离散数学

西安交通大学
计算机学院

离散数学

第四章 关系 (relation)

§1. 集合的叉积 **n元组**

§2.关系

§3.关系的表示 关系的性质

§4.关系的运算

§5. 等价关系

§6. 半序关系

离散数学

§1. 集合的叉积　n元组

定义1.　叉积，笛卡尔积

(cross product，　Cartesian product(1637))

n个集合A_1，　A_2，　…，　A_n的 n 维叉积定义为

$$\times_{i=1}^{n} A_i = A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$$

$$=\{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \mid a_i \in A_i (1 \le i \le n)\};$$

- n 维叉积$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$的每个元素$(a_1, a_2, \ldots, a_n)$都称为一个n元组（n-tuple）；

  即，叉积是元组的集合；

- 每个n元组$(a_1, a_2, \ldots, a_n)$的第i个位置上的元素a_i称为该n元组的第i个分量（坐标或投影）；元组各分量的顺序不能改变；

离散数学

- n 称为该叉积及其元组的维数；

- 两个元组相等⇔它们的维数相同且对应的分量相等。

即 $(a_1, a_2, \ldots, a_n) = (b_1, b_2, \ldots, b_m)$

$\Leftrightarrow \quad n=m \wedge (\forall i \in N)(1 \le i \le n)(a_i = b_i)$；

注：笛卡尔(1596-1650)，法国数学家， 1637年发表《方法论》之一《几何学》，首次提出坐标及变量概念。这里是其概念的推广。

离散数学

定义2.

- 二个集合A，B的(二维或二重)叉积定义为

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\};$$

- 其元素——二元组(a, b)通常称为序偶或偶对(ordered pair)；
- 二元组(a, b)的第一分量上的元素a称为前者；第二分量上的元素b称为后者；
- 二重叉积的A× B第一集合A称为前集；第二集合B称为后集。

离散数学

例1． A={ a,b,c }, B={0,1}

A×B={(a,0), (a,1), (b,0), (b,1), (c,0), (c,1)}

B×A={(0,a), (0,b), (0,c), (1,a), (1,b), (1,c)}

例2． A={张三,李四}，B={红花,黄花}

A×B={(张三,红花),(张三,黄花),(李四,红花),(李四,黄花)}

B×A={(红花,张三),(红花,李四),(黄花,张三),(黄花,李四)}

离散数学

一般地说，关于叉积和元组我们有：

(1) (a, b)≠ (b, a)；

(2) A×B ≠B × A ；

(3) 二元组不是集合，因为二元组中的分量计较顺序，而集合中的元素是不讲顺序的。

(4) 我们也可用二元组来递归的定义n元组如下：

$$(a,b,c)=((a,b),c)$$

… … …

$$(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n) = ((a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}), a_n)$$

(5) 这样，我们也就可用二重叉积来递归的定义n维叉积如下：

$$A\times B\times C=(A\times B)\times C$$

$$\cdots\ \cdots\ \ \cdots$$

$$A_1\times A_2\times \ldots\times A_{n-1}\times A_n=(A_1\times A_2\times \ldots\times A_{n-1})\times A_n$$

(6) 利用(5)所给的定义，我们可以递归的定义集合的叉积幂如下：

$$A^2 = A \times A$$

$$A^3 = A^2 \times A$$

$$\cdots$$

$$A^n = A^{n-1} \times A$$

(7)我们规定空集∅与任何集合A的叉积是空集∅。即 $A \times \varnothing = \varnothing = \varnothing \times A$

由于若偶对的第一分量或第二分量不存在就没有偶对存在，故规定它们的叉积集合为空集是合理的。

下列命题哪些是正确的

A　如果$A \subseteq B$且$C \subseteq D$，则$A \cup C \subseteq B \cup D$

B　如果$A \subset B$且$C \subset D$，则$A \cup C \subset B \cup D$

C　如果$A \times B \subseteq A \times C$，则$B \subseteq C$

D　如果$B \subseteq C$，则$A \times B \subseteq A \times C$

离散数学

下列命题哪些是正确的

A　如果$A \subseteq B$且$C \subseteq D$，则$A \cup C \subseteq B \cup D$　√

B　如果$A \subset B$且$C \subset D$，则$A \cup C \subset B \cup D$　×

如：$A=\{a,\}$, $B=\{a,c\}$,$C=\{b,c\}$, $D=\{a,b,c\}$

C　如果$A \times B \subseteq A \times C$，则$B \subseteq C$　×

如：$A=\varnothing$

D　如果$B \subseteq C$，则$A \times B \subseteq A \times C$　√

定理1. 设A,B,C,D是四个非空的集合。那么

$$A\times B = C\times D \Leftrightarrow A = C \wedge B = D \quad 。$$

[证].

⇐): （采用逻辑法）对任何的元素a,b

$(a,b)\in A\times B$

$\Leftrightarrow (a,b)\in C\times D$ (条件： $A = C \wedge B = D$ ）

所以 $A\times B = C\times D$ 。

$\Rightarrow$)：（采用逻辑法）对任何的元素a,b

$a \in A \wedge b \in B$

$\Leftrightarrow (a,b) \in A \times B$

$\Leftrightarrow (a,b) \in C \times D$ （条件：$A \times B = C \times D$ ）

$\Leftrightarrow a \in C \wedge b \in D$

所以 $A = C \wedge B = D$ 。

定理2 . 设A,B,C是三个非空集合。则

(1)左分配律：$A\times(B\cup C) = (A\times B)\cup(A\times C)$

(2)左分配律：$A\times(B\cap C) = (A\times B)\cap(A\times C)$

(3)右分配律：$(A\cup B)\times C = (A\times C)\cup(B\times C)$

(4)右分配律：$(A\cap B)\times C = (A\times C)\cap(B\times C)$

离散数学

[证]. 只证(1) $A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$

（采用逻辑法）

对任何的元素a,b

$(a,b)\in A\times(B\cup C)$

$\Leftrightarrow a\in A\wedge b\in B\cup C$

$\Leftrightarrow a\in A\wedge(b\in B\vee b\in C)$

$\Leftrightarrow (a\in A\wedge b\in B)\vee(a\in A\wedge b\in C)$

(分配律：$p\wedge(q\vee r)\Leftrightarrow(p\wedge q)\vee(p\wedge r)$)

$\Leftrightarrow (a,b)\in A\times B\vee(a,b)\in A\times C$

$\Leftrightarrow (a,b)\in(A\times B)\cup(A\times C)$

所以 $A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$ 。

$a\overline{R}b$

离散数学

§2 .关系

一. 关系的基本概念

定义1 . 二元关系(binary relation)

设A, B是两个非空的集合。

- 二重叉集A×B 的任何一个子集R都称为是从集合A到集合B的一种二元关系。即 $R \subseteq A \times B$;
- 当 $(a,b) \in R$ 时，称a与b有关系R ，记为 aRb ;
- 当 $(a,b) \notin R$ 时，称a与b没有关系R ，记为 $a\overline{R}b$ 或 $a \not{R} b$;
- 当A=B时，即 $R \subseteq A \times A$，则称R是A上的一个二元关系。

例1． 设A是西安交通大学全体同学组成的集合。

$R=\{(a,b) \mid a\in A\wedge b\in A\wedge a$ 与 b 是同乡$\}\subseteq A\times A$

于是，R是西安交通大学同学之间的同乡关系。

例2． 设N是自然数集合。

$$R=\{(a,b) \mid a\in N\wedge b\in N\wedge a|b\}\subseteq N\times N$$

则R就是自然数集合上的整除关系。

例3． 设A是某一大家庭。

$R_1 = \{(a,b) \mid a \in A \wedge b \in A \wedge a\text{是}b\text{的父亲或母亲}\} \subseteq A \times A$

$R_2 = \{(a,b) \mid a \in A \wedge b \in A \wedge a\text{是}b\text{的哥哥或姐姐}\} \subseteq A \times A$

$R_3 = \{(a,b) \mid a \in A \wedge b \in A \wedge a\text{是}b\text{的丈夫或妻子}\} \subseteq A \times A$

于是，

R_1是父母与儿女之间的关系，即父母子女关系；

R_2是兄弟姐妹之间的关系，即兄弟姊妹关系；

R_3是夫妻之间的关系，即夫妻关系。

离散数学

例4 . 设 I 是整数集合。

$R=\{(a,b) \mid a\in I\wedge b\in I\wedge(\exists k\in I)(a-b=k\cdot m)\}\subseteq I\times I$

则R就是整数集合上的(模m)同余关系。

例5 . 设A是某一大型FORTRAN程序中诸程序块的集合。

$R=\{(a,b) \mid a\in A\wedge b\in A\wedge a$调用(call)$b\}\subseteq A\times A$

则R就是程序块集合上的调用关系。

例6 . 设A = {风，马，牛}，

R = { (风,马)，(马,牛) }$\subseteq A\times A$

则R是A上的一个二元关系。

关于关系概念，我们还有如下的几个定义和说明：

1° 全关系(full relation)：

关系$R=A\times B$称为全关系；

2° 空关系(empty relation)：

关系$R=\varnothing$称为空关系；

- 空关系和全关系都是平凡关系；

3° 幺关系或单位关系(identical relation)：

关系$R=\{(a,a)\mid a\in A\}\subseteq A\times A$称为A上的幺关系；

例7. 设A={1,2,3,4}，则

$R_1=\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4)\}$是幺关系；

$R_2=\{(1,1),(2,3),(3,4),(4,4)\}$不是；

$R_3=\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(1,2)\}$也不是；

离散数学

4° 关系的交，并，补运算：

- 叉积是一种（新型的）集合；关系是叉积的子集；因此，关系也是一种（新型的）集合；

- 从而，有关集合论的一切概念、论述、运算也都适合于关系；

- 尤其是集合的交，并，补，差运算也都适合于关系；因此，关系也有交，并，补，差运算；

例8 . 设N是自然数集合。

R=小于关系=$\{(m,n) \mid m\in N\wedge n\in N\wedge m<n\}\subseteq N\times N$

S=整除关系=$\{(m,n) \mid m\in N\wedge n\in N\wedge m|n\}\subseteq N\times N$

则

$R' =$

$R\cup S=$

$R\cap S=$

$R \setminus S=$

$S \setminus R=$

例8 . 设N是自然数集合。

R=小于关系=$\{(m,n) \mid m\in N \wedge n\in N \wedge m<n\} \subseteq N\times N$

S=整除关系=$\{(m,n) \mid m\in N \wedge n\in N \wedge m|n\} \subseteq N \times N$

则

R’ =大于等于关系(≥);

$R\cup S=$

$R\cap S=$

$R\backslash S=$

$S\backslash R=$

例8 . 设N是自然数集合。

R=小于关系$=\{(m,n) \mid m\in N \wedge n\in N \wedge m<n\}\subseteq N\times N$

S=整除关系$=\{(m,n) \mid m\in N \wedge n\in N \wedge m|n\}\subseteq N\times N$

则

R' =大于等于关系($\geq$);

$R\cup S$=小于等于关系($\leq$) ;

$R\cap S=$

$R\setminus S=$

$S\setminus R=$

例8 . 设N是自然数集合。

R=小于关系=$\{(m,n) \mid m\in N\wedge n\in N\wedge m<n\}\subseteq N\times N$

S=整除关系=$\{(m,n) \mid m\in N\wedge n\in N\wedge m|n\}\subseteq N\times N$

则

R'=大于等于关系($\geq$);

$R\cup S$=小于等于关系($\leq$) ;

$R\cap S$=不相等的整除关系($\neq\wedge|$);

