

离散数学

西安交通大学
电子与信息工程学院
计算机系



离散数学

§ 6. Euler图

- Euler图的定义
- Euler图的理论



离散数学

§ 6 Euler图

Euler图产生的背景就是前面介绍的Konigsberg七桥问题，有了前面几节的知识后，我们可以讨论Euler图的解决方法了。

定义1. Euler路 Euler 圈 Euler图

设 $G = (V, E)$ 是连通的、无孤立点的图。

(1) Euler路是一条简单路 P ，路 P 穿过图 G 中每条边一次且仅一次；

(2) Euler圈是一条简单圈 C ，圈 C 穿过图 G 中每条边一次且仅一次；

(3) 含有Euler 圈的图 G 称为Euler图(简称为E-图)。

离散数学

注：这类通过各边恰好一次的问题就是通常所说的一笔画问题（即笔不离纸，线不重复）。

定理1. (Euler定理)

设 $G = (V, E)$ 是无孤立点的无向图。那么，
 G 是Euler图 $\Leftrightarrow G$ 是连通的且 G 中无奇结点。

注： G 中无奇结点即是 G 中每个结点都是偶结点。

[证].先证必要性 \Rightarrow): (采用蹦圈法)

设 C 是 G 的一条Euler圈。则

(1)图 G 是连通的：首先，由于图 G 中无孤立点，所以图 G 中的每个结点都有一些边与之关联，而Euler圈 C 包含了图 G 中的每一条边，于是圈 C 在通过各边的同时必通过图 G 中每个结点。因而图 G 中每个结点都在Euler圈 C 上。

离散数学

因此，图 G 中任何两结点，沿着Euler圈 C 可相互到达，故图 G 是连通的。

(2)图 G 中无奇结点：其次，当圈 C 穿过某结点时，必从一边进，从另一边出，因此给该结点度数的贡献是2；尽管圈 C 可能会多次穿过某些结点，但由上述原因和Euler圈 C 仅穿过每条边一次(C 是Euler圈)及每个结点都在圈 C 上可知：圈 C 穿过某结点 k 次，就给该结点的度数贡献 $2k$ ；因此，图 G 中每个结点的度数必全为偶数，即图 G 中无奇结点。

再证充分性 \Leftarrow)：(C.L.Liu算法)

No1.从任一结点出发，走成一个简单圈 C ；

由于图 G 中每个结点都是偶结点(无奇结点)，且图 G 连通，故图 G 中至少存在一个简单圈 C 。

离散数学

No2.若此简单圈 C 已是Euler圈，则此图 G 就是Euler图，算法结束(出口)。

No3.(插圈)否则，图 G 中必还有若干条边不属于圈 C 。

由图 G 的连通性可知：
必有圈 C 外的边 e_j 与圈 C 上的结点 v_i 相关联(v_i 称为接触点)。由于在图 G 中除去圈 C (只删边，不删结点)后所得的子图 G' 中，每个结点仍都是偶结点(因为在圈 C 上的结点，都是一边进，另一

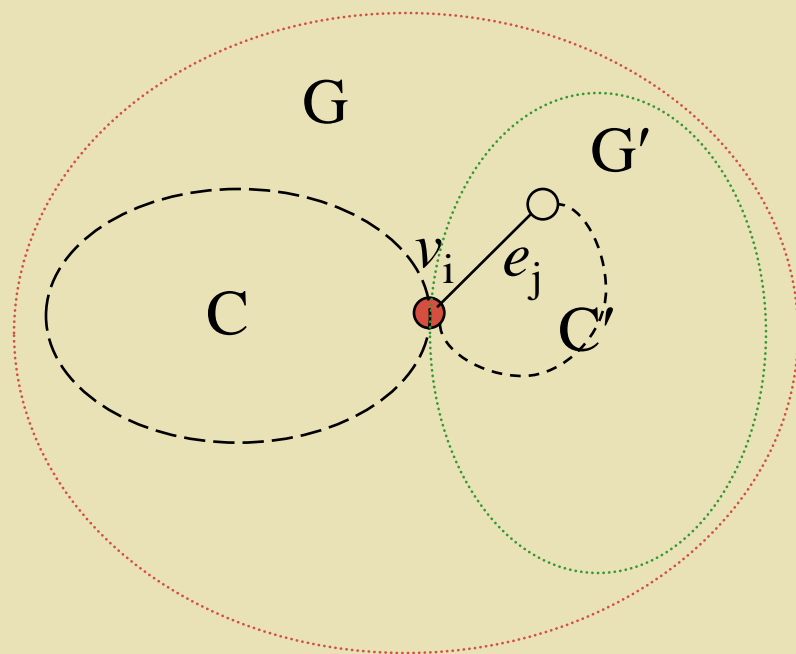


图1

离散数学

边出。因此圈C每穿过某结点一次，该结点的度数就被消耗掉2。故这些结点在删除圈C的边时，它们的度数都减少一个偶数)。由于图 G' 中每个结点都仍是偶结点，于是从此结点 v_i 出发，经过边 e_j 及子图 G' 中的其它边，必可走出一个简单圈 C' ，回到出发点 v_i 。故圈C与圈 C' 必由结点 v_i 相连(如图1所示)。将圈 C' 插入圈C中，形成一条新的更长的简单圈 $C:=C\cup C'$ ， goto No2。

由于图G中的边数是有限的，故算法不可能无穷的进行下去，所以算法必定在有限步结束。最后一定能得到一个包括图G中所有边在其上的简单圈C，此圈C即是Euler圈。所以图G即为Euler图。

注：

- C.L.Liu美籍华人。著有《离散数学基础》(刘振宏译)；
- 条件：全是偶结点保证可走出简单圈；
- 条件：连通性保证边(从而结点)可走完。

离散数学

例1. 图G如图2所示。问图G是否为一Euler图？若是，试求出其Euler圈。

[解].由于图G中的六个结点全都是偶结点，并且图G显然是连通的，故根据上述Euler定理可知，图G为Euler图。

按照C.L.Liu算法，可求得图G中的Euler圈。具体步骤如下：

在图中任意找一简单圈 $C = (1, 2, 3, 1)$ 。

发现还有7条边不在此圈

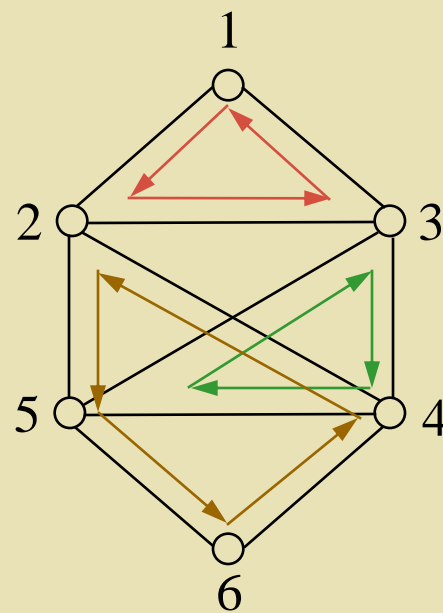


图2

离散数学

中，边 $(3,4)$ 不在圈中且与圈中的结点3相关联。由结点3出发经过边 $(3,4)$ 可得一简单圈 $C'=(3,4,5,3)$ ，将 C' 插入 C 得到一个新的更长的简单圈 $C=(1,2,3,4,5,3,1)$ 。

此时仍有4条边不在圈 C 中，边 $(2,5)$ 不在圈中且与圈中的结点2关联。由结点2出发经过边 $(2,5)$ 又可得到一简单圈 $C''=(2,5,6,4,2)$ ，将 C'' 插入 C 又得到一条新的更长的简单圈 $C=(1,2,5,6,4,2,3,4,5,3,1)$ 。

由于图 G 中所有的边都已在圈 C 中，故知此圈 C 为图 G 的一个Euler圈。

例2. 哥尼斯堡七桥问题无解。

[解].在七桥图中(图3)，由于每个结点均为奇结点，故由Euler定理的充要条件知，该图中不存在经过每条边一次且仅一次的Euler圈。即七桥图不是Euler图。该问题无解。

离散数学

例2. 哥尼斯堡七桥问题无解。

[解].在七桥图中(图3), 由于每个结点均为奇结点, 故由Euler定理的充要条件知, 该图中不存在经过每条边一次且仅一次的Euler圈。即七桥图不是Euler图。该问题无解。

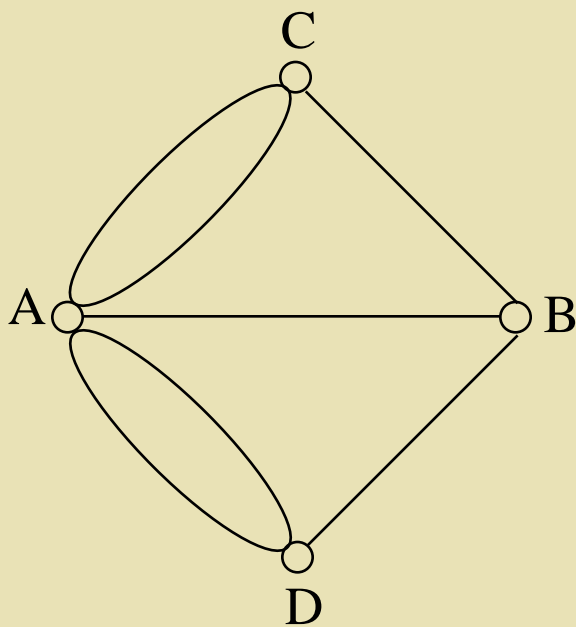


图3

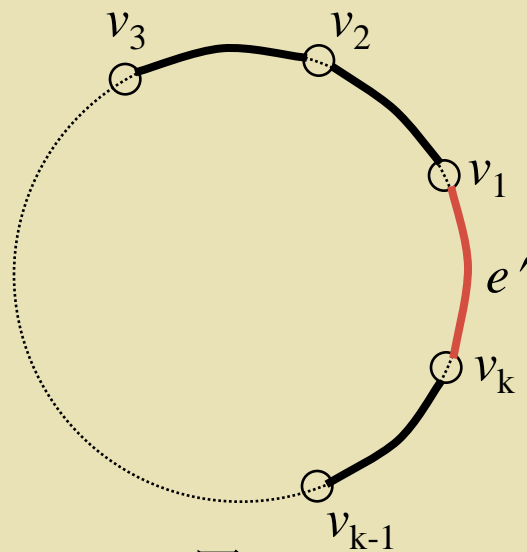


图4

离散数学

推论.(Euler定理二)

设 $G=(V,E)$ 是无孤立点的无向图。那么，
 G 中有Euler路 $\Leftrightarrow G$ 是连通的且 G 中恰有两个奇结点。

[证]. (采用增边删边法及抻路法)

G 中有Euler路 $P=(v_1, v_2, \dots, v_k)$
 $\Leftrightarrow G'=G \cup \{(v_1, v_k)\}$ 中有Euler圈 $C=(v_1, v_2, \dots, v_k, v_1)$
 $\Leftrightarrow G'$ 是连通的且 G' 中全是偶结点 (Euler定理)
 $\Leftrightarrow G$ 是连通的且 G 中恰有两个奇结点 v_1, v_k
(删掉边 $e'=(v_1, v_k)$)。

离散数学

定义2.割边(cut edge)

设 $G=(V,E)$ 是无向图， $e \in E$ 。若 $W(G \setminus e) > W(G)$ ，则称边 e 为图 G 的割边。

这里 $W(G)$ 表示图 G 中的连通支数。

例3. 图 G 如图5所示。

G 中的边 e 是割边。因为
 $W(G \setminus e) = 2 > 1 = W(G)$ 。

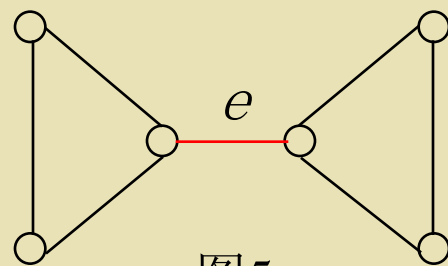


图5

如何在恰有两个奇结点的连通图中寻找Euler路，可采用下面的算法。

Fleury算法：寻找在两个奇结点间的一条Euler路的算法

- (1) 从一个奇结点出发，每走一边标记一边；下次不走标记过的边；
- (2) 在走边的过程中，除非没有其它选择时才走割边。

[解].在右图G中，恰有两个奇结点4和9，且图G是连通的，故按Euler定理二可知其存在着Euler路。

13

离散数学

定理2. 设 $G=(V,E)$ 是无孤立点的有向图。那么，
 G 是Euler图

$\Leftrightarrow G$ 是连通的且 G 中每个结点的出度都等于进度。

[证].仿定理1的证明可证。只不过这里的Euler圈应是有向圈。

定理3 设 $G=(V,E)$ 是无孤立点的有向图。那么，
 G 中有Euler路

$\Leftrightarrow G$ 是连通的且 G 中除两个结点外，其余每个结点的出度都等于进度。而这两个结点：一个结点的进度比出度大1(终点)，另一个结点的出度比进度大1(起点)。

[证].仿定理1推论的证明可证。只不过这里的Euler路应是有向路。

离散数学

应用一：高效率计算机磁鼓的设计

计算机旋转磁鼓的表面被等分成 2^n 个部分，与 n 个电刷相接触。绝缘体(空白部分)不通电表示信号0；导体(阴影部分)通电表示信号1。从而 n 个电刷上就产生一 n 位二进制信号。

我们的问题是：如何合理的安排磁鼓表面上的空白与阴影部分，使的磁鼓转动 n 个位置，就可读出 2^n 个不同的二进制数。

图7表示有三个电刷a,b,c的磁鼓，磁鼓表面被分成了八个部分。它旋转一周只能读出六个不同的二进制数：110,101,011,100,000,001。因此安排不合理。

如何设计？我们考虑四个两位二进制数：00,01,10,11

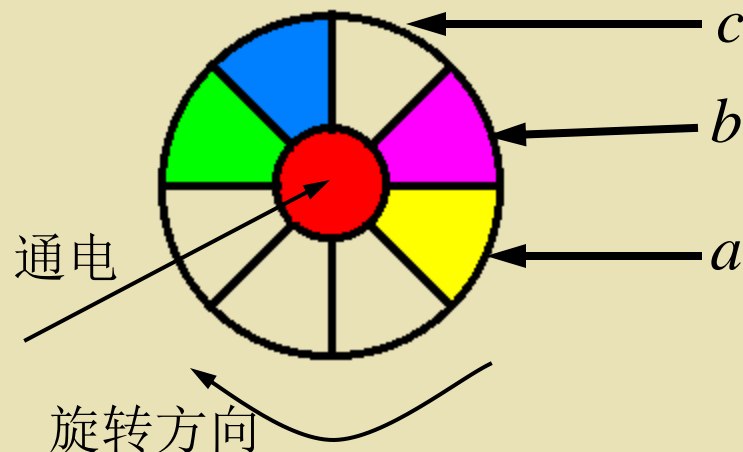


图7

离散数学

将其作为一图 G 的结点。对于图 G 的任二结点 p_1p_2 和 q_1q_2 ，若 $p_2=q_1$ ，则在它们之间连一条有向边 (p_1p_2, q_1q_2) ，并用三位二进制数 $p_1p_2q_2$ 标记该边。图 G 如图8所示。

图8所示的图 G 是一有向图，它显然是(弱)连通的，并且每个结点的进度=出度=2，满足定理2中的条件，因此存在着Euler圈。

其Euler圈为：(000,001,011,111,110,101,010,100,000)。

两位重复此八个三位二进制数，上述Euler圈可用一个八位二进制序列：00011101 来表示。

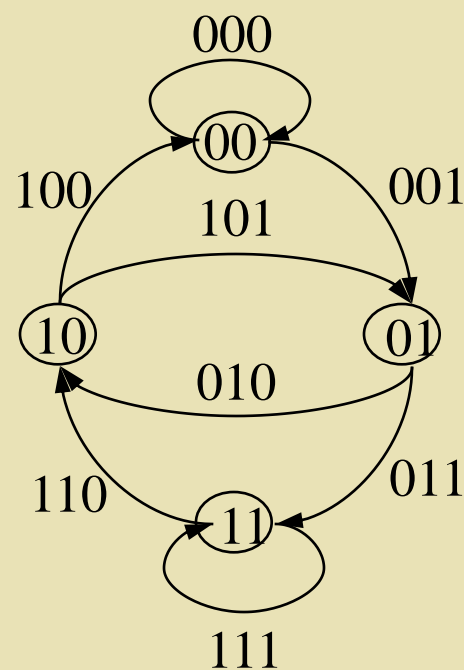


图8

离散数学

注：此序列称为De Bruijn序列。这一应用是由Good(1946)提出的。

按此序列来设计磁鼓绝缘体及导体的位置最为合理(如图9所示)，可以读出全部(八个)三位二进制数：
000,001,011,111,
110,101,010,100。

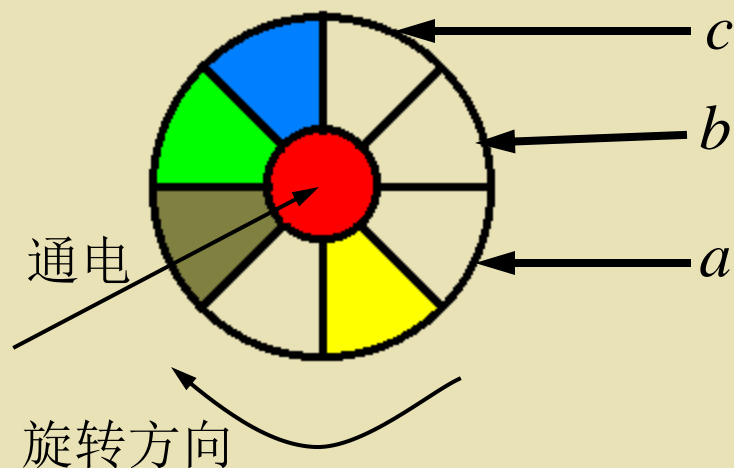


图9

应用二：一笔画问题

对于一个给定的图，究竟需要多少笔才能画成？这里只讨论连通图的一笔画问题。因为假若一个图是不连通的，则此图的笔画问题就可以归结成对各连通支笔画的讨论。

离散数学

连通图的笔画是由图中奇结点的个数决定的。

本章 § 2 定理2已经证明过：图中奇结点的个数是偶数。所以奇结点是成对出现的，即为 $2k$ 个。

(1)当 $k=0,1$ 时，此连通图是一笔画的；

(2)当 $k>1$ 时，此连通图是 k 笔画的(更进一步地，存在着 k 条边不重的路)。

应用三：中国邮路问题

一个邮递员，每次送信，领取邮件，由邮局出发，要走遍他所负责的投递范围内的每一条街道，完成投递任务后，再返回邮局。

问题是：他应该沿着怎样的路线走，使所走的总路程最短？

离散数学

这个问题抽象成图论语言就是：在给定的一个连通的带权图 $G=(V,E,w)$ (每条边上一个非负的权 $w(e)$)中，要求一个圈 C ，过每条边至少一次，并使圈 C 上的总权和 $w(C)$ 达到最小。

我们设图 G 的奇结点个数是 $2k$ (参见应用二)。

这个问题的存在性是不容质疑的。

我国山东师院的管梅谷教授于1962年首次研究并解决了上述问题。因此国际上将其称为中国邮路问题。

(1)当 $k=0$ 时(即无奇结点)，这时 G 是Euler图，有Euler圈，设其为 C 。显然，若按Euler圈 C 走，每条边走且仅走一次，总权和 $w(C)$ 显然是最小的；

(2)当 $k \geq 1$ 时(即有奇结点)，我们解决问题的思路是给图 G 增加一些重复边，使其变成无奇结点的多重图 G' 。由于图 G 是连通的，故图 G' 也是连通的。因而根据Euler定理可知，图 G' 必有Euler圈，设其为 C 。

离散数学

设这些需重复的边的集合是 $E_1 (E_1 \subseteq E)$ ，所增加的那些平行边的集合是 $E_1' = \{e' \mid e' \parallel e \wedge e \in E_1\}$ ，所获得新的带权多重图 $G' = (V, E', w)$ ，其中 $E' = E \cup E_1'$ ，并且 $\forall e' \in E_1'$ ， $w(e') = w(e)$ (这里 $e' \parallel e, e \in E_1$) (参见图10)。

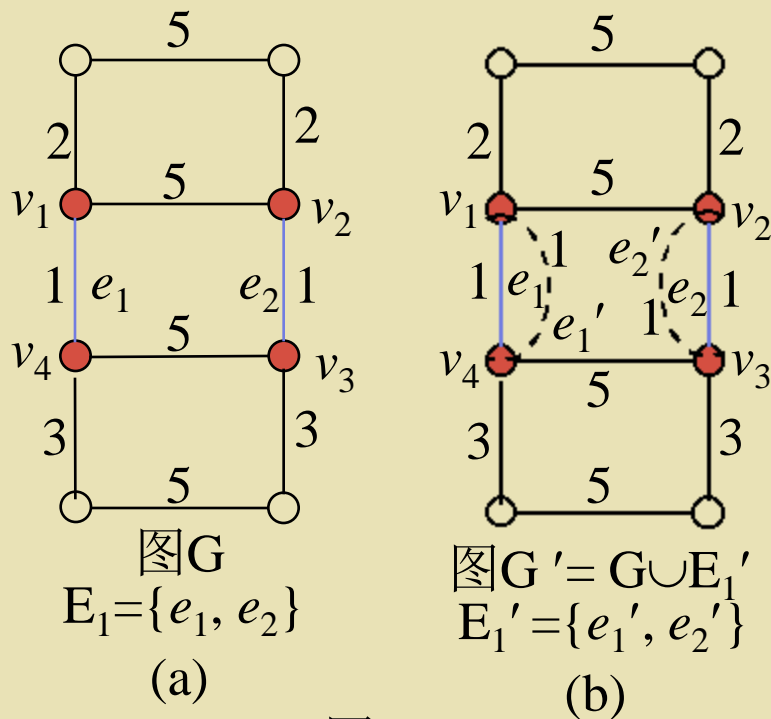


图10

离散数学

现在由于圈C穿过图G'中的每条边一次且仅一次，因而C必定穿过图G中的每条边一次。而图G中各边的总权和 $w(E)$ 是固定不变的，所以要使

Euler圈C取得最小权值 $w(C)$

\Leftrightarrow 平行边集 E_1' 取得最小权值 $w(E_1')$

\Leftrightarrow 边集 E_1 取得最小权值 $w(E_1)$

因而，中国邮路问题就转化为：在一给定的带权图 $G=(V,E,w)$ 中，寻求这样一个边集 $E_1 \subseteq E$ ，其对应的平行边集为 E_1' ，使带权多重图 $G'=G \cup E_1'$ 无奇结点，并使

$w(E_1) = \sum_{e \in E_1} w(e)$ 达到最小。

我们称这样的边集 E_1 是最优的。

管梅谷教授解决此问题的思想方法我们总结为如下的定理。

离散数学

定理4.(管氏定理(1962))

E_1 是最优的

\Leftrightarrow 在图G的每个初级圈 C_i 上, 都有 E_1 的边(要重复的边)的长度之和不超圈长的一半

\Leftrightarrow 在图G的每个初级圈 C_i 上 $\sum_{e \in E_1 \cap C_i} w(e) \leq \frac{1}{2} \sum_{e \in C_i} w(e)$

[证].定理的证明主要基于以下两点:

(1)当某条边重复 $k(k \geq 2)$ 次后得到的图为Euler图时, 则此边重复 $k-2$ 次得到的图也一定为Euler图。

(2)在图G的一个初级圈上, 如果将原来的重复边都删去, 而在原来没有重复边的边上都加上一条重复边, 那么图中各结点的度数改变0或2, 所以, 这种做法不会改变图G是Euler图的性质。由此可知: 当Euler圈中重复边的长度之和超过此圈总长的一半时, 如作上述改变, 则

离散数学

重复边长度之和减少，而Euler圈的性质不变。

例5. 在图11所示的图G中寻求最优边集 E_1 。

[解].在右图G中，恰有四个奇结点，可以验证：边集 $E_1 = \{(v_1, v_2), (v_3, v_4)\}$ 是最优的。

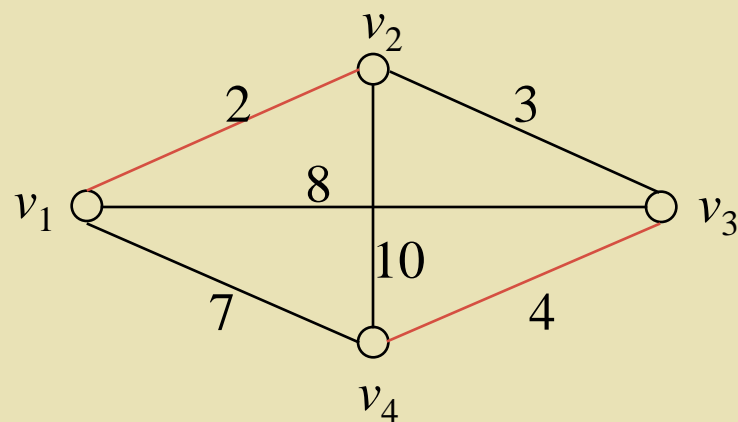


图11

图G中共有七个初级圈：

$$C_1 = (v_1, v_2, v_3, v_1),$$

$$w(C_1) = 2 + 3 + 8 = 13,$$

$$w(E_1 \cap C_1) = w(v_1, v_2) = 2 < 6.5 = 1/2 \times 13 = 1/2 \times w(C_1);$$

$$C_2 = (v_1, v_2, v_4, v_1), \quad w(C_2) = 2 + 10 + 7 = 19,$$

离散数学

$$w(E_1 \cap C_2) = w(v_1, v_2) = 2 < 9.5 = 1/2 \times 19 = 1/2 \times w(C_2);$$

$$C_3 = (v_1, v_3, v_4, v_1), \quad w(C_3) = 8 + 4 + 7 = 19,$$

$$w(E_1 \cap C_3) = w(v_3, v_4) = 4 < 9.5 = 1/2 \times 19 = 1/2 \times w(C_3);$$

$$C_4 = (v_2, v_3, v_4, v_2), \quad w(C_4) = 3 + 4 + 10 = 17,$$

$$w(E_1 \cap C_4) = w(v_3, v_4) = 4 < 8.5 = 1/2 \times 17 = 1/2 \times w(C_4);$$

$$C_5 = (v_1, v_2, v_3, v_4, v_1), \quad w(C_5) = 2 + 3 + 4 + 7 = 16,$$

$$w(E_1 \cap C_5) = w(v_1, v_2) + w(v_3, v_4) = 2 + 4 = 6$$

$$< 8 = 1/2 \times 16 = 1/2 \times w(C_5);$$

$$C_6 = (v_1, v_2, v_4, v_3, v_1), \quad w(C_6) = 2 + 10 + 4 + 8 = 24,$$

$$w(E_1 \cap C_6) = w(v_1, v_2) + w(v_3, v_4) = 2 + 4 = 6$$

$$< 12 = 1/2 \times 24 = 1/2 \times w(C_6);$$

$$C_7 = (v_1, v_3, v_2, v_4, v_1), \quad w(C_7) = 8 + 3 + 10 + 7 = 28,$$

离散数学

$$w(E_1 \cap C_7) = w(\emptyset) = 0 < 14 = 1/2 \times 28 = 1/2 \times w(C_7);$$

但是，边集 $E_2 = \{(v_1, v_4), (v_2, v_3)\}$ 不是最优的。因为

$$w(E_2 \cap C_5) = 7 + 3 = 10 > 8 = 1/2 \times 16 = 1/2 \times w(C_5);$$

边集 $E_3 = \{(v_1, v_3), (v_2, v_4)\}$ 不是最优的。因为

$$w(E_3 \cap C_6) = 8 + 10 = 18 > 12 = 1/2 \times 24 = 1/2 \times w(C_6);$$

$$w(E_3 \cap C_7) = 8 + 10 = 18 > 14 = 1/2 \times 28 = 1/2 \times w(C_7)。$$

注：在实际中应用管氏定理是很麻烦的。因为管氏定理要检查许多的初级圈，而且没有办法去系统的、逐个的检查，容易遗漏，因此一般不太实用。我们应另辟蹊径。

(a)如果 $k=1$, 即带权图 G 中只有两个奇结点, (例如图 12(a)), 则可先求出这两个奇结点间的最短路径, 然后将最短路径中的每条边重复一次(如图 12(b)所示), 得到

