Sprawozdanie nr. 2 - Metody numeryczne i optymailzacja

Jakub Andryszczak 259519,
Jakub Żak 244255,
Maciej Cierpisz 249163

Spis treści

1 Zadanie nr. 1

Wyznacz ręcznie pary własne (wyniki potwierdź obliczeniami komputerowymi):

$$A_1 = \begin{bmatrix} 21 & -6 & 0 \\ -6 & 18 & 6 \\ 0 & 6 & 15 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, A_3 = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \tag{1}$$

Sprawdź czy ślad macierzy jest równy sumie jej wartości własnych. Które macierze są diagonalizowalne i dlaczego? Czy któraś z tych macierzy jest osobliwa?

Macierzą osobliwą nazywamy taką, której wyznacznik jest równy zero. Dla każdej z wcześniej wymienionych macierzy wyliczono ich wyznaczniki.

$$A_1 = 21*18*15+6*(-6)*0+0*6*(-6)-(21*6*6)-(-6*-6*15)-(0*0*18) = 4374 \tag{2}$$

Wynik wyznacznika dla pierwszej macierzy nie jest równy zeru, a zatem wartość A_1 nie należy do macierzy osobliwych.

$$A_2 = 2 \tag{3}$$

$$A_3 = 32 \tag{4}$$

Z obliczeń wynika żadna z macierzy nie spełnia warunku osobliwości.

Następnie obliczono ślad powyższych macierzy. Ślad macierzy jest to suma elementów leżących na przekątnej danej macierzy. A zatem:

$$A_1 = 54 \tag{5}$$

$$A_2 = 4 \tag{6}$$

$$A_3 = 11 \tag{7}$$

Do wyznaczenia par i wartości własnych macierzy oraz sprawdzenia czy podane macierze są diagonalizowalne obliczono wyznacznik $det(A - \lambda I) = 0$:

$$det(A_1 - \lambda) = (21-\lambda)(18-\lambda)(15-\lambda) - (21-\lambda)*6*6 - (15-\lambda)*-6*-6 = 0 \tag{8}$$

$$\lambda^3 - 54\lambda^2 + 891\lambda - 4374 = 0 \tag{9}$$

Znaleziono pierwsze miejsce zerowe równania równe 18. Po podzieleniu wielomian wygląda następująco:

$$x^2 - 36x + 243 = 0 \tag{10}$$

Po wyliczeniu delty wyznaczono wartości własne tego równania: $\lambda_1 = 9$, $\lambda_2 = 18$, $\lambda_3 = 27$. Podstawiajając pod macierz A_1 wartość λ_1 otrzymujemy układ równań:

$$\begin{bmatrix} 12 & -6 & 0 \\ -6 & 9 & 6 \\ 0 & 6 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{11}$$

Obliczamy w ten sposób wektor własny którego wartość jest równa:

$$\begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{12}$$

Dla λ_2 i λ_3 wektory własne prezentują się następująco:

$$\lambda_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \lambda_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} \tag{13}$$

Tym samym powstaje nam macierz

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \tag{14}$$

A macierzą odwrotną będzie macierz

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{2}{9} \\ \frac{2}{9} & \frac{1}{9} & \frac{2}{9} \\ -\frac{2}{9} & \frac{2}{9} & \frac{1}{9} \end{bmatrix} \tag{15}$$

Aby sprawdzić czy dana macierz jest diagonalizowalną należy sprawdzić czy A' jest równa macierzy A.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} -\frac{1}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{2}{9} \\ \frac{2}{9} & \frac{1}{9} & \frac{2}{9} \\ -\frac{2}{9} & \frac{2}{9} & \frac{1}{9} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 18 & 0 \\ 0 & 0 & 27 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 & -6 & 0 \\ -6 & 18 & 6 \\ 0 & 6 & 15 \end{bmatrix} \tag{16}$$

A zatem macierz jest diagonalizowalna i nieosobliwa, a ślad macierzy jest równy sumie wartości własnych

Dla przykładu drugiego równanie prezentują się następująco:

$$det(A_2 - \lambda) = -\lambda^3 + 4\lambda^2 - 5\lambda + 2 = 0 \tag{17}$$

$$\lambda^3 - 4\lambda^2 + 5\lambda - 2 = 0 \tag{18}$$

Suma współczynników jest równa 0, a zatem λ_1=1. Kolejno podzielono wielomian przez $(\lambda - 1)$.