$R\setminus S$=

$S\setminus R$=

例8 . 设N是自然数集合。

R=小于关系=$\{(m,n) \mid m\in N \wedge n\in N \wedge m<n\}\subseteq N\times N$

S=整除关系=$\{(m,n) \mid m\in N \wedge n\in N \wedge m|n\}\subseteq N \times N$

则

R’ =大于等于关系($\geq$);

$R\cup S$=小于等于关系($\leq$) ;

$R\cap S$=不相等的整除关系($\neq\wedge|$);

R\S=小于又不整除关系($< \wedge\nmid$);

S\R=

例8 . 设N是自然数集合。

R=小于关系$=\{(m,n) \mid m\in N \wedge n\in N \wedge m<n\}\subseteq N\times N$

S=整除关系$=\{(m,n) \mid m\in N \wedge n\in N \wedge m|n\}\subseteq N \times N$

则

R' =大于等于关系($\geq$);

$R\cup S$=小于等于关系($\leq$) ;

$R\cap S$=不相等的整除关系($\neq\wedge|$);

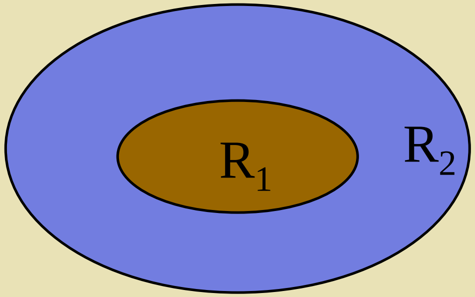
$R\backslash S$=小于又不整除关系($< \wedge\nmid$);

$S\backslash R$=相等关系($=$) 。

离散数学

5° 关系的扩充(expansion)：

若$R_1 \subseteq R_2$，则称关系R_2是关系R_1的一个扩充；



6° n元关系：

n元关系R是n 维叉积的一个子集；即

$$R \subseteq A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$$

离散数学

定义3. 前域(domain) 后域(codomain)

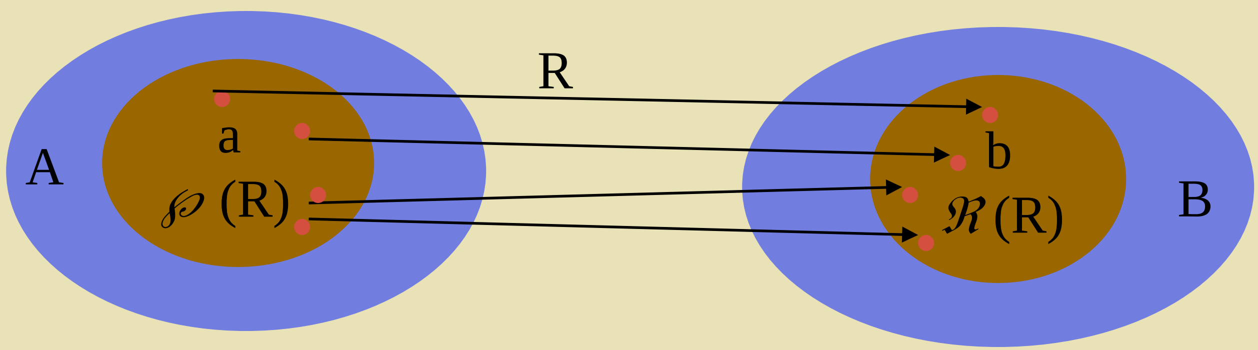
设A, B是两个非空集合，$R \subseteq A \times B$是一关系。则关系R的

- 前域：D(R)

$$\wp(R) = \{ a \mid a \in A \wedge (\exists b \in B)(aRb) \} \subseteq A \text{ ;}$$

- 后域：R(R)

$$\Re(R) = \{ b \mid b \in B \wedge (\exists a \in A)(aRb) \} \subseteq B \text{ 。}$$



离散数学

例9． 设A={1,2,3,4}， B={2,4,6,8,10} 。

$R=\{(1,2),(2,4),(3,6)\}$。

则 $\wp(R) = \{1,2,3\} \subseteq A$ ，

$\Re(R) = \{2,4,6\} \subseteq B$ 。

离散数学

二. 关系的一些关联性质

定理1. 设$R_1,R_2 \subseteq A\times B$是两个关系。若 $R_1 \subseteq R_2$，则 (1)保序性：$\wp(R_1) \subseteq \wp(R_2)$；

(2)保序性：$\Re(R_1) \subseteq \Re(R_2)$；

[证]. 只证(1)（采用逻辑法）对任何元素$a \in A$，

$$a \in \wp(R_1)$$

$$\Leftrightarrow a\in A\wedge(\exists b\in B)((a,b)\in R_1) \quad (前域的定义)$$

$$\Rightarrow a\in A\wedge(\exists b\in B)((a,b)\in R_2) \quad (条件：R_1 \subseteq R_2)$$

$$\Leftrightarrow a\in A\wedge(\exists b\in B)(a\, R_2\, b)$$

$$\Leftrightarrow a \in \wp(R_2)$$

所以 $\wp(R_1) \subseteq \wp(R_2)$。

离散数学

定理2 . 设R_1, R_2是$A\times B$上的两个二元关系。则

(1) $\wp(R_1 \cup R_2) = \wp(R_1) \cup \wp(R_2)$

(2) $\Re(R_1 \cup R_2) = \Re(R_1) \cup \Re(R_2)$

(3) $\wp(R_1 \cap R_2) \subseteq \wp(R_1) \cap \wp(R_2)$

(4) $\Re(R_1 \cap R_2) \subseteq \Re(R_1) \cap \Re(R_2)$

[证]. 只证(1)，(3)

(1) $\wp(R_1 \cup R_2) = \wp(R_1) \cup \wp(R_2)$

先证：$\wp(R_1) \cup \wp(R_2) \subseteq \wp(R_1 \cup R_2)$

(采用包含法)

由于 $R_1 \subseteq R_1 \cup R_2$，$R_2 \subseteq R_1 \cup R_2$，

依定理1，有 $\wp(R_1) \subseteq \wp(R_1 \cup R_2)$，

$\wp(R_2) \subseteq \wp(R_1 \cup R_2)$

故根据第一章§2定理2的(3′)，就可得

$\wp(R_1) \cup \wp(R_2) \subseteq \wp(R_1 \cup R_2)$。

离散数学

次证： $\wp(R_1 \cup R_2) \subseteq \wp(R_1) \cup \wp(R_2)$

(采用元素法)

对任何元素 $a \in A$ ， 若 $a \in \wp(R_1 \cup R_2)$，

则存在 $b \in B$ ， 使得

$$(a,b) \in R_1 \cup R_2,$$

从而有 $(a,b) \in R_1$ 或者 $(a,b) \in R_2$

于是 $a \in \wp(R_1)$ 或者 $a \in \wp(R_2)$

故此 $a \in \wp(R_1) \cup \wp(R_2)$

所以 $\wp(R_1 \cup R_2) \subseteq \wp(R_1) \cup \wp(R_2)$ 。

(3) $\wp(R_1 \cap R_2) \subseteq \wp(R_1) \cap \wp(R_2)$

先证： $\wp(R_1 \cap R_2) \subseteq \wp(R_1) \cap \wp(R_2)$

(采用包含法)

由于 $R_1 \cap R_2 \subseteq R_1$， $R_1 \cap R_2 \subseteq R_2$，

依定理1，有

$\wp(R_1 \cap R_2) \subseteq \wp(R_1)$， $\wp(R_1 \cap R_2) \subseteq \wp(R_2)$

故 根据第一章 § 2定理2的(3″)， 就可得

$\wp(R_1 \cap R_2) \subseteq \wp(R_1) \cap \wp(R_2)$ 。

其次，反方向的包含不成立。且看下面的反例。

例9．设 $R_1=\{(1,1),(2,2)\}$， $R_2=\{(1,2),(2,1)\}$。

由于 $R_1 \cap R_2 = \varnothing$， 故 $\wp(R_1 \cap R_2) = \varnothing$

但是，由于 $\wp(R_1) = \{1,2\}$， $\wp(R_2) = \{1,2\}$

故 $\wp(R_1) \cap \wp(R_2) = \{1,2\}$

所以 $\wp(R_1) \cap \wp(R_2) \not\subseteq \wp(R_1 \cap R_2)$。

离散数学

§3 .关系的表示　关系的性质

一．关系表示法

1° 关系的矩阵表示法

设关系$R \subseteq A \times B$， 这里A,B是两个非空的有限集合， $A=\{ a_1,a_2,a_3,\ldots,a_m \}$，

$B=\{ b_1,b_2,b_3,\ldots,b_n \}$ 。

则我们可用一个$m \times n$阶0-1矩阵M_R来表示关系R，我们称此矩阵M_R为关系R的关系矩阵(relation matrix)。

离散数学

$M_R=(x_{ij})_{m\times n}$， 其中

$$
x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{当}(a_i,b_j)\in R\text{时} \\ 0 & \text{当}(a_i,b_j)\notin R\text{时} \end{cases}
$$

(i=1,…,m ； j=1,…,n)

离散数学

例1． 设关系 $R \subseteq A \times B$ ，

$A=\{ a_1,a_2,a_3,a_4 \}$ ， $B=\{b_1,b_2,b_3\}$

$R =\{ (a_1, b_2),(a_1, b_3),(a_2, b_3),(a_3, b_1),(a_4, b_2)\}$。

于是，我们得到R的关系矩阵M_R为

$$M_R= \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} b_1 & b_2 & b_3 \end{array} \\ \begin{array}{c} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} ;$$

离散数学

例2． 设关系 $S \subseteq A \times A$ ，$A=\{a_1, a_2, a_3\}$ ，

$S=\{(a_1, a_1), (a_2, a_2), (a_3, a_3), (a_1, a_3), (a_3, a_1), (a_2, a_3), (a_3, a_2)\}$

于是，我们得到S的关系矩阵M_S为

$$M_S = \begin{array}{c} \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} a_1 & a_2 & a_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

2° 关系的图形表示法

设关系$R \subseteq A \times B$，这里A, B是两个非空的有限集合，$A=\{ a_1,a_2,a_3,\ldots,a_m \}$,

$$B=\{ b_1,b_2,b_3,\ldots,b_n \}。$$

则我们可用一个有向图$G_R=(V_R,E_R)$来表示关系R，我们称此有向图G_R为关系R的关系图(relation digraph)。

离散数学

- $V_R = A \cup B$，$E_R = R$；
- V_R中的元素称为结点，用小圆点表示；表示A中元素的结点放在左边一块；表示B中元素的结点放在右边一块；
- E_R中的元素称为边，用有向弧表示；若aRb(即$(a,b) \in R$)，则在表示a的结点和表示b的结点之间连一条有向弧。有向弧的始端与结点a相连，有向弧的终端与结点b相连；