离散数学

一个新的带权图 G' ，它是一个Euler图(连通，无奇结点)， G' 中的Euler圈必定是取得最小值的圈。最短路径中的边必定构成最优边集 E_1 。这里：

$$E_1 = \{(v_1, v_2), (v_2, v_3)\};$$

$$w(E_1) = w(v_1, v_2) + w(v_2, v_3) = 2 + 3 = 5。$$

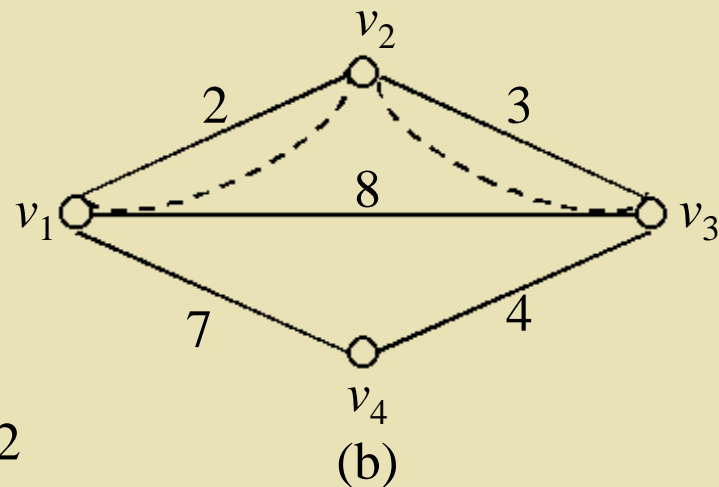
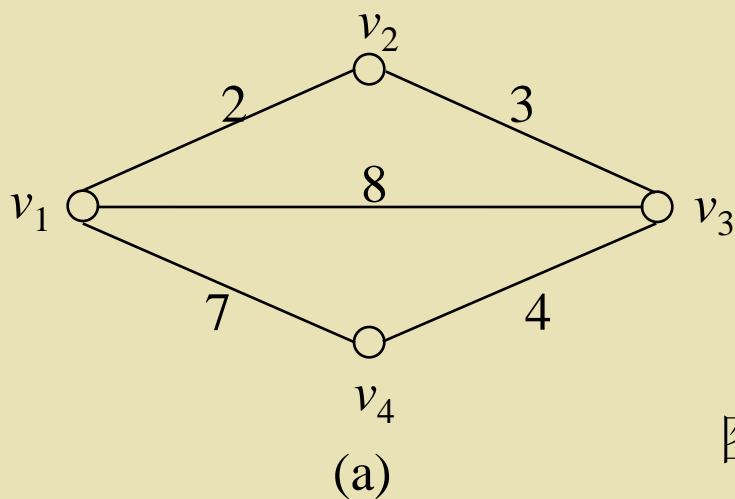


图12

离散数学

(b)如果 $k \geq 2$,即带权图 G 中有 $2k$ 个奇结点, 匈牙利的J.Edmonds和Johnson提出了如下算法, 比较有效。

J.Edmonds和Johnson算法(匈牙利算法(1973)):

No1.找出所有奇结点 $O = \{v_{i1}, v_{i2}, \dots, v_{i2k}\}$;

No2.求出任一奇结点 v_{it} 到另任一奇结点 v_{is} 的最短路 P_{itis} 及其权 $w(P_{itis})$; (采用Dijkstra算法)

No3.以 O 为结点集作完全图 K_{2k} , 并令其边 (v_{it}, v_{is}) 上的权 $w(v_{it}, v_{is}) = w(P_{itis})$;

No4.在带权图 K_{2k} 中求出总权和最小的最大对集 M^* (图中不相邻边的集合的最大者, 参见 § 9 偶图); (采用J.Edmonds算法(1965))

No5.与 M^* 中的每一杆 (v_{it}, v_{is}) 对应, 图 G 中都有一条从

离散数学

奇结点 v_{it} 到奇结点 v_{is} 的最短路 P_{itis} ，我们令

$$E_1 = \{e \mid e \in P_{itis} \wedge (v_{it}, v_{is}) \in M^*\}$$

于是， E_1 即是最优的。

离散数学

§ 7. Hamilton 图

- Hamilton 图的定义
- Hamilton 图的理论

离散数学

§ 7. Hamilton 图

◆ Hamilton 图的引出及其定义

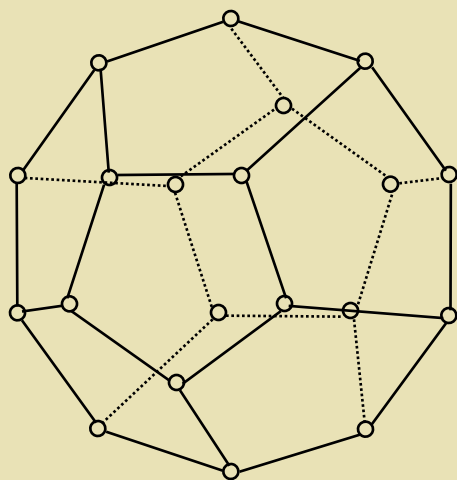
Hamilton 图是由威廉·哈密顿 (Sir Willian Hamilton) 爵士于1856年在解决关于正十二面体的一个数学游戏时首次提出的。

1856年Hamilton爵士发明了一种数学游戏：一个人在(实心的)正十二面体的任意五个相继的顶点(正十二面体是由12个相同的正五边形组成，有二十个顶点，三十条棱)上插上五个大头针，形成一条路，要求另一个人扩展这条路，以形成一条过每个顶点一次且仅一次的圈。有趣的是Hamilton爵士后来将他的发明及解决方案卖给了一个玩具商，所获是25个金币。

Hamilton爵士在1859年给他的朋友Graves的信中，将他的正十二面体数学游戏重新叙述为：能否在全球选定

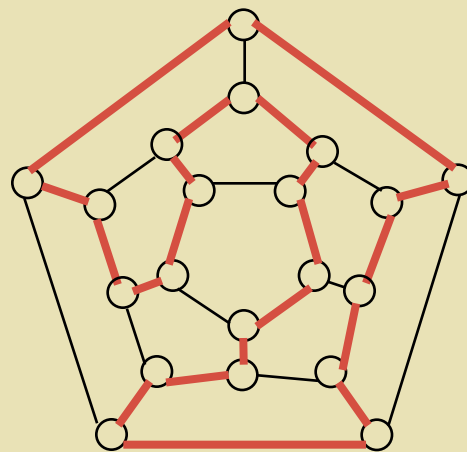
离散数学

的二十个都会城市(据说有我们中国三个城市：北京、上海、西安)中，从任一城市出发，作全球航行，经过这二十个城市一次且仅一次(不能去其它城市)，然后回到出发点？这就是著名的**环球航行问题**或**周游世界问题**。Hamilton给出了这个问题的肯定的答案(参见图1及图2)。



正十二面体

图1



正十二面体的平面展开图及其Hamilton圈

图2

离散数学

注：威廉·哈密顿 (Sir Willian Hamilton(1805-1865)) 爵士是 (英国) 爱尔兰最伟大的学者之一。他是都柏林大学的天文学教授，在那里他出版了许多关于物理和数学的论文。在数学方面，他提出了著名的四元组理论和对复数系统的归纳。四元组理论奠定了抽象代数的发展基础。还据此提出了矢量概念。在理论物理学里，有著名的哈密顿动力学系统。

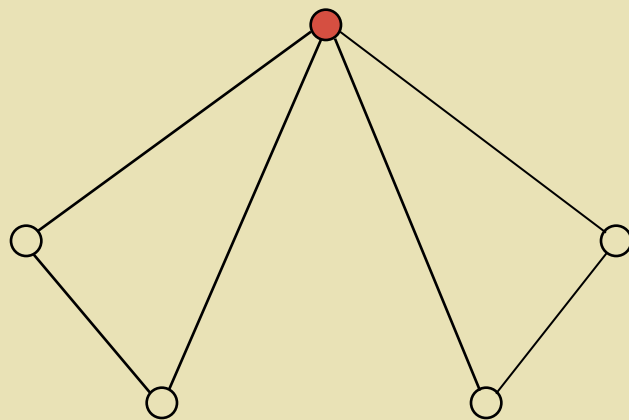
定义1. Hamilton路 圈 图

设 $G=(V,E)$ 是简单图。则

- (1) H-路是一条初级路，它穿过图中每个结点一次且仅一次；
- (2) H-圈是一条初级圈，它穿过图中每个结点一次且仅一次；
- (3) H-图是含有 H-圈的图。

离散数学

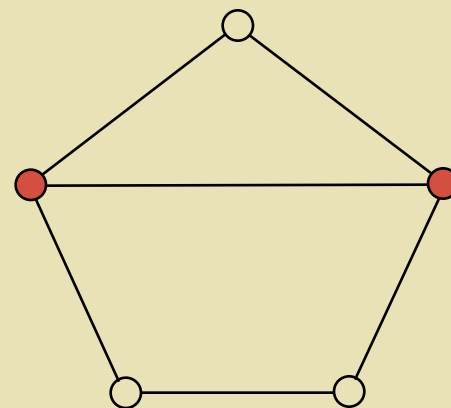
注：●需要指出的是，尽管从表面上看Hamilton问题和Euler问题似乎很相似，但它们之间并无必然的联系。**E-圈(E-图)**未必是**H-圈(H-图)**；**H-圈(H-图)**也未必是**E-圈(E-图)**。因为，H-圈是初级圈，强调的是穿过每个结点一次且仅一次；而E-圈是简单圈，强调的是穿过每条边一次且仅一次。下面的图3和图4可以说明这点。



是Euler图

不是Hamilton图

图3



是Hamilton图

不是Euler图

图4

离散数学

●判定E-圈(E-图)的充要条件(等价性条件)已经得到, 它就是Euler定理。所以Euler 问题在理论上已经彻底解决;

而判定H-圈(H-图)的充要条件(等价性条件)迄今为止人们还未提出, 人们只是得到一些是必要性条件或者是充分性条件的单边(单方向)判定方法。所以Hamilton问题在理论上远未得到彻底解决。

●判定H-圈(H-图)的充分性条件只能用来肯定, 不能用来否定。

即只能在满足条件时用来证明有H-圈(是H-图); 而不能在不满足条件时用来证明没有H-圈(不是H-图)。

●判定H-圈(H-图)的必要性条件只能用来否定, 不能用来肯定。

即在不满足条件时用来证明没有H-圈(不是H-图); 而不能在满足条件时用来证明有H-圈(是H-图)。

●近年来, 人们对Hamilton问题的研究一直没有停止, 不断的有新成果面世。

◆判定H-图 (H-圈)的必要性定理(必要性条件)

离散数学

定理1. (必要性定理)

设 $G=(V,E)$ 是简单无向图。则

G 是 H 图 $\Rightarrow (\forall S \subseteq V)(S \neq \emptyset \Rightarrow w(G \setminus S) \leq |S|)$ 。

其中： $w(G')$ 表示图 G' 的连通支数(分图个数)。

[证].由于 G 是 H 图，故 G 中含有 H -圈，设其为 C 。

(1)先证 $w(C \setminus S) \leq |S|$ ：对于结点集 V 的任一个非空子集 S ，在 H -圈 C 中删去 S 中的 $|S|$ 个结点，由归纳法易于证明(见注)： $C \setminus S$ 的分图个数不会超过所删去的结点数 $|S|$ ，即 $w(C \setminus S) \leq |S|$ 。

(2)次证 $w(G \setminus S) \leq w(C \setminus S)$ ：由于 $C \setminus S$ 是 $G \setminus S$ 的一个生成子图，故此 $G \setminus S$ 的边要比 $C \setminus S$ 的边多，因而 $G \setminus S$ 的连通性要比 $C \setminus S$ 的连通性强，所以 $G \setminus S$ 的分图个数不会超过 $C \setminus S$ 的分图个数，即

$$w(G \setminus S) \leq w(C \setminus S)。$$

最后，根据(1)和(2)，我们得到： $w(G \setminus S) \leq |S|$ 。

离散数学

注：• $[w(C \setminus S) \leq |S|]$ 的数学归纳法证明].

(1) [基始] 当 $|S|=1$ 时，在圈 C 中删去一个结点，所得子图 $C \setminus S$ 是一条连通的路，故有 $w(C \setminus S)=1 \leq 1=|S|$ ；

(2) [归纳假设] 当 $|S|=k$ 时，假设有 $w(C \setminus S) \leq |S|=k$ ；

(3) [归纳] 当 $|S|=k+1$ 时，设 v 是 S 中的任一结点，我们令 $S':=S \setminus \{v\}$ ，则有 $|S'|=k$ 。于是根据归纳假设有 $w(C \setminus S') \leq |S'|$ ；而 $S=S' \cup \{v\}$ ，在圈 C 上删去 S 的 $k+1$ 个结点，可分为两步：先在圈 C 上删去 S' 的 k 个结点，将圈 C 分成 $w(C \setminus S')$ 段；然后在这些段的某一段上删去结点 v ；

①若结点 v 在该段的头上，则删去结点 v ，不会增加分图的个数，即有 $w(C \setminus S)=w(C \setminus S')$ ；

②若结点 v 不在该段的头上(在中间)，则删去结点 v ，该段一分为二，分图的个数会增加一，即有 $w(C \setminus S)=w(C \setminus S')+1$ ；

于是，综合①和②的结果，总有

$$w(C \setminus S) \leq w(C \setminus S') + 1 \leq |S'| + 1 = |S|。$$

•定理1实际上是将关于图 G 的讨论转化到其 H -圈 C 上的讨论。
这其实就用了蹦圈法。

离散数学

例1.图5(a)所示的图G不是H-图。

在图5(a)中, 有9个结点。当将中间层上的三个结点删去时(即 $S=\{v_4, v_5, v_6\}$, $|S|=3$), 此时图5(a)变为图5(b), 而图5(b)的分图个数为4, 即 $w(G \setminus S)=4 > 3 = |S|$, 不满足定理1的必要性条件, 故由定理1知它不是H-图。

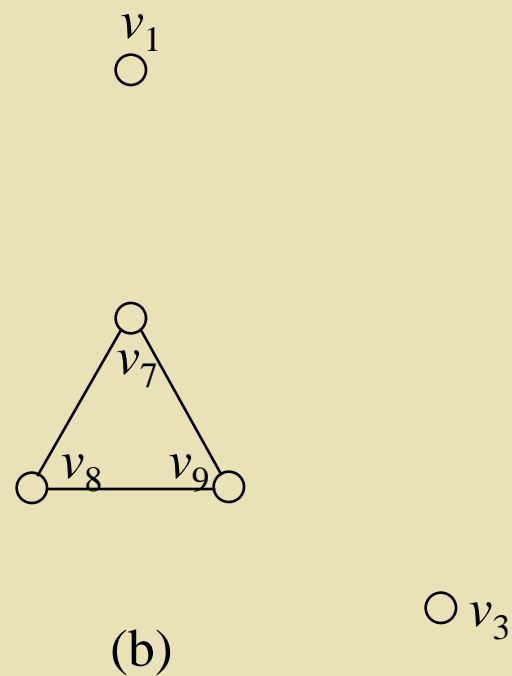
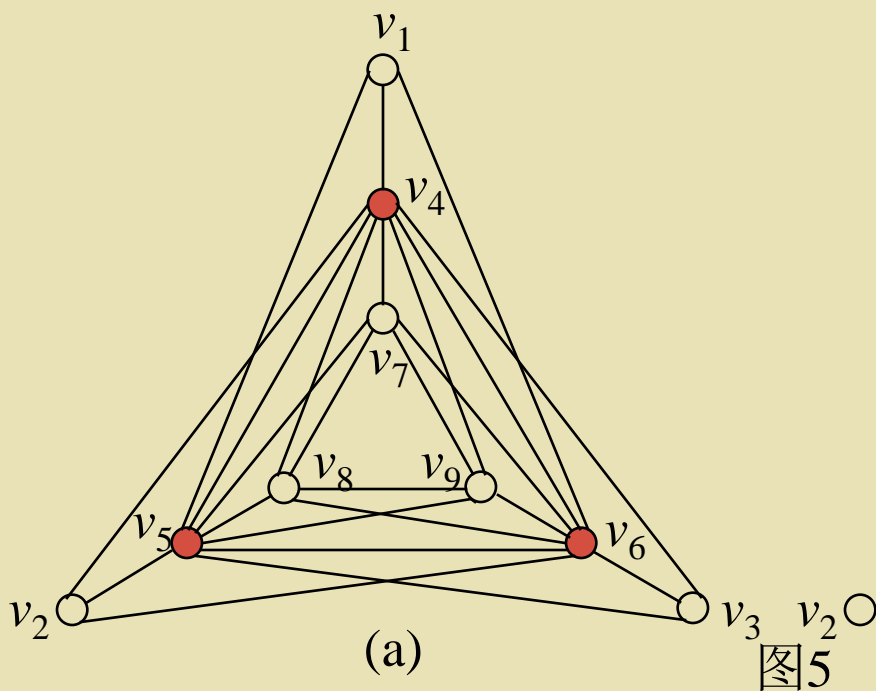


图5

离散数学

例2.图6(a)所示的Petersen图 P 满足定理1的必要性条件，但却不是H-图。

Chvatal在1973 年用穷举法证明了 P -图不是H-图。

但 P -图满足定理1的必要性条件。这点可利用 P -图的轴对称性，同样用穷举法来加以证明：

在 P -图中，若删去一个或两个结点，都不可能使原图不连通；

若删去三个结点，最多只能得到具有两个连通支的子图(一种情况如图6(b)所示)；

若删去四个结点，最多只能得到具有三个连通支的子图(一种情况如图6(c)所示)；

若删去五个或五个以上的结点，余下子图的结点数都不超过5，故其连通支数必不会超过5；

所以Petersen图满足定理1的必要性条件。

离散数学

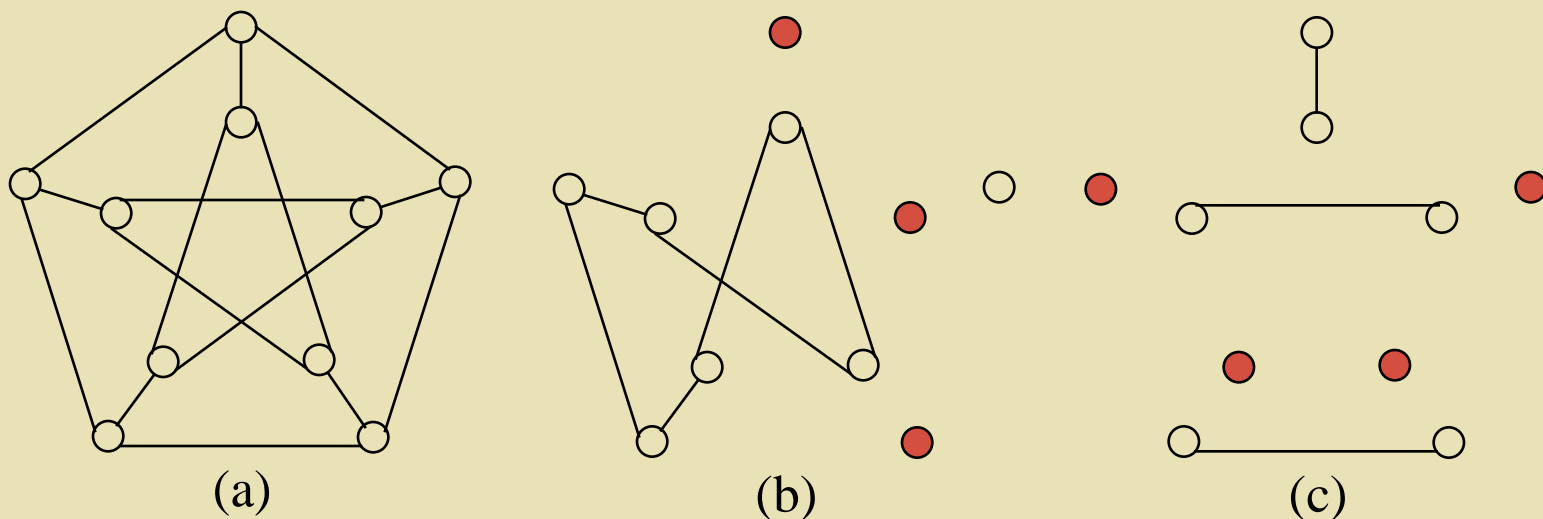


图6 P-图及其子图

注：●其余类似情况是对称的。

●判定无向图是H-图的必要条件除了定理1外，还有两个：

一个是标记法(着色法)。它是基于偶图理论的，所以我们放在§8.二分图来讲；

另一个是格林贝格-柯车列夫定理。它是基于平面图理论的，所以我们放在§9.平面图来讲。

离散数学

判定H-图 (H-圈)的充分性定理(充分性条件)

定理2.(D.König定理(充分性定理))

设 $G=(V, E)$ 是简单无向图, 且 $|V|=n$ 。则

对任意一对结点 $u, v \in V$, 均有 $\deg(u) + \deg(v) \geq n-1$ (*)

$\Rightarrow G$ 中必有一条H-路。

[证].先证: G 是连通的(采用反证法);

假若不然, 则在图 G 中至少有两个分图 G_1, G_2 (此间当然无边相连)。设 G_1 有 n_1 个结点, G_2 有 n_2 个结点。任取结点 $u_0 \in G_1, v_0 \in G_2$ 。

注意到: $n_1 + n_2 \leq n, \deg(u_0) \leq n_1 - 1, \deg(v_0) \leq n_2 - 1$, 从而

$$\deg(u_0) + \deg(v_0) \leq (n_1 - 1) + (n_2 - 1) = n_1 + n_2 - 2 \leq n - 2 < n - 1$$

这就与条件(*)矛盾了。故图 G 是连通的。

次证: 图 G 中必有一条H-路;

离散数学

König算法：（用此算法必可求得图G中的一条H-路）

No1.从G中任一结点 v 出发，走出一条初级路，并将此路的两端尽量延伸到尽头。不妨设此路为

$$P=(v_1, v_2, \dots, v_p), \quad |P|=p-1。$$

注：所谓将路的两端已延伸到尽头是指：

$$\neg(\exists v_0 \in V)((v_0, v_1) \in E \wedge (v_0, v_1) \notin P) \wedge \neg(\exists v_{p+1} \in V)((v_p, v_{p+1}) \in E \wedge (v_p, v_{p+1}) \notin P)。$$

即路 P 的两个端点和不在路 P 上的任何结点都不相邻。若有相邻，那么就立即向两端延伸路 P ，使它包含这些结点。也就是说：这里得到的初级路 P ，它的两端只与路中的某些结点相邻，而不与路 P 之外的任何结点相邻。

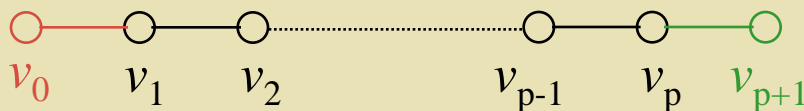


图7.没有延伸到尽头的路 P

No2.若 $p=n$ ，则此路 P 已是H-路。 **exit**；

否则 $p < n$ (故 $p \leq n-1$)，兹证明初级路 P 必可被改造成一初级圈 C ，且有 $|C| = |P| + 1$ 。

离散数学

No3.若端点 v_1 与端点 v_p 相邻，我们将边 (v_1, v_p) 并入路 P ，则立即得到一初级圈 $C = (v_1, v_2, \dots, v_p, v_1)$ ，并且 $|C| = |P| + 1$ 。
go to No5。

No4.若端点 v_1 与端点 v_p 不相邻，我们设与端点 v_1 相邻的结点有 k 个，不妨设它们是 $v_{i1}, v_{i2}, \dots, v_{ik}$ ，而且这些结点全都在路 P 上(否则，路没有走到尽头)。

这时，端点 v_p 必至少与 k 个结点 $v_{i1-1}, v_{i2-1}, \dots, v_{ik-1}$ 中的某一个相邻(是指结点 $v_{i1}, v_{i2}, \dots, v_{ik}$ 在路 P 上的前一个结点)。

假若不然，由于 $\deg(v_1) = k$ ，则 $\deg(v_p) \leq p - 1 - k$ (与端点 v_p 相邻的结点全都在路 P 上(否则，路没有走到尽头)。路 P 上共有 p 个结点，与结点 v_p 相邻的结点，应该去掉结点 v_p 自己以及已设不于它相邻的 k 个结点 $v_{i1-1}, v_{i2-1}, \dots, v_{ik-1}$ ，不会超过 $p - 1 - k$ 个结点)。于是，

$\deg(v_1) + \deg(v_p) \leq k + (p - 1 - k) = p - 1 < n - 1$ (因 $p < n$)
这与条件(*)矛盾。

离散数学

从而不妨设结点 v_p 与结点 v_{ij-1} ($1 \leq j \leq k$) 相邻, 我们就立即得到一个通过结点 v_1, v_2, \dots, v_p 的初级圈:

$C = (v_1, v_2, \dots, v_{ij-1}, v_p, v_{p-1}, \dots, v_{ij}, v_1)$, 且 $|C| = |P| - 1 + 2 = |P| + 1$ (如图8所示)。

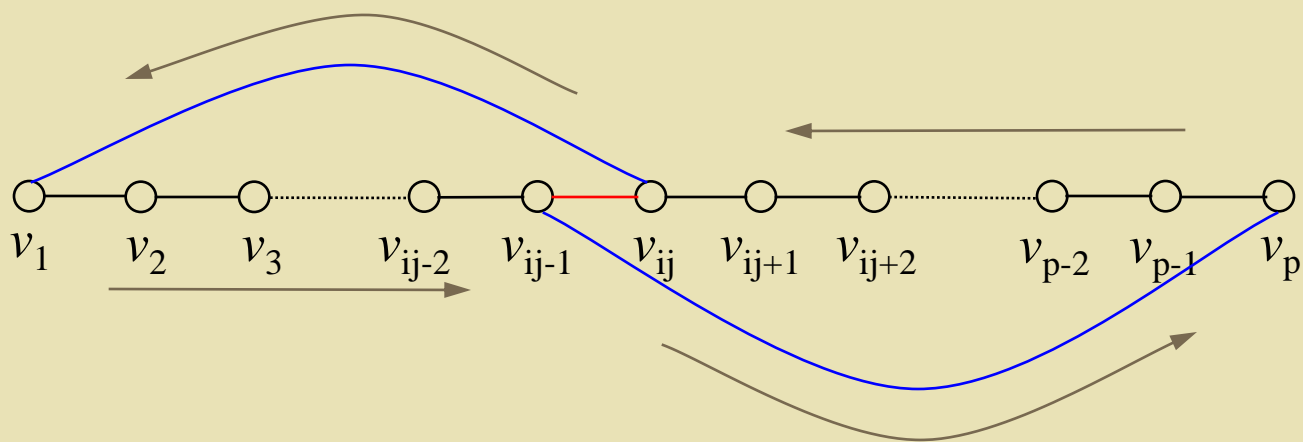


图8.初级路P改为初级圈C

注: 由N₀3, N₀4可知: 不管 v_1 是 v_p 否与相邻, 总可将N₀1中得到的初级路变为初级圈。

离散数学

N_o5.最后，兹证明初级圈C必可被改造成一初级路P(新)，且有 $|P|(\text{新}) = |C| = |P|(\text{老}) + 1$ 。

由于初级圈 $C = (u_1, u_2, \dots, u_p, u_1)$ (重新命名)
上只有p个结点且 $p < n$ ，故在圈C外应该还有图G的结点。
这些结点中必至少有一个(不妨设是w)与C上的某个结点
(不妨设是 u_k ($1 \leq k \leq p$)) 相邻(否则，图G不连通)，延伸 u_k 到w，

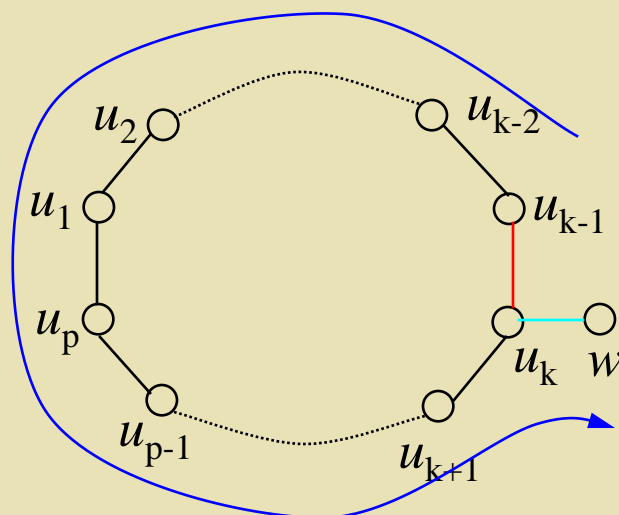


图9.初级圈 C 改为初级路P(新)