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \tag{19}$$

Następnie wyliczono Δ ze wzoru $\Delta = b^2 - 4ac$, której wartość wyszła 1. Ze względu na to obliczono pierwiastki za pomocą wzoru:

$$x = \frac{-b \pm\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3 \pm\sqrt{1}}{2} \tag{20}$$

Wynikami tego działania są $\lambda_2 = 1$ i $\lambda_3 = 2$. Dla wartości λ_1,λ_2 i λ_3 wyliczono wektory własne.

$$\lambda_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \lambda_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \lambda_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{21}$$

Tak jak w przykładzie wyżej do sprawdzenia czy macierz jest diagonalizowalna obliczono:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{22}$$

Macierz jest diagonalizowalna i nieosobliwa, a ślad macierzy jest równy sumie wartości własnych. Trzeci przykład:

$$det(A_3 - \lambda) = \lambda^4 - 11\lambda^3 + 42\lambda^2 - 64\lambda + 32 = 0 \tag{23}$$

Znaleziono wartości własne równe 1 i 2. Po podzieleniu wielomianu przez $(\lambda - 1)$ i $(\lambda - 2)$ otrzymujemy $\lambda^2 - 8\lambda + 16$. Ostatnią wartością własną jest $\lambda = 4$. Wyliczając wektory własne λ_3 ma tą samą wartość co λ_4 a zatem macierz nie może być diagonalizowalna ze względu na powtarzające się wektory własne. Jest ona również nieosobliwa, a ślad jest równy sumie wartości własnych.

2 Zadanie nr. 2

Wyznacz największą i najmniejszą wartość własną stosując metodę Powera zwykłą i z przesunięciem:

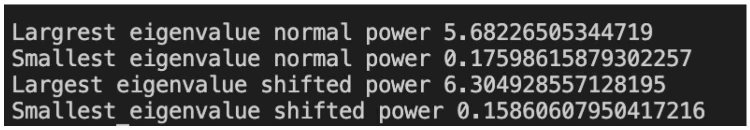
$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \tag{24}$$

Napisano algorytm wyznaczający największą i najmniejszą wartość własną:

```python
import numpy as np

A = np.array([ [4, 2, 0, 0],
              [1, 4, 1, 0],
              [0, 1, 4, 1],
              [0, 0, 2, 4],])

x = np.random.rand(4)
print(x)
print()

def normal_power_method(A,x):
   for i in range(200):
    x = np.dot(A,x)
    x  = x/np.linalg.norm(x)

   return np.dot(np.dot(A,x),x)/np.dot(x, x)

def shifted_power_method(A, x0, tol=1e-6):
  n = len(A)
  # Estimate a shift close to the smallest eigenvalue
  sigma = np.trace(A) / n
  x = x0.copy()
  for _ in range(200):
    y = np.dot(A, x) - sigma * x

  lambda_ = np.dot(x.T, np.dot(A, x))
  return lambda_


lambda1 = normal_power_method(A, x)
lambda2 = 1 / normal_power_method(A, x)
lambda3 = shifted_power_method(A, x)
lambda4 = 1 / shifted_power_method(A, x)

print("Largrest eigenvalue normal power",lambda1)
print("Smallest eigenvalue normal power", lambda2)
```

```
print("Largest eigenvalue shifted power", lambda3)
print("Smallest eigenvalue shifted power", lambda4)
```

Poniżej wynik działania programu:



```
Largrest eigenvalue normal power 5.68226505344719
Smallest eigenvalue normal power 0.17598615879302257
Largest eigenvalue shifted power 6.304928557128195
Smallest eigenvalue shifted power 0.15860607950417216
```

Rys. 1 Wyniki obliczeń

3 Zadanie nr. 3

Rozwiąż układ równań różniczkowych zwyczajnych:

$$\frac{du}{dt} = Pu \text{ dla } u_0 = \begin{bmatrix} 8 \\ 5 \end{bmatrix} \quad \text{oraz P=}\begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$$

Układy równań wygląda następująco:

$$\frac{du_1}{dt} = 4u_1 - 5u_2 \tag{25}$$

$$\frac{du_2}{dt} = 2u_1 - 5u_2 \tag{26}$$

Równanie $\frac{du}{dt} = lambdau$ można przekształcić na $u = \alpha e^{\lambda t}$, a następnie podstawiająjąc uzyskujemy:

$$\alpha_1 \lambda e^{\lambda t} = 4\alpha_1 e^{\lambda t} - 5\alpha_2 e^{\lambda t} \tag{27}$$

$$\alpha_2 \lambda e^{\lambda t} = 2\alpha_1 e^{\lambda t} - 3\alpha_2 e^{\lambda t} \tag{28}$$