离散数学

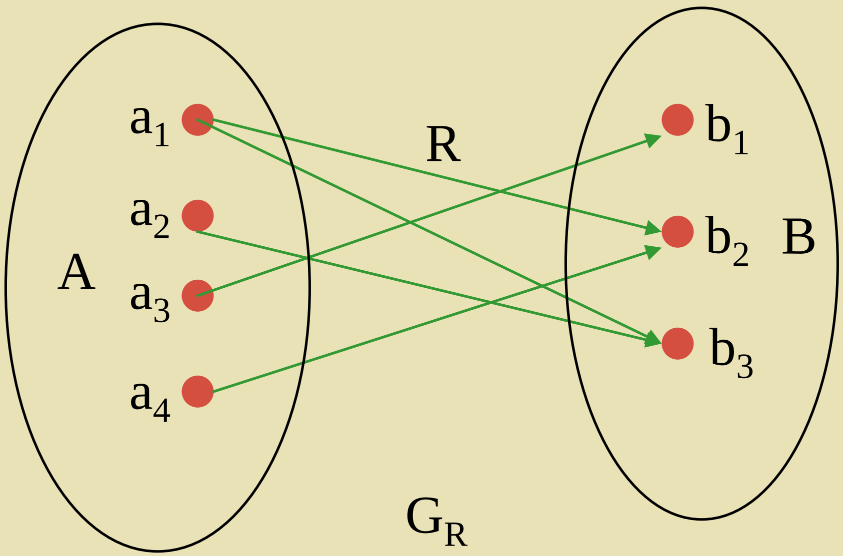
- 有时我们会用两个圆圈分别将表示两个集合A和B中元素的结点圈起来。
- 所有有向弧的始端结点构成$\wp$(R)；所有有向弧的终端结点构成$\Re$(R)。
- 若A=B，这时令V_R =A，并规定只画表示一个集合元素的结点；表示元素间关系的有向弧也只在此一个集合的结点间画出 。

例3． 设关系 $R \subseteq A \times B$，

$$A=\{ a_1,a_2,a_3,a_4 \}，\ B=\{b_1,b_2,b_3\}$$

$$R =\{ (a_1, b_2),(a_1, b_3),(a_2, b_3),(a_3, b_1),(a_4, b_2)\}$$

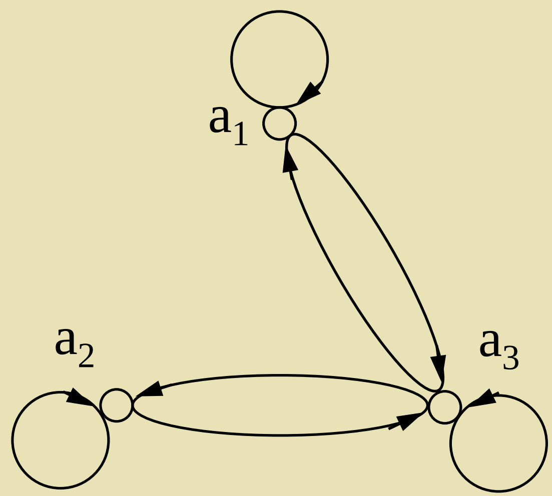
于是，我们得到R的关系图G_R为下图。



例4．设关系 $S \subseteq A \times A$ ，$A=\{a_1,a_2,a_3\}$ ，

$S = \{(a_1, a_1),(a_2, a_2),(a_3, a_3),(a_1, a_3),$
$(a_3, a_1),(a_2, a_3),(a_3, a_2)\}$

于是，我们得到S的关系图G_S为下图。



G_S

注：•图中各结点所带的小圆圈称为自反圈；一对结点间的来回边称为双向弧；否则，一对结点间只有一条边，则此边称为单向弧。

•关系的表示法有三种:集合表示法,矩阵表示法,图形表示法。

二．关系的性质

设二元关系$R \subseteq X \times X$（或者说$R \subseteq X^2$），这里$X \neq \varnothing$是一集合。则R称为是X上的

1° 自反关系(reflexive relation)：

当且仅当R满足自反性：$(\forall x \in X)(xRx)$；

显然，对于自反关系R，$\wp(R) = \mathscr{R}(R) = X$ 。

- 反自反关系(irreflexive relation)：

当且仅当R满足反自反性：

$(\forall x \in X)(x \not R x)$ 或 $(\forall x \in X)\neg(xRx)$；

离散数学

- 常见的自反关系有相等关系(=)，小于等于关系(≤)，包含关系(⊆)等；

 而不相等关系(≠)，小于关系(<)，真包含关系(⊂)等都不是自反关系，它们都是反自反关系。

注:

•自反性和反自反性是关系的两个极端性质；因此，自反关系和反自反关系是两种极端关系；

•从关系矩阵来看：自反关系关系矩阵的对角线上元素全是1；反自反关系关系矩阵的对角线上元素全是0；

•从关系图来看：自反关系关系图的各结点上全都有自反圈；反自反关系关系图的各结点上全都没有自反圈。

离散数学

例5. 设 $X=\{a,b,c,d\}$。

则关系 $R_1=\{(a,b),(a,a),(b,b),(c,d),(c,c),(d,d)\}$ 是X上的自反关系, 但不是X上的幺关系, 因 $(a,b), (c,d)\in R_1$;

而关系 $R_2=\{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d)\}$ 是X上的自反关系, 同时也是X上的幺关系;

$$R_3=\{(a,b),(a,c),(a,d),(c,d)\}$$

是X上的反自反关系。

注：由此例可知幺关系一定是自反关系，但自反关系不一定是幺关系。

3° 幺关系或单位关系(identical relation)：

关系$R=\{(a, a) \mid a \in A\} \subseteq A \times A$称为A上的幺关系；

例7. 设$A=\{1,2,3,4\}$，则

$R_1 = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4)\}$是幺关系；

$R_2 = \{(1,1), (2,3), (3,4), (4,4)\}$不是；

$R_3 = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (1,2)\}$也不是；

设二元关系$R \subseteq X \times X$（或者说$R \subseteq X^2$），这里$X \neq \varnothing$是一集合。则R称为是X上的

2° 对称关系(symmetric relation)：

当且仅当R满足对称性：

$(\forall x \in X)(\forall y \in X)(xRy \Rightarrow yRx)$；

3° 反对称关系(antisymmetric relation)：

当且仅当R满足反对称性：

$(\forall x \in X)(\forall y \in X)(xRy \wedge yRx \Rightarrow x = y)$；

离散数学

◆ 常见的对称关系有相等关系(=)，不相等关系(≠)，同余关系，朋友关系，同学关系，同乡关系等；

而小于等于关系(≤)，包含关系(⊆)，上下级关系，父子关系等都不是对称关系，它们都是反对称关系。

注:

• 对称性和反对称性是关系的两个极端性质；因此，对称关系和反对称关系是两种极端关系；

• 从关系矩阵来看：对称关系的关系矩阵是对称矩阵。即$x_{ij} = x_{ji}(1 \le i,j \le n)$；反对称关系的关系矩阵满足如下性质 $x_{ij} = 1 \Leftrightarrow x_{ji} = 0 \ (1 \le i,j \le n)$；

•从关系图来看：对称关系关系图的结点间若有弧则都是双向弧；反对称关系关系图的结点间若有弧则都是单向弧.

离散数学

例6. 设X={a,b,c}。则关系

$R_1=\{(a,b),(b,a)\}$，$R_2=\{(a,a),(b,b)\}$

都是X上的对称关系；而关系

$R_3=\{(a,b),(b,a),(b,c)\}$

不是X上的对称关系；因$(b,c)\in R_3$, 但$(c,b)\notin R_3$.

例7. 设X={a,b,c}。则关系

$R_1=\{(a,a),(a,b),(a,c),(c,b),(c,c)\}$

是X上的反对称关系；而关系

$R_2=\{(a,a),(a,b),(a,c),(b,a),(c,b)\}$

不是X上的反对称关系；因$(a,b)\in R_2$ 且$(b,a)\in R_2$, 但$a\neq b$。

离散数学

设二元关系$R \subseteq X \times X$（或者说$R \subseteq X^2$），这里$X \neq \varnothing$是一集合。则R称为是X上的

4° 传递关系(transitive relation)：

当且仅当R满足传递性：

$$(\forall x \in X)(\forall y \in X)(\forall z \in X)(xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz)\text{；}$$

- 反传递关系(antisymmetric relation)：

当且仅当R满足反传递性：

$$(\forall x \in X)(\forall y \in X)(\forall z \in X)(xRy \wedge yRz \Rightarrow x \not R z)\text{；}$$

离散数学

- 常见的传递关系有相等关系(=)，小于等于关系(≤)，包含关系(⊆)，整除关系，同余关系，上下级关系，同乡关系，后裔关系等;

　而不相等关系(≠)，父子关系，朋友关系，同学关系等都不是传递关系。

注：

- 传递性和反传递性是关系的两个极端性质；因此，传递关系和反传递关系是两种极端关系;
- 概念反传递性和反传递关系一般不甚用，所以不加讨论。

例8. 设X={a,b,c,d} 。则关系

$$R_1=\{(a,b),(b,c),(a,c),(c,d),(a,d),(b,d)\}$$

是X上的传递关系；而关系

$$R_2=\{(a,b),(b,c),(a,c),(c,d),(a,d)\}$$

不是X上的传递关系；因$(b,c)\in R_2$且$(c,d)\in R_2$，但$(b,d)\notin R_2$ 。

离散数学

例9. 设X是平面上直线的集合。平行关系

$$R=\{(x,y) : x\in X \wedge y\in X \wedge x /\!/ y\}$$

由平面几何的知识知:

若$x /\!/ y$且$y /\!/ z$，则 $x /\!/ z$ 。

由传递关系的定义知R是X上的传递关系。

例10. 设X是平面上三角形的集合。相似关系

$$R=\{(x, y) : x\in X \wedge y\in X \wedge x \backsim y\}$$

由平面几何的知识知:

若$x \backsim y$ 且$y \backsim z$ ，则 $x \backsim z$ 。

由传递关系的定义知R是X上的传递关系。

离散数学

- 相等关系是自反的、对称的、反对称的、传递关系。
- 全关系X^2是自反的、对称的、传递的。
- 幺关系I 是自反的、对称的、反对称的、传递的。
- 空关系∅是反自反的、对称的、反对称的、传递的。

$\breve{R}$

离散数学

§4 .关系的运算

1° 关系的逆运算

定义1. 逆运算(converse operation)

设A，B是两个非空的集合。对任何二元关系R⊆A×B，使得

$$\widetilde{R} = \{(b,a) \mid b \in B \wedge a \in A \wedge aRb\} \subseteq B \times A$$

为关系的逆运算；称 $\widetilde{R}$是R的逆关系(converse of relation) 。

显然，对任何(b,a)∈ B×A，$b\,\widetilde{R}\,a \Leftrightarrow aRb$;

并且 $M_{\breve{R}} = M_R^T$ 。

例1. 设A={a,b,c}，B={1,2}。则关系

R={(a,1),(a,2),(b,2),(c,1)} 的逆关系

$\widetilde{R}$={(1,a),(2,a),(2,b),(1,c)} 。

定理1. 逆运算基本定理

设两个关系$R\subseteq A\times B$，$S\subseteq A\times B$，这里A, B是两个非空的集合。则有

(1) 反身律：$\widetilde{\widetilde{R}}=R$；

(2) 保序性：$R\subseteq S\Rightarrow\widetilde{R}\subseteq\widetilde{S}$；

$R=S\Rightarrow\widetilde{R}=\widetilde{S}$；

(3) 分配律：$\widetilde{R\cup S}=\widetilde{R}\cup\widetilde{S}$；

(4) 分配律：$\widetilde{R\cap S}=\widetilde{R}\cap\widetilde{S}$；

(5) $\widetilde{X\times Y}=Y\times X$ ；

(6) $\widetilde{\varnothing}=\varnothing$ ；

(7)交换律：$\widetilde{(R')}=(\widetilde{R})'$ ；

(8)分配律：$\widetilde{R\backslash S}=\widetilde{R}\backslash\widetilde{S}$ ；

[证]. 只证(1)，(4)，(7) （采用逻辑法）

(1) 反身律： $\widetilde{\widetilde{R}}$ =R ;