离散数学

并拆去 u_k 的一个邻边 (u_k, u_{k+1}) ，这样就得到了一条更长的初级路： $P = (u_{k-1}, u_{k-2}, \dots, u_1, u_2, u_p, u_{p-1}, \dots, u_k, w)$ ，且

$$|P|(\text{新}) = |C| - 1 + 1 = |C| = |P|(\text{老}) + 1$$

(如图9所示)。

将P的两端延伸到尽头， **go to N_o2**。

注：•*König*算法一定會在有限步停止。因为算法每进入循环一次，初级路P上结点的个数都会至少增一，而任何图G中结点的个数都是有限的；

•*König*算法的操作实际上是三步：

(1)任走出一条初级路P，并延伸到尽头；

(2)改初级路P为初级圈C；

(3)改初级圈C为初级路P(新)，并延伸到尽头；路长至少增1。

•容易看出，定理2中的条件(*)对图中是否存在着H-路是充分的而不是必要的。

离散数学

如图10中所示的六边形图 G ，虽然其任意两个结点度数之和 $=4 < 5 = 6 - 1$ ，不满足定理2中的条件(*)，但 G 中显然有H-路存在(实际上 G 是H-图,有H-圈)。

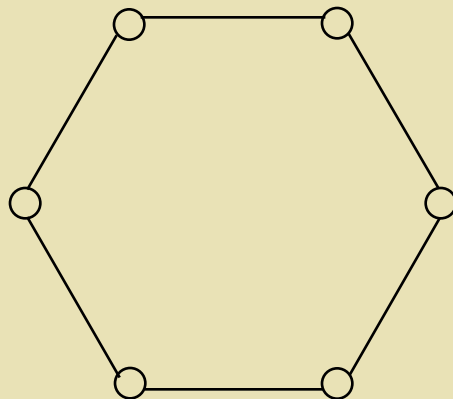


图10

定理3.(D·König定理(充分性定理))

设 $G=(V, E)$ 是简单无向图，且 $|V|=n$ 。则

对任意一对结点 $u, v \in V$ ，均有 $\deg(u) + \deg(v) \geq n$ (**)
 $\Rightarrow G$ 必是H-图。

离散数学

[证].图G若满足条件(**), 则显然满足条件(*), 故定理2成立。因此图G中必存在着一条H-路P, 不妨设:

$$P=(v_1, v_2, \dots, v_n)。$$

现在我们来证图G中必含有H-圈:

(1)若端点 v_1 与端点 v_n 相邻, 我们将边 (v_1, v_n) 并入路P, 则立即得到一H-圈: $C=(v_1, v_2, \dots, v_n, v_1)$;

(2)若端点 v_1 与端点 v_n 不相邻, 我们设与端点 v_1 相邻的结点有 k 个, 不妨设它们是 $v_{i1}, v_{i2}, \dots, v_{ik}$, 这些结点全都在路P上(因为路P是H-路, 包含了图G中的所有结点)。

这时, 端点 v_n 必至少与 k 个结点 $v_{i1-1}, v_{i2-1}, \dots, v_{ik-1}$ 中的某一个相邻(是指结点 $v_{i1}, v_{i2}, \dots, v_{ik}$ 在路P上的前一个结点)。

假若不然, 由于 $\deg(v_1)=k$, 则 $\deg(v_n) \leq n-1-k$ (与端点 v_n 相邻的结点全都在路P上(因为路P是H-路)。路P上共有 n 个结点, 与结点 v_n 相邻

离散数学

的结点，应该去掉结点 v_n 自己以及已设不于它相邻的 k 个结点 $v_{i1-1}, v_{i2-1}, \dots, v_{ik-1}$ ，不会超过 $n-1-k$ 个结点)。于是，

$$\deg(v_1) + \deg(v_n) \leq k + (n-1-k) = n-1 < n$$

这与条件(**)矛盾。

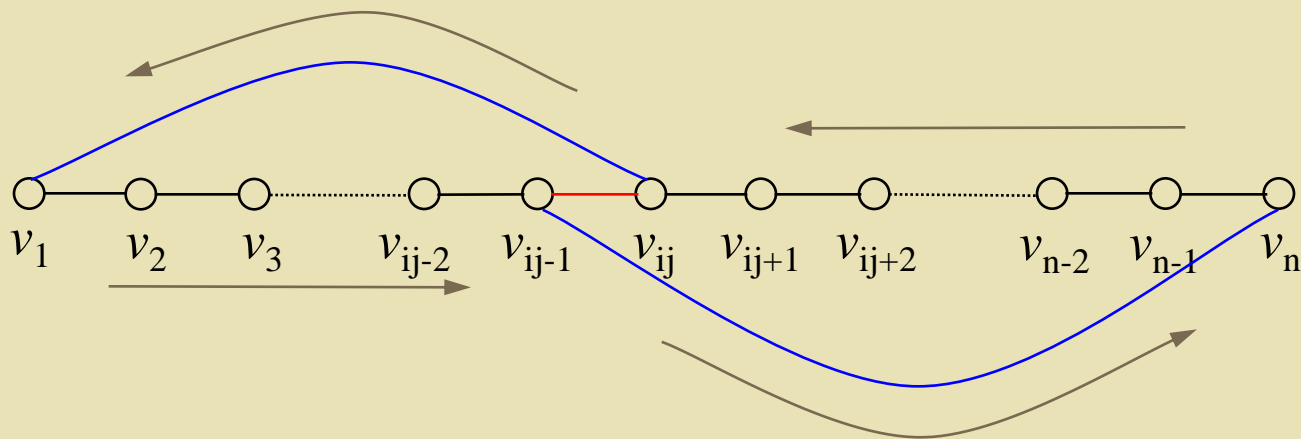


图11

从而不妨设结点 v_n 与结点 v_{ij-1} ($1 \leq j \leq k$) 相邻，我们就立即得到一H-圈： $C = (v_1, v_2, \dots, v_{ij-1}, v_n, v_{n-1}, \dots, v_{ij}, v_1)$ (如图11所示)。

离散数学

根据(1)和(2)可知：图 G 中必含有一 H -圈，故图 G 必是 H -图。

注：●定理3证明中的(1)和(2)实际上是 $König$ 算法的 N_3 和 N_4 步的翻版；

● $König$ 在定理3证明中的证明思想，据传来源于英国亚瑟王的谋士摩尔林，在解决著名的“圆桌会议”座位排名方案时所用的方法：相传亚瑟王有 $2n$ 名骑士，每名骑士都有 $n-1$ 名骑士是他的仇人。而大谋士摩尔林每当在亚瑟王召开“圆桌会议”时，却都能够预先排定那张享有盛名的圆桌的座位名次，以便使每名骑士都不与他的仇人相邻。

●定理2实际上是用到了捋路法和蹦圈法；

定理3实际上是用到了蹦圈法。

问题：你能给出摩尔林在解决“圆桌会议”座位排名方案时所采用的方法吗？并证明你的结论。

离散数学

推论1.(G·A·Dirac定理(1952) (充分性定理))

设 $G=(V, E)$ 是简单无向图, 且 $|V|=n$ 。则

对任意结点 $v \in V$, 均有 $\deg(v) \geq \frac{n}{2}$ (***)

$\Rightarrow G$ 必是H-图。

[证].图 G 满足条件(***) \Rightarrow 图 G 满足条件(**)

\Rightarrow 图 G 必是H-图 (根据定理3)。

定理4.(充分性定理)

设 $G=(V, E)$ 是简单无向图, 且 $|V|=n$, $|E|=m$ 。则

$m \geq \frac{1}{2}(n-1)(n-2)+2$ (4*)

$\Rightarrow G$ 必是H-图。

[证].省略。

离散数学

提示：图G满足条件(4*) \Rightarrow 图G满足条件(**) (采用反证法)
 \Rightarrow 图G必是H-图 (根据定理3)。

注：●定理4是第一个用边数作为考虑H-图充分条件依据的定理；而 *König* 定理等都是用结点的度数作为考虑H-图充分条件的依据；

●H-图充分条件无论是用结点的度数，还是用边数，都是说当图的连通性强到一定程度，就能保证图中必含有H-圈。图必是H-图。

定义2.图的闭包(closure)

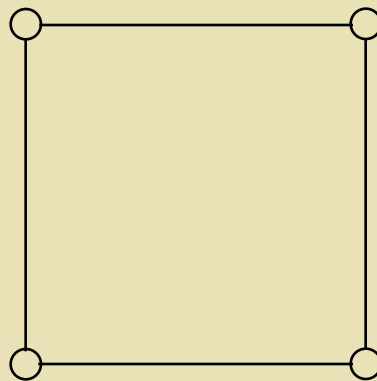
一个简单无向图 $G=(V,E)$ (且 $|V|=n$)的闭包是一个图 $G^c=(V,E^c)$ 。其中：边集 E^c 的递归定义如下

$$E^c := E ;$$

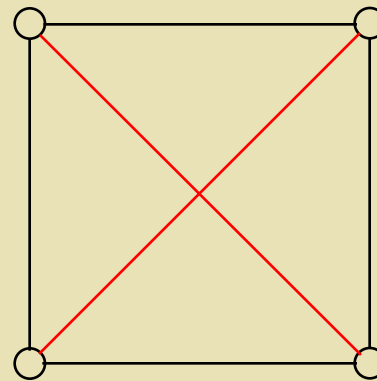
$$E^c := E^c \cup \{(u,v) \mid (u,v) \notin E^c \wedge \deg_{G^c}(u) + \deg_{G^c}(v) \geq n\} .$$

例3.图12给出了几个图的闭包及其产生过程。

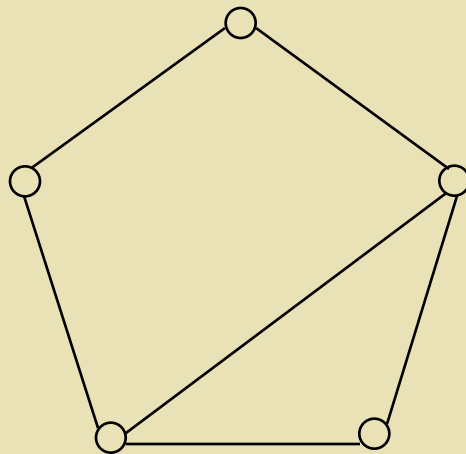
离散数学



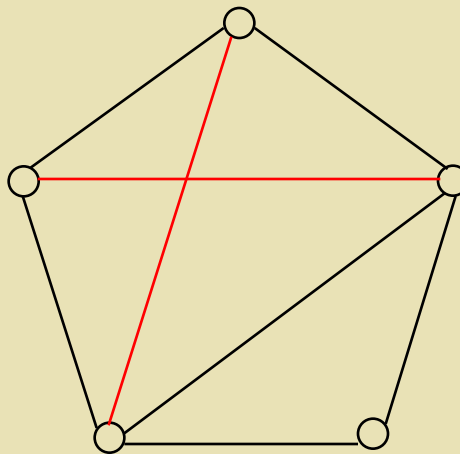
(a) 图 G_1



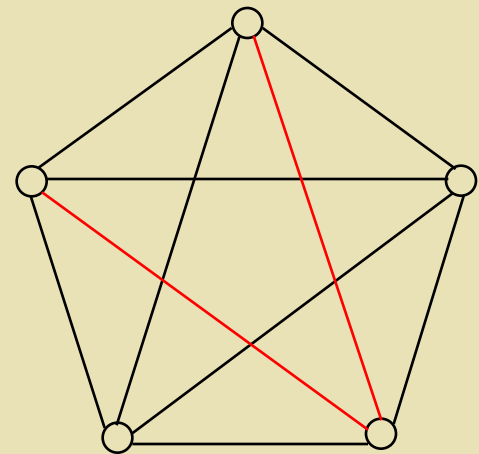
(a) 图 $G_1^c = K_4$



(a) 图 G_2



(b)



(c) $G_2^c = K_5$

离散数学

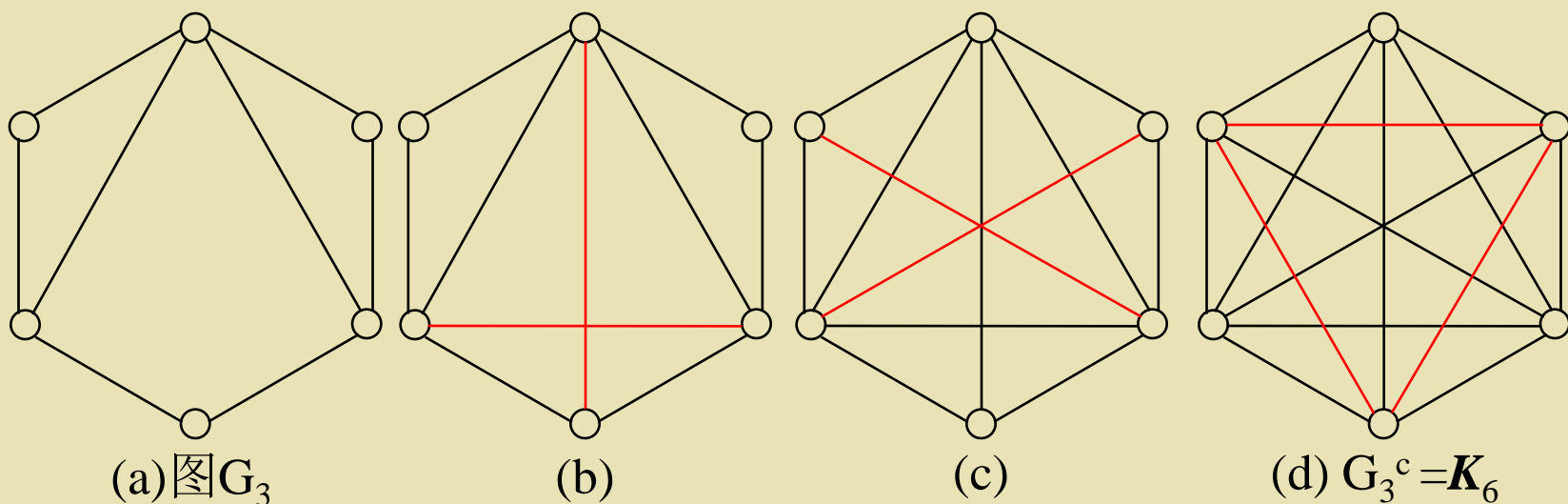


图12

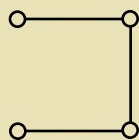


图13. 图 G 的闭包

$$G^c = G$$

- 注：
- 图的闭包未必都是完全图；例如，下图的闭包不是完全图。
 - 图的闭包是唯一存在的。

离散数学

定理5.(Bondy及Chvatal定理(1969))

简单无向图 G 是 H -图 \Leftrightarrow 图 G 的闭包 G^c 是 H -图。

[证]. \Rightarrow)方向是显然的;

\Leftarrow)方向的证明省略。留给读者。

提示：只需证明如下的一步性引理即可得证充分性：

引理1.对于简单无向图 G ，且 $|V|=n$ 。则

图 G' 是 H -图 \Rightarrow 图 G 是 H -图。

其中： $G'=(V,E')$ ， $E'=E \cup \{(u_0,v_0)\}$

(这里： $(u_0,v_0) \notin E \wedge \deg_G(u_0) + \deg_G(v_0) \geq n$)

(证明方法参见定理3的证明)。

注：定理5好似已经得到判定 H -图的充要条件，其实不然。

因为它只不过是判定一个图 G 是 H -图转化为判定它的闭包图 G^c 是 H -图；而判定闭包图 G^c 是 H -图的充要条件仍未得到。

离散数学

◆有向图之Hamilton问题

下面我们来讨论一类一定含有H-路的有向图——竞赛图。

定义3.竞赛图(race-graph)

无向完全图的定向图称为竞赛图。

注：竞赛图中任何两个结点间都有且仅有一条有向边。即

$$(\forall u \in V)(\forall v \in V)((u, v) \in E \wedge (v, u) \notin E) \vee ((u, v) \notin E \wedge (v, u) \in E)。$$

例4.图14给出了三个4个结点的竞赛图。

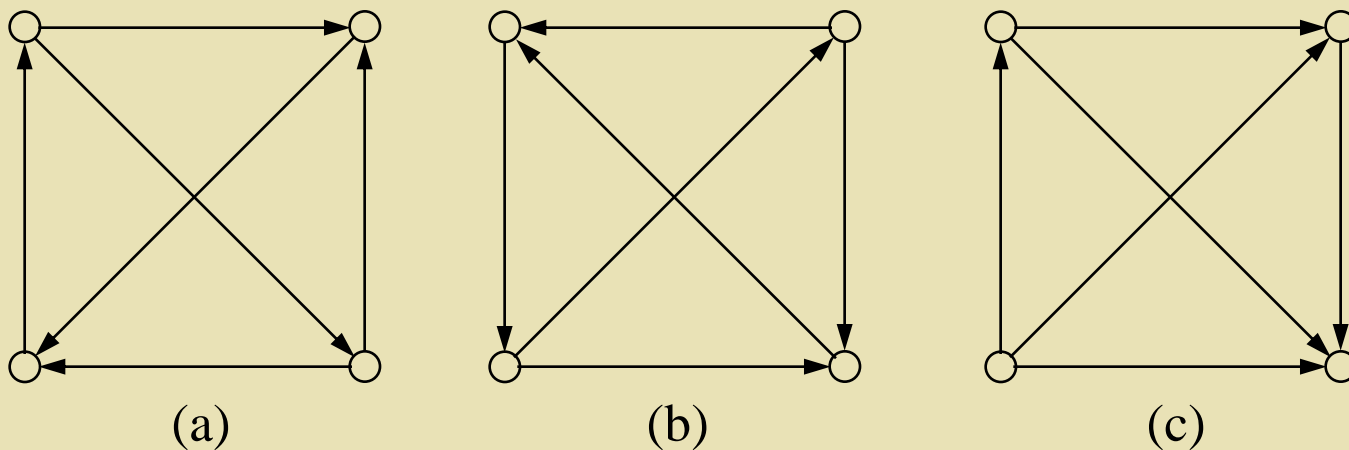


图14

离散数学

定理6.(Redei(1934))

设 $G=(V,E)$ 是竞赛图, 且 $|V|=n$ 。则

竞赛图 G 中必存在着一条有向H-路。

[证].(采用翻边法)

算法: 从竞赛图 G 中求得一条H-路

No1.从 G 中任意一点出发, 走出一条有向初级路 P , 并将其两端延伸到尽头。设此有向初级路 $P=(v_1, v_2, \dots, v_p)$, 其路长 $|P|=p-1$;

No2.若 $p=n$, 则初级路 P 就是竞赛图 G 中的一条有向H-路。 **exit**;

No3.若 $p \neq n$, 则竞赛图 G 中必存在着初级路 P 外的一个结点 w , 使得下式成立:

$$(\exists k)(1 \leq k \leq p-1)((v_k, w) \in E \wedge (w, v_{k+1}) \in E)$$

(如图15所示)。

将结点 w 插入初级路 P 中, 我们就得到一条新的更长的⁵⁶

离散数学

初级路:

$P'=(v_1, v_2, \dots, v_k, w, v_{k+1}, \dots, v_p)$, $|P'|=|P|-1+2=|P|+1$
，并将其两端延伸到尽头，仍将其记为P。 **go to No2** 。

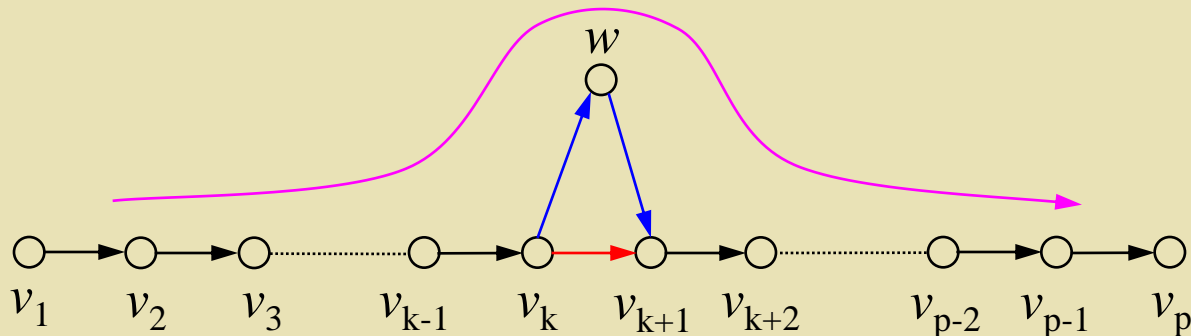


图15

否则，若不存在这样的结点 w ，即

$$\begin{aligned} & \neg(\exists k)(1 \leq k \leq p-1)((v_k, w) \in E \wedge (w, v_{k+1}) \in E) \\ \Leftrightarrow & (\forall k)(1 \leq k \leq p-1) \neg((v_k, w) \in E \wedge (w, v_{k+1}) \in E) && \text{(量词对偶)} \\ \Leftrightarrow & (\forall k)(1 \leq k \leq p-1)(\neg(v_k, w) \in E \vee \neg(w, v_{k+1}) \in E) && \text{(de Morgan律)} \\ \Leftrightarrow & (\forall k)(1 \leq k \leq p-1)((v_k, w) \in E \Rightarrow (w, v_{k+1}) \notin E) && (1^*) \text{ (联结词归约律)} \\ \Leftrightarrow & (\forall k)(1 \leq k \leq p-1)((w, v_{k+1}) \in E \Rightarrow (v_k, w) \notin E) && (2^*) \text{ (联结词归约律)} \end{aligned}$$

于是，我们可得如下两个矛盾：

离散数学

(1) 若 $(w, v_1) \in E$, 则这与结点 v_1 是路 P 的尽头矛盾!

否则 $(w, v_1) \notin E \Rightarrow (v_1, w) \in E$

(根据竞赛图定义的注)

$\Rightarrow (w, v_2) \notin E$

(根据(1*) 式)

$\Rightarrow (v_2, w) \in E$

(根据竞赛图定义的注)

$\Rightarrow (w, v_3) \notin E$

(根据(1*) 式)

$\Rightarrow (v_3, w) \in E$

(根据竞赛图定义的注)

$\Rightarrow \dots \dots$

$\dots \dots$

$\Rightarrow (w, v_p) \notin E$

(根据(1*) 式)

$\Rightarrow (v_p, w) \in E$

(根据竞赛图定义的注)

这又与结点 v_p 是路 P 的尽头矛盾!

(2) 若 $(v_p, w) \in E$, 则这与结点 v_p 是路 P 的尽头矛盾!

否则 $(v_p, w) \notin E \Rightarrow (w, v_p) \in E$

(根据竞赛图定义的注)

$\Rightarrow (v_{p-1}, w) \notin E$

(根据(2*) 式)

$\Rightarrow (w, v_{p-1}) \in E$

(根据竞赛图定义的注)

$\Rightarrow (v_{p-2}, w) \notin E$

(根据(2*) 式)

$\Rightarrow (w, v_{p-2}) \in E$

(根据竞赛图定义的注)

$\Rightarrow \dots \dots$

$\dots \dots$

离散数学

$$\Rightarrow (v_1, w) \notin E$$

(根据(2*) 式)

$$\Rightarrow (w, v_1) \in E$$

(根据竞赛图定义的注)

这又与结点 v_1 是路P的尽头矛盾！

注：●此算法一定会在有限步停止。因为算法每进入循环一次，初级路P上结点的个数都会至少增一，而任何图G中结点的个数都是有限的；

●竞赛图概念源于体育比赛。竞赛图用来表示单循环赛的战绩；其有向H-路用于决定比赛的名次排序(排序不是唯一的)；但是若加强到有向H-圈，则不能决定比赛名次，需要重赛。

●有向H-图一定是强连通的；但强连通图未必是有向H-图；

●有向图是有向H-图的判定定理也有许多，不过都很复杂，我们不再论述；有兴趣者，可参见清华马仲蕃等人合著之《运筹学讲义》(上)。

离散数学

◆ 货郎担问题(The Travelling Salesman Problem)

货郎担问题又称为旅行商问题。一个货郎需穿过已知的若干村镇一次且仅一次，然后回到出发点，问应如何选择行动路线，使其总的行程最短？

抽象成图论语言：就是在带权图 $G=(V,E,w)$ 中寻求最优H-圈问题。

这里图 G 的结点代表村镇；边代表两村镇间的(直达)路程；边上的权代表两村镇间路程的长度。寻求穿过每个村镇一次且仅一次，然后回到出发点的行动路线，就是要在图 G 中寻求穿过每个结点一次且仅一次的初级圈——H-圈；使行动路线的总行程最短，就是要使H-圈的圈长(圈上边的总权和)达到最小(最优)。

离散数学

因此，带权图 $G=(V,E,w)$ 的货郎担问题有解 C_0 和 $w(C_0)$ ，当且仅当

1° C_0 是图 G 的一条H-圈(因此图 G 必须是H-图);

2° H-圈 C_0 的圈长 $w(C_0)=\sum_{(u,v)\in C_0} w(u,v)$ 达到最小(最优)。

其中： C_0 我们称为最优H-圈，或称 C_0 是最优的；圈长 $w(C_0)$ 称为最优解。

注：●求解货郎担问题是很困难的，迄今为止，人们还未得到经典的完全求解算法。

因为首先H-图的判定问题从前边知就没有得到彻底解决，而它又是解决货郎担问题的首要条件；

其次，就是对有些肯定有H-圈的图(比如完全图)，求其最优解 C_0 和 $w(C_0)$ 仍是很困难的。即是使用大型超高速电子计算机许多有名的货郎担问题也没能得到完全解决；

●现在人们在经典方法(即传统方法)上仅是得到了一些近似求解算法。下面我们给出两种近似算法。

离散数学

求解货郎担问题的近似算法:

(一)近邻法

No1.在 G 中任选一个结点 v_{i1} ，从 v_{i1} 出发，寻找距 v_{i1} 最近的一个结点 v_{i2} ，得到一条初级路 $C:=(v_{i1}, v_{i2})$ ， $j:=2$ ；

No2.从 v_{ij} 出发，在 $V \setminus \{v_{i1}, v_{i2}, \dots, v_{ij}\}$ 中，寻找一个距 v_{ij} 最近的结点 v_{ij+1} ，并将 C 延至 v_{ij+1} ，即 $C:=C \cup \{(v_{ij}, v_{ij+1})\}$ ， $j:=j+1$ ；

No3.若 $j=n$ ，则将 C 从 v_{in} 延至 v_{i1} ，得到一条H-圈

$C:=(v_{i1}, v_{i2}, \dots, v_{in}, v_{i1})$

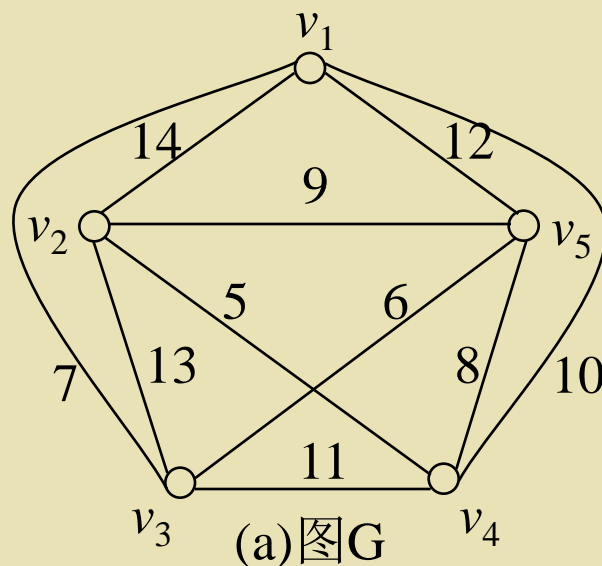
，算法终止，**exit**；否则 $j < n$ ，**go to** No2。

