Sprawozdanie nr. 2 - Metody numeryczne i optymailzacja

Jakub Andryszczak 259519,
Jakub Żak 244255,
Maciej Cierpisz 249163

Spis treści

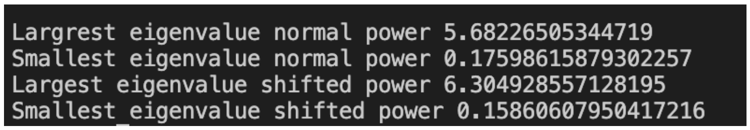
1 Zadanie nr. 1

2 Zadanie nr. 2

Rozwiązać poniższy układ równań liniowych metodą eliminacji Gaussa z częściowym wyborem element podstawowego:

```
import numpy as np

A = np.array([ [4, 2, 0, 0],
             [1, 4, 1, 0],
             [0, 1, 4, 1],
             [0, 0, 2, 4],])

x = np.random.rand(4)
print(x)
print()

def normal_power_method(A,x):
   for i in range(200):
    x = np.dot(A,x)
    x  = x/np.linalg.norm(x)

   return np.dot(np.dot(A,x),x)/np.dot(x, x)

def shifted_power_method(A, x0, tol=1e-6):
  n = len(A)
  # Estimate a shift close to the smallest eigenvalue
  sigma = np.trace(A) / n
  x = x0.copy()
  for _ in range(200):
    y = np.dot(A, x) - sigma * x

  lambda_ = np.dot(x.T, np.dot(A, x))
  return lambda_


lambda1 = normal_power_method(A, x)
lambda2 = 1 / normal_power_method(A, x)
lambda3 = shifted_power_method(A, x)
lambda4 = 1 / shifted_power_method(A, x)

print("Largrest eigenvalue normal power",lambda1)
print("Smallest eigenvalue normal power", lambda2)
print("Largest eigenvalue shifted power", lambda3)
print("Smallest eigenvalue shifted power", lambda4)
```

Poniżej wynik działania programu:


```
Largrest eigenvalue normal power 5.68226505344719
Smallest eigenvalue normal power 0.17598615879302257
Largest eigenvalue shifted power 6.304928557128195
Smallest eigenvalue shifted power 0.15860607950417216
```

Rys. 2 Wyniki obliczeń

3 Zadanie nr. 3

4 Zadanie nr. 4

Wyznacz A^{100} metodą diagonalizacji macierzy A = $\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

Obliczanie wartości własnych:

$$\det(A - tI) = \begin{bmatrix} 4-t & 3 \\ 1 & 2-t \end{bmatrix} = t^2 - 6t + 5 = (t-1)(t-5) = 0 \tag{1}$$

$$\begin{cases} t_1 = 1 \\ t_2 = 5 \end{cases} \tag{2}$$

Obliczanie wektorów własnych:

$$(A - t_1 I) = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \tag{3}$$

$$(A - tI) * v = 0 \tag{4}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 3 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \mid \cdot \left(\frac{1}{3}\right) \quad {}^{-1} \\ \longleftarrow \quad {}_{+} \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$X = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{5}$$

$$(A - t_1 I) = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \tag{6}$$

$$(A - tI) * v = 0 \tag{7}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 3 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} | \cdot (-1) \quad {}^{-1} \\ \longleftarrow\!\!\!\longrightarrow \quad {}_{+} \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$X = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{8}$$

Obliczanie potęgi macierzy po diagonalizacji:

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \tag{9}$$

$$P = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \tag{10}$$

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \tag{11}$$

$$A^{100} = P * D^{100} * P^{-1} \tag{12}$$

$$A^{100} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1^{100} & 0 \\ 0 & 5^{100} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \tag{13}$$

5 Zadanie nr. 5

6 Zadanie nr. 6

7 Zadanie nr. 7