对任何$(a,b)\in A\times B$， 有

$$(a,b)\in\widetilde{\widetilde{R}}$$

$$\Leftrightarrow (b,a)\in \widetilde{R}$$

$$\Leftrightarrow (a,b)\in R$$

所以 $\widetilde{\widetilde{R}} = R$ 。

(4) 分配律： $\widetilde{R\cap S}=\widetilde{R}\cap\widetilde{S}$ ；

对任何$(a,b)\in B\times A$，有

$$(a,b)\in\widetilde{R\cap S}$$

$$\Leftrightarrow (b,a)\in R\cap S$$

$$\Leftrightarrow (b,a)\in R \wedge (b,a)\in S$$

$$\Leftrightarrow (a,b)\in\widetilde{R} \wedge (a,b)\in\widetilde{S}$$

$$\Leftrightarrow (a,b)\in\widetilde{R}\cap\widetilde{S}$$

所以 $\widetilde{R\cap S}=\widetilde{R}\cap\widetilde{S}$ 。

离散数学

（7）对任何$(a,b) \in B \times A$，有

$$(a,b) \in \widetilde{(R')}$$

$$\Leftrightarrow (b,a) \in R'$$

$$\Leftrightarrow (b,a) \notin R$$

$$\Leftrightarrow (a,b) \notin \widetilde{R}$$

$$\Leftrightarrow (a,b) \in (\widetilde{R})'$$

所以 $\widetilde{(R')} = (\widetilde{R})'$ 。

2° 关系的合成运算

定义2. 合成运算(composition operation)

设A，B，C是三个非空的集合。对任何两个二元关系$R\subseteq A\times B$， $S\subseteq B\times C$， 使得 $R\circ S=\{(a,c)\mid a\in A\wedge c\in C\wedge(\exists b\in B)(aRb\wedge bSc)\}\subseteq A\times C$ 为关系的合成运算；称$R\circ S$是R与S的合成关系。

显然，对任何$(a,c)\in A\times C$，

$$a\,R\circ S\,c \Leftrightarrow (\exists b\in B)(aRb\wedge bSc)$$ 。

例2． 设A=$\{a_1,a_2,a_3\}$，B=$\{b_1,b_2\}$，C=$\{c_1, c_2, c_3, c_4\}$，关系 $R \subseteq A \times B$，$S \subseteq B \times C$

$$R = \{(a_1, b_1),(a_2, b_2),(a_3, b_1)\}$$

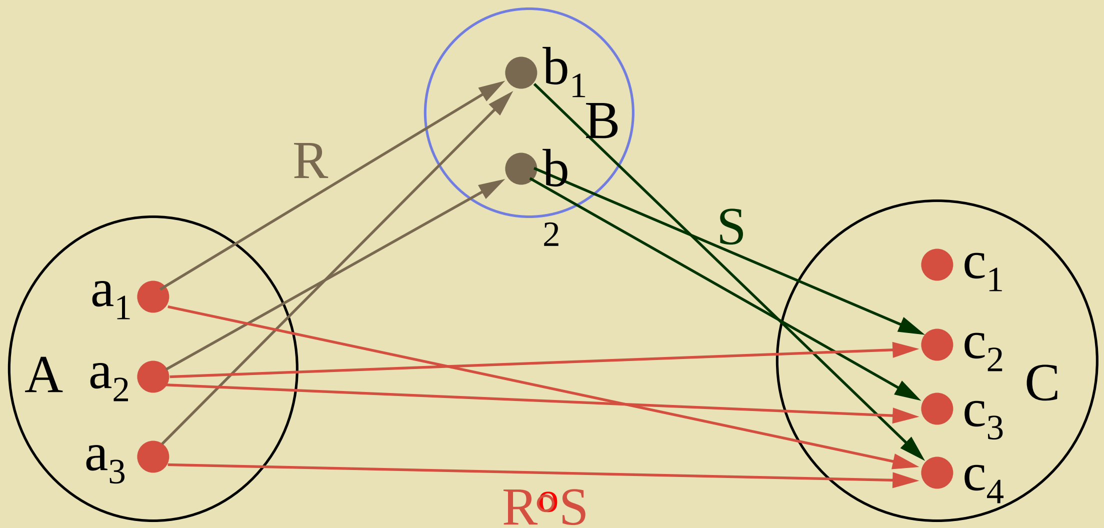
$$S = \{(b_1, c_4),(b_2, c_2),(b_2, c_3)\}$$

于是，我们得到R与S的合成关系为

$$R \circ S = \{(a_1, c_4),(a_2, c_2),(a_2, c_3),(a_3, c_4)\}$$

其合成关系的关系图为

离散数学



例3. 设A是老年男子的集合，B是中年男子的集合，C是青少年男子的集合。

R是由A到B的父子关系，　$R \subseteq A \times B$

S是由B到C的父子关系，　$S \subseteq B \times C$

则复合关系$R \circ S$是A到C的祖孙关系。

定理2. 合成运算基本定理

设$R, R_1, R_2 \subseteq A\times B$， $S, S_1, S_2 \subseteq B\times C$，$T \subseteq C\times D$，这里 A,B,C,D是四个非空的集合。则

(1) $R \circ \varnothing = \varnothing \circ S = \varnothing$;

(2) $\wp(R \circ S) \subseteq \wp(R)$; $\Re(R \circ S) \subseteq \Re(S)$;

(3) 保序性：$R_1 \subseteq R_2 \wedge S_1 \subseteq S_2 \Rightarrow R_1 \circ S_1 \subseteq R_2 \circ S_2$;

(4) 结合律：$R \circ (S \circ T) = (R \circ S) \circ T$;

(5)左分配律：$R\circ(S_1\cup S_2)=(R\circ S_1)\cup(R\circ S_2)$；

右分配律：$(S_1\cup S_2)\circ T=(S_1\circ T)\cup(S_2\circ T)$；

(6)左分配不等式：

$$R\circ(S_1\cap S_2)\subseteq(R\circ S_1)\cap(R\circ S_2);$$

右分配不等式：

$$(S_1\cap S_2)\circ T\subseteq(S_1\circ T)\cap(S_2\circ T);$$

(7) $\widetilde{(R\circ S)}=\widetilde{S}\circ\widetilde{R}$。

[证]. 书上P112页

- 但是合成运算不满足交换律。即，一般

$$R \circ S \neq S \circ R$$

例4. 设A={a,b,c,d,e}。则关系

$R=\{(a,b),(c,d),(b,b)\}$，

$S=\{(b,e),(c,a),(a,c),(d,b)\}$ 的合成关系为

$R \circ S= \{(a,e),(b,e),(c,b)\}$，

$S \circ R = \{(a,d),(c,b),(d,b)\}$

所以 $R \circ S \neq S \circ R$ 。

离散数学

3° 关系矩阵的合成运算

设$R \subseteq A \times B$， $S \subseteq B \times C$ 是两个二元关系，其合成关系为$R \circ S$。这里$A=\{ a_1,a_2,\ldots,a_m\}$，$B=\{b_1,b_2, \ldots, b_l\}$， $C=\{c_1, c_2, \ldots,c_n\}$。

并设它们的关系矩阵分别为

$$M_R=(x_{ij})_{m\times l}，\quad M_S=(y_{ij})_{l\times n}，\quad M_{R\circ S}=(u_{ij})_{m\times n}$$

则我们有： • $M_{R\circ S} = M_R \circ M_S$

其中：我们令 $M_R \circ M_S = (t_{ij})_{m\times n}$

$$t_{ij} = \bigvee_{k=1}^{l} (x_{ik} \wedge y_{kj}) \qquad (1\le i \le m, 1 \le j \le n)$$

注：这里关系矩阵的合成运算与《线性代数》中的一般矩阵的乘法运算颇为相似。所不同的是：乘法现在换成布尔乘(∧)；加法现在换成布尔加(∨)。值得注意的是：这里的布尔加1∨1=1（不进位），而非1∨1=0（进位）。

例5.设A={a,b,c,d,e} 。则关系

R={(a,b),(c,d),(b,b)}，S={(b,e),(c,a),(a,c),(d,b)}

的合成关系

R ο S= {(a,e),(b,e),(c,b)}

其关系矩阵分别为

$$M_R=\begin{pmatrix}0&1&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\quad M_S=\begin{pmatrix}0&0&1&0&0\\0&0&0&0&1\\1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\quad M_{R\circ S}=\begin{pmatrix}0&0&0&0&1\\0&0&0&0&1\\0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

离散数学

现在我们计算

$$M_R \circ M_S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

其中：

$$t_{25} = \bigvee_{k=1}^{5} (x_{2k} \wedge y_{k5})$$

$$=(x_{21} \wedge y_{15}) \vee (x_{22} \wedge y_{25}) \vee (x_{23} \wedge y_{35}) \vee (x_{24} \wedge y_{45}) \vee (x_{25} \wedge y_{55})$$

$$=(0 \wedge 0) \vee (1 \wedge 1) \vee (0 \wedge 0) \vee (0 \wedge 0) \vee (0 \wedge 0)$$

$$=0 \vee 1 \vee 0 \vee 0 \vee 0$$

$$=1$$

这说明 $M_{R \circ S} = M_R \circ M_S$ 。

4° 关系的复合幂与闭包

定义3. 关系的复合幂

设A是非空集合。$R \subseteq A \times A$， k为一正整数，规定

(1) $R^0 = I_A$

(2) $R^1 = R$

(3) $R^{m+1} = R^m \circ R$

称为关系R的复合幂。

定理3. 设A是非空集合，$R \subseteq A \times A$， m与n为非负整数， 则

(1)交换律： $R^m \circ R^n = R^{m+n} = R^n \circ R^m$

特别地： $I \circ R = R \circ I = R$

(幺关系是合成运算的幺元);

(2)交换律： $(R^m)^n = R^{mn} = (R^n)^m$

离散数学

[证]. (1) 固定 m，对 n 用数学归纳法

当 $n = 1$ 时， $R^m \circ R^1 = R^{m+1}$ （定义）

假设当 $n = k$ 时， $R^m \circ R^k = R^{m+k}$

那么当 $n = k+1$ 时，

$$
\begin{aligned}
R^m \circ R^{k+1} &= R^m \circ R^k \circ R^1 \\
&= R^{m+k} \circ R^1 \\
&= R^{m+k+1} \\
&= R^{m+(k+1)}
\end{aligned}
$$

由归纳法知，对任意 m、n 均有

$$R^m \circ R^n = R^{m+n}$$

离散数学

[证]. (2) 固定 m，对 n 用数学归纳法

当 $n = 1$ 时， $(R^m)^1 = R^m = R^{m*1}$

假设当 $n = k$ 时，有 $(R^m)^k = R^{mk}$

那么当 $n = k+1$ 时，

$$
\begin{aligned}
(R^m)^{k+1} &= (R^m)^k \circ R^m \\
&= R^{mk} \circ R^m \\
&= R^{mk+m} \\
&= R^{m(k+1)}
\end{aligned}
$$

由归纳法知，对任意m、n均有

$$(R^m)^n = R^{mn}$$

复合幂的注意要点：

(1) $R^0 = I_A = I$

$R^1 \circ R^0 = R^0 \circ R^1 = R^1 = R$

(2) $R^2 = R \circ R$

当$(a,b) \in R^2$时，有一个媒介元素 t， $t \in A$，使得$(a,t) \in R$ 且$(t,b) \in R$，即a,b有间接R关系。

当$(a,b) \in R^3$时，有两个媒介元素 t_1、t_2，使得$(a,t_1) \in R$，$(t_1,t_2) \in R$，$(t_2,b) \in R$，即a,b有二阶间接R关系。