离散数学

例5. 在图16(a)所示的图G中寻求(近似)最优H-圈C。

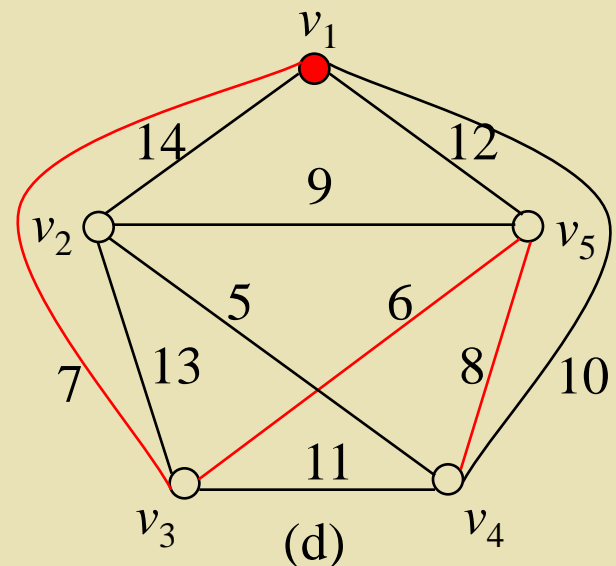
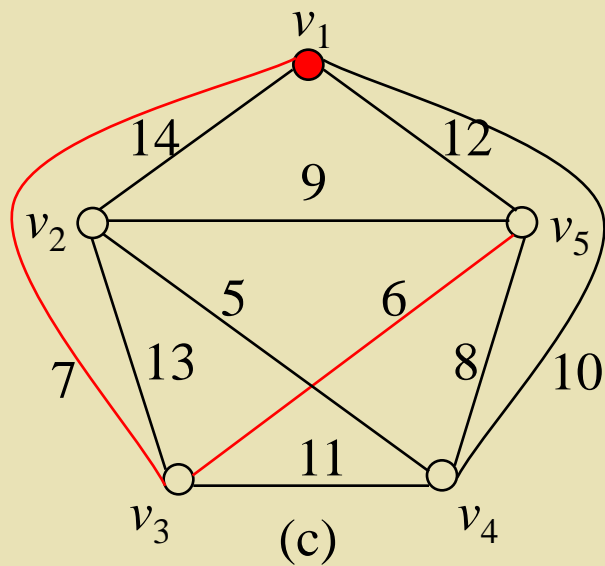
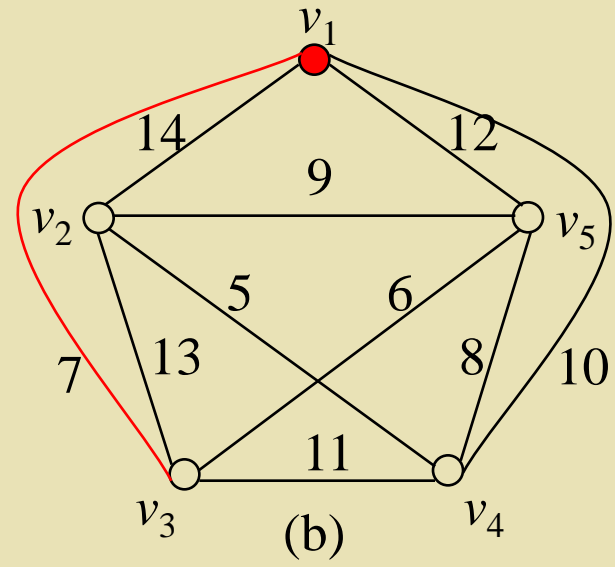
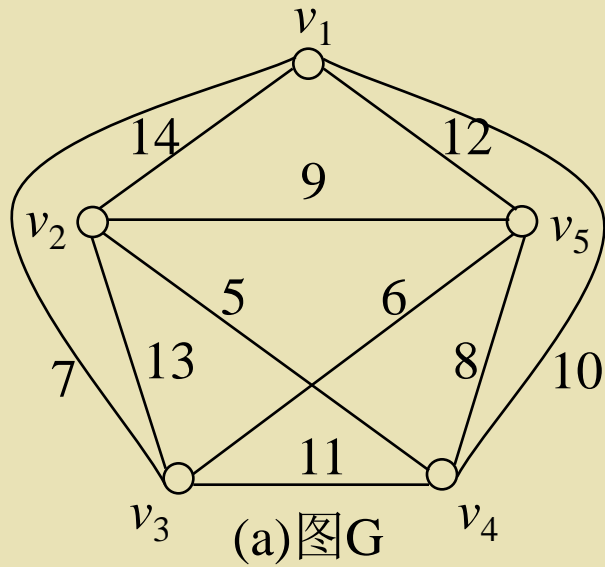
图G实际上是五个结点的完全图 K_5 ，故必有H-圈。

选择起点 v_1 。采用近邻法，其步骤如图16(b)-(f)所示，可以得到一条H-圈 $C=(v_1, v_3, v_5, v_4, v_2, v_1)$ ，圈长 $w(C)=40$ 。



注：事实上，下面我们用交换法可求得一如图18(b)中所示的H-圈C，其圈长为 $w(C)=37$ 。由此可知：在带权完全图中，近邻法仅提供了一个求最优H-圈的近似算法。

离散数学



离散数学

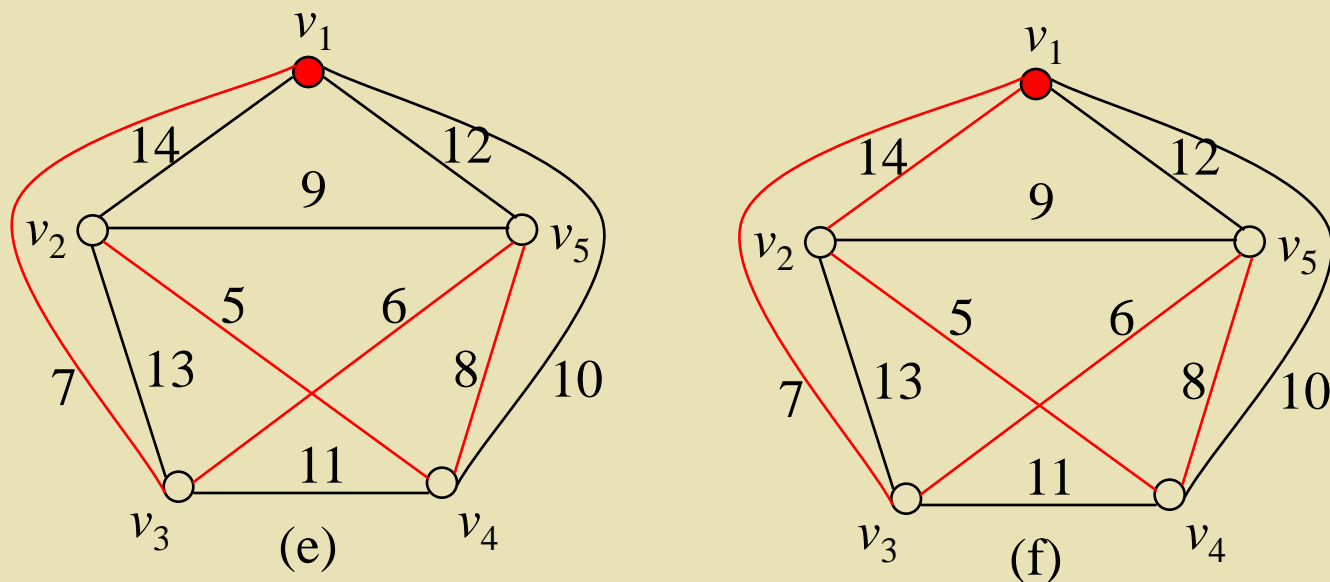


图16

(二)交换法(Lin(1965);Held, Karp(1970,1971))

交换法就是两两交换的启发式算法:

No1.在图G中任找一条H-圈(可用近邻法)

$$C:=(v_1, v_2, \dots, v_i, v_{i+1}, \dots, v_j, v_{j+1}, \dots, v_n, v_1) \quad ;$$

离散数学

N₀2. 若 $\exists v_i, v_{i+1}, v_j, v_{j+1} \in V, 1 \leq i < i+1 < j < j+1 \leq n$, 使得
$$w(v_i, v_j) + w(v_{i+1}, v_{j+1}) < w(v_i, v_{i+1}) + w(v_j, v_{j+1})$$

，则令 $C := (v_1, v_2, \dots, v_i, v_j, v_{j-1}, \dots, v_{i+1}, v_{j+1}, v_{j+2}, \dots, v_n, v_1)$
(参见图17);

N₀3. 若没有上述情况, **exit** ; 否则, 还有上述情况, **go to** N₀2 。

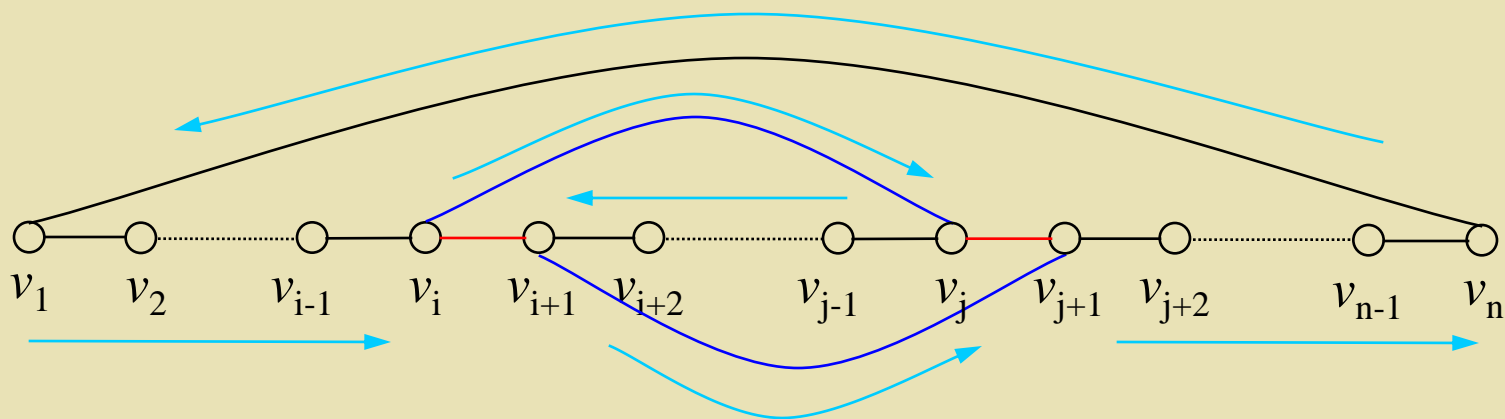


图1 7

注：事实上，交换法在N₀2用了蹦圈法。

离散数学

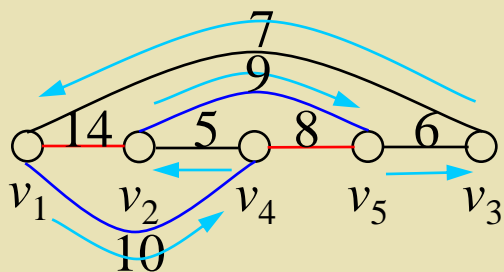
例6. 在图16(a)所示的图G中寻求(近似)最优H-圈C。

在例5中已用近邻法求出了一H-圈 $C=(v_1, v_3, v_5, v_4, v_2, v_1)$ ，我们现在对此H-圈使用交换法。因为

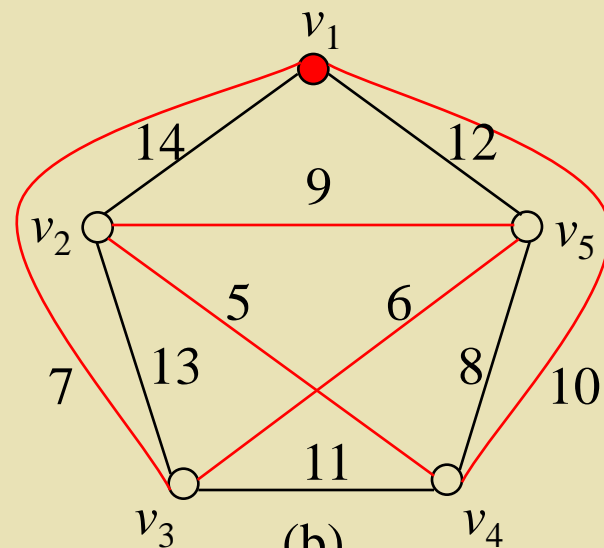
$$w(v_1, v_4) + w(v_2, v_5) = 10 + 9 = 19 < 22 = 14 + 8 = w(v_1, v_2) + w(v_4, v_5)$$

于是(近似)最优H-圈 $C=(v_1, v_4, v_2, v_5, v_3, v_1)$ ，

圈长 $w(C) = 10 + 5 + 9 + 6 + 7 = 37$ 。



(a)



(b)

图18



离散数学

注：●求解货郎担问题的非经典(非传统)近似算法属于遗传性算法——退火算法，在计算大尺度问题时很有效，但计算量非常巨大，一般计算机很难承受；

●求解货郎担问题的非经典(非传统)有效性算法是生物基因性算法，能够彻底解决货郎担问题的判定及最优解的计算。现在人们有望可研制出基因计算机；

●另外据说人们有望可研制出光纤计算机和量子计算机，它们都有可能解决过去用传统方法人们不可能解决的许多数学、物理和工程问题。

离散数学

§ 8.二分图

- 二分图的定义
- 二分图的理论
- 二分图的判定方法一标号法(着色法)
- H-图(H-圈)及H-路的必要性判定方法
一标号法(着色法)
- 最大匹配
- Hall定理
- 匈牙利方法

离散数学

§ 8.二分图(二部图 偶图)

偶图来源于相异代表系问题。

设有 m 个人，分属 n 个组织，每个组织都有若干个人(不空)。现要在这 m 个人中选出各个组织的代表，选举及代表们的限制性条件是：

- (1)每个组织只能有一个代表；
- (2)每个组织的代表必须是该组织的成员；
- (3)每个人最多只能担任一个组织的代表(不能兼任)。

问题是在什么条件下该问题有解；并给出求解的算法。

这个问题就是组合学上有名的相异代表系(SDR——system of distinct representatives)问题。

离散数学

解决这类问题一般性步骤是：

- (1)选择合适的数学语言以建立该问题的数学模型；
- (2)利用此数学模型以寻求该问题解的存在性条件；
- (3)给出该问题的求解算法以求解。

我们现在选择图论语言来建立相异代表系问题的数学模型。相异代表系问题抽象成图论语言就是一个无向图 $G=(V,E)$ ，其中： $V=V_1\cup V_2$ ， $V_1\cap V_2=\emptyset$ ， $E\subseteq V_1\times V_2$ 。

这里：结点集 V_1 中的结点代表人(成员)；

结点集 V_2 中的结点代表组织；

边集 E 中的边代表成员与组织间的属于关系；

若某个人是某个组织的成员，则就在代表该人和那个组织的两个结点间连一条边。否则无边相连。

于是我们就得到了用图论方法所表示的相异代表系问题的数学模型。

离散数学

例1. 相异代表系(SDR)问题及其数学模型的一个实例

设有相异代表系问题如下：有9个人，分属7个组织。

人员集合 $M=\{m_1, m_2, m_3, m_4, m_5, m_6, m_7, m_8, m_9\}$;

组织集合 $S=\{S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6, S_7\}$;

其中： $S_1=\{m_1, m_2, m_3\}$, $S_2=\{m_1, m_2, m_3\}$, $S_3=\{m_2, m_3, m_4, m_5\}$,
 $S_4=\{m_4, m_5, m_7\}$, $S_5=\{m_6, m_8, m_9\}$, $S_6=\{m_5, m_8\}$, $S_7=\{m_6, m_9\}$ 。

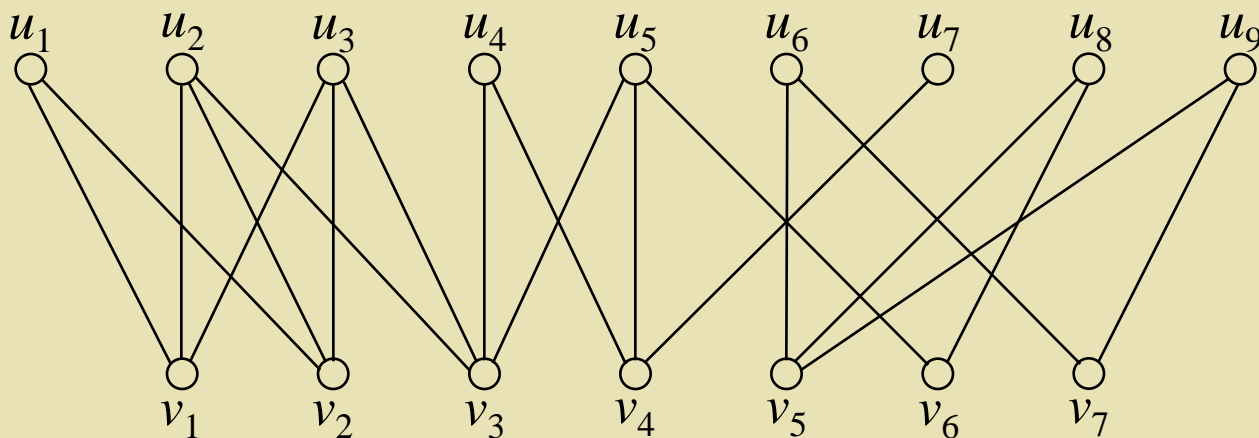


图1

离散数学

例1. 相异代表系(SDR)问题及其数学模型的一个实例

设有相异代表系问题如下：有9个人，分属7个组织。

人员集合 $M=\{m_1, m_2, m_3, m_4, m_5, m_6, m_7, m_8, m_9\}$;

组织集合 $S=\{S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6, S_7\}$;

其中: $S_1=\{m_1, m_2, m_3\}$, $S_2=\{m_1, m_2, m_3\}$, $S_3=\{m_2, m_3, m_4, m_5\}$,

$S_4=\{m_4, m_5, m_7\}$, $S_5=\{m_6, m_8, m_9\}$, $S_6=\{m_5, m_8\}$, $S_7=\{m_6, m_9\}$ 。

容易看出 $\text{SDR}=(m_2, m_3, m_4, m_5, m_6, m_8, m_9)$ 是解之一。

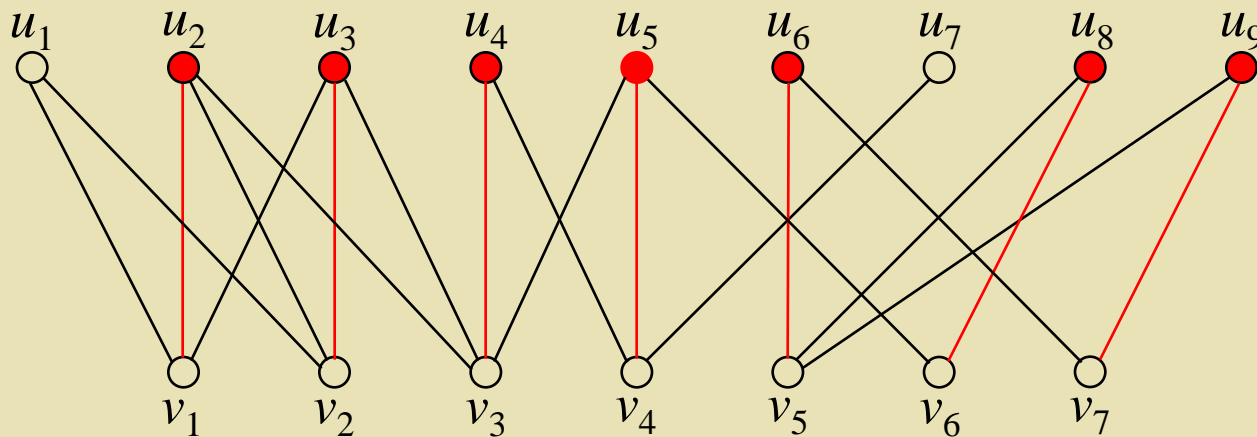


图1

离散数学

因此其数学模型是一个无向图 $G=(V,E)$ 。

其中： $V=V_1\cup V_2$ ， $V_1=\{u_1,u_2,u_3,u_4,u_5,u_6,u_7,u_8,u_9\}$ ，

$V_2=\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5,v_6,v_7\}$ ，显然有 $V_1\cap V_2=\emptyset$ ，
 $E\subseteq V_1\times V_2$ 。其图示如上图1所示。

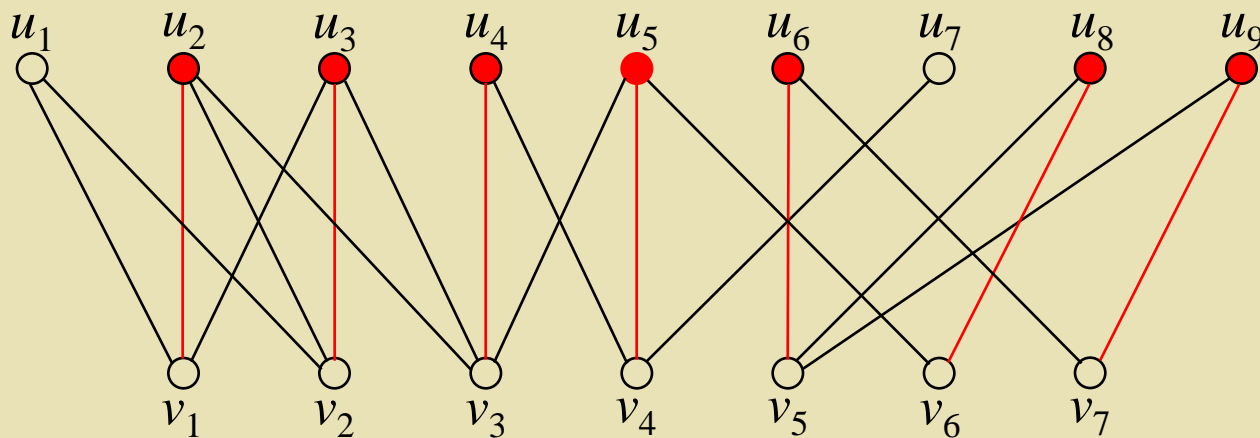


图1

- 注：
- V_1 中每个结点的度数代表每个人参加了多少个组织；
 - V_2 中每个结点的度数表示每个组织有多少个成员。
 - 这个图的特点是：各成员之间无关系；各组织之间无关系；只有成员与组织之间才可能有关系；
 - 具有以上特点的无向图就是我们这节要定义的偶图概念。

离散数学

定义1.偶图(bipartite graph 或 paar graph)

设 $G=(V,E)$ 是简单无向图。若存在着结点集 V 的一个划分 $\{V_1,V_2\}$ (因此有 $V=V_1\cup V_2$, $V_1\cap V_2 = \emptyset$), 使得边集 $E\subseteq V_1\times V_2$, 则称 G 是偶图(或二分图、二部图)。

偶图一般记为 $G=(V_1,V_2,E)$ (甚或 $G=(V_1,E,V_2)$)。

同时称 V_1 , V_2 是 V 的互补结点子集。

当 $E=V_1\times V_2$ 时, 称 G 是完全二分图。这时, 若 $|V_1|=m$, $|V_2|=n$, 则记完全二分图为 $K_{m,n}$ 。

离散数学

例2. 完全二分图 $K_{3,3}$

图2所示的图 $G=(V_1, V_2, E)$, 其中: $V_1=\{v_1, v_2, v_3\}$

$$V_2=\{v_4, v_5, v_6\}, \quad E=V_1 \times V_2$$

是一个完全二分图, 记为 $K_{3,3}$ 。

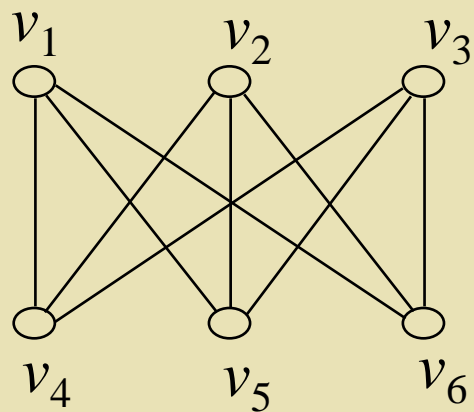


图2

离散数学

例3. 著名的Petri-网是一种有向多重二分图。

其一类结点称为库所(places), 一类结点称为变迁(transitions); 仅在库所和变迁间可能存在着多重有向边。这类Petri-网通常称为P/T-系统。其一个例图如下图3。

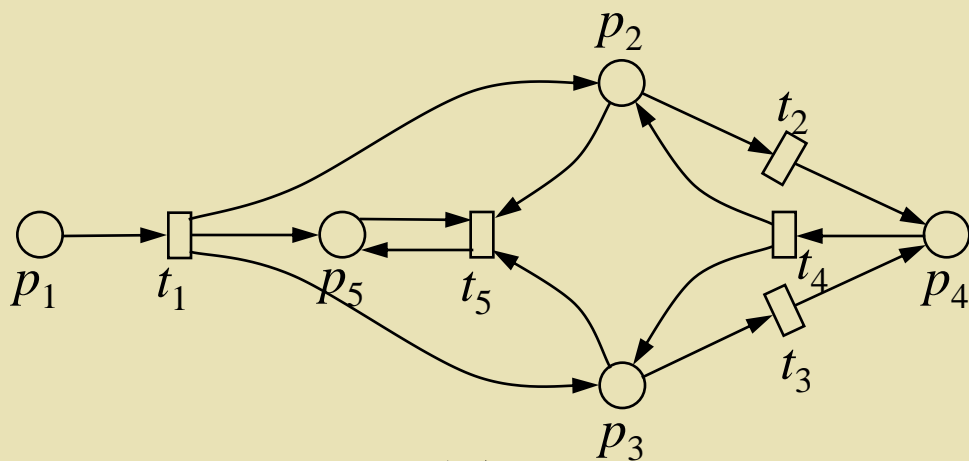


图3

离散数学

注：●1962年联邦德国(西德)Carl Adam Petri在他的著名博士论文《用自动机通信》中首次使用网状结构模拟通信系统。这种系统模型后来即以Petri -网为名而流传和发展；

●Petri -网理论可用来解决计算机操作系统，程序设计中的并发，并行，分布等概念的描述、表示、分析及求解。例如，操作系统中特别有名的“五个哲学家进餐问题”和“生产者-消费者问题”即可用Petri -网理论来描述及分析；

●Petri并进一步提出突破“光速限制-即速度损失问题”。他认为这个问题的理论解决之道是Petri -网理论。

离散数学

定理1. 设 $G=(V,E)$ 是简单无向图。那么

G 是偶图 $\Leftrightarrow G$ 中每个圈都是偶圈(长度为偶数的圈)
 $\Leftrightarrow G$ 中不含奇圈(长度为奇数的圈)。

[证].先证 \Rightarrow :

由于 G 是偶图, 故有划分 $V=V_1 \cup V_2$, $V_1 \cap V_2 = \emptyset$,
 $E \subseteq V_1 \times V_2$ 。即 $G=(V_1, V_2, E)$ 。现在设 C 是偶图 G 中的任意
一条长度为 l 的圈 $C=(v_1, v_2, v_3, \dots, v_{l-1}, v_l, v_1)$, 我们来证 l
为偶数。

事实上, 不妨设 $v_1 \in V_1$, 观察圈 C 中的各结点, 由偶图
的定义, 显然有:

$$v_1 \in V_1 \Rightarrow v_2 \in V_2 \Rightarrow v_3 \in V_1 \Rightarrow \dots \Rightarrow v_{l-1} \in V_1 \Rightarrow v_l \in V_2 \Rightarrow v_1 \in V_1$$

(由于 $v_1 \in V_1 \Rightarrow v_2 \in V_2 \Rightarrow v_{l-1} \in V_1 \Rightarrow \dots$)

离散数学

从而: $v_1, v_3, v_5, \dots, v_{l-1} \in V_1$

$v_2, v_4, v_6, \dots, v_l \in V_2$

这样, $l-1$ 必为奇数, 而 l 必为偶数。

再证 \Leftarrow :

要证明 G 是偶图, 我们不妨假定 G 是连通的(若 G 不连通, 则我们对 G 的每一个连通分图同样可利用下面的方法证明它们都是偶图, 从而得知 G 是偶图)。

任取一个结点 $w_0 \in V$, 固定 w_0 , 并用以定义 V 的两个子集 V_1 及 V_2 如下:

$V_1 := \{v \mid v \text{ 到 } w_0 \text{ 的最短路长为偶数}\}$

$V_2 := V \setminus V_1$

离散数学

这样，对于任何结点 $v \in V$ ，

$$v \in V_1 \Leftrightarrow v \text{ 到 } w_0 \text{ 的最短路长为偶数} \quad (*)$$

$$v \in V_2 \Leftrightarrow v \text{ 到 } w_0 \text{ 的最短路长为奇数} \quad (**)$$

并且 V_1 与 V_2 构成了 V 的一个划分，即 $V = V_1 \cup V_2$ ， $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ 。

因此， G 确实是偶图，即 $G = (V_1, V_2, E)$ ， $E \subseteq V_1 \times V_2$ ，即 G 的同一子集的结点间均无边相连：

$$\begin{aligned} & (\forall u \in V_1)(\forall v \in V_1) \neg (\exists e \in E)(e = (u, v)) \\ & \wedge (\forall u \in V_2)(\forall v \in V_2) \neg (\exists e \in E)(e = (u, v))。 \end{aligned}$$

如若不然，必有：

$$\begin{aligned} & (\exists u \in V_1)(\exists v \in V_1)(\exists e \in E)(e = (u, v)) \\ & \vee (\exists u \in V_2)(\exists v \in V_2)(\exists e \in E)(e = (u, v))。 \end{aligned}$$