Ze układu obustronnie usuwamy $e^{\lambda t}$ a pozostałe wartości zapisujemy w macierzach:

$$\begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} \tag{29}$$

Następnie jak w zadaniu pierwszym przystąpiono do wyliczenia $det(A\lambda I)$

$$det \begin{matrix} 4-\lambda & -5 \\ 2 & -3-\lambda \end{matrix} = (4-\lambda)(-3-\lambda) + 10 = \lambda^2 - \lambda - 2 = 0 \tag{30}$$

Wyliczono, że wartościami własnymi są $\lambda_1 = -1$ i $\lambda_2 = 2$.

Podstawiająjąc wartości własne wyliczamy wektory własne. Dla $\lambda_1 = -1$:

$$\begin{bmatrix} 5 & -5 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} x_1 = 0 \Rightarrow x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{31}$$

Dla $\lambda_2 = 2$:

$$\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 2 & -5 \end{bmatrix} x_2 = 0 \Rightarrow x_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} \tag{32}$$

Rozwiązanie tego zadania wygląda następująco:

$$u = c_1 e^{\lambda_1 t} x_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} x_2$$

Podstawiając $u^{(0)}$ wyliczamy wartości C_1 i C_2:

$$c_1 x_1 + c_2 x_2 = u^{(0)}, \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 5 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{33}$$

Odpowiedzią dla tego zadania jest funkcja:

$$u = 3e^{-t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + e^{2t} \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} \tag{34}$$

4 Zadanie nr. 4

Wyznacz A^{100} metodą diagonalizacji macierzy

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \tag{35}$$

Obliczanie wartości własnych:

$$\det(A - tI) = \begin{bmatrix} 4-t & 3 \\ 1 & 2-t \end{bmatrix} = t^2 - 6t + 5 = (t-1)(t-5) = 0 \tag{36}$$

$$\begin{cases} t_1 = 1 \\ t_2 = 5 \end{cases} \tag{37}$$

Obliczanie wektorów własnych:

$$(A - t_1 I) = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \tag{38}$$

$$(A - tI) * v = 0 \tag{39}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 3 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \mid \cdot \left(\frac{1}{3}\right) \quad -1 \\ \quad\quad\quad + \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$X = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{40}$$

$$(A - t_1 I) = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \tag{41}$$

$$(A - tI) * v = 0 \tag{42}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 3 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \mid \cdot (-1) \quad {}^{-1} \\ \qquad\qquad\quad {}_{+} \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$X = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{43}$$

Obliczanie potęgi macierzy po diagonalizacji:

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \tag{44}$$

$$P = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \tag{45}$$

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \tag{46}$$

$$A^{100} = P * D^{100} * P^{-1} \tag{47}$$

$$A^{100} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1^{100} & 0 \\ 0 & 5^{100} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \tag{48}$$

5 Zadanie nr. 5

Wykreśl dyski Gershgorina i określ lokalizację wwartości własnych macierzy:

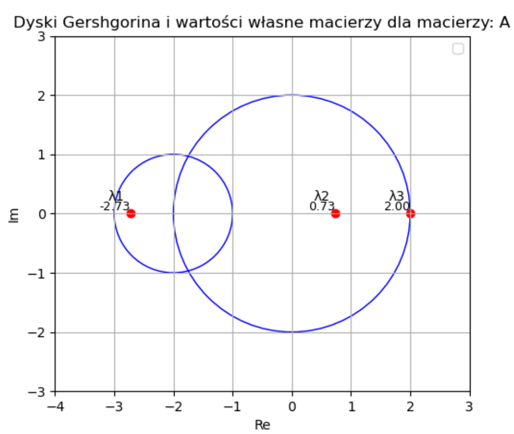
$$A_1 = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 0 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}, A_3 = \begin{bmatrix} 5.2 & 0.6 & 2.2 \\ 0.6 & 6.4 & 0.5 \\ 2.2 & 0.5 & 4.7 \end{bmatrix}, \quad (49)$$

Zaznacz na dyskach lokalizację dokładnych wartości własnych wyznaczonych dowolną metodą.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def gershgorin_circles(matrix):
    """
    Generuje środki i promienie dysków Gershgorina dla danej macierzy.
    """
    n = matrix.shape[0]
    centers = np.diag(matrix)
    radii = np.sum(np.abs(matrix), axis=1) - np.abs(centers)
    return centers, radii

def plot_gershgorin_circles