

Introduction

Étudié à de nombreuses reprises depuis sa parution en 1976, le système de Rössler [3] présente les atouts d'un système chaotique simple tout en proposant des dynamiques riches qu'il reste à étudier. Les récents travaux sont des études des solutions de ce système lorsque les paramètres sont variés. Ils donnent ainsi une représentation plus globale de ce système. Par exemple, Castro *et al.* [2] réalisent des diagrammes détaillant les valeurs du plus grand exposant de Lyapunov en fonction des paramètres. Les travaux de Barrio *et al.* [1] caractérisent les bifurcations lorsque les trois paramètres du système sont variés. Les auteurs mettent ainsi en évidence le fait qu'il existe deux attracteurs co-existants pour un même jeu de paramètres dans le système de Rössler. Récemment, Sprott et Li [4] ont trouvé un autre moyen d'obtenir ces attracteurs en reparamétrisant le système de Rössler.

La caractérisation topologique d'un attracteur chaotique est une méthode qui permet d'obtenir la structure détaillée d'un seul attracteur. Lorsqu'un paramètre change, la méthode doit à nouveau être appliquée pour obtenir la structure d'un autre attracteur. Dans ce projet, nous proposons d'étudier la structure de huit attracteurs choisis dans le diagramme de bifurcation de Sprott et Li [4]. Nous étudions dans un premier temps les propriétés de ces attracteurs à l'aide des applications de premier retour. Le but du projet est d'obtenir :

1. une représentation graphique en 3D d'un attracteur chaotique ;
2. une représentation graphique (projection et 3D) d'un attracteur avec sa section de Poincaré ;
3. une représentation graphique de l'application de premier retour à la section de Poincaré.

Diagramme de bifurcation

Barrio *et al.* [1] ont déjà montré que le système de Rössler [3] peut avoir comme solution deux attracteurs qui co-existent. Sprott et Li [4] construisent une paramétrisation des paramètres de telle sorte que lorsque $\alpha = 1$, les solutions du système de Rössler sont deux attracteurs qui coexistent ; cela donne le système de Rössler sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{x} = -y - z \\ \dot{y} = x + ay \\ \dot{z} = b + z(x - c) \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} a = 0.2 + 0.09\alpha \\ b = 0.2 - 0.06\alpha \\ c = 5.7 - 1.18\alpha \end{cases} . \quad (2)$$

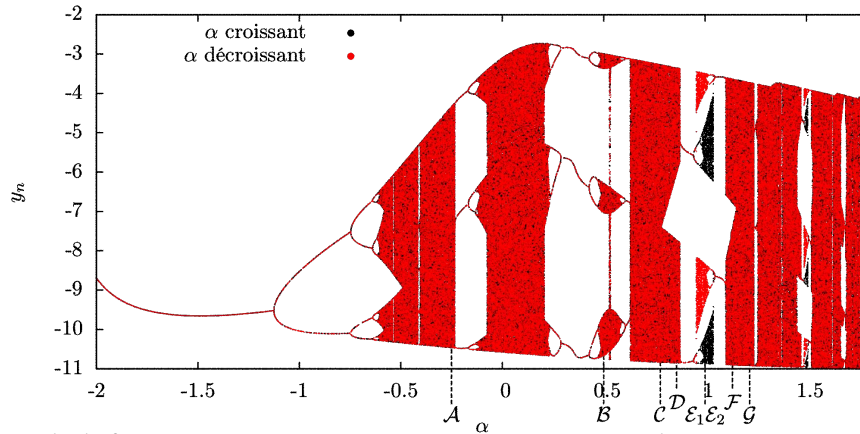


FIGURE 1 – Diagramme de bifurcation avec α croissant en rouge et α décroissant en noir (reproduction de la Fig. 4 de [4]). \mathcal{A} , \mathcal{B} , \mathcal{C} , \mathcal{D} , \mathcal{E}_1 , \mathcal{E}_2 , \mathcal{F} et \mathcal{G} désignent les huit attracteurs étudiés.