我们分情况证明如下：

离散数学

(1)若有 $u \in V_1$, $v \in V_1$, $e \in E$, 使得 $e=(u,v)$, 根据(*)可知: 有长为偶数的最短路 P_1 从 w_0 到 u , 有长为偶数的最短路 P_2 从 w_0 到 v 。而路 P_1 与路 P_2 加上边 e , 就构成了一条圈 C (如图4(a)所示)。我们不妨设: $|P_1|=2l_1$, $|P_2|=2l_2$; 于是圈 C 的长度为

$$|C|=|P_1|+|P_2|+1=2l_1+2l_2+1=2(l_1+l_2)+1$$

是奇数, 这就与已知条件: G 中不含奇圈, 矛盾;

(2)若有 $u \in V_2$, $v \in V_2$, $e \in E$, 使得 $e=(u,v)$, 根据(**)可知: 有长为奇数的最短路 P_1 从 w_0 到 u , 有长为奇数的最短路 P_2 从 w_0 到 v 。而路 P_1 与路 P_2 加上边 e , 就构成了一条圈 C (如图4(b)所示)。

离散数学

我们不妨设： $|P_1|=2l_1+1$ ， $|P_2|=2l_2+1$ ；于是圈C的长度为
 $|C|=|P_1|+|P_2|+1=(2l_1+1)+(2l_2+1)+1=2(l_1+l_2+1)+1$
是奇数，这就与已知条件： G 中不含奇圈，矛盾。

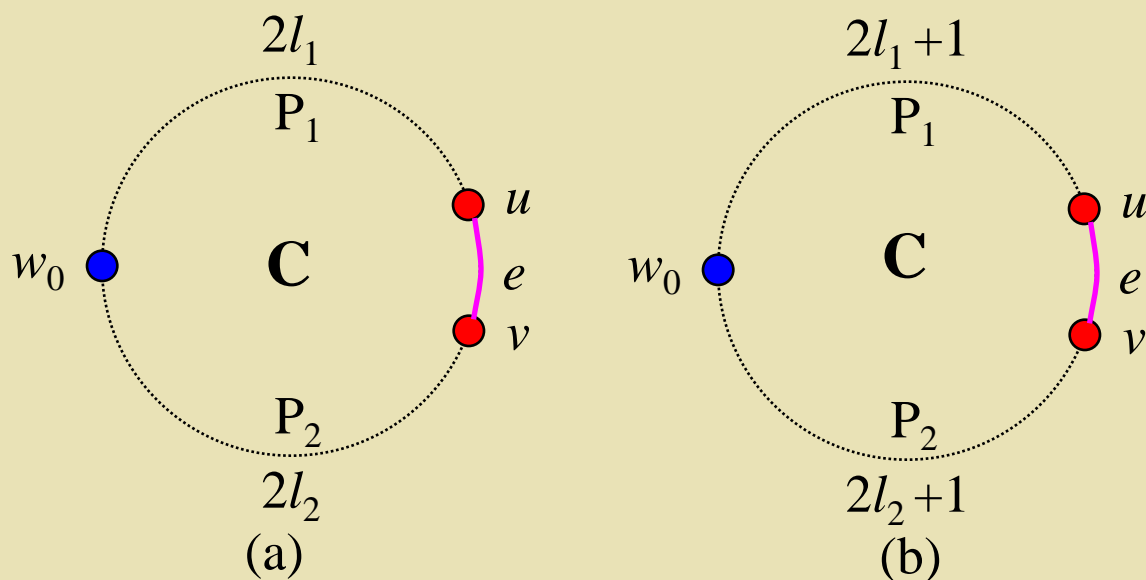


图4

离散数学

例4.图5所示的完全图 K_5 不是偶图

由定理1的充要条件知此图不是偶图，因为存在长度为5的奇圈。

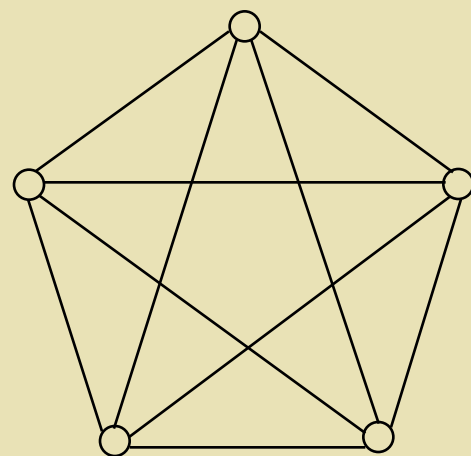


图5. K_5

例5.图6所示的立方体平面展开图G是偶图

由定理1的充要条件知此图是偶图，因为图G的每个圈都是偶圈。

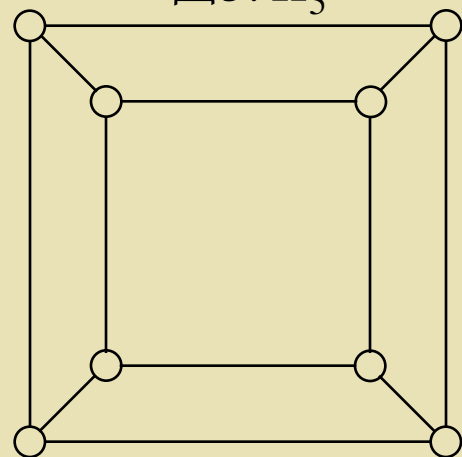


图6

离散数学

◆偶图的判定方法—标号法(着色法)

推论1. 设 $G=(V,E)$ 是简单无向图。那么

G 是偶图

$\Leftrightarrow G$ 的顶点可用两种颜色来着色(即 G 的顶点色数是2)

$\Leftrightarrow G$ 的顶点可用A、B两个字母来标号。

[证]. 证明是显然的。留给大家。

注：●所谓一个图的着色，分以下三种情况：

(1) 将图的顶点染以颜色，使相邻顶点的颜色不同；

(2) 将图的边染以颜色，使相邻边的颜色不同；

(3) 将平面图的面染以颜色，使相邻面的颜色不同；

●所谓图的**色数**，是在第(1)种着色情况下，所用的最少颜色；而在第(2)种着色情况下，所用的最少颜色，称为图的**着色指数**。

离散数学

根据推论1的结论，我们可得偶图的如下判定方法：

N₀1.在图G中任取一结点 w_0 ，给以标号A；

N₀2.检查图G中是否还有未标号的结点？若没有，则 **go to** N₀4；若有，将图G中凡是与A标号结点相邻的未标号结点都标以B标号；

检查图G中是否有两个B标号结点相邻？若有，则图G不是偶图。 **exit**；若没有， **go to** N₀3；

N₀3.检查图G中是否还有未标号的结点？若没有，则 **go to** N₀4；若有，将图G中凡是与B标号结点相邻的未标号结点都标以A标号；

检查图G中是否有两个A标号结点相邻？若有，则图G不是偶图。 **exit**；若没有， **go to** N₀2；

离散数学

No4. 若 $|V|=1$ ，则图 G 不是偶图；若 $|V|\geq 2$ ，则图 G 是偶图，并且： $V_1:=\{v \mid v \text{ 具有A标号}\}$

$$V_2:=\{v \mid v \text{ 具有B标号}\}$$

从而 $V=V_1\cup V_2$ ， $V_1\cap V_2=\emptyset$ ， $E\subseteq V_1\times V_2$ 。 $G=(V_1, V_2, E)$ 。
exit。

例6.图7所示的图 G 是偶图

任取 v_1 为首先标号结点 w_0 ，利用标号法判定图 G 是偶图；并给出各结点的标号如图所示：

$$\text{令 } V_1:=\{v \mid v \text{ 具有A标号}\}$$

$$=\{v_1, v_3, v_5, v_7\}$$

$$V_2:=\{v \mid v \text{ 具有B标号}\}$$

$$=\{v_2, v_4, v_6\}$$

$$E\subseteq V_1\times V_2$$

于是 $G=(V_1, V_2, E)$ 。

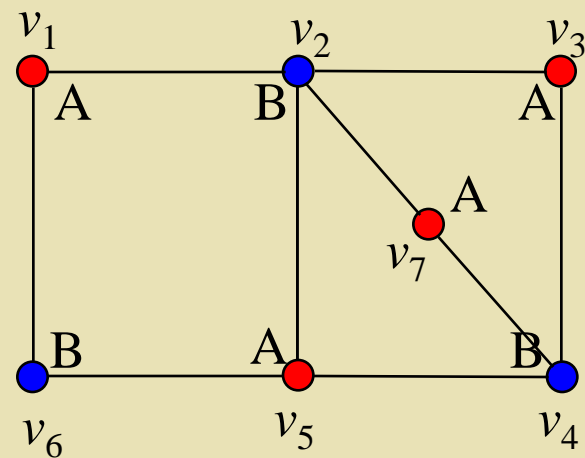


图7

离散数学

◆ H-图(H-圈)及H-路的必要性判定方法—标号法(着色法)

推论2. 设 $G=(V_1, V_2, E)$ 是偶图。那么

(1) 偶图 G 含有 H-圈 (G 是 H-图)

$$\Rightarrow |V_1| = |V_2|$$

\Rightarrow 红、蓝着色结点的数目相同

\Rightarrow A、B 标号结点的数目相同；

(2) 偶图 G 有 H-路

$$\Rightarrow ||V_1| - |V_2|| \leq 1$$

\Rightarrow 红、蓝着色结点的数目至多差 1

\Rightarrow A、B 标号结点的数目至多差 1。

[证]. 证明参见本章习题 29。留给大家。

离散数学

利用推论2的结论，我们可得到如下的H-图(H-圈)及H-路的必要性判定方法—标号法(着色法)：

No1.调用判定偶图的算法以判定图G是否是偶图；

若图G是偶图，则**go to** No2；若图G不是偶图，则**exit**；

No2. 计算A、B标号结点的数目；

若数目之差大于等于1，则图G不含H-圈，不是H-图；
若数目之差大于等于2，则图G没有H-路； **exit**。

注：●所谓的标号法属于必要性判定方法。它不能判定有H-路、有H-圈(是H-图)，只能判定无H-路、无H-圈(不是H-图)；

●实际上，如果图G有H-路或H-圈，那么必交替的穿过A标号结点和B标号结点，因此它们的数目至多差1。

离散数学

例7.图8所示的图G不是H-图(不含H-圈)

图G能完成标号, 故图G是偶图;
但其A标号结点有6个, B标号结点有4个, 不相同, 故图G不含H-圈(不是H-图); 差是2, 大于1, 故图G没有H-路。

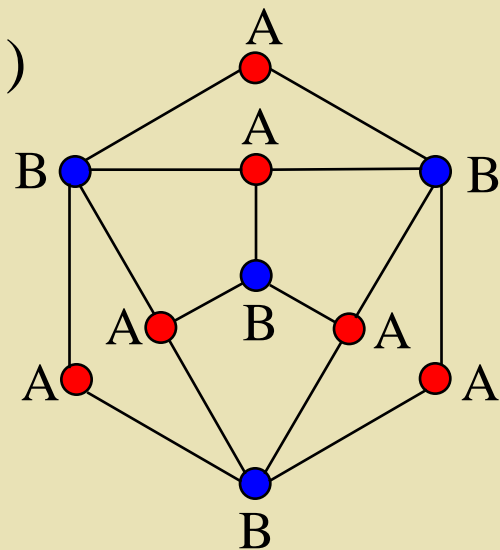


图8. G

注: ●值得指出的是: 有些图G虽然不是偶图, 但我们可通过给图G的某个结点的某条边上增加一个结点而获得另一图G', 使得:

- (1)图G'是偶图(能完成标号法);
- (2)图G有H-圈(是H-图) \Leftrightarrow 图G'有H-圈(是H-图);

而图G'能用标号法判定不含H-圈(不是H-图), 因此, 我们可得图G一定不含H-圈(不是H-图)。

离散数学

例8.图9(a)所示的图G不是H-图(不含H-圈)

图G不能完成标号(因为有两个B标号结点相邻), 故图G不是偶图; 但给其结点 v_2 的一条边(v_2, v_3)上增加一个结点 v_7 后, 得到图 G' , 能够完成标号, 故图 G' 是偶图;

图 G' 的A标号结点有3个, B标号结点有4个, 不相同, 故图G不含H-圈 (不是H-图);

因此, 等价的, 图G不是H-图(不含H-圈)。

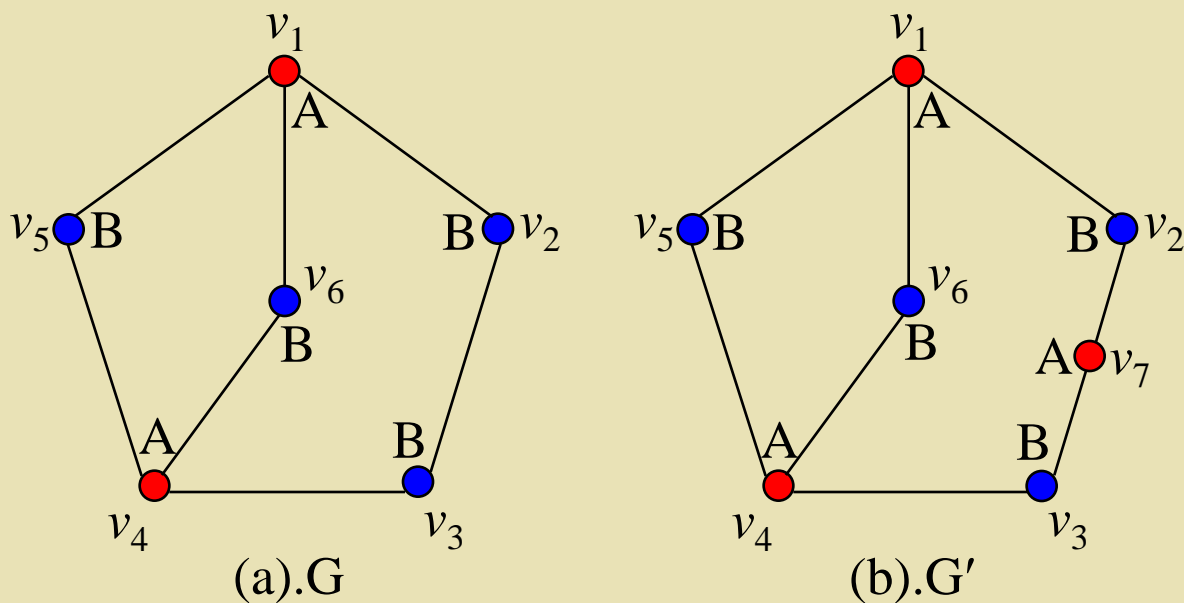


图9

离散数学

注：●但是图G显然有一条H-路 $P=(v_6, v_4, v_5, v_1, v_2, v_3)$ ，而图G'中红、蓝结点的数目之差为1，也未大于等于2，并不矛盾；

问题：现在我们的问题是，在能完成标号的前提下，选择怎样的结点，在其某一条边上增加一个结点，获得图G'，保证：

(2)图G有H-圈(是H-图) \Leftrightarrow 图G'有H-圈(是H-图)。

答案：选择2度结点。

因为若图G有H-圈，则此H-圈必穿过所选择的2度结点及其两条边，因而必穿过所增加的那个结点，故此保证：

(2)图G有H-圈(是H-图) \Leftrightarrow 图G'有H-圈(是H-图)。

离散数学

问题： (1)此方法能推广到非偶图H-路的必要性判定上吗？
(2)此方法如何推广到非偶图H-路的必要性判定上？

注： ●实际上，从理论上来说，偶图的H-图必要性判定方法一标号法(着色法)是不必要的，因为此方法能判定的都能用 § 7定理1来判定。

这只需取结点数较小的那一种标号的结点构成 § 7定理1中的S集即可；

●但从应用上，标号法是行之有效的一种简便方法。

离散数学

定义2. 匹配 最大匹配 完美匹配

设 $G=(V_1, V_2, E)$ 是偶图，这里： $V=V_1 \cup V_2$ ， $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ ， $E \subseteq V_1 \times V_2$ 。若存在着边集 $E_1 \subseteq E$ 且 $E_1 \neq \emptyset$ ，使得：

(1) 若 E_1 中任何两边都不相邻，则称 E_1 是图 G 的一个匹配 (Matching)；

(2) 若 E_1 是一个具有最多边数的匹配，则称 E_1 是图 G 的一个最大匹配 (Maximum matching)；

(3) 若 E_1 是一个满足条件 $|E_1| = |V_1| \leq |V_2|$ 的匹配，则称 E_1 是图 G 的一个从 V_1 到 V_2 的最大匹配 (Maximum matching from V_1 to V_2)；

(4) 若 E_1 是一个满足条件 $|E_1| = |V_1| = |V_2|$ 的匹配，则称 E_1 是图 G 的一个完美匹配 (Perfect matching)。

离散数学

- 注：
- 匹配又称为**对集**(并列集、径集)，通常将匹配 E_1 记为 M ；
 - 匹配 M 中的边 $e \in M$ 称为**杆**(bar)；
 - 完美匹配一定是最大匹配；
 - 最大匹配不一定是完美匹配；
 - $(|M|=|V_1| \leq |V_2|) \vee (|M|=|V_2| \leq |V_1|) \Rightarrow M$ 一定是最大匹配；
 - M 是最大匹配 $\Rightarrow (|M| \leq |V_1| \leq |V_2|) \vee (|M| \leq |V_2| \leq |V_1|)$ ；
 - $|V_1| \neq |V_2| \Rightarrow$ 图 G 一定没有完美匹配。

离散数学

例9.在例1的图1.G中(P_{73})，红线所示的边集

$M=\{(u_2,v_1), (u_3,v_2), (u_4,v_3), (u_5,v_4), (u_6,v_5), (u_8,v_6), (u_9,v_7)\}$
是图G的一个匹配；

M也是图G的一个最大匹配(因为： $|M|=|V_2|\leq|V_1|$)；

并且， M还是图G的一个从 V_2 到 V_1 的最大匹配(同上)；

但M显然不是图G的一个完美匹配(因为： $|V_1|\neq|V_2|$)。

例10.在图10.所示的完全二分图
 $K_{3,3}$ (3-正则偶图)中，红线所示的
边集 $M=\{(v_1,v_4), (v_2,v_5), (v_3,v_6)\}$
显然是图G的一个匹配、最大匹
配和完美匹配。

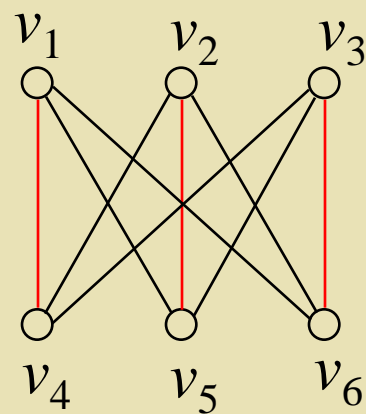


图10

离散数学

例1. 相异代表系(SDR)问题及其数学模型的一个实例

设有相异代表系问题如下：有9个人，分属7个组织。

人员集合 $M=\{m_1, m_2, m_3, m_4, m_5, m_6, m_7, m_8, m_9\}$;

组织集合 $S=\{S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6, S_7\}$;

其中： $S_1=\{m_1, m_2, m_3\}$, $S_2=\{m_1, m_2, m_3\}$, $S_3=\{m_2, m_3, m_4, m_5\}$,

$S_4=\{m_4, m_5, m_7\}$, $S_5=\{m_6, m_8, m_9\}$, $S_6=\{m_5, m_8\}$, $S_7=\{m_6, m_9\}$ 。

容易看出 $\text{SDR}=(m_2, m_3, m_4, m_5, m_6, m_8, m_9)$ 是解之一。

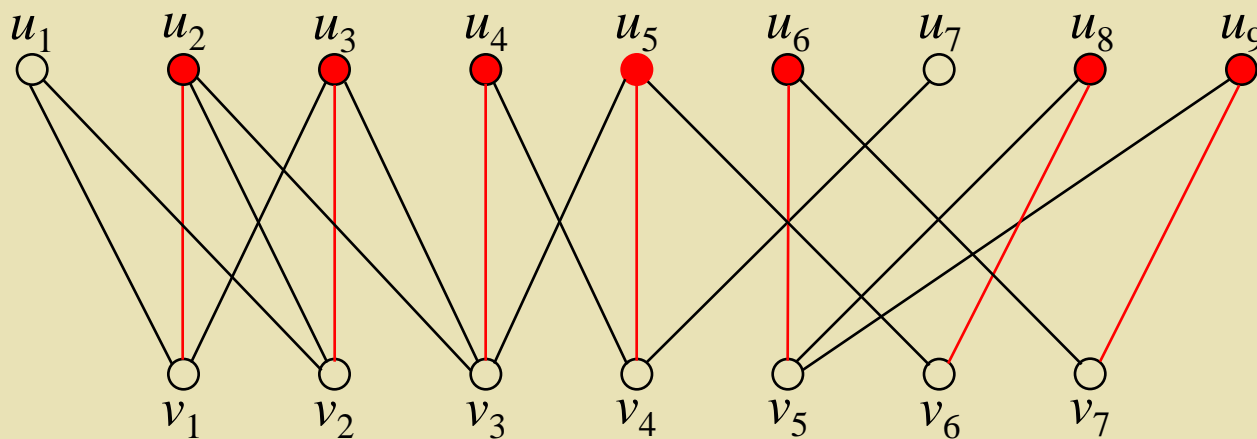


图1

离散数学

定理2.(P.Hall定理(1934))

设 $G=(V_1, V_2, E)$ 是偶图。这里： $|V_1| \leq |V_2|$ 。则

存在着图 G 的一个从 V_1 到 V_2 的最大匹配 M

$$\Leftrightarrow (\forall S)(S \subseteq V_1 \Rightarrow |N(S)| \geq |S|) \quad (\text{相异性条件})$$

其中： $N(S) = \bigcup_{v \in S} N(v)$ 称为结点集 $S \subseteq V_1$ 的邻域；

$N(v) = \{v' | v' \in V_2 \wedge (v, v') \in E\}$ 称为结点 $v \in V_1$ 的邻域；

注：●Hall定理中条件(*)的另一等价的、通俗易懂的叙述是：

图 G 中有从 V_1 到 V_2 的最大匹配的充分必要条件是：

对于 V_1 中的任何 k ($0 \leq k \leq |V_1|$)个结点，一定至少连接着 V_2 中的 k 个结点。

[证].证明省略(参见《图论及其应用》[美]J.A.邦迪 U.S.R.默蒂 著 吴望名 等译 P₇₆)。

离散数学

定理3.(Philip.Hall一般婚姻定理(1934))

设 $G=(V_1, V_2, E)$ 是偶图。这里： $|V_1|=|V_2|$ 。则

存在着图 G 的一个完美匹配 M

$$\Leftrightarrow (\forall S)(S \subseteq V_1 \Rightarrow |N(S)| \geq |S|)。$$

[证].由条件 $|V_1|=|V_2|$ 以及定理2可知：定理3的结论是显然的。

推论1.完全二分图 $K_{m,n}$ 一定有一个最大匹配 M ，且 $|M|=\min\{m,n\}$ ；并且当 $m=n$ 时， M 为一完美匹配。

[证].因为在完全二分图 $G=(V_1, V_2, E)(|V_1|=m, |V_2|=n$ ；并且不妨设 $m \leq n$)中，对任何结点 $v \in V_1$ ，都有 $N(v)=V_2$ ；因此，对任何结点集 $S \subseteq V_1$ ，都有 $N(S)=V_2$ ；因而，对任何结点集 $S \subseteq V_1$ ，都有：

离散数学

$$|N(S)|=|V_2|=n \geq m=|V_1| \geq |S|。$$

所以，根据定理2可知：推论1的结论成立，存在着图G的最大匹配M，而且 $|M|=m=\min\{m,n\}$ ；

当 $m=n$ 时，根据定理3可知：M为一完美匹配。

推论2. (婚姻定理)

k-正则偶图(每个结点的度都是k的偶图)一定有一个完美匹配M。

[证].(1)先证： $|V_1|=|V_2|$

由于从每个结点都可引出k条边，故从结点集 V_1 共引出了 $k \cdot |V_1|$ 条边，而这是图中全部的边，因而有 $|E|=k \cdot |V_1|$ ；

同理可证 $|E|=k \cdot |V_2|$ ；

因此有 $k \cdot |V_1|=k \cdot |V_2|$ ，所以 $|V_1|=|V_2|$ ；

离散数学

(2)次证: $(\forall S)(S \subseteq V_1 \Rightarrow |N(S)| \geq |S|)$

由于从结点集 S 共引出了 $k \cdot |S|$ 条边, 而这些边的另一端点全部是在结点集 $N(S)$ 中, 因此这些边全部是包含在由结点集 $N(S)$ 引出的 $k \cdot |N(S)|$ 条边中, 因而有 $k \cdot |N(S)| \geq k \cdot |S|$, 所以 $|N(S)| \geq |S|$;

由(1)及(2), 根据定理3可知: 推论2的结论成立。

注: ●婚姻定理来源于历史上著名的**婚姻问题**: 在一群青年男女中, 已知每个男士都有 k 个女士朋友, 每个女士都有 k 个男士朋友, 那么, 他们每个人是否都能与自己的一位朋友结成婚姻?