当$(a,b) \in R^n$时，有n-1个媒介元素，a,b有n-1阶间接R关系。

(3)复合幂的并

$(a,b) \in R \cup R^2$　　直接、间接关系

$(a,b) \in R \cup R^2 \cup R^3$

直接、间接、二阶间接关系

$(a,b) \in R \cup R^2 \cup R^3 \cup \ldots\ldots \cup R^n$

a,b之间有不超过n-1阶间接关系

例6.设二元关系$R \subseteq A \times A$,这里 $A=\{a,b,c\}$,$R=\{(a,b),(c,b)\}$。从而有

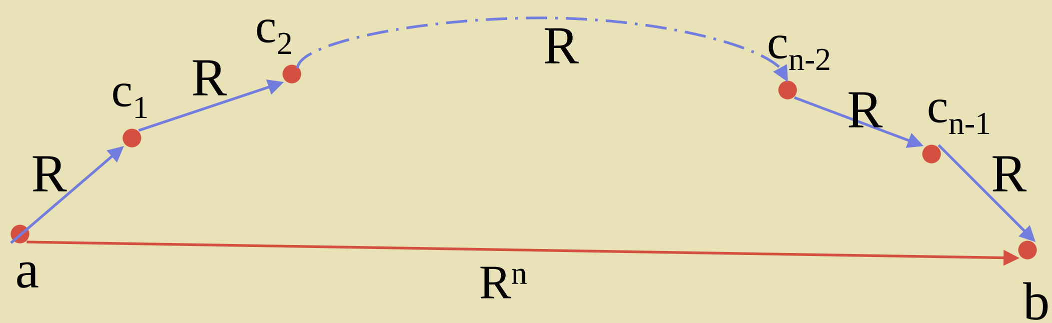
$$I=\{(a,a),(b,b),(c,c)\}，\tilde{R}=\{(b,a),(b,c)\}$$

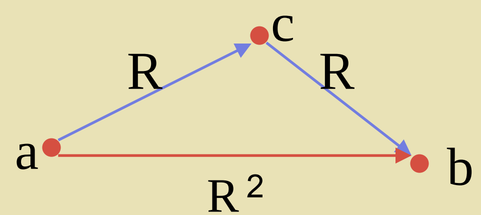
计算 $\tilde{R} \circ R$，$R \circ \tilde{R}$ 。

注：• 由定理2的(1)有：$\varnothing \circ R = R \circ \varnothing = \varnothing$，这说明空集是合成运算的零元。

•一般地 $a R^n b \Leftrightarrow (\exists c_1)(\exists c_2) \ldots (\exists c_{n-1})(aRc_1 \wedge c_1Rc_2 \wedge \ldots \wedge c_{n-1}Rb)$；

特别地 $a R^2 b \Leftrightarrow (\exists c)(aRc \wedge cRb)$。





定义4. 关系的闭包

设A是非空集合。$R \subseteq A \times A$，

$R^{+} = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} R^{k}$,称R^{+}为关系R的传递闭包。

$(a,b) \in R^{+}$, $\exists k\, (k \geq 1 \wedge (a,b) \in R^{k})$

$$R^{+} = R \cup R^{2} \cup R^{3} \cup \ldots\ldots \cup R^{\infty}$$

$R^{*} = \bigcup\limits_{k=0}^{\infty} R^{k}$,称R^{*}为关系R的自反传递闭包。

$(a,b) \in R^{*}$, $\exists k\, (k \geq 0 \wedge (a,b) \in R^{k})$

$$R^{*} = I \cup R \cup R^{2} \cup R^{3} \cup \ldots\ldots \cup R^{\infty}$$

定理4.传递闭包基本定理

设A是非空集合，$R \subseteq A \times A$， $S \subseteq A \times A$，则

(1) 对于每个自然数$m \geq 1$，有$R^m \subseteq R^+$

(2) R^+是传递关系

(3) 若$R \subseteq S$且S是传递关系，则$R^+ \subseteq S$

(4) 若$|A|=n$，则 $R^+ = \bigcup_{k=1}^{n} R^k$

(5)若R是传递关系，则 $R^+ = R$。

定理5.自反传递闭包基本定理

设A是非空集合，$R \subseteq A \times A$， $S \subseteq A \times A$，则

(1) 对于每个自然数$m \geq 0$，有$R^m \subseteq R^*$

(2) R^*是自反传递关系

(3) 若$R \subseteq S$且S是自反传递关系，则$R^* \subseteq S$

(4) 若|A|=n，则 $R^* = \bigcup_{k=0}^{n} R^k$

(5)若R是自反传递关系， 则 $R^* = R$ 。

练习

1 设R_1、R_2是非空集合A上的二元关系，请判断：

(1) R_1和R_2自反， $R_1 \circ R_2$ 自反。 √

(2) R_1和R_2反对称， $R_1 \cap R_2$ 反 对称 √

(3) R_1和R_2对称， $R_1 \circ R_2$ 对称 ×

(4) R_1和R_2对称， $R_1 \cup R_2$ 对称 √

(5) R_1和R_2传递， $R_1 \circ R_2$ 传递。 ×

(6) R_1和R_2传递， $R_1 \cup R_2$ 传递。 ×

2 设A={a,b,c,d}，$R \subseteq A \times A$，

R={(a,a) ,(b,b), (a,b) ,(c,d)}， 求R^+，R^* 。

离散数学

§5. 等价关系

1° 等价关系和等价类

定义1.等价关系(equivalence relation)

设二元关系$R\subseteq A\times A$。这里A是非空的集合。

R是A上的等价关系$\Leftrightarrow$R是自反的、对称的、传递的。

- 显然 $\wp(R) = \Re(R) = A$ (因为等价关系是自反的);

离散数学

例1.同乡关系是等价关系。

例2 .平面几何中的三角形间的相似关系是等价关系。

例3 .平面几何中的三角形间的全等关系是等价关系。

例4 .平面几何中的直线间的平行关系是等价关系。

离散数学

例5 .设N是自然数集，m是一正整数，

$R=\{(a,b) \mid a\in N \wedge b\in N \wedge a \equiv b \pmod{m}\}$

由等价关系的定义知R是N上等价关系；我们称R是N上的模m同余关系。

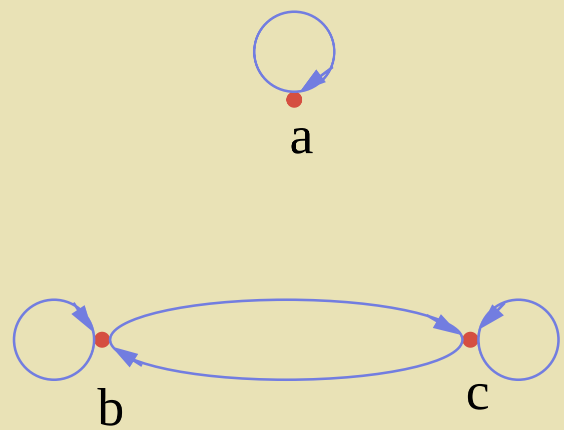
例6. 非空集合A上的幺关系、全关系都是等价关系。

例7. 非空集合A上的空关系不是等价关系(因为空关系不自反) 。

例8. 设二元关系R$\subseteq$ A×A,这里

A={a,b,c} , R={(a,a), (b,b), (c,c), (b,c),(c,b)}

则R是A上的等价关系。其关系图如下



- 等价关系的实质是将集合A中的元素进行分类。

定义2. 等价类(块)(equivalence classes (block))

设R是非空集合A上的等价关系。对任何元素a∈A，由a生成的(或者说是由a诱导出的)关于R的等价类定义为

$$\{b \mid b \in A \wedge bRa\}$$

记为$[a]_R$. (显然有$[a]_R \subseteq A$)。同时称a为等价类$[a]_R$的代表元。

定义3. 设R是非空集合A上的等价关系。我们定义集合

$$\Pi_R = \{[a]_R : a \in A\}$$

(注意：应去掉重复的类！)

为集合A关于等价关系R的商集。记为A/R。称A/R中元素的个数为R的秩。

例9. 设N是自然数集，m是一个正整数。R是N上的模m同余关系，即

$$R=\{(a,b) \mid a\in N \wedge b\in N \wedge a \equiv b \pmod{m}\}$$ 。

对于任何自然数a，b∈ N，

$$aRb \Leftrightarrow a \equiv b \pmod{m} \Leftrightarrow (\exists k\in I)(a-b=km)$$ ；

由等价关系的定义知R是N上的等价关系；

对于任何自然数a∈ N，以a为代表元的等价类

$$[a]_R = [a]_m =\{b \mid b\in N \wedge b \equiv a \pmod{m}\}$$；

离散数学

自然数集N关于等价关系R的商集

$N/R = \Pi_R = \{[0]_R,[1]_R,[2]_R,[3]_R,\ldots,[m-1]_R\}$；

或者记作

$N_m = N/\equiv\ = \Pi_\equiv = \{[0]_m,[1]_m,[2]_m,[3]_m,\ldots,[m-1]_m\}$；

商集N/R共有m个等价类，故R的秩为m；

特别地，取m =5，则有

$N_5 = \{[0]_5,[1]_5,[2]_5,[3]_5,[4]_5\}$；

又如 $[3]_5 = \{3,8,13,\ldots,5k+3,\ldots\}$ （这里：$k\in N$）。

例10. 设二元关系$R \subseteq A \times A$,这里

$A=\{a,b,c\}$, $R=\{(a,a), (b,b), (c,c), (b,c),(c,b)\}$

则R是A上的等价关系。等价关系R的等价类为

$[a]_R = \{a\}$,　　　$[b]_R = [c]_R = \{b,c\}$ ；

其商集为

$A/R= \Pi_R = \{[a]_R , [b]_R \}=\{\{a\},\{b,c\}\}$;

故其秩为2。

定理1. 设R是非空集合A上的等价关系。对任意的a,b∈A，有

(1)$a\in[a]_R$　(故$[a]_R\neq\varnothing$)　；

(2)aRb (即 $(a,b)\in R$) $\Leftrightarrow [a]_R=[b]_R$　；

(3)(3.1)　$[a]_R\cap[b]_R\neq\varnothing \Rightarrow [a]_R=[b]_R$

($\Rightarrow$ aRb，即 $(a,b)\in R$)；

(3.2)　$(a,b)\notin R \Rightarrow [a]_R\cap[b]_R=\varnothing$；

(4)两个等价类$[a]_R$和$[b]_R$，要么完全重合(即$[a]_R=[b]_R$)，要么不交(即$[a]_R\cap[b]_R=\varnothing$)；二者必居其一，也只居其一。

[证].（采用逻辑法）

(1) $a \in [a]_R$ (故$[a]_R \neq \varnothing$)

对任何元素a，有

$a \in A$

$\Rightarrow aRa$ (R是等价关系，故R自反)

$\Rightarrow a \in [a]_R$

$\Rightarrow [a]_R \neq \varnothing$;

(2) aRb (即 $(a,b)\in R$) $\Leftrightarrow [a]_R = [b]_R$

先证：$aRb \Rightarrow [a]_R = [b]_R$

为证$[a]_R = [b]_R$，须证

(a) $[a]_R \subseteq [b]_R$

对任何元素$x\in A$，有

$x\in[a]_R$

$\Rightarrow xRa$

$\Rightarrow xRa \wedge aRb$ (已知条件：aRb)

$\Rightarrow xRb$ (R是等价关系，故R传递)

$\Rightarrow x\in[b]_R$

所以 $[a]_R \subseteq [b]_R$

(b) $[b]_R \subseteq [a]_R$

对任何元素$x \in A$，有

$x \in [b]_R$

$\Rightarrow xRb$

$\Rightarrow xRb \wedge aRb$　(已知条件：aRb)

