x \vee a \preccurlyeq y)$

$\Rightarrow \neg(a \preccurlyeq x) \wedge \neg(a \preccurlyeq y)$ (de Morgan律)

$\Rightarrow a * x = \mathbf{0} \wedge a * y = \mathbf{0}$ (因a是原子)

$\Rightarrow a * (x \oplus y) = (a * x) \oplus (a * y)$ (分配律)

$= \mathbf{0} \oplus \mathbf{0}$ (因 $a * x = \mathbf{0}$ 和 $a * y = \mathbf{0}$)

$= \mathbf{0}$ (幂等律)

$\Rightarrow \neg(a \preccurlyeq x \oplus y)$ (因a是原子)

而这与必要性条件 $a \preccurlyeq x \oplus y$ 矛盾；

次证⇐)：

$a \preccurlyeq x \vee a \preccurlyeq y$

$\Rightarrow (a \preccurlyeq x \wedge x \preccurlyeq x \oplus y) \vee (a \preccurlyeq y \wedge y \preccurlyeq x \oplus y)$ (上确界是上界)

$\Rightarrow a \preccurlyeq x \oplus y \vee a \preccurlyeq x \oplus y$ ($\preccurlyeq$的传递性)

$\Rightarrow a \preccurlyeq x \oplus y$ ($\vee$的幂等律)；

- 定理15证明(3) ③： $a \preccurlyeq x' \Leftrightarrow \neg(a \preccurlyeq x)$；

$a \preccurlyeq x'$

$\Leftrightarrow a * x = a * (x')'$　　(反身律)

$= \mathbf{0}$　　(定理5(3)及 $a \preccurlyeq x'$)

$\Leftrightarrow \neg(a \preccurlyeq x)$　　(因a是原子)。

注：•由Stone 定理知每一个布尔代数都和某一个集合代数同构。前面还证明了开关代数和集合代数同构，命题代数和集合代数同构。因此研究集合代数也就是在研究布尔代数、开关代数、命题代数，它们的地位都是平等的。

•由于在有限集合代数中，母集是2^X，因此集合代数中母集的势为 $|2^X| =2^{|X|}$，即其元素的个数是2的若干次幂。由Stone 定理可知任何一个布尔代数中母集的势也是 2 的若干次幂，并且母集具有相同势的布尔代数是同构的，都同构于母集为2^S的集合代数，其中S是布尔代数的原子集合。这样对于布尔代数的结构就了解得比较透彻了。

离散数学

第七章 格与布尔代数

重点要求

- **掌握格的两种定义(半序格、代数格)及其等价性证明，能够对由半序集所确定的哈斯图判定其是否为格，能够对有关格的一些论题进行证明或构造反例而将其否证。**
- **熟记格运算的基本运算性质(交换律、结合律、吸收律、幂等律)及其与序的关系(等价性、保序性)，并会灵活运用。**
- **掌握分配不等式、模不等式等性质的证明及应用。**
- **掌握分配律、零壹律、互补律等的定义，并清楚它们之间的关系，对于具体给出的格所对应的哈斯图，应能判断是否为分配格、有界格或有补格等。**
- **掌握布尔代数的概念和几个重要的特例，熟记布尔代数的许多重要的基本性质及其与序的关系，并会灵活运用。**
- **掌握格和布尔代数的对偶原理,并会灵活运用。**
- **掌握布尔代数的原子概念,和布尔表达式的原子表示的概念,并会灵活运用。熟悉布尔代数的斯笃定理的内容及证明。**

离散数学

- 第七章　格与布尔代数
  到此已经结束！