离散数学

推论3. 设 $G=(V_1, V_2, E)$ 是偶图。若 $(\exists k)(k \in \mathbb{N} \wedge k \geq 1)$, 使得:

(1) $(\forall v)(v \in V_1 \Rightarrow \deg(v) \geq k)$;

(2) $(\forall v)(v \in V_2 \Rightarrow \deg(v) \leq k)$;

则图 G 中一定存在着一个从 V_1 到 V_2 的最大匹配 M 。

[证]. 只须证明相异性条件即可: $(\forall S)(S \subseteq V_1 \Rightarrow |N(S)| \geq |S|)$

由于从结点集 S 至少引出了 $k \cdot |S|$ 条边, 因此有 从 S 引出的边数 $\geq k \cdot |S|$; 而这些边的另一端点全部是在结点集 $N(S)$ 中, 因此这些边全部是包含在由结点集 $N(S)$ 引出的那些边中, 故而 从 $N(S)$ 引出的边数 \geq 从 S 引出的边数; 但是从结点集 $N(S)$ 至多引出了 $k \cdot |N(S)|$ 条边, 因此有 $k \cdot |N(S)| \geq$ 从 $N(S)$ 引出的边数;

最后, 结合上述三个不等式, 我们有 $k \cdot |N(S)| \geq k \cdot |S|$;
所以 $|N(S)| \geq |S|$;

于是, 根据定理3可知: 推论3的结论成立。

离散数学

◆匈牙利方法(Hungarian method)

定义3.匹配 饱和点 非饱和点 交错路 增广路

设 $G=(V_1, V_2, E)$ 是偶图, M 是图 G 的一个匹配。

(1)称结点 $u \in V_1 \cup V_2$ 被 M 所匹配 \Leftrightarrow 存在着匹配 M 的某条杆 $e \in M$, 以 u 为其一个端点(这时称结点 u 覆盖(Covering) M 的杆 e);

(2)称结点 $u \in V_1 \cup V_2$ 是 M 的饱和点(saturated node) $\Leftrightarrow u$ 被 M 所匹配;

否则, 称结点 $u \in V_1 \cup V_2$ 是 M 的非饱和点(unsaturated node);

(3)交错路(alternating path)是一条分别交替的由 M 中的边和 $E \setminus M$ 中的边构成的极大的初级路;

(4)增广路(augmenting path)是一条两个端点都是非饱和点的交错路。

离散数学

例11.在图11.所示的3-正则偶图 G 中，红线所示的边集
 $M=\{(v_2,v_6), (v_3,v_7), (v_4,v_8), (v_5,v_9)\}$

是图 G 的一个匹配；

结点 $v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7,$
 v_8, v_9 是 M 的饱和点；

结点 v_1, v_{10} 是 M 的非饱和点；

路 $P=\{(v_1,v_6), (v_2,v_6),$
 $(v_2,v_7), (v_3,v_7), (v_3,v_8), (v_4,v_8), (v_4,v_9), (v_5,v_9), (v_5,v_{10})\}$ 是一条
交错路；路 P 也是一条增广路。

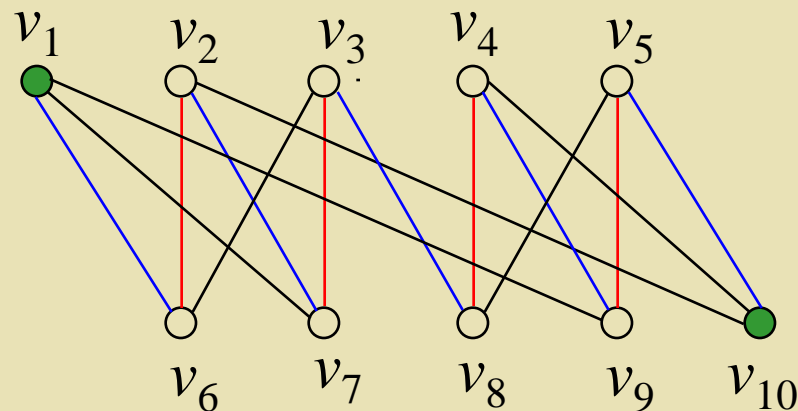


图11

离散数学

求最大匹配M的算法(匈牙利方法—J.Edmonds(1965)):

N₀1.任取一匹配M(可以空或只取一边);

N₀2.取 $S := \{u | u \in V_1 \wedge u \text{ 是 } M \text{ 的非饱和点} \}$;

若 $S = \emptyset$, 则M已是最大匹配; **exit** ;

N₀3.任取一结点 $u_0 \in S$, 从 u_0 走出几条交错路:

$P_{i1}, P_{i2}, \dots, P_{ik}$;

N₀4.如果这些路中有某一条是增广路, 不妨记为P,
则令 $M := M \oplus P = (M \setminus P) \cup (P \setminus M)$ (并且 $|M|(\text{新}) = |M|(\text{旧}) + 1$) ;
go to N₀2 ;

N₀5.如果这些路中无一条是增广路, 则令 $S := S \setminus \{u_0\}$;
如果 $S \neq \emptyset$, 则 **go to** N₀3 ;

否则 $S = \emptyset$, 则M已是最大匹配; **exit** ;



离散数学

注：●Edmonds算法一定会在有限步停止。因为算法每进入循环一次，匹配 M 中的边数都会增一，而任何图 G 中边数都是有限的。

例12.有六位教师：张、王、李、赵、孙、周，要安排他们去教六门课程：数学、化学、物理、语文、英语、程序设计。张老师会教数学、程序设计和英语；王老师会教英语和语文；李老师会教数学和物理；赵老师会教化学；孙老师会教物理和程序设计；周老师会教数学和物理。应怎样安排课程才能使每门课都有人教，每个人都只教一门课并且不致于使任何人去教他不懂的课程？

这是一个工作分派问题，并且是图论中求偶图完美匹配的一个典型问题。

我们先将此问题的表述抽象成一个偶图 $G=(U,V,E)$ ：将教师和课程看作偶图中两个互补的结点子集 U 和 V ，将教师和课程之间的授课关系看作边集 E ，当某教师会

离散数学

教某课程时就在其相应的结点间连一条边，这样按照例中所给的条件就可画出如图12(a)所示的偶图。

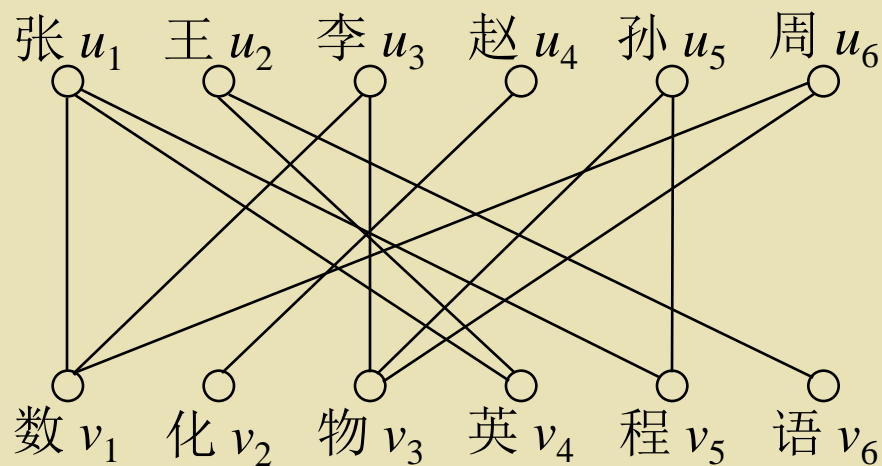


图12(a)

这里: $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6\}$

$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$

$E = \{(u_1, v_1), (u_1, v_4), (u_1, v_5), (u_2, v_4), (u_2, v_6), (u_3, v_1), (u_3, v_3), (u_4, v_2), (u_5, v_3), (u_5, v_5), (u_6, v_1), (u_6, v_3)\}$

离散数学

现在我们就用Edmonds算法来求图G中的最大匹配M:

(1) 先任取一个初始匹配 $M_1 = \{(u_2, v_6), (u_3, v_1)\}$, 如图12(b)中红线所示, 于是得到 $S_1 = \{u_1, u_4, u_5, u_6\} \subseteq U$, 任选非饱和点 $u_1 \in S$ 作为起点, 得到一条增广路

$$P_1 = \{(u_1, v_1), (u_3, v_1), (u_3, v_3)\};$$

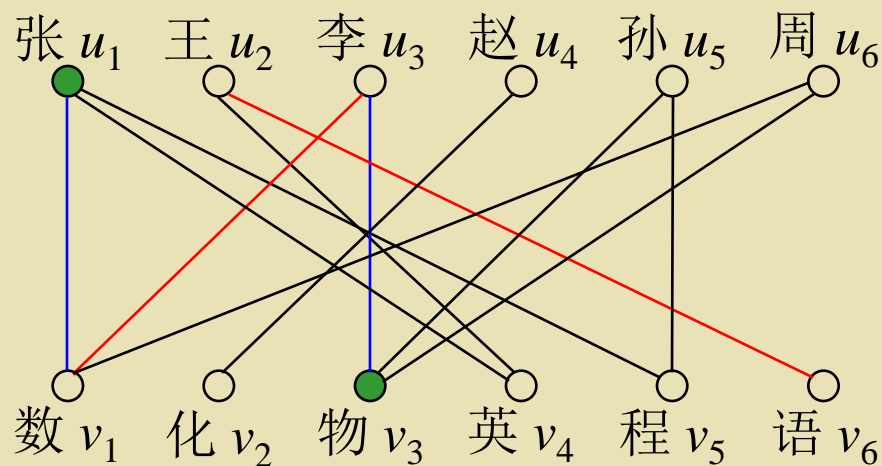


图12(b)

(2) 从而得到新的匹配 $M_2 = M_1 \oplus P_1 = \{(u_1, v_1), (u_2, v_6), (u_3, v_3)\}$, 如图12(c)红线所示, 于是得到 $S_2 = \{u_4, u_5, u_6\} \subseteq U$, 任

选非饱和点 $u_4 \in S$ 作为起点，得到一条增广路

$$P_2 = \{(u_4, v_2)\} \text{ ;}$$

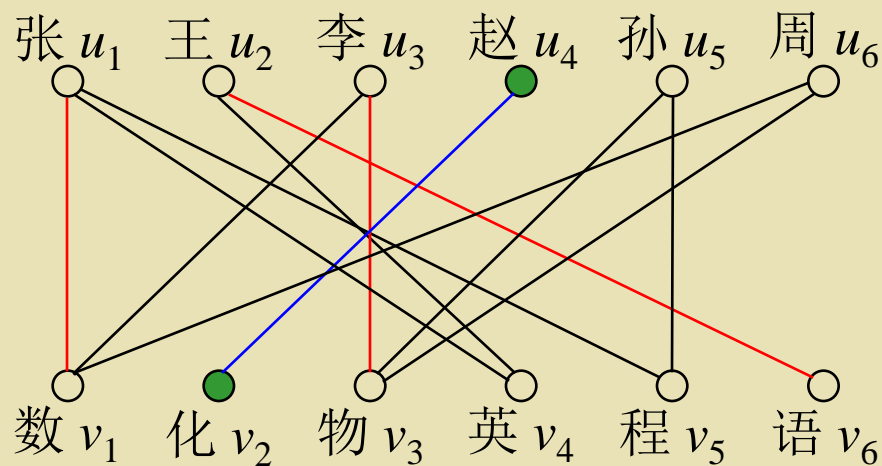


图12(c)

(3)从而得到新的匹配 $M_3=M_2\oplus P_2=\{(u_1,v_1),(u_2,v_6),(u_3,v_3), (u_4,v_2)\}$ ，如图12(d)红线所示，于是得到 $S_3=\{u_5, u_6\}\subseteq U$ ，任选非饱和点 $u_6\in S$ 作为起点，得到一条增广路

$$P_3 = \{(u_6, v_3), (u_3, v_3), (u_3, v_1), (u_1, v_1), (u_1, v_4)\} ;$$

离散数学

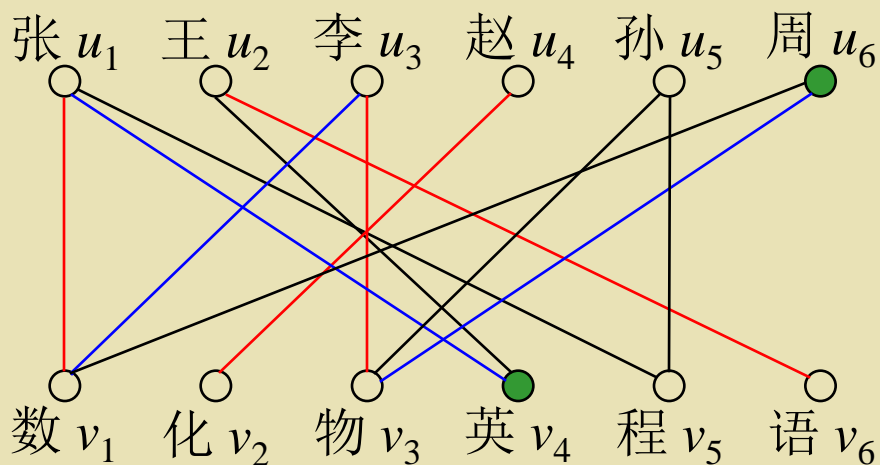


图12(d)

(4)从而得到新的匹配 $M_4=M_3\oplus P_3=\{(u_1,v_4),(u_2,v_6),(u_3,v_1), (u_4,v_2),(u_6,v_3)\}$ ，如图12(e)红线所示，于是得到 $S_4=\{u_6\}\subseteq U$ ，只能选非饱和点 $u_5\in S$ 作为起点，得到一条增广路

$$P_4=\{(u_5,v_5)\} ;$$

(5)从而得到新匹配 $M_5=M_4\oplus P_4=\{(u_1,v_4),(u_2,v_6),(u_3,v_1), (u_4,v_2),(u_5,v_5),(u_6,v_3)\}$ ，如图12(f)红线所示，这时得到 $S_5=\emptyset$ ，没有非饱和点可选，算法终止，**exit**;

离散数学

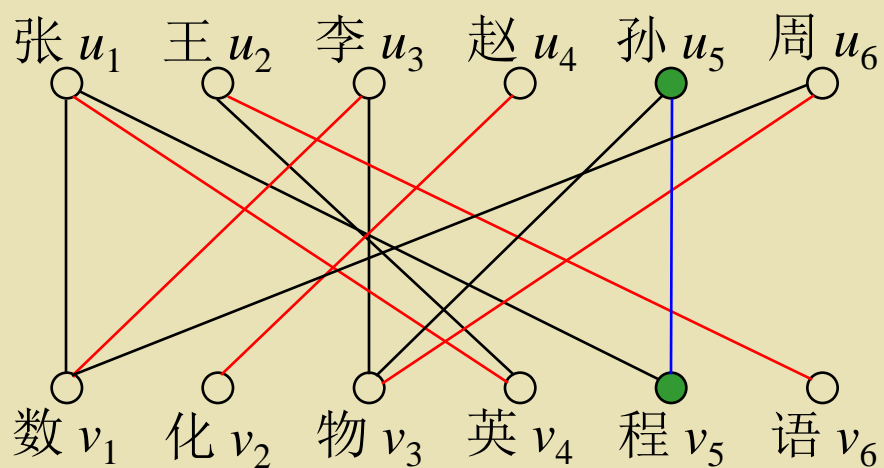


图12(e)

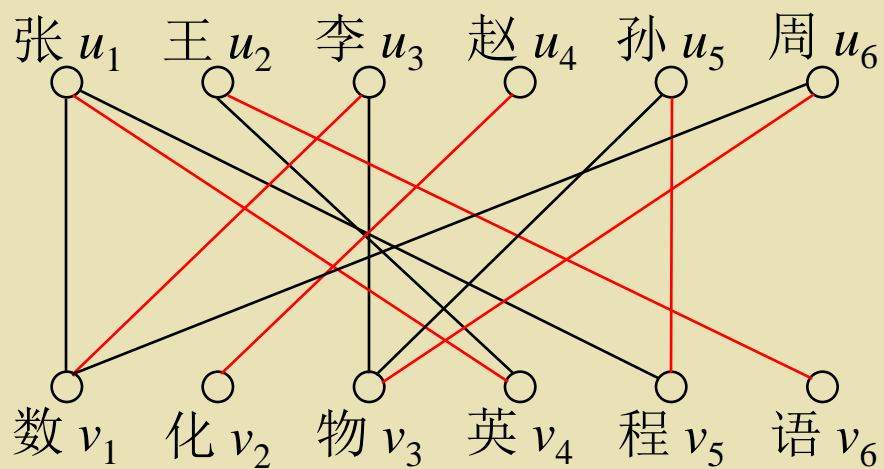


图12(f)

离散数学

$M=M_5=\{(u_1,v_4),(u_2,v_6),(u_3,v_1),(u_4,v_2),(u_5,v_5),(u_6,v_3)\}$
就是本例中所求的最大匹配，它显然是一完美匹配。

按此完美匹配来分配教师们的工作，就可做到每门课程都有人教，每位教师只教一门课程，且不会出现让教师教他不会教授的课程那种尴尬的情况。

注：●匹配、最大匹配、完美匹配一般都不是唯一的。

例13.在上例中

$M'=\{(u_1,v_4),(u_2,v_6),(u_3,v_3),$
 $,(u_4,v_2),(u_5,v_5),(u_6,v_1)\}$
是另一个匹配、最大匹配
和完美匹配(如图13红线
所示)。

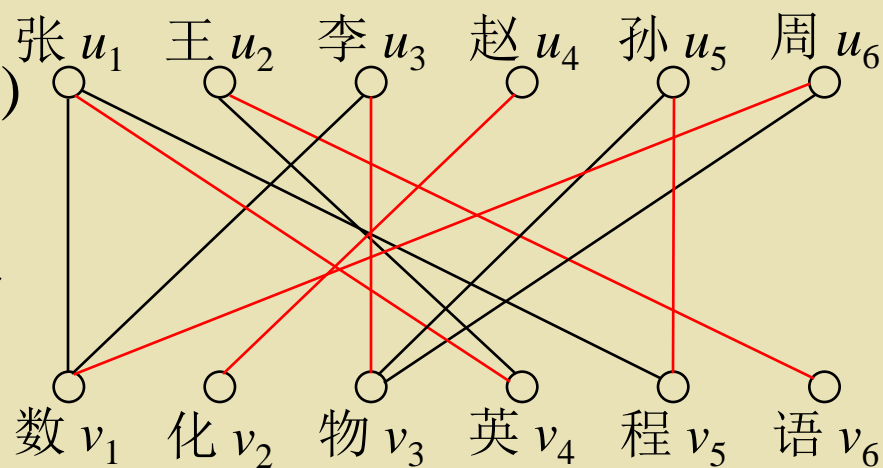


图13

离散数学

注：●匹配、最大匹配、完美匹配概念及理论也能推广到一般图上(未必非要是偶图不可)；

●一般图的匹配、最大匹配、完美匹配概念及理论比较复杂，我们不再去讨论，有兴趣的读者可参见专门的图论书籍，它们在网络流理论上有很大的用途和较大的发展；

●**最优完美匹配问题**：在带权偶图中，寻求总权和最小或最大的完美匹配问题称为最优完美匹配问题；求解此类问题的算法是基于Edmonds算法的，有D.Kőing的匈牙利方法和Kuhn-Munkres算法，有兴趣的读者可参见专门的图论书籍。

离散数学

§ 9. 平面图

- 平面图的定义
- Euler公式
- 空间凸多面体的平面嵌入
- 平面图的必要性判定方法
- 拉边法
- Kuratowski平面图最后定理
- K-技术
- 平面图是H-图的一个必要性判定定理
- 四色定理
- 对偶图



离散数学

§ 9. 平面图

平面图是图论中一类特殊的图；平面图的理论在图论中以及实际应用(比如公用设施)中都很重要，特别是在印刷电路的电网络设计、超大规模集成电路设计(VLSI-very large scale integration)、微电路设计、CPU-芯片制造中都有着很重要的应用。

离散数学

定义1.平面图(planar graph)

设 $G=(V,E)$ 是无向图。

(1)如果图 G 的任意两条边都不在非结点处相交，则称图 G 为平面图；

(2)如果存在着图 G 的一种图示，能够使得它的任意两条边都不在非结点处相交，则称图 G 为可平面图(planar graph)。可平面图是平面图。

(3)如果怎么图示都不能使图 G 的所有边对在非结点处不相交，则称图 G 为非平面图(nonplanar graph)。

离散数学

例1.图2是平面图。

例2. K_4 是可平面图，因而是平面图。

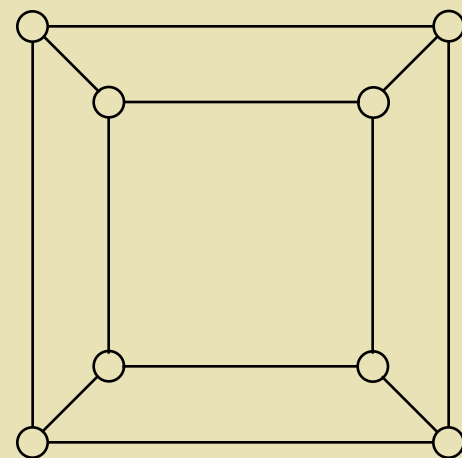
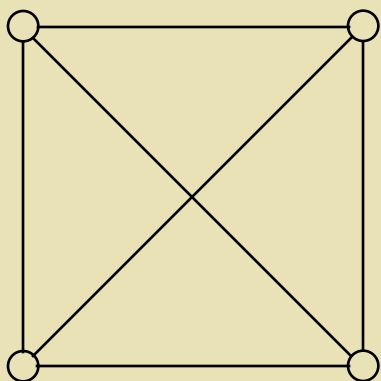
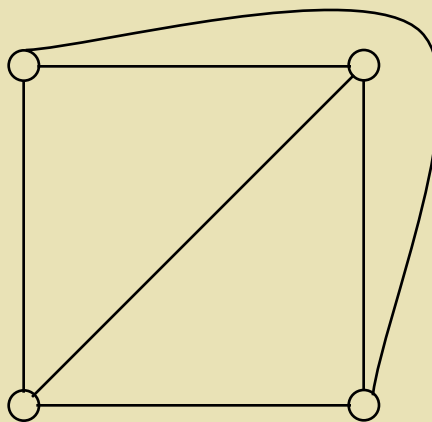


图2



(a) K_4

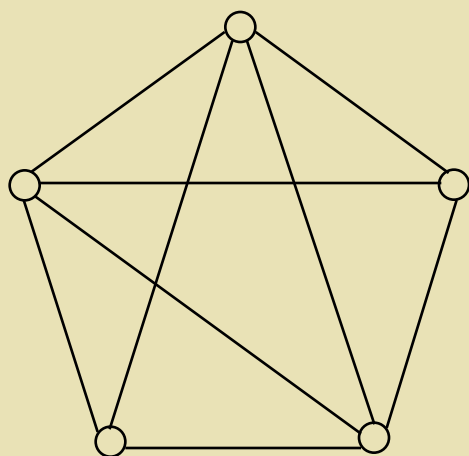


(b) K_4 的另一个图示

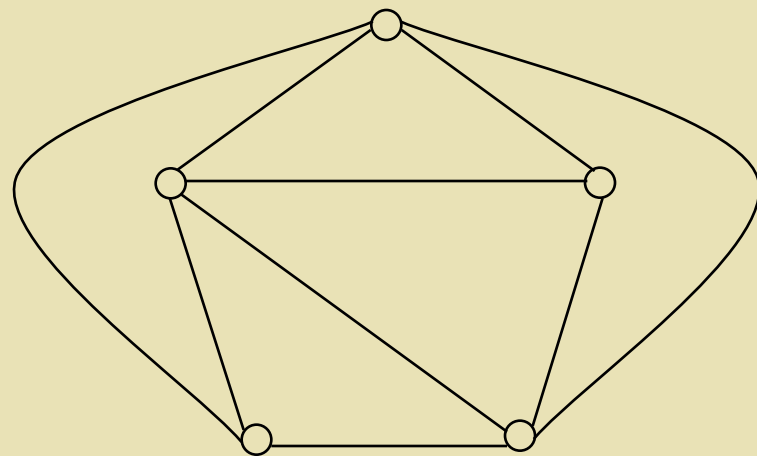
图3

离散数学

例3. 图4是可平面图，因而是平面图。



(a)

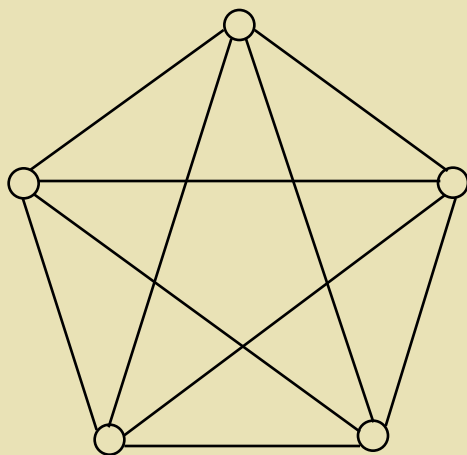


(b)

图4

离散数学

例4. K_5 不是可平面图，因而是非平面图(参见图5(b))。



(a). K_5

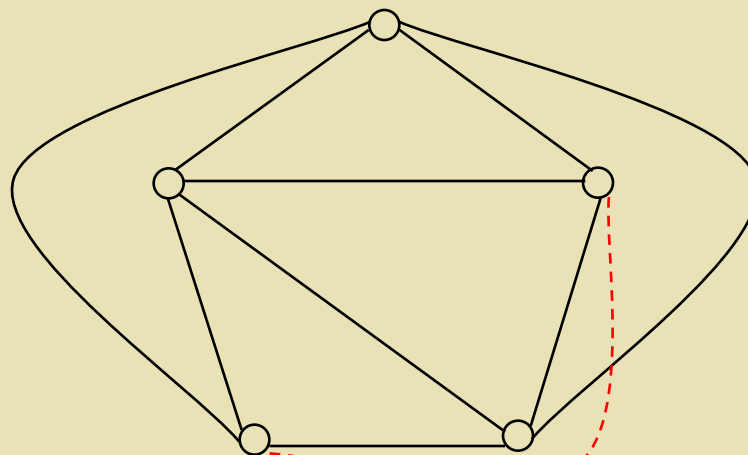
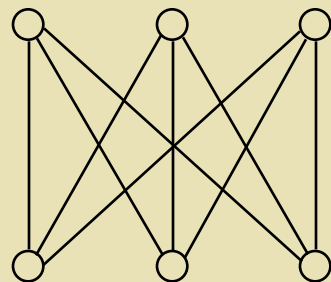


图5

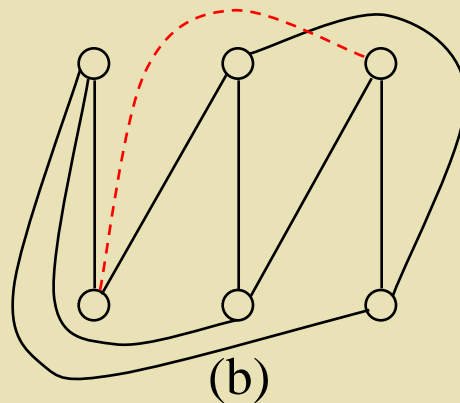
(b)

离散数学

例5. $K_{3,3}$ 不是可平面图，因而是非平面图(参见图6(b))。



(a) $K_{3,3}$



(b)

图6

注：• $K_{3,3}$ 是许多公用设施问题的图论模型：

(1)现有三个车库，三个油库，问是否能在一个平面内不交叉地从每个车库到每个油库都修一条路，以使三个车库的车都可安全的到每个油库去加油？

(2)现有三座楼房，三条管道，问这三条管道是否能不交叉地在一个平面内通向这三座楼房？

• K_5 和 $K_{3,3}$ 是两个有名的非平面图(恶例)；许多复杂图的平面性判定都归结于它们(参见K-定理)。

离散数学

◆平面图的概念术语

在平面图的图示中

(1)区域(regions): 由一条极小的初级圈所包围的面称为平面图的一个(有限)区域;

(2)边界(boundary): 构成区域的初级圈中的边称为此区域的边界;

(3)无限区域(infinite regions): 最大的初级圈之外部称为平面图的无穷区域;

(4)相邻(adjacent): 有公共边界的区域称为相邻。

注: ●所谓极小初级圈是指:在此圈内不再含有其它更小的初级圈,但不排斥圈内可以有其它结点;

- 当图中无任何圈时(比如树图), 整个平面即为无穷区域;
- 一个平面图有且仅有一个无穷区域;
- 区域又称为面, 区域数又称为面数。

离散数学

例6. 图7是一个平面图，共有4个区域。

它们的边界分别是：

区域1——(a, b, f, a)

区域2——(b, d, f, b)

区域3——(b, c, d, b)

区域4——(a, b, c, d, f, a)

区域4为无穷区域。

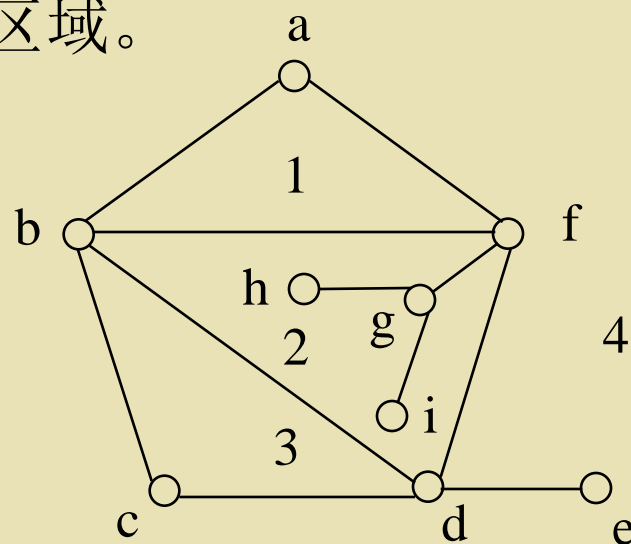


图7

定理1.(Euler公式 (1750)).