$\Rightarrow xRb \wedge bRa$　(R是等价关系，故R对称)

$\Rightarrow xRa$　(R是等价关系，故R传递)

$\Rightarrow x \in [a]_R$

所以　$[b]_R \subseteq [a]_R$

综合(a)和 (b)，即得 $[b]_R = [a]_R$；

离散数学

次证： $[a]_R = [b]_R \Rightarrow aRb$

$[a]_R \neq \varnothing$ (本定理的(1))

$\Rightarrow (\exists x_0 \in A)(x_0 \in [a]_R)$

$\Rightarrow (\exists x_0 \in A)(x_0 \in [a]_R \wedge x_0 \in [b]_R)$

(已知条件：$[a]_R = [b]_R$)

$\Rightarrow (\exists x_0 \in A)(x_0 R a \wedge x_0 R b)$

$\Rightarrow (\exists x_0 \in A)(a R x_0 \wedge x_0 R b)$

(R是等价关系，故R对称)

$\Rightarrow aRb$

(R是等价关系，故R传递)

(3)(3.1) $[a]_R \cap [b]_R \neq \varnothing \Rightarrow [a]_R = [b]_R$

($\Rightarrow$ aRb， 即 $(a,b)\in R$)

$[a]_R \cap [b]_R \neq \varnothing$

$\Rightarrow (\exists x_0 \in A)(x_0 \in [a]_R \cap [b]_R)$

$\Rightarrow (\exists x_0 \in A)(x_0 \in [a]_R \wedge x_0 \in [b]_R)$

$\Rightarrow (\exists x_0 \in A)(x_0 R a \wedge x_0 R b)$

$\Rightarrow (\exists x_0 \in A)(a R x_0 \wedge x_0 R b)$

(R是等价关系， 故R对称)

$\Rightarrow$ aRb (即 $(a,b)\in R$)

(R是等价关系， 故R传递)

$\Rightarrow [a]_R = [b]_R$

(本定理的(2)) ；

(3.2) $(a,b)\notin R \Rightarrow [a]_R \cap [b]_R = \varnothing$

(整体采用反证法)

若$(a,b)\notin R$，则 $[a]_R \cap [b]_R = \varnothing$ 。否则若

$[a]_R \cap [b]_R \neq \varnothing$

$\Rightarrow [a]_R = [b]_R$ (本定理的(3.1))

$\Rightarrow aRb$ (本定理的(2))

$\Rightarrow (a,b)\in R$

这就与已知条件：$(a,b)\notin R$ 矛盾；

离散数学

(4)两个等价类$[a]_R$和$[b]_R$，要么完全重合(即$[a]_R = [b]_R$)，要么不交(即$[a]_R \cap [b]_R = \varnothing$)；二者必居其一，也只居其一。

对任何序偶(a,b)

$(a,b) \in A \times A$

$\Rightarrow (a,b) \in R \vee (a,b) \notin R$ (二分法，互斥)

$\Rightarrow ([a]_R = [b]_R) \vee ([a]_R \cap [b]_R = \varnothing)$

(本定理的(3.1)和(3.2)，互斥)。

定义4. 设R和S是非空集合A上的两个等价关系。若$R \subseteq S$，则我们称R细于S，或S粗于R 。

例11. 设A是一非空集。则

(1) A上最细的等价关系是幺关系；即

$R_{细}=I_A$， $A/R_{细}=\{\{a\} \mid a \in A\}$ ；

(2) A上最粗的等价关系是全关系；即，

$R_{粗}=A \times A$， $A/R_{粗}=\{A\}$ 。

定理2. 设R和S是非空集合A上的两个等价关系。则

$$R\subseteq S\Leftrightarrow(\forall a\in A)([a]_R\subseteq [a]_S)\ 。$$

[证].（采用逻辑法）

先证：$R\subseteq S\Rightarrow (\forall a\in A)([a]_R\subseteq [a]_S)$

对任何元素$a\in A$，有

$$x\in [a]_R$$

$$\Rightarrow xRa$$

$$\Rightarrow xSa \qquad (\text{已知条件：}R\subseteq S)$$

$$\Rightarrow x\in [a]_S$$

所以 $[a]_R\subseteq [a]_S$

所以$(\forall a\in A)([a]_R\subseteq [a]_S)$；

离散数学

次证：$(\forall a\in A)([a]_R\subseteq [a]_S)\Rightarrow R\subseteq S$

对任何序偶$(a,b)\in A\times A$

$(a,b)\in R$

$\Rightarrow aRb$

$\Rightarrow bRa$ (R是等价关系，故R对称)

$\Rightarrow b\in[a]_R$

$\Rightarrow b\in[a]_S$

(已知条件：$(\forall a\in A)([a]_R\subseteq [a]_S)$)

$\Rightarrow bSa$

$\Rightarrow aSb$ (S是等价关系，故S对称)

$\Rightarrow (a,b)\in S$

所以 $R\subseteq S$ 。

定理3. 设R和S是非空集合A上的两个等价关系。则 $R=S \Leftrightarrow (\forall a \in A)([a]_R = [a]_S)$ 。

[证].(采用逻辑法)

$$
\begin{aligned}
& R=S \\
\Leftrightarrow\ & R \subseteq S \wedge S \subseteq R \\
\Leftrightarrow\ & (\forall a \in A)([a]_R \subseteq [a]_S) \wedge (\forall a \in A)([a]_S \subseteq [a]_R) \quad \text{(定理2)} \\
\Leftrightarrow\ & (\forall a \in A)([a]_R \subseteq [a]_S \wedge [a]_S \subseteq [a]_R) \\
\Leftrightarrow\ & (\forall a \in A)([a]_R = [a]_S)
\end{aligned}
$$

。

注：

• 由定理3知，若两个等价关系相等，则每个元素所对应的等价类也相同；若两个等价关系的等价类集合相等，则两个等价关系相同。

• 由定理2、3知，等价关系与等价类集合一一对应。即相同的等价关系对应着相同的等价类集合，不同的等价关系对应着不同的等价类集合。

离散数学

2° 划分与等价关系

定义5. 覆盖　划分(covering　partition)

设A是一非空集合。则A的

(1)覆盖是一集合之集 $\Pi=\{A_\gamma \mid \gamma\in\Gamma\wedge A_\gamma\neq\varnothing\}$，

满足条件：　$A\subseteq\bigcup_{\gamma\in\Gamma}A_\gamma$ ；

(2)划分是一集合之集 $\Pi=\{A_\gamma \mid \gamma\in\Gamma\wedge A_\gamma\neq\varnothing\}$，

满足条件：（a）$A=\bigcup_{\gamma\in\Gamma}A_\gamma$ ；

（b）$\gamma_1\neq\gamma_2\Rightarrow A_{\gamma1}\cap A_{\gamma2}=\varnothing$ ；

其中A_γ称为划分Π的划分块(block of partition)。

注：•由划分和覆盖的定义可知，A上的划分一定是A上的覆盖；反之则未必。

定理4 。设R是非空集合A上的等价关系。则R的等价类之集

$$\Pi_R = \{ [a]_R \,|\, a \in A \}$$

是A上的一个划分；等价类就是划分块。

[证].定理1的(1)不但直接给出等价类的非空性，而且由它可得等价类满足划分的条件(a)；定理1的(4)直接给出等价类满足划分的条件(b)(详细叙述留给学者)。

注：●定理4表明:由集合A上的等价关系R所产生的等价类之集构成集合A 上的一个划分。

定理5. 设 $\Pi=\{A_\gamma : \gamma\in\Gamma \wedge A_\gamma \neq \varnothing\}$是非空集合A上的一个划分。我们借助Π来定义A上的二元关系$R_\Pi \subseteq A\times A$，使得

$$R_\Pi = \{(a,b) \mid (\exists\gamma\in\Gamma)(a\in A_\gamma \wedge b\in A_\gamma)\}$$

则R_Π是A上的等价关系。我们称为是由划分Π产生的(或者说是诱导出的)A上的等价关系。

[证].(采用逻辑法)

(1)自反性：

对任何元素a，有

$a \in A$

$\Rightarrow a \in \bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma$ (划分的条件(a)；$A=\bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma$)

$\Rightarrow (\exists\gamma\in\Gamma)(a\in A_\gamma)$

$\Rightarrow (\exists\gamma\in\Gamma)(a\in A_\gamma \wedge a\in A_\gamma)$

$\Rightarrow (a,a)\in R_\Pi$

$\Rightarrow aR_\Pi a$

所以R_Π是自反的；

离散数学

(2)对称性：

对任何元素a,b$\in$A ，有

$$
\begin{aligned}
& aR_{\Pi}\,b \\
& \Rightarrow (a,b)\in R_{\Pi} \\
& \Rightarrow (\exists\gamma\in\Gamma)(a\in A_{\gamma}\wedge b\in A_{\gamma}) \\
& \Rightarrow (\exists\gamma\in\Gamma)(b\in A_{\gamma}\wedge a\in A_{\gamma}) \\
& \Rightarrow (b,a)\in R_{\Pi} \\
& \Rightarrow bR_{\Pi}\,a
\end{aligned}
$$

所以R_{Π}是对称的；

离散数学

(3)传递性：

对任何元素$a,b,c\in A$，有

$$aR_{\Pi}\,b\wedge bR_{\Pi}\,c$$

$$\Rightarrow(a,b)\in R_{\Pi}\wedge(b,c)\in R_{\Pi}$$

$$\Rightarrow(\exists\gamma_1\in\Gamma)(a\in A_{\gamma 1}\wedge b\in A_{\gamma\,1})\wedge(\exists\gamma_2\in\Gamma)(b\in A_{\gamma 2}\wedge c\in A_{\gamma 2})$$

$$\Rightarrow(\exists\gamma\in\Gamma)(a\in A_{\gamma}\wedge b\in A_{\gamma}\wedge b\in A_{\gamma}\wedge c\in A_{\gamma})$$

$$\Rightarrow(\exists\gamma\in\Gamma)(a\in A_{\gamma}\wedge b\in A_{\gamma}\wedge c\in A_{\gamma})$$

$$\Rightarrow(\exists\gamma\in\Gamma)(a\in A_{\gamma}\wedge c\in A_{\gamma})$$

$$\Rightarrow(a,c)\in R_{\Pi}$$

$$\Rightarrow aR_{\Pi}\,c$$

所以R_{Π}是传递的；　　所以R_{Π}是等价的。

注：•定理5表明:由集合A上的划分Π可产生A上的一个等价关系；划分块就是等价类。

定理6。设R是非空集合A上的等价关系，　Π是A上的一个划分。那么

$$R = R_{\Pi} \Leftrightarrow \Pi_R = \Pi \quad 。$$

注：
- R_{Π}是由划分Π所产生的A上的一个等价关系；
- Π_R是由等价关系R所产生A上的一个的划分；

[证]. (采用逻辑法)

•先证： $R = R_\Pi \Rightarrow \Pi_R = \Pi$

对任何元素a∈A，有

对任何元素x∈A，有

$$x \in [a]_R$$

$$\Leftrightarrow xRa$$

$$\Leftrightarrow xR_\Pi a$$ (已知条件： $R = R_\Pi$)

$$\Leftrightarrow x \in [a]_{R\Pi}$$

所以 $[a]_R = [a]_{R\Pi}$

所以 $(\forall a \in A)([a]_R = [a]_{R\Pi})$

所以 $\Pi_R = \{[a]_R \mid a \in A\} = \{[a]_{R\Pi} \mid a \in A\} = \Pi$；

离散数学

- 次证： $\Pi_R = \Pi \Rightarrow R = R_{\Pi}$

对任何序偶$(a,b) \in A \times A$

$(a,b) \in R$

$\Leftrightarrow aRb$

$\Leftrightarrow bRa$　　　　(R是等价关系，故R对称)