Exercice 1 Représentation graphique de l'attracteur chaotique $(-x, y, -z)$

La figure 1 reproduit le diagramme de bifurcation obtenu par Sprott et Li. À partir de cette figure, sept valeurs du paramètre α traduisent un changement dans la structure du diagramme : huit attracteurs peuvent être obtenus (Figure 2) :

$$\begin{array}{|l|l|l|l|} \hline \mathcal{A} : & \alpha = -0.25 & \mathcal{C} : & \alpha = 0.78 \\ \mathcal{B} : & \alpha = 0.5 & \mathcal{D} : & \alpha = 0.86 \\ \hline \mathcal{E}_1 : & \alpha = 1 & \mathcal{F} : & \alpha = 1.135 \\ \mathcal{E}_2 : & \alpha = 1 & \mathcal{G} : & \alpha = 1.22 . \end{array} \quad (3)$$

Résoudre le système d'équation différentielle et réaliser une représentation en 3D de l'attracteur chaotique.

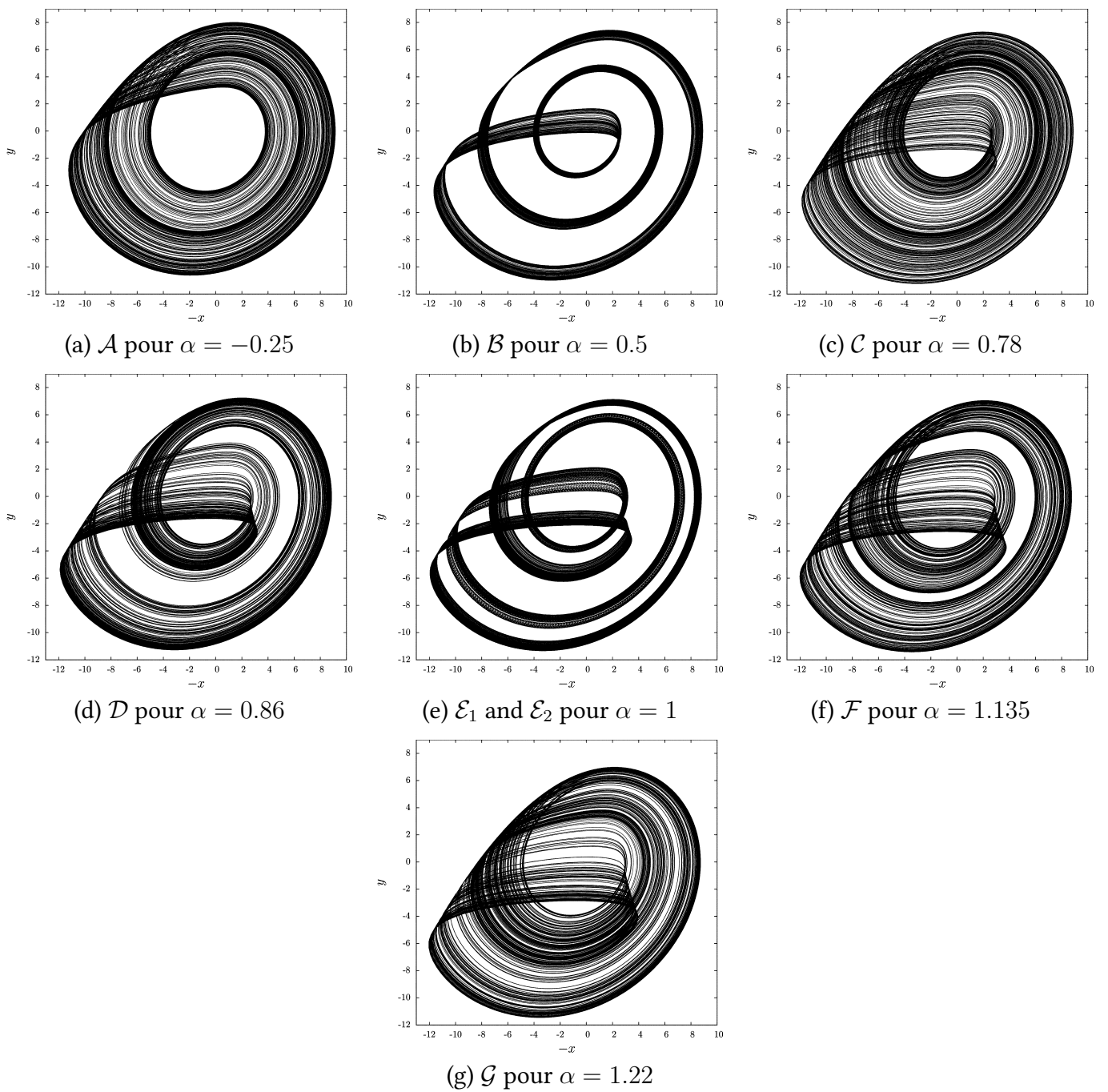


FIGURE 2 – Huit attracteurs solutions du système de Rössler (2); le paramètre α est indiqué pour chacun.

Exercice 2 Section de Poincaré

La section de Poincaré construite à partir des points singuliers du système permet d'étudier la dynamique du système en prenant en compte ses paramètres. Cette section de Poincaré est définie comme suit :

$$\mathcal{P} \equiv \{(y_n, -z_n) \in \mathbb{R}^2 \mid -x_n = -x_-\} \quad (4)$$

elle dépend de la coordonnée x du point singulier au centre de l'attracteur notée x_- :

$$S_{\pm} = \begin{cases} x_{\pm} = \frac{c \pm \sqrt{c^2 - 4ab}}{2} \\ y_{\pm} = \frac{-c \mp \sqrt{c^2 - 4ab}}{2a} \\ z_{\pm} = \frac{c \pm \sqrt{c^2 - 4ab}}{2a} \end{cases} \quad (5)$$

Calculer l'intersection de l'attracteur avec la section de Poincaré. Afficher les points de la section de Poincaré dans une représentation de l'attracteur.

Exercice 3 Représentation graphique de l'application de premier retour $\rho_{n+1} = f(\rho_n)$