设 $G=(V, E)$ 是连通的平面图，其结点数 $|V|=n$ ，边数

离散数学

$|E|=m$, 区域(面)数 $|R|=r$, 则它们必满足如下的**Euler**公式:

$$n-m+r=2。$$

注: ●有些书的Euler公式写成: $n-m+f=2$, 这里 $f=|F|$ 是面数(face);
●还有些书的Euler公式写成: $n-m+r=1$ 或 $n-m+f=1$, 那是因为他们在区域(面)数中不计无穷区域。

[证]. 整体上采用数学归纳法, 取边数 m 为归纳变量。
首先, 当 $m=1$ 时, 对连通平面图来说, 只有下列两种可能情况(参见图8):

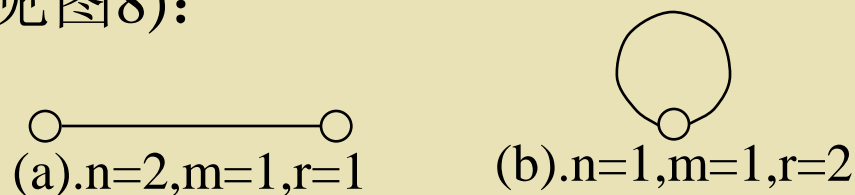


图8

显然, 上面两个连通平面图都满足Euler公式;

离散数学

其次，假设当 $m=k$ 时，Euler公式成立；
最后，我们来证明当 $m=k+1$ 时，Euler公式也成立；
事实上，我们可以分两种情况(二分法)：连通平面图 G 中有悬挂点，及连通平面图 G 中无悬挂点，来讨论。

(1) G 中有悬挂点 v ：

在图 G 中删去悬挂点 v 及与其关联的悬挂边，我们仍然得到连通的平面图 G' ，并且图 G' 有 $n-1$ 个结点， $m-1=(k+1)-1=k$ 条边，区域数 r 不变(因为删去悬挂边不会破坏连通性及任何区域)，符合归纳假设，从而有：

$$(n-1)-(m-1)+r=(n-1)-k+r=2。$$

于是，我们就有：

$$n-m+r=(n-1)-(m-1)+r=2$$

故对连通平面图 G ，Euler公式成立(参见图9)；

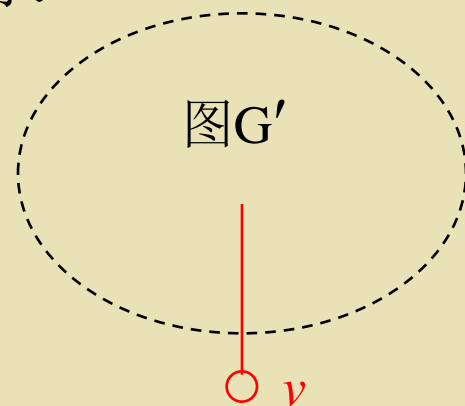
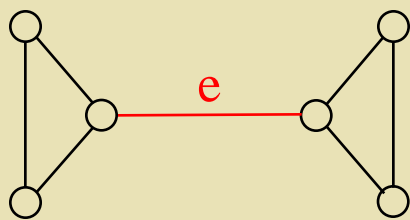


图9.图G

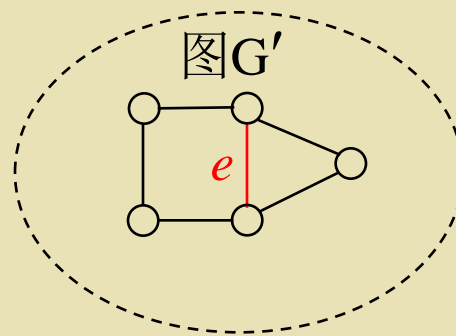
离散数学

(2) G 中无悬挂点:

此时图 G 中的每一个结点的度都不小于2，每一条边都是某个区域的边界。从图 G 的某一有限区域的边界上任意删去一边 e ，我们仍然得到连通的平面图 G' ，并且图 G' 有 $m-1=(k+1)-1=k$ 条边， $r-1$ 个区域，结点数 n 不变(因为删去有限区域的边界边 e 不会破坏连通性，不会改变结点数，并且该有限区域和其一以 e 为边界的相邻区域合二为一)，符合归纳假设，从而有：



(a) 删去无穷区域的边界边 e 可能会破坏图的连通性而不增加区域数



(b).图 G

图10

离散数学

$$n-(m-1)+(r-1)=n-k+(r-1)=2。$$

于是，我们就有：

$$n-m+r=n-(m-1)+(r-1)=2$$

故对连通平面图G，Euler公式仍成立(参见图10(b))；

所以，根据数学归纳法，对任何连通平面图G，Euler公式总成立。

注：●事实上，Euler当年提出Euler公式并不是针对平面图的，而是针对空间凸多面体的(那时还没有平面图的概念)；

●1750年，Euler在总结空间凸多面体的顶点数 n ，棱数 m ，及面数 f 之间的相互数量关系时，提出了公式： $n-m+f=2$ 。后人发现此公式对平面图也是成立的，为了纪念Euler的贡献，今天，人们用Euler之名命名此公式；

离散数学

例7.正四面体(图11)有4个顶点, 6个棱, 4个面, 即 $n=4$, $m=6$, $f=4$, 从而Euler公式 $n-m+f=4-6+4=2$ 成立;

正六面体(图12)有8个顶点, 12个棱, 6个面, 即 $n=8$, $m=12$, $f=6$, 从而Euler公式 $n-m+f=8-12+6=2$ 成立;

正十二面体(图13)有20个顶点, 30个棱, 12个面, 即 $n=20$, $m=30$, $f=12$, 从而Euler公式 $n-m+f=20-30+12=2$ 成立。

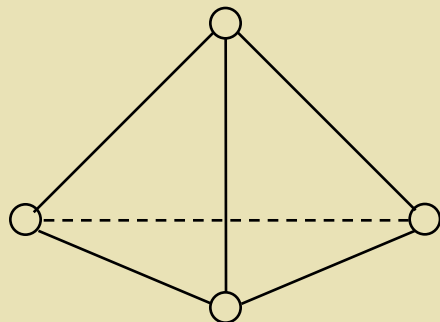


图11.正四面体

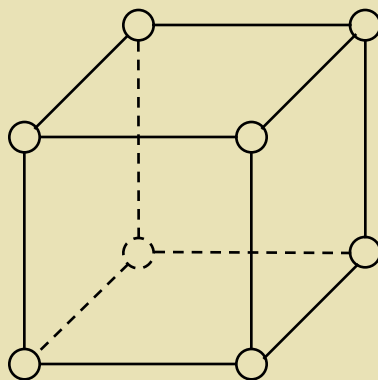
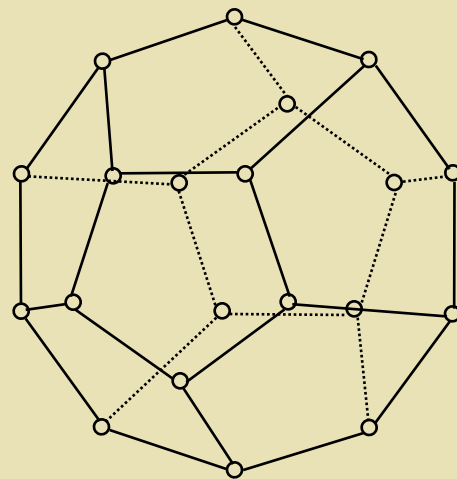


图12.正六面体



正十二面体

图13

离散数学

◆空间凸多面体的平面嵌入(同胚):

空间凸多面体和平面图服从同一规律—Euler公式, 说明它们之间有着某种本质方面的联系, 这就是:

任何空间凸多面体都可拓扑的嵌入平面而成为一平面图, 我们称为平面嵌入或平面展开。

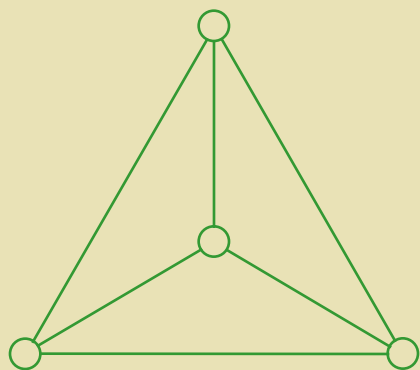
平面嵌入的实现是靠一种拓扑变换过程, 称为**球极平面投影**, 它可将球面上的任何图形拓扑映射到平面上而成为一平面图形。而空间凸多面体在拓扑学的意义上实际是一球面图形, 因此能够经球极平面投影而实现平面嵌入(参见图14)。

例8.正四面体的平面展开图如图15所示;

正六面体的平面展开图如图16所示;

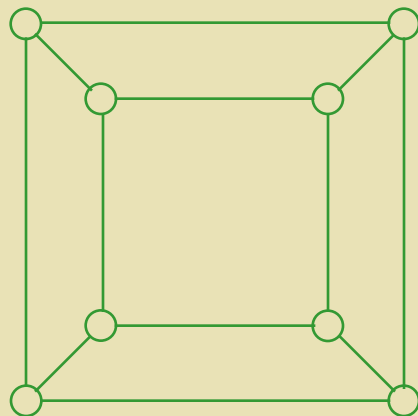
正十二面体的平面展开图如图17所示。

离散数学



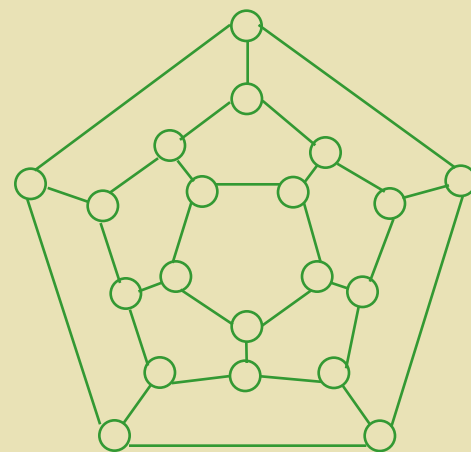
正四面体的
平面展开图

图15



正六面体的
平面展开图

图16



正十二面体
的平面展开图

图17

离散数学

◆平面图的必要性判定方法

Euler公式是平面图应满足的必要性条件，利用它可以判断一个图为非平面图。但对于某些图，其区域数 r 不易从图示中看出，这就给Euler公式的使用造成了一定的困难。我们下面给出的推论只依赖于图的边数和结点数，与区域数无关，因而能较好的解决一类图的非平面性判定问题。

离散数学

推论1. 设 $G=(V,E)$ 是 (n,m) 简单连通平面图，即 $|V|=n$, $|E|=m$ ，那么 $m \leq 3n-6$ ($m \geq 3$)。

[证]. 注意到图 G 是简单图，无平行边、无自环，因而图 G 中的每个区域都至少由三条边围成，故

诸区域边界边数总和 $\geq 3r$

又因为一条边至多是两个区域的公共边界，故

诸区域边界边数总和 $\leq 2m$

所以 $2m \geq 3r$ ，

于是 $r \leq \frac{2}{3}m$ ，

代入Euler公式 $n-m+r=2$ ，

得 $n-m+\frac{2}{3}m \geq 2$ ，

即 $3n-3m+2m \geq 6$ ，

从而有 $3n-m \geq 6$ ，

所以 $m \leq 3n-6$ 。

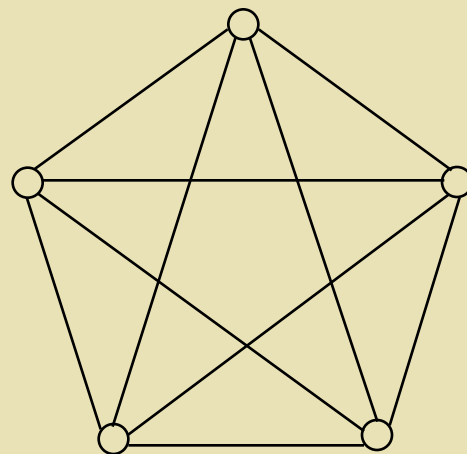


图18. K_5

离散数学

例9.完全图 K_5 不是平面图。

在例4中，我们曾经利用平面图的定义(拉边法)判断出 K_5 是非平面图(图5(b))。

现在我们可以利用推论1来判断 K_5 不是平面图：注意到 K_5 中的每个圈(区域)都至少由三条边围成，适应于推论1。完全图 K_5 有五个结点，十条边，即 $n=5$ ， $m=10$ ，于是有 $m=10 > 9 = 3 \times 5 - 6 = 3n - 6$ ，与推论1的条件矛盾，故 K_5 不是平面图。

注：●平面图的定义(拉边法)是充分性判定方法，只能判断图是平面图，因为这只需用拉边法给出一种成功的图示即可；

●平面图的定义(拉边法)不能判断图是非平面图，因为你给不出成功的图示，并不等于别人也给不出成功的图示，以及并不等价于该图本身就是非平面图；所以还需发展理论证明。

离散数学

例10.然而利用推论1的条件，我们却判断不出 $K_{3,3}$ 是非平面图。

注意到 $K_{3,3}$ 中的每个圈(区域)都至少由三条边围成(简单图)，适应于推论1。

完全图二分图 $K_{3,3}$ 有六个结点，九条边，即 $n=6$ ， $m=9$ ，于是有

$$m=9 < 12=3 \times 6 - 6 = 3n - 6$$

并不违背推论1的条件，故必要性判定失效(参见图19)。

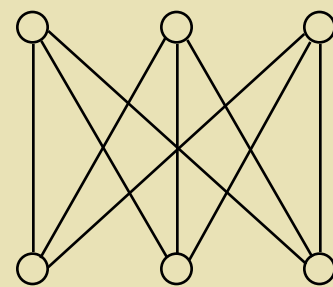


图19. $K_{3,3}$

推论2.设 $G=(V,E)$ 是 (n,m) 简单连通平面图，即 $|V|=n$ ， $|E|=m$ ，且图 G 中的每个区域都至少由四条边围成，那么

$$m \leq 2n - 4 \quad (m \geq 4)。$$

[证].仿推论1易证。

离散数学

例11.完全二分图 $K_{3,3}$ 不是平面图

在例5中，我们曾经利用平面图的定义(拉边法)判断出 $K_{3,3}$ 是非平面图(图6(b))。

现在我们可以利用推论2来判断 $K_{3,3}$ 不是平面图：注意到 $K_{3,3}$ 与 K_6 的子图(图20)同构(参见本章 § 2例12)，因此 $K_{3,3}$ 中的每个圈(区域)都至少由四条边围成，适应于推论2。

完全二分图 $K_{3,3}$ 有六个结点，九条边，即 $n=6$, $m=9$ ，于是有 $m=9 > 8 = 2 \times 6 - 4 = 2n - 4$

与推论2的条件矛盾，故 $K_{3,3}$ 不是平面图(参见图19)。

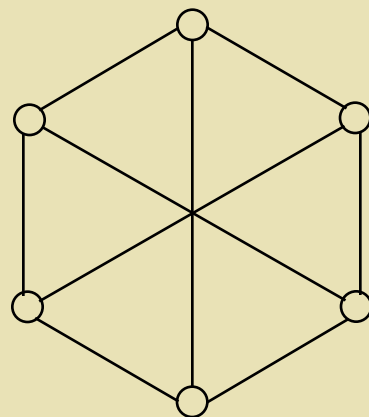


图20. K_6 的子图

离散数学

例12.然而利用推论2的条件，我们却判断不出Petersen-图是非平面图。

注意到P-图中的每个圈(区域)都至少由四条边围成，适应于推论2。

P-图有十个结点，十五条边，即 $n=10$ ， $m=15$ ，于是有

$$m=15 < 16 = 2 \times 10 - 4 = 2n - 4,$$

并不违背推论2的条件，故必要性判定失效(图21)。

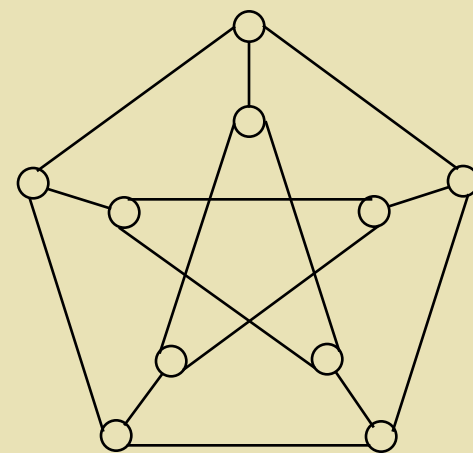


图21.P-图

推论3.设 $G=(V,E)$ 是 (n,m) 简单连通平面图，即 $|V|=n, |E|=m$ ，且图 G 中的每个区域都至少由五条边围成，那么

$$m \leq \frac{5}{3}n - \frac{10}{3} \quad (m \geq 5).$$

[证].仿推论1易证。

离散数学

例13. Petersen-图不是平面图(参见图21)

利用推论3, 仿例9或例11易证, 留给读者。

◆拉边法

有一些图刚好是推论1、推论2的边缘情况, 故不好用它们来判定, 只好仍用拉边法(平面图的定义)来判定了。

例14.图22(a)所示图G是平面图

注意到图G的每个圈(区域)都至少由三条边围成(简单图), 适应于推论1。

图G有十个结点, 二十四条边, 即 $n=10$, $m=24$, 于是有 $m=24=3 \times 10 - 6 = 3n - 6$,

并不违背推论1的条件, 故必要性判定失效。

离散数学

但是，对图G我们采用拉边法可得图22(b)，它显然是一平面图，因此图G是平面图。

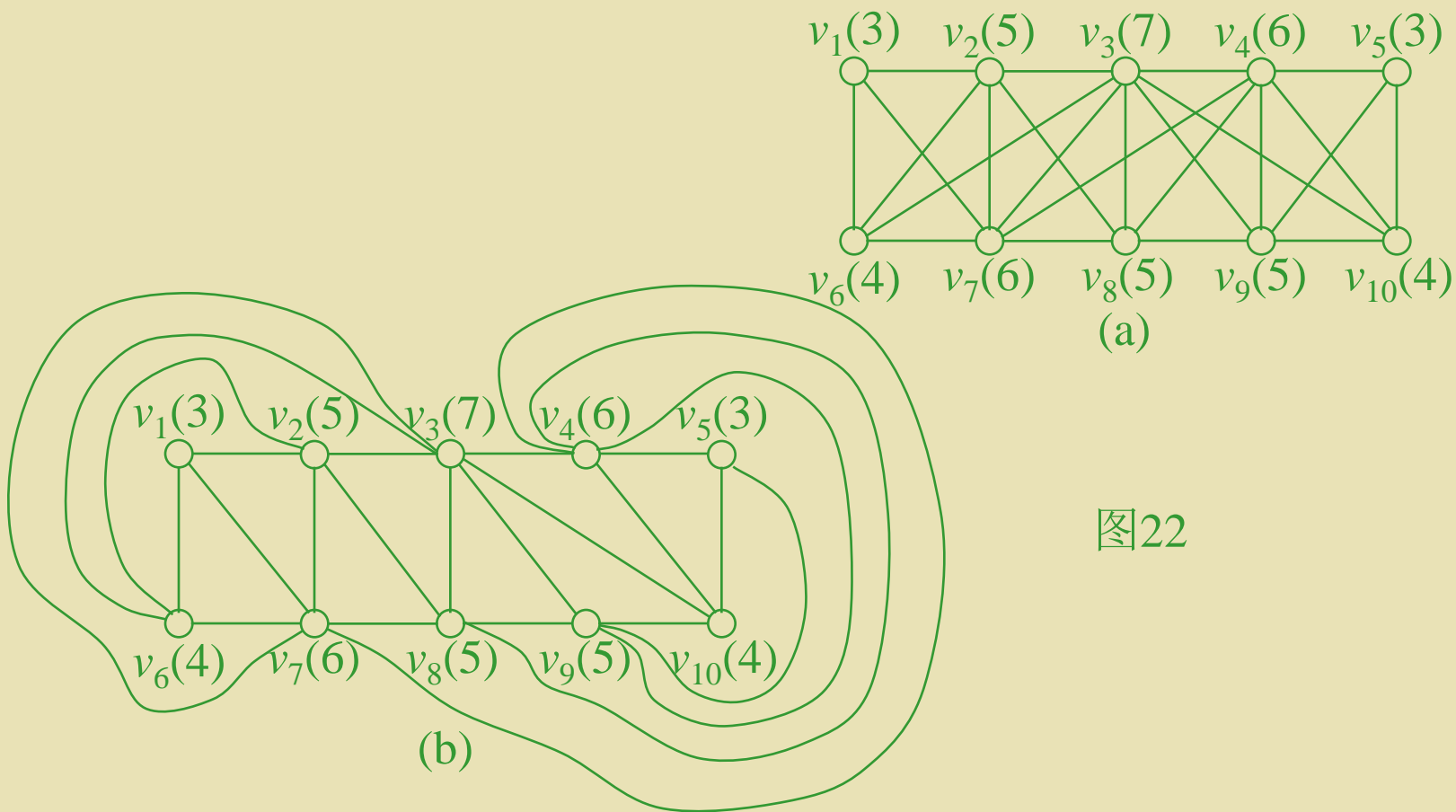


图22

离散数学

◆K-技术(Kuratowski库拉托斯基--技术)

(1). 在一图中两结点间，增加平行边(重复边)或删除平行边。不会改变该图的平面性；

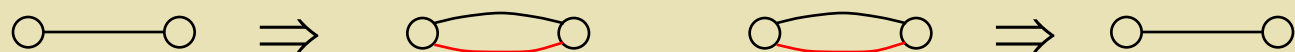


图23(a)

(2). 在一图中两结点间已有的边上，增加一个2-度结点，从而使一条边分为两条边。不会改变该图的平面性；

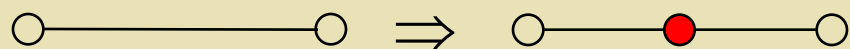
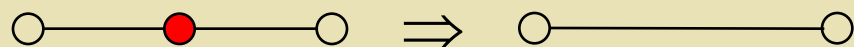


图23(b) 2-度结点

(3). 在一图中两结点间，删去另一个与此二结点相邻的2-度结点，从而使两条边合为一条边。不会改变该图的平面性。



2-度结点

图23(c)

离散数学

注：●所谓对一个图使用 K -技术不会改变图的平面性是指：
原来是平面图，使用 K -技术后仍为平面图；
原来是非平面图，使用 K -技术后仍为非平面图。

由前面的讨论可以看到： K_5 和 $K_{3,3}$ 是两个最小(结点数最少)的非平面图。1930年，波兰数学家Kuratowski，利用 K_5 和 $K_{3,3}$ 这两个最小的非平面图，给出了判定图的平面性的一个充分必要条件，叙述如下：

定理2.(Kuratowski-平面图最后定理(1930))

设 $G=(V,E)$ 是无向图。那么，图 G 是平面图 \Leftrightarrow

(1)图 G 中无一子图与 K_5 或 $K_{3,3}$ 同构；

(2)图 G 中无一经由 K -技术所得的子图与 K_5 或 $K_{3,3}$ 同构。

(1) (2)

[证].证明很长、很复杂，省略。有兴趣者请参看王朝瑞《图论》P₁₆₉，或别的作者的专著。

离散数学

例15. Petersen-图不是平面图

因为我们能够按如下过程、找到一个经由 K -技术所得的子图— K_6 的子图、与 $K_{3,3}$ 同构，故根据 K -氏定理可知， P -图不是平面图(参见图24(a)-(d))。

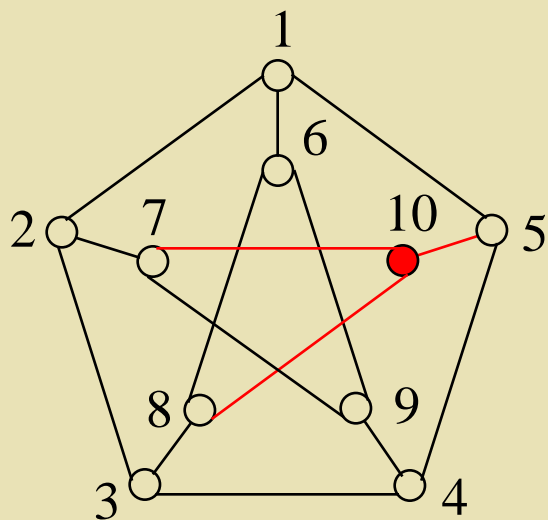


图24(a).P-图

删去红
色的边
和结点
 \Rightarrow

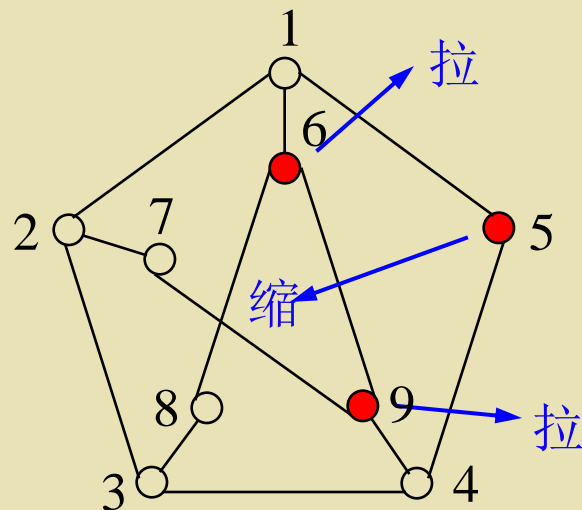


图24(b).P-图的子图

膨胀(拉
缩红色
的结点)
 \Rightarrow

离散数学

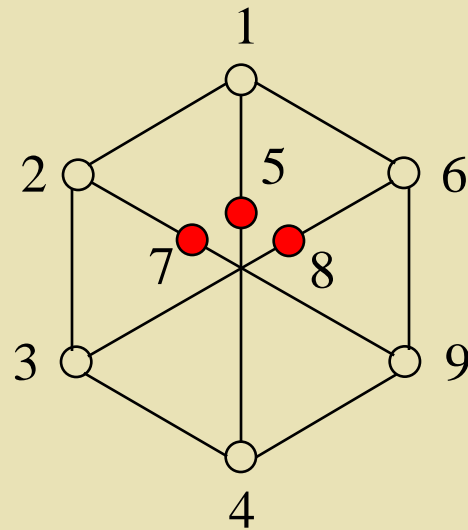


图24(c). P-图的子图

K -技术
(去掉红
色的结
点5,7,8)
 \Rightarrow

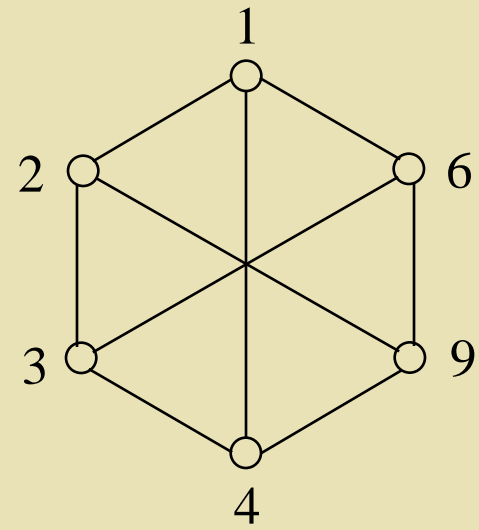


图24(d). K_6 的子图

图24



平面图是H-图的一个必要性判定定理

定理3.(格林贝格(Gringberg)(1968) - 柯车列夫(Kozyrev)定理)

设 $G=(V,E)$ 是无向图。那么,

平面图 G 有Hamilton-圈 $\Rightarrow \sum_{i=2}^n (i-2)(I_i - Q_i) = 0$ (*)

其中: n —是图 G 的结点数;

I_i —是H-圈内由 i 条边围成的区域个数;

Q_i —是H-圈外由 i 条边围成的区域个数。



[证].设图G的Hamilton-圈为H。由上例 知道：不在H上的边或者在H之内部，或者在H之外部。

(1)先考虑H的内部：设其间有d条边，由于是平面图，故这些边是互不相交的，因此每一条边都把它所经过的区域分成两部分，从而H内部应有d+1个区域，也就是说

$$d+1=\sum_{i=2}^n I_i \quad (1)$$

这里： n是图G中的结点个数；上述求和到n为止是明显的，因为图G中不存在有超过n条以上的边所围成的区域。

另外， 来计算围成这些内部区域的总边数(包括重复计数)，即计算 $\sum_{i=2}^n i \cdot I_i$ 。由于在计算中H内部的每条边都计算了两次，而H上的每条边(显然共n条)仅计算了一次，因此

$$2d+n=\sum_{i=2}^n i \cdot I_i = 2 \cdot I_2 + 3 \cdot I_3 + \dots + n \cdot I_n \quad (2)$$



解出(1)式中的d，并代入(2)式，可得

$$\sum_{i=2}^n i \cdot I_i = 2 \left(\sum_{i=2}^n I_i - 1 \right) + n = \sum_{i=2}^n 2 \cdot I_i + n - 2$$

从而

$$\sum_{i=2}^n (i-2) \cdot I_i = n - 2 \quad (3)$$

(2)次考虑H的外部：对H的外部进行完全相同的讨论，同理可得

$$\sum_{i=2}^n (i-2) \cdot Q_i = n - 2 \quad (4)$$

(3)-(4)，最后就得到(*)式

$$\sum_{i=2}^n (i-2)(I_i - Q_i) = 0 \quad \circ$$

例16.图25所示的图G显然是平面图，含有H-圈,满足条件(*)。其中： $n=8$

$$I_2=2, Q_2=0,$$

$$I_3=1, Q_3=1,$$

$$I_4=1, Q_4=1,$$

$$I_5=1, Q_5=1,$$

$$I_6=I_7=I_8=0;$$

$$Q_6=Q_7=Q_8=0;$$

所以 $\sum_{i=2}^8 (i-2)(I_i - Q_i) = 0。$

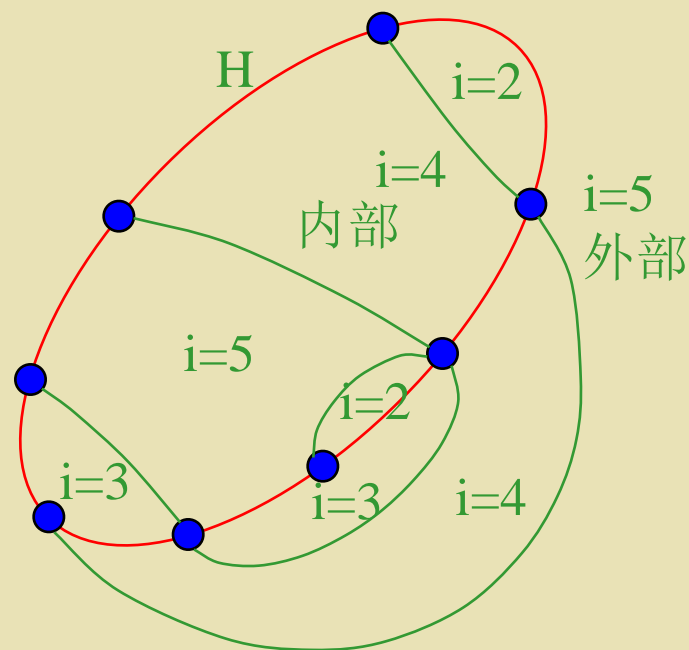


图25

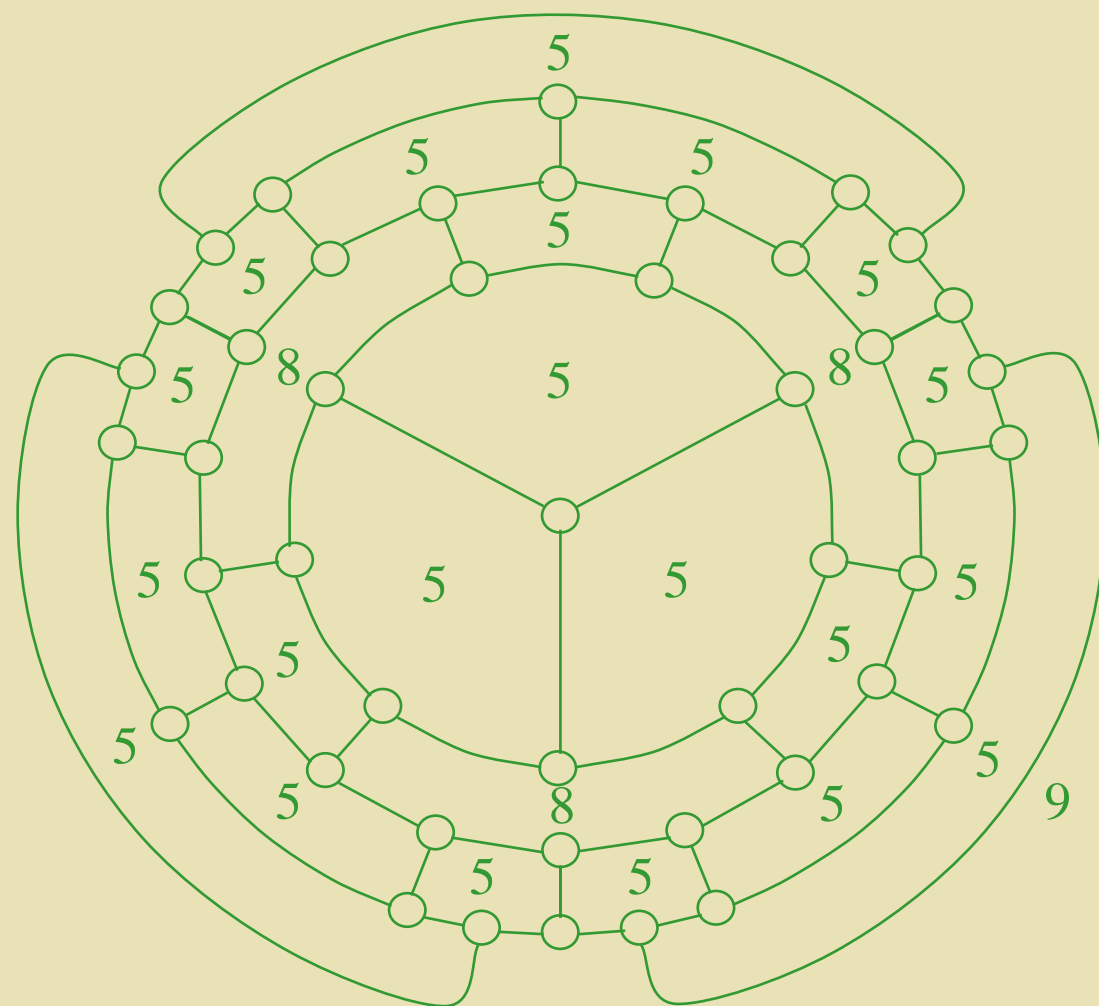


图26



◆四色定理

与平面图密切关联着的一个图论应用问题是平面图形的着色(参见 § 8 的一个注(3)将平面图的面染以颜色, 使相邻面的颜色不同;)。


这个问题最早起源于地图的着色。给一个地图中相邻国家着以不同的颜色, 最少需用多少种颜色?