$\Leftrightarrow b \in [a]_R$

$\Leftrightarrow b \in [a]_{R_{\Pi}}$

(已知条件：$\Pi_R = \Pi \Rightarrow (\forall a \in A)([a]_R = [a]_{R_{\Pi}})$)

$\Leftrightarrow bR_{\Pi}\, a$

$\Leftrightarrow aR_{\Pi}\, b$　　　　(R_{Π}是等价关系，故R_{Π}对称)

$\Leftrightarrow (a,b) \in R_{\Pi}$

所以　$R = R_{\Pi}$　。

注：•由定理4, 5, 6可知：由等价关系可以产生一个划分，由划分可以产生一个等价关系；

•划分与等价关系是一一对应的。即每个划分对应一个等价关系，且每个等价关系对应一个划分。

离散数学

§6. 半序关系

定义1. 半序关系(partial order relation)

设二元关系$R \subseteq A \times A$。这里A是非空的集合。

R是A上的半序关系$\Leftrightarrow$R是自反的、反对称的、传递的。

- 显然 $\wp(R) = \Re(R) = A$ (因为半序关系是自反的);
- 通常，半序关系R记为$\leq$，称系统$(A,\leq)$为半序集(poset)。

例1. 自然数集N、整数集I、有理数集Q 、实数集R上的小于等于关系‘ ≤ ’都分别是这些数集上的半序关系；因为，对任何数a,b,c

$a \le a$ ；

$a \le b \wedge b \le a \Rightarrow a=b$ ；

$a \le b \wedge b \le c \Rightarrow a \le c$ ；

所以$(N, \le)$,$(I , \le)$, $(Q, \le)$, $(R, \le)$ 都是半序集。

离散数学

例2.集合X的幂集2^x上的包含关系‘$\subseteq$’是其上的半序关系；因为对任何子集A,B,C

$$A \subseteq A\ ;$$

$$A \subseteq B \wedge B \subseteq A \Rightarrow A=B\ ;$$

$$A \subseteq B \wedge B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C\ ;$$

故$(2^x, \subseteq)$ 是半序集。

例3. 自然数集N、整数集I、有理数集Q 、实数集R上的小于关系‘$<$’都不是这些数集上的半序关系；因为，$<$ 不是自反关系，即对任何数a, $a \not< a$；故$<$ 是反自反关系。

离散数学

注：一般我们定义：拟序(quasi order)

•二元关系$R\subseteq A\times A(A\neq\varnothing)$ 是A上的拟序关系$\Leftrightarrow$R是反自反的、传递的。拟序一般记作$<$，称系统$(A,<)$为拟序集；

•拟序与半序的关系是：对任何元素$a, b\in A$

$$a<b\Leftrightarrow a\leq b\wedge a\neq b\ ;$$

因此，小于关系$<$是拟序；$(N,<)$,$(I,<)$, $(Q,<)$, $(R,<)$ 都是拟序集。

例4.集合X的幂集2^x上的真包含关系‘$\subset$’不是其上的半序关系；因为，$\subset$不是自反关系，即对任何子集A，$A\not\subset A$；故$\subset$是反自反关系

注：因此，真包含关系$\subset$是拟序；$(2^x,\subset)$ 是拟序集。

定义2.可比较性(comparability)

设$(A, \leq)$是一半序集，a与b是A中的一对元素。我们称

$$a\text{与}b\text{是可比较的} \Leftrightarrow a \leq b \vee b \leq a$$ 。

注： •否则，若$a \nleq b \wedge b \nleq a$，则称a与b是不可比较的；

•半序关系≤实际上是在集合A上建立了一种比较关系；

例5. 对于小于等于关系‘$\leq$’，任何二数a,b都是可比较的；即总有 $a \leq b \vee b \leq a$ 。

例6. 对于包含关系‘$\subseteq$’，任何二集合A,B不都是可比较的；即不总是有 $A \subseteq B \vee B \subseteq A$ 。

离散数学

定义3.全序关系 线性序链(total order, linear order , chain)

设(A, ≤)是一半序集。

≤是A上的全序关系⇔ ≤满足全可比较性：

$$(\forall a\in A)(\forall b\in A)(a\leq b\vee b\leq a)\quad 。$$

这时，我们简称≤是全序或线性序；称(A, ≤)是一全序集。

注：•否则，我们则称≤是非线性序(nonlinear order)；

•非线性序在实际中有很重要的作用；也是本课程的一个重要研究对象。

离散数学

- **字典序(lexicographic)**

　　设(Σ, ≤)是一全序集。其中：Σ是一有限集，称为字母表(alphabet)，任一元素a∈Σ称为字母(alpha)，≤是字母表中字母的自然顺序，显然≤是一个全序。故此, 则$(\Sigma^*, \leq^*)$是一全序集，称其为字典序。

其中：　$\Sigma^* = \{\Lambda\} \cup \Sigma \cup \Sigma^2 \cup \Sigma^3 \cup \ldots \cup \Sigma^n \cup \ \ldots$

(Λ称为空字)，其任何元素 $w \in \Sigma^*$称为一个字(word)；必有k∈N，使得$w \in \Sigma^k$，从而

$$w = (a_{i1}, a_{i2}, a_{i3}, \ldots, a_{ik}) = a_{i1} a_{i2} a_{i3} \ldots a_{ik}$$

这里$a_{ij} \in \Sigma$ $(1 \leq j \leq k)$。

离散数学

定义二元关系$\leq^* \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^*$，使得：

对于任何二字$w_1=a_{i1}a_{i2}a_{i3}\ldots a_{im}$和$w_2=b_{i1}b_{i2}b_{i3}\ldots b_{in}$

$w_1 \leq^* w_2$当且仅当 下列四条之一成立：

(1)$a_{i1}a_{i2}a_{i3}\ldots a_{im}=b_{i1}b_{i2}b_{i3}\ldots b_{in}$；

(这时：$m=n$, $a_{ij}=b_{ij}$)

(2)$a_{i1}\neq b_{i1}$ 且$a_{i1}\leq b_{i1}$；

(3)存在着某个$k \in N$，$1 \leq k \leq \min(m,n)$，使得

$a_{i1}a_{i2}a_{i3}\ldots a_{ik-1}=b_{i1}b_{i2}b_{i3}\ldots b_{ik-1}$

且 $a_{ik}\neq b_{ik}$ 且 $a_{ik}\leq b_{ik}$；

(4) w_1是w_2的前缀。

例7.小于等于关系‘ ≤ ’是全序关系；

包含关系‘⊆’一般不是全序关系。

例8.(I , ≤) , (R, ≤) 都是全序集。但是在**(I , ≤)** 中每个整数，下一个比它大的或比它小的（即紧挨着它的）那个数都可确定；而在**(R, ≤)** 中却不可能。

离散数学

定义3.直接后继

后继(direct successor, successor)

设(A, ≤)是一半序集，a与b是A中的一对元素。我们称

b是a的直接后继

$\Leftrightarrow a\neq b \wedge a \leq b \wedge (\forall t \in A)(a \leq t \wedge t \leq b \Rightarrow t=a \vee t=b)$

直接后继简称后继； a的后继记作a^+，即$b= a^+$，这时称a是b的前驱或前趋(predecessor)。

例9. (N_m, ≤) , (N, ≤) ,(I , ≤) , (R, ≤) 都是全序集。这里≤ 都是数的小于等于关系；而N_m={0,1,2,…,m-1}。于是

(N_m, ≤)除尾元素m-1外，每个元素都有后继；除首元素0外，每个元素都有前驱；

(N, ≤)的每个元素都有后继；除首元素0外，每个元素都有前驱；

(I, ≤)的每个元素都有后继；每个元素都有前驱；

(R, ≤)的每个元素都没有后继；每个元素都没有前驱。

•半序集的表示法——哈斯图(Hasse)

通常用Hasse图表示半序关系。半序集$(A, \le)$的Hasse图是一个图 $G_{\le} = (V_{\le}, E_{\le})$

其中：$V_{\le} = A$ 是结点集；

$E_{\le} = \{(a,b) \mid a \in A \wedge b \in A \wedge a \le b \wedge b = a^{+}\}$是边集。

在画法上, 我们规定：

(1) 结点a^{+}必须画在结点a 的紧(斜)上方；

(2)不画边的方向。

注：与关系图相比， Hasse图

- 省略了自反性的边(圈)；
- 省略了(反对称性)方向；
- 省略了传递性的边；

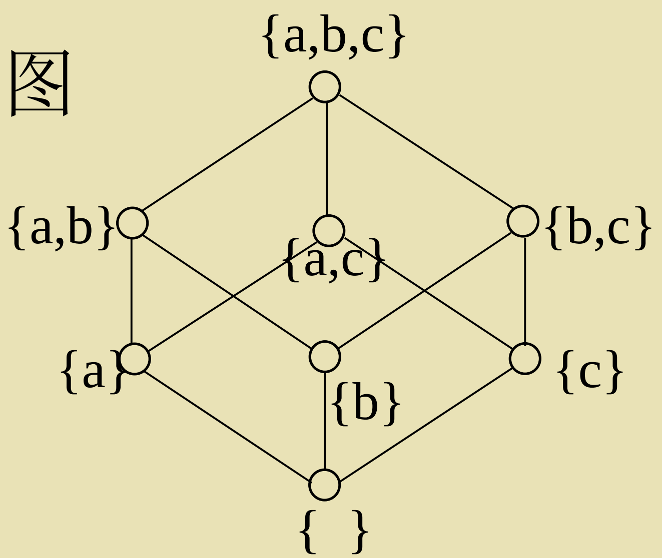
例10. 设A ={a,b,c},

2^A={∅,{a},{b},{c},{a,b},{a,c},{b,c},{a,b,c}}

由于2^A上的包含关系⊆是自反的、反对称的、传递的，故包含关系⊆是2^A上的半序关系，

(2^A, ⊆) 是半序集。

2^A上的包含关系⊆的Hasse图如右图所示。



例10

离散数学

注：从上例可以看出：

- 在非线性半序集中，直接后继一般不唯一；
- 其Hasse图呈现网格状；其实正是这点导致一门现代数学的重要学科——格论的出现；而此例正好给人们形象、直观的展现出布尔代数(用其三大特例之一——集合代数来表现)的内部数学结构。

