

# Sprawozdanie nr. 2 - Metody numeryczne i optymalizacja

Jakub Andryszczak 259519,  
Jakub Żak 244255,  
Maciej Cierpisz 249163

## Spis treści

1	Zadanie nr. 1	3
2	Zadanie nr. 2	3
3	Zadanie nr. 3	4
4	Zadanie nr. 4	4
5	Zadanie nr. 5	5
6	Zadanie nr. 6	5
7	Zadanie nr. 7	5

## 1 Zadanie nr. 1

## 2 Zadanie nr. 2

Rozwiązać poniższy układ równań liniowych metodą eliminacji Gaussa z częściowym wyborem element podstawowego:

---

```
import numpy as np

A = np.array([ [4, 2, 0, 0],
               [1, 4, 1, 0],
               [0, 1, 4, 1],
               [0, 0, 2, 4],])

x = np.random.rand(4)
print(x)
print()

def normal_power_method(A,x):
    for i in range(200):
        x = np.dot(A,x)
        x = x/np.linalg.norm(x)

    return np.dot(np.dot(A,x),x)/np.dot(x, x)

def shifted_power_method(A, x0, tol=1e-6):
    n = len(A)
    # Estimate a shift close to the smallest eigenvalue
    sigma = np.trace(A) / n
    x = x0.copy()
    for _ in range(200):
        y = np.dot(A, x) - sigma * x

    lambda_ = np.dot(x.T, np.dot(A, x))
    return lambda_

lambda1 = normal_power_method(A, x)
lambda2 = 1 / normal_power_method(A, x)
lambda3 = shifted_power_method(A, x)
lambda4 = 1 / shifted_power_method(A, x)

print("Largest eigenvalue normal power",lambda1)
print("Smallest eigenvalue normal power", lambda2)
print("Largest eigenvalue shifted power", lambda3)
print("Smallest eigenvalue shifted power", lambda4)
```

---

Poniżej wynik działania programu:

```
Largest eigenvalue normal power 5.68226505344719
Smallest eigenvalue normal power 0.17598615879302257
Largest eigenvalue shifted power 6.304928557128195
Smallest eigenvalue shifted power 0.15860607950417216
```

Rys. 2 Wyniki obliczeń

### 3 Zadanie nr. 3

### 4 Zadanie nr. 4

Wyznacz  $A^{100}$  metodą diagonalizacji macierzy  $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

Obliczanie wartości własnych:

$$\det(A - tI) = \begin{vmatrix} 4-t & 3 \\ 1 & 2-t \end{vmatrix} = t^2 - 6t + 5 = (t-1)(t-5) = 0 \quad (1)$$

$$\begin{cases} t_1 = 1 \\ t_2 = 5 \end{cases} \quad (2)$$

Obliczanie wektorów własnych:

$$(A - t_1 I) = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$(A - tI) * v = 0 \quad (4)$$

$$\left[ \begin{array}{cc|c} 3 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{array} \right] \begin{array}{l} | \cdot (\frac{1}{3}) \\ \leftarrow + \end{array} \right]^{-1}$$

$$\left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$$X = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$(A - t_1 I) = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$(A - tI) * v = 0 \quad (7)$$

$$\left[ \begin{array}{cc|c} 3 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{array} \right] \begin{array}{l} | \cdot (-1) \\ \leftarrow + \end{array} \Big]^{-1}$$

$$\left[ \begin{array}{cc|c} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$$X = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (8)$$

Obliczanie potęgi macierzy po diagonalizacji:

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$P = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (10)$$

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \quad (11)$$

$$A^{100} = P * D^{100} * P^{-1} \quad (12)$$

$$A^{100} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1^{100} & 0 \\ 0 & 5^{100} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \quad (13)$$

## 5 Zadanie nr. 5

trolololo

## 6 Zadanie nr. 6

## 7 Zadanie nr. 7