一百五十多年前, 英国的格色里(Guthrie)猜想用四种颜色即可对地图进行着色—这就是著名的四色定理。

1879年, 肯普(Kempe)给出了四色定理的第一个证明; 1890年, 希伍德(Hewood)发现肯普的证明有一个漏洞, 实际上没有能够证明四色定理;

随后, 希伍德对肯普的证明方法加以改进, 据此他证明了五色定理(参见《图论及其应用》[美]J.A.邦迪 U.S.R.默蒂 著 吴望名 等译 P₁₆₆);

但是, 在以后的几十年里, 四色定理成了一个既令数学家感兴趣又令数学家头疼的悬而未决的问题;



1976年，美国阿肯色州伊利诺大学的两位数学家阿佩尔(Appel)和哈肯(Haken)借助于大型电子计算机，花费连续1000多个机时，而后宣布他们成功的证明了四色定理，证明长达两卷五百多页！

阿佩尔和哈肯的贡献在于考虑有限情况下的四色问题时，对于一个含有5-度结点的平面图，采用穷举法，分析了所有的(大约10万多个)可能情况，要证明出它们都能用四种颜色进行着色。借助于计算机，能很快的归纳(归约)出所有需要考虑的(大约2000多种)情况，然后再利用计算机对上述每一种情况进行分析和证明。

注：●四色定理的证明开创了数学和计算机结合起来完成某一重大数学难题的新局面。利用计算机的大容量、高速性，人们在组合分析，密码破解，基因解读等领域都取得了巨大的成绩；

●另一方面，数学家又把这种穷举法+计算机称为‘暴力破解法’，他们担心使用暴力破解法会破坏数学证明的因果性、简明性。

定义2.对偶图(dual graph)

设 $G=(V,E)$ 是平面图， R 是图 G 的区域集，并且 $|V|=n$ ， $|E|=m$ ， $|R|=r$ 。则平面图的对偶图 $G^d=(V^d,E^d)$ 是一(多重)无向图，其中：

$V^d=\{v_i^d: v_i^d \text{是在区域} r_i \text{中的结点} \wedge r_i \in R\}$;

$E^d=\{e_k^d: e_k^d=(v_i^d, v_j^d) \wedge v_i^d \text{在} r_i \text{中}$
 $\wedge v_j^d \text{在} r_j \text{中} \wedge e_k^d \text{与} e_k \text{相交} \wedge e_k \in E$
 $\wedge e_k \text{是} r_i \text{和} r_j \text{的公共边界}\}$;

并且 $|V^d|=r$ ， $|E^d|=m$ ， $|R^d|=n$ 。

例17.图27所示的平面图 G (红线)的对偶图 G^d 如图中蓝线所示。

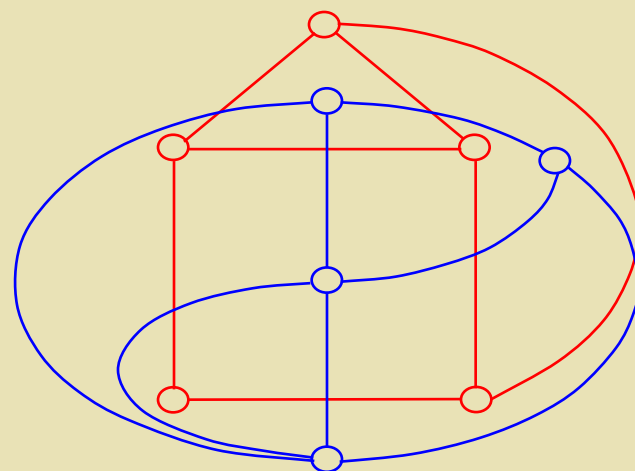



图27.图 G 及其的对偶图 G^d



注：●平面图G的对偶图 G^d 从拓扑学的角度来看，就是将图G的每个区域都收缩为结点，将图G的每个结点都扩张为区域；

●因此，平面图G的面着色问题就相当于其对偶图 G^d 的结点着色问题；所以，四色定理的证明就归结为含有5-度结点的平面图的结点着色问题；

●平面图G和它的对偶图 G^d 互为对偶,即 $(G^d)^d=G$ ；

●平面图G的对偶图 G^d 也满足Euler公式，即

$$|V^d|-|E^d|+|R^d|=r-m+n=n-m+r=|V|-|E|+|R|=2。$$

定理3.设 $G=(V,E)$ 是无向图。那么，

图G是可平面图 \Leftrightarrow 图G有对偶图 G^d 。

离散数学

§ 10 树 (tree)

- 自由树 (无向树)
- 生成树 (支撑树)
- 最优树 (最小生成树)
- 有根树 (有向树)

离散数学

§ 10.自由树 (无向树)

树概念产生于1875年，最初由大化学家A.Cayley在研究化学分子式的同分异构体—衍生物时提出。

树是图论中应用最广泛的一类图。它在物理学、化学及量子化学、管理学、运筹学、组合学、社会学等中都起着重要的作用，尤其是在计算机科学中起着非常重要的作用。

树概念及树理论在诸如数据库理论、数据结构、数据挖掘等这些研究数据的组织、关联和层次等模型的理论中都占有重要的地位。

树模型算法，尤其是分类、排序算法是算法设计中很重要的一大类算法。

树模型也是计算机科学中经常采用的重要设计模型；

离散数学

在人工智能及机器人设计、软件体系结构设计、层次控制结构设计、VLSI-设计理论、总线设计理论及网络设计理论中都有相应的树模型设计理论。

定义1.自由树(free tree) 无向树(undirected tree)

设 $G=(V, E)$ 是无向图。若图 G 是连通的且是无圈的，则称图 G 为自由树或无向树，简称树(tree)。

- 注：
- 树是连通的、无圈的无向图；
 - 树中度为1的结点(悬挂点)称为树叶(tree leaf)；
 - 树中度大于1的结点称为分枝点或树杈(crotch of a tree)；
 - 树中的边称为树枝(tree branch)。

例1.图1所示的图 G 是一棵树。

离散数学

定理1. 设 $G=(V, E)$ 是无向图，
 $|V|=n$ ， $|E|=m$ 。则下面六种
说法是等价的：

- (1) G 是一棵树(连通，无圈)；
- (2) G 中任一对结点间有且只有一条路可达；
- (3) G 连通，且 $m=n-1$ ；
- (4) G 无圈，且 $m=n-1$ ；
- (5) G 无圈，且给 G 中任一对结点间增加一条边时， G 中恰形成一圈；
- (6) G 连通，且在 G 中删去任一条边时， G 成为两个连通分图。

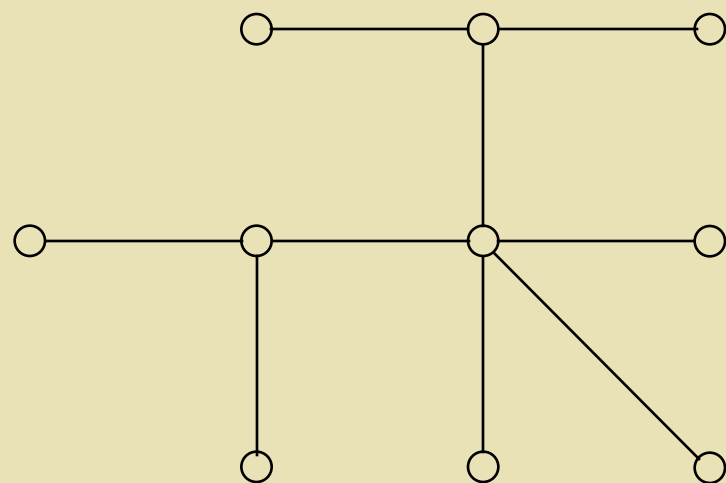


图1

离散数学

定义2.森林(forest)

设 $G=(V, E)$ 是无向图。若图 G 是无圈的，则称图 G 为森林。

注：●森林是无圈的无向图；

●森林中每一个连通分图都是一棵树，所以森林是由树构成的；

定理2.具有 n 个结点、 p 个分图的森林，有 $m=n-p$ 条边。

[证].比较容易，留给读者。

定义3.生成树(generating tree)

设 $G=(V, E)$ 是无向图， $\tilde{G}=(\tilde{V}, \tilde{E})$ 是 G 的生成子图，若 \tilde{G} 还是一棵树，则称 \tilde{G} 是 G 的一棵生成树或支撑树(shanning tree)。

黑线所示是图G的另一棵生成树。

●一个图不连通，肯定没有生成树；



G有生成树 \Leftrightarrow G是连通图。

[证]. \Rightarrow): G 的生成树结点数与 G 相同, 已知树中任意两点间均可达, 故 G 连通。

⇐): 若G连通, 则如下两个算法中的任一个都能保证找到G的一棵生成树, 因而G有生成树。

离散数学

“破圈”算法：

No1. 若G中无圈， **exit** 。G即为生成树；

No2. G中有圈C，在圈C上任意删去一边e；令
 $G := G \setminus \{e\}$ ， **goto** No1 。

注：此算法由山东师院管梅谷教授提出，因此也称为‘管氏破圈法’。

例3. 利用管氏破圈法求图8所示图G的一棵生成树。

带红叉的边被删去，黑粗线所示是求得的生成树。

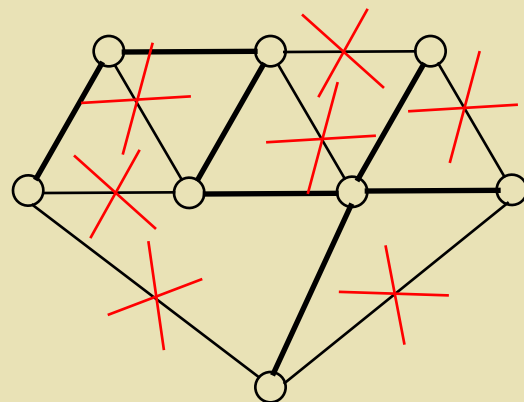


图8

离散数学

“避圈”算法：

设 $G=(V, E)$ ， $E=\{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ 。

No1. $T:=\{e_1\}$ ， $i:=1$ ， $k:=1$ ；

No2. $i:=i+1$ ，若 $T \cup \{e_i\}$ 无圈，则令

$T:=T \cup \{e_i\}$ ， $k:=k+1$ ；

No3. 若 $k=n-1$ 或 $i=m$ ，**exit**；否则，**goto** No2。

注：此算法由*Kruskal*提出，因此也称为‘*Kruskal*避圈法’。

例4.利用避圈法求图9所示图 G 的一棵生成树。

黑粗线所示是求得的生成树：

$T=\{e_1, e_2, e_4, e_6, e_8, e_{10}, e_{12}\}$ 。

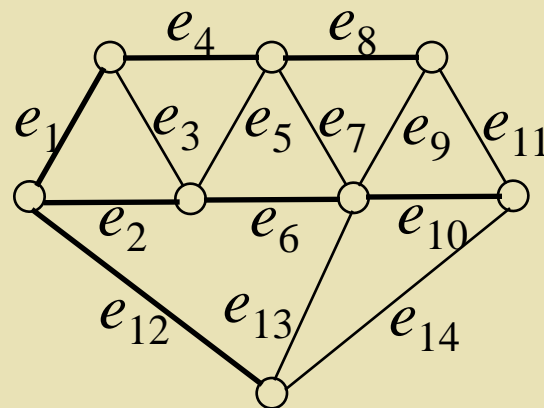


图9

离散数学

注：•管氏算法是求 G 的一个连通无圈的生成子图；
• *Kruskal* 算法是求 G 的一个无圈且 $m=n-1$ 的生成子图；
•根据定理1，由生成树的定义可知，这两种算法求出来的生成子图都是 G 的生成树。

定义4. 最优树(optional tree)

设 $G=(V, E, w)$ 是一网络(network)(即连通无向的带权图)，并且 $|V|=n$ ；设 $T=\{e_1, e_2, \dots, e_{n-1}\}$ 是 G 的一棵生成树， T 的总权和为：

$$w(T) = \sum_{i=1}^{n-1} w(e_i) \quad \circ$$

若有 G 的一棵生成树 T_0 ，使其总权和 $w(T_0)$ 在诸生成树中达到最小，即

$$w(T_0) = \min\{w(T) \mid T \text{ 是 } G \text{ 的生成树}\}$$

则称 T 是 G 的最小生成树或最优树。

离散数学

例5.图10的图G中红线所示是图G的一棵最优树。

注：●最优树一般不唯一，但最优值是唯一的；

●有生成树必有最优树；故在一个无向的带权图 G 中，存在一棵最优树的充要条件仍为 G 是连通的。

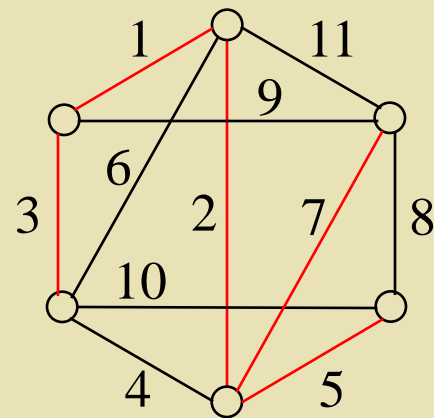


图10

求最优树的算法可选如下两个算法中的任一个：

离散数学

Kruskal算法：求出一网络 G 的一棵最优树 T

设 $G=(V, E, w)$ ，并且 $|V|=n$ ， $|E|=m$ 。

N01. 先把边集 E 中之边按权排对(由小到大)为

$E=\{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ ，使得

$\forall i, j \in N_m, i < j \Rightarrow w(e_i) < w(e_j)$ ； /*若两边权相同，即 $w(e_i)=w(e_j)$ ，则可将其中之一加上百万分之一。 * /

N02. $i:=1, k:=1, \varepsilon_1:=e_1, T:=\{\varepsilon_1\}$ ；

N03. $i:=i+1$ ，若 $T \cup \{e_i\}$ 无圈，则令

$k:=k+1, \varepsilon_k:=e_i, T:=T \cup \{\varepsilon_k\}$ ；

N04. 若 $k=n-1$ 或 $i=m$ ，**exit**； 否则，**goto** N03。 /*最后，所求之最优树为 $T=\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{n-1}\}$ 。 * /

例子参见例5图10。

离散数学

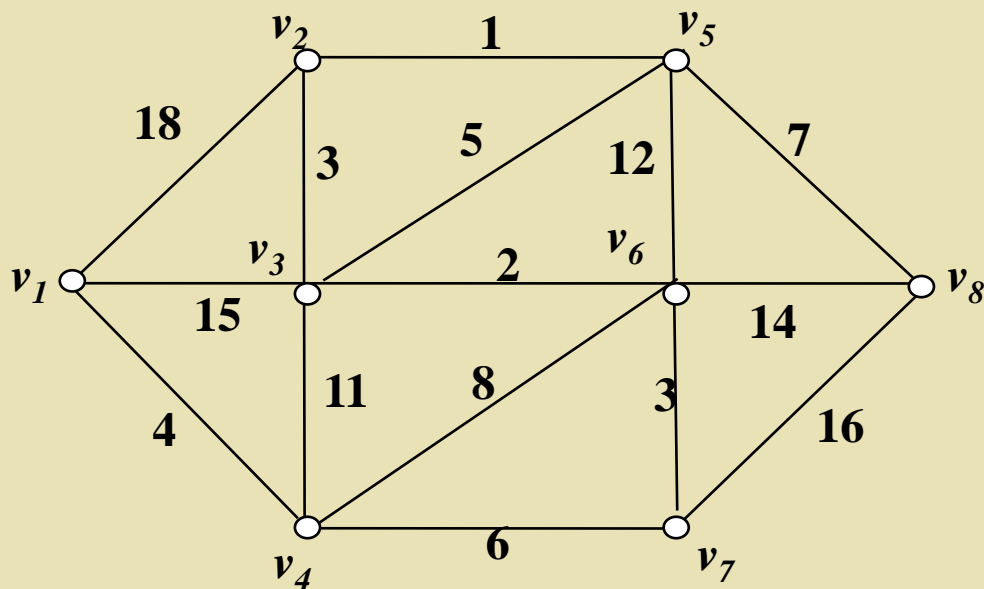
管氏破圈算法(1975): 发表在《数学的实践与认识》1975

N₀1. 若G中无圈, 则G已为最小生成树, **exit** ;

N₀2. 任找G中一圈C, 在圈C上删去权最大者, 边e;

N₀3. $G := G \setminus \{e\}$, **goto** N₀1 .

例子参见例5图10。



离散数学

[*Kruskal*算法的正确性证明].

即证此算法所得之树 $T=\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{n-1}\}$ ，确为最优树 T_0 ，即要证 $T=T_0$ 。

首先， T 确为树(无圈(作法)，边数 $n-1$ 条)，故 T 确为生成树；

其次，证 $T=T_0$ ，采用数学归纳法：

事实上， $\varepsilon_1 \in T_0$ 。否则若 $\varepsilon_1 \notin T_0$ ，观察 $T_0 \cup \{\varepsilon_1\}$ ，由于 T_0 也是树，故根据定理1(5)，其中必有一圈、也只有一

离散数学

圈 C ，在 C 上删去任一条不是 ε_1 的边 x ，则得另一树

$$T_1 := T_0 \cup \{\varepsilon_1\} \setminus \{x\}$$

显见 $w(T_1) < w(T_0)$ (因为 $w(\varepsilon_1) = w(e_1) < w(x)$ ，这是由于 $\varepsilon_1 := e_1$)，而这就与 T_0 是最优树矛盾。

假定 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_k \in T_0$ ($k < n-1$)，我们来证 $\varepsilon_{k+1} \in T_0$ 。

事实上， $\varepsilon_{k+1} \in T_0$ 。否则若 $\varepsilon_{k+1} \notin T_0$ ，观察 $T_0 \cup \{\varepsilon_{k+1}\}$ ，由于 T_0 也是树，故根据定理1(5)，其中必恰有一圈 C ，在 C 上删去任一条不属于 T 的边 x ，即 $x \in T_0 \setminus T$ (实际上，若没有这样的边 x ，则圈 C 上的边全由 T 中的边构成，于是 T 有圈 C ，从而与 T 是树无圈矛盾)，并且 $w(\varepsilon_{k+1}) < w(x)$ (否则 $w(x) < w(\varepsilon_{k+1})$ ，则 x 在 E 中的下标一定不超过 ε_k 在 E 中的下标，又由于 $x \notin T$ ，故此从从Kruskal算法可知， x 必与 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_k$ 中的一些边构成圈 C' (x 是算法抛弃的边))

离散数学

, 但 $x, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_k \in T_0$, 故此圈 $C' \in T_0$, 这与 T_0 是树矛盾), 则得另一树

$$T_2 := T_0 \cup \{\varepsilon_{k+1}\} \setminus \{x\}$$

且 $w(T_2) < w(T_0)$, 而这就与 T_0 是最优树矛盾。归纳完毕。

由 k 的任意性, 可知 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{n-1} \in T_0$, 所以 $T = T_0$ 。

证明完毕。

注: • 由于最小生成树是在带权图中产生的, 故求最小生成树算法实际上是前面两个求生成树算法的相应修改;

• *Kruskal* 算法理论性强, 而管氏破圈算法实用性好。

定义5. 有根树 (rooted tree)

设 $G=(V, E)$ 是一有向图。若

(1) G 中有一特殊结点 v_0 , 使 $\overrightarrow{\deg}(v_0)=0$, 称之为根 (root) 165

离散数学

- (2) 对于 G 中任何其它结点 v , $v \neq v_0$, 均有 $\overrightarrow{\deg}(v) = 1$;
- (3) v_0 到 G 中任何结点均有一条有向路可达;
- 则称 G 为有根树。

- 注:
- 只有一个根, 根可达任何结点(特别地, 根到根可达是规定);
 - 叶子(leaf): 出度为0的结点;
 - 内点(interior node): 非根非叶子的结点;
 - 枝(branch): 树中的有向边;
 - 父结点(father node): 对于结点 v , 若有结点 u , 使得有向边 $(u, v) \in E$, 则称 u 为 v 的父结点;
 - 子结点(son node): 对于结点 v , 若有结点 u , 使得有向边 $(v, u) \in E$, 则称 u 为 v 的子结点;
 - 兄弟(brother): 对于结点 v , 若有结点 u , u 和 v 具有共同的父结点, 则称 u 为 v 的兄弟;

离散数学

- 祖先(ancestors): 对于结点 v , 若有结点 u , 到 v 有一条有向路可达, 则称 u 为 v 的祖先;
- 后裔(descendant): 对于结点 v , 若有结点 u , v 到 u 有一条有向路可达, 则称 u 为 v 的后裔;
- 层(level): 根结点 v_0 是第0层; 若结点 v 的父结点是第 l 层, 则 v 是 $l+1$ 层;
- 高度(high): 离根最远的叶子的层数, 也称为深度(deep);
- 有根树边的方向是一致的, 都是从根指向叶子, 所以我们省略有根树边的方向。

例6.图11所示图 G 是一棵有根树, 根结点是 v_0 , 高度是3。

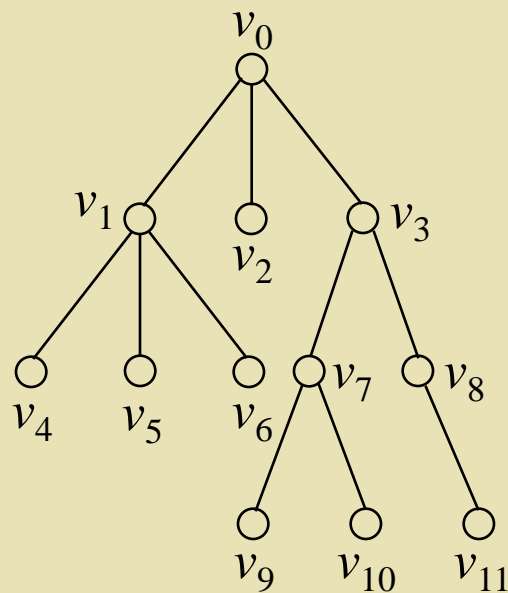


图11

离散数学

定义5'.有根树 的递归定义

有根树是具有非空有穷结点集的一个递归集合 T ，符合：

- (1)有一个参考点(reference node) v_0 ，称之为该树的根；
- (2)有若干个子有根树 T_1, T_2, \dots, T_k ，这些子树的根 $v_{01}, v_{02}, \dots, v_{0k}$ 刚好是根结点 v_0 的全部子结点。

定理4. 设 $G=(V, E)$ 是无向图。则

G 有生成树 $\Leftrightarrow G$ 是连通图。

[证]. \Rightarrow): 若 G 不连通，则 G 没有生成树，与已知条件： G 有生成树，矛盾。

\Leftarrow): 若 G 不连通，则如下两个算法中的任一个都能保证找到 G 的一棵生成树，因而 G 有生成树。

离散数学

定义2 设 T 为有根树，若给 T 的每一层结点规定了顺序，则称 T 为有序树。

定义3 设 T 为有根树，若对于任意结点 v ，有 $\deg(v) \leq m$ ，则称此有根树为 m 叉树。如果对每个结点 v 有 $\deg(v) = m$ 或者 $\deg(v) = 0$ ，则称此有根树为完全 m 叉树。

定义4 设 T 为 m 叉有序树，而且 T 的每一层上诸结点都有规定的位置，则称 T 为 m 叉位置树。

- ◆ 在 m 叉位置树中最重要的一种是二叉位置树，它在计算机科学中有着十分重要的应用。

离散数学

第八章 图论

重点要求

- ◆ 掌握图、无向图、有向图、结点及边的关联、邻接、结点的进度、出度、度、一些特殊的图、子图、完全图、同构、路、圈、路及圈的长度、结点之间的连通性与可达性、图的连通性与可达性、强连通性、单向连通性、弱连通性、强连通分图、单向连通分图、弱连通分图、割边等概念及相关性质,并能够判定或证明图的有关结论。
- ◆ 掌握求图中某一结点到其它任一结点的最短路的Dijkstra算法。
- ◆ 掌握求欧拉图和哈密顿图的概念及其判别性定理、判别法,能够利用C.L.Liu算法求欧拉圈,能够利用Fleury算法求欧拉路,能够利用K n ing算法求哈密顿路或密顿圈,能够利用翻边法求有向哈密顿路或有向密顿圈,能够利用管氏定理或Dijkstra算法求解中国邮路问题(最优欧拉圈),能够利用近邻法、交换法求解货郎担问题(最优哈密顿圈)。

离散数学

- ◆ 掌握偶图、匹配、完美匹配、最大匹配等概念，掌握偶图的判别性定理及判别法，能够利用匈牙利法以增广路求偶图的最大匹配。
- ◆ 掌握平面图、非平面图、区域(面) 等概念。 掌握平面图的欧拉公式及其必要性判别法、拉边法，了解Kuratowski平面图最后定理，并能用其判别一个图的平面性。
- ◆ 掌握树、树叶、树叉、树枝、森林、生成树、等概念。掌握树的若干等价命题，并能够利用它们判断或证明树的有关结论，掌握求连通图的生成树的破圈法和避圈法，掌握求带权连通图的最小生成树的Kruskal算法和管氏破圈算法。

离散数学

- ◆ 第八章 图论(2)
后四节到此
已经结束！