例11. 设

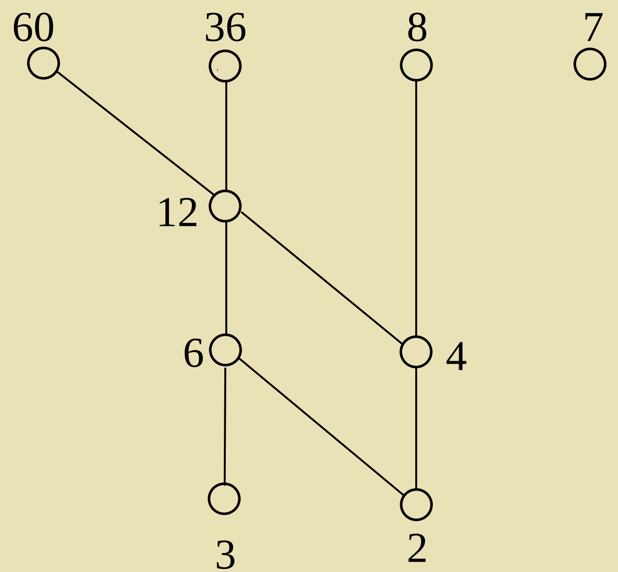
A = {2,3,4,6,7,8,12,36,60}，

R ={(a,b) | a∈A∧b∈A∧a | b}，即，R是A上的整除关系。

由整除的性质知R是自反的、反对称的、传递的。

由半序关系的定义知R是A上的半序关系。

R的Hasse图如右图：



例11

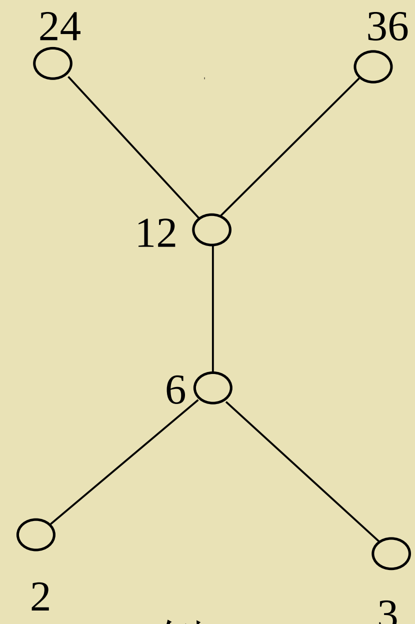
例12. 设A ={2,3,6,12,24,36},

R={(a,b) | a∈A∧b∈A∧a | b}

R是A上的整除关系。

由整除的性质知R是自反的、反对称的、传递的。由半序关系的定义知R是A上的半序关系。

R的Hasse图如右图：



例12

注：从以上两例可以看出：

- 虽然同为整除关系，但由于集合不同，其Hasse图就呈现出明显的不同；这说明两例中的半序集是不同的；所以，在论及半序关系时，重要的是一定要指明其是那个集合上的半序关系；半序集是一个整体，不能分而论之。

定义4　最大元　　　　　最小元

（greatest element,　least element）

设(A, ≤)是半序集，$B\subseteq A$，$x_0 \in B$。则我们称

(1)x_0是B的最大元$\Leftrightarrow(\forall x\in B)(x\le x_0)$；

(2)x_0是B的最小元$\Leftrightarrow(\forall x\in B)(x_0\le x)$。

注：•最大(小)元一般未必一定存在；即使B(甚或A)是有限集合也未必；

• B的最大(小)元若存在，则一定在B中；

离散数学

定理1. 设(A,≤)是半序集,B⊆A。若B有最大(小)元，则必是唯一的。

[证].（采用逻辑法）只证最大元的唯一性

x_{01}是B的最大元 ∧ x_{02}是B的最大元

$\Rightarrow (\forall x \in B)(x \leq x_{01}) \wedge (\forall x \in B)(x \leq x_{02})$,

$\Rightarrow x_{02} \leq x_{01} \wedge x_{01} \leq x_{02}$

$\Rightarrow x_{01} = x_{02}$ (≤是半序关系，故有反对称性)

所以， B的最大元是唯一的。

离散数学

定义5. 极大元 极小元

（maximum element, minimal element）

设(A,≤)是半序集，$B\subseteq A$， $x_0\in B$ 。则我们称

(1)x_0是B的一个极大元

$\Leftrightarrow\neg(\exists x\in B)(x_0\leq x\wedge x\neq x_0)\Leftrightarrow\neg(\exists x\in B)(x_0< x)$；

(2)x_0是B的一个极小元

$\Leftrightarrow\neg(\exists x\in B)(x\leq x_0\wedge x\neq x_0)\Leftrightarrow\neg(\exists x\in B)(x<x_0)$。

注：•极大(小)元一般不一定存在；但在B(或A)是有限集合时一定存在；

•极大(小)元即使存在，一般也是不唯一的；

• B的极大(小)元若存在，则一定在B中。

定义6.上界　下界(upper bound,lower bound)

设(A,≤)是半序集，$B\subseteq A$， $z_0\in A$。则我们称

(1)z_0是B的一个上界$\Leftrightarrow(\forall x\in B)(x\leq z_0)$；

(2)z_0是B的一个下界$\Leftrightarrow(\forall x\in B)(z_0\leq x)$；

(3)若B有一个上界，则称B上方有界;

若B有一个下界，则称B下方有界;

若B上、下方都有界，则称B有界。

注：•上界、下界、界一般不一定存在;

• B(或A)有限不一定有上界、下界、界；有上界、下界、界B(或A)也不一定有限;

•上界、下界、界即使存在，一般也是不唯一的;

• B的上界、下界、界若存在，可以在B中，也可以不在B中。

例13. (R, $\leq$) 是全序集。

取B=(0,1)=$\{x \mid x \in R \wedge 0<x<1\} \subseteq R$。

于是， B有无穷个上界，无穷个下界；从而B是有界集。

但是B却不是有限集，而是一个无限集。

定义7. 上确界 下确界

（least upper bound, greatest lower bound）

设(A,≤)是半序集，$B \subseteq A$， $z_0 \in A$。则我们称

(1)z_0是B的上确界

$\Leftrightarrow (\forall x \in B)(x \le z_0) \wedge (\forall z \in A)((\forall x \in B)(x \le z) \Rightarrow z_0 \le z)$；

(2)z_0是B的下确界

$\Leftrightarrow (\forall x \in B)(z_0 \le x) \wedge (\forall z \in A)((\forall x \in B)(z \le x) \Rightarrow z \le z_0)$；

(3)上确界即是最小上界，记为LUB(B);

下确界即是最大下界，记为GLB(B)。

离散数学

注：•上(下)确界一般不一定存在；即使B(甚或A)是有限集合也未必；

• B的上(下)确界若存在，可以在B中，也可以不在B中；

例14. 令：$A=\{-\frac{1}{n} \mid n\in N\wedge n\geq 1\}$

$B=\{\frac{1}{n} \mid n\in N\wedge n\geq 1\}$

$X=A\cup B$

则B中每个元素都是集合A的上界, 但A无上确界, 即LUB(A) 不存在；

A中每个元素都是集合B的下界, 但B无下确界, 即GLB(B) 不存在。

离散数学

定理2. 设(A,≤)是半序集,B⊆A。若B有上(下)确界，则必是唯一的。

[证].仿定理1可证。留给学者。

注：•最大(小)元一定是极大(小)元；
　　极大(小)元不一定是最大(小)元；
　　极大(小)元存在不一定有最大(小)元；
　•最大(小)元一定是上(下)确界；
　　上(下)确界不一定是最大(小)元；
　　上(下)确界存在不一定有最大(小)元；
　•上(下)确界一定是上(下)界；
　　上(下)界不一定是上(下)确界；
　　上(下)界存在不一定有上(下)确界；
　•讨论B的上(下)确界的前提是B的上(下)界存在；

例15. 设A={2,3,4,6,7,8,12,36,60},

R={(a,b) | a∈A∧b∈A∧a | b}, R是A上的整除关系。根据前面例11可知， R是A上的半序关系。

取B1={8,12}, B2={2,3}, B3={7,8}, B4={2,4,12}

则:

集合	最大元	最小元	极大元	极小元	上界	下界	上确界	下确界
B_1={8,12}	无	无	8,12	8,12	无	2,4	无	4
B_2={2,3}	无	无	2,3	2,3	6,12,36,60	无	6	无
B_3 ={7,8}	无	无	7,8	7,8	无	无	无	无
B_4={2,4,12}	12	2	12	2	12,36,60	2	12	2

定义8. 良序集(well ordered set)

设(A, ≤)是半序集。则我们称

(A, ≤)是良序集

$\Leftrightarrow$ A的每个非空子集都有最小元

$\Leftrightarrow$ $(\forall B \subseteq A)(\exists x_0 \in B)(\forall x \in B)(x_0 \leq x)$。

这时我们称半序(关系)≤是良序(关系)。

例16. (N, ≤)是良序集；而自然数集**N**上的小于等于关系≤ 是良序关系。

(I , ≤) 虽是全序集，但却不是良序集；从而整数集**I**上的小于等于关系 ≤ 不是良序关系。

注：从上例我们可以得到

- 全序集未必一定是良序集；

定理3. 设(A,≤)是良序集。那么

(1) (A,≤)是全序集；(即，良序集一定是全序集)

(2)对于任何元素a∈A，若a不是A的最大元，则a的直接后继a^+一定存在；即

$$(\forall a\in A)(\neg(\forall x\in A)(x\le a)\Rightarrow (\exists b\in A)(b= a^{+}))$$ 。

[证]. (采用构造法)

(1)对于任二元素$a,b\in A$,构造一子集$B=\{a,b\}\subseteq A$,显然B是非空的，由$(A,\leq)$是良序集，知B有最小元。

若a是B的最小元，那么有$a\leq b$;

若b是B的最小元，那么有$b\leq a$;

因此,总有$a\leq b\vee b\leq a$ 。即$(\forall a\in A)(\forall b\in A)(a\leq b\vee b\leq a)$, 全可比较性成立，所以，$\leq$是全序，$(A,\leq)$是全序集。

离散数学

(2)对于任何元素a∈A,且a不是A的最大元，构造一子集B=$\{x \mid x\neq a \wedge a\leq x\}\subseteq A$,显然B是非空的

因为a不是A的最大元　　　　　　　　(已知条件)

$\Leftrightarrow \neg(\forall x\in A)(x\leq a)$

$\Leftrightarrow(\exists x\in A)\ \neg(x\leq a)$

$\Leftrightarrow(\exists x\in A)(a\neq x\wedge a\leq x)$　　　　　　　　(因≤是全序）

$\Leftrightarrow B\neq\varnothing$

因此,由(A,≤)是良序集，知B有最小元。

离散数学

设B的最小元为b，则我们可证a的直接后继$a^+ = b$，总是存在。

①由于$b \in B$，故此$b \neq a$，且$a \leq b$；

②对于任何元素$t \in A$,若$a \leq t$且$t \leq b$, 那么(二分法） 或者$t=a$；

或者$t \neq a$,则加上$a \leq t$,可知$t \in B$,因此,由b是B的最小元,得到$b \leq t$,再加上假设$t \leq b$,由$\leq$的反对称性,我们得到$t=b$;

因此,总有$t=a$ 或者$t=b$。

所以， b是a的直接后继，即$a^+ = b$ 。

离散数学

重点要求

- 掌握序偶和笛卡尔积的概念。
- 掌握二元关系的形式定义及其各种表示方法：序偶，矩阵，关系图等；能正确使用集合表达式，关系距阵，关系图等表示给定的关系，并要求能够从一种形式写出另一种形式。
- 掌握关系的运算，包括集合运算以及关系的复合和关系的逆运算。
- 掌握二元关系的各种特殊性质：自反，反自反，对称，反对称，传递等，并理解这些性质如何反映在关系图上，关系矩阵上等。
- 掌握集合中二元关系的闭包的意义和其基本性质，能求出有限集上的二元关系的闭包。

离散数学

- 掌握等价关系的概念，并掌握覆盖、划分、等价类、商集的定义和基本性质，弄清楚等价关系与划分之间的关系。牢记等价关系的分类作用。
- 掌握半序、半序集、全序、良序等概念，以及半序集的可比较性、极大元、极小元、最大元、最小元、上界、下界、最大下界、最小上界、直接后继等概念。牢记半序关系的非线性特性。
- 能画出有限半序集的哈斯图，并根据图讨论半序集的某些性质。

离散数学

- 第四章　关系
  到此已经结束！