Construire une variable ρ_n qui représente l'éloignement depuis le centre de l'attracteur du passage des trajectoires dans la section de Poincaré. Le tracé de $\rho_{n+1} = f(\rho_n)$ permet d'avoir un premier aperçu de la dynamique du système : c'est l'application de premier retour à la section de Poincaré.

Représenter l'application de premier retour. Étudier le comportement relatif de deux points de l'application et de leurs images dans l'application de premier retour. Expliquer ce que cela traduit au niveau de la structure en 3D de l'attracteur.

Exercice 4 Bonus Représentation graphique des orbites périodiques

Les orbites constituent le squelette de l'attracteur. La trajectoire dans l'espace des phases suit momentanément ces orbites lors de la résolution numérique.

Localiser les orbites sur l'application de premier retour de manière empirique. Trouver un moyen de localiser des orbites de période 1, 2 ou 4 au cours de la simulation numérique. Représenter de manière évidente ces orbites dans une figure avec l'attracteur.

Références

- [1] Roberto BARRIO, Fernando BLESÁ et Sergio SERRANO. "Qualitative analysis of the Rössler equations : Bifurcations of limit cycles and chaotic attractors". In : *Physica D : Nonlinear Phenomena* 238.13 (juin 2009), p. 1087-1100. DOI : [10.1016/j.physd.2009.03.010](https://doi.org/10.1016/j.physd.2009.03.010).
- [2] Victor CASTRO et al. "Characterization of the Rössler system in parameter space". In : *International Journal of Bifurcation and Chaos* 17.03 (mars 2007), p. 965-973. DOI : [10.1142/S0218127407017689](https://doi.org/10.1142/S0218127407017689).
- [3] O. E. RÖSSLER. "An equation for continuous chaos". In : *Physics Letters A* 57.5 (1976), p. 397-398.
- [4] J.C. SPROTT et C. LI. "Asymmetric Bistability in the Rössler System". In : *Acta Physica Polonica B* 48.1 (2017), p. 97. DOI : [10.5506/aphyspolb.48.97](https://doi.org/10.5506/aphyspolb.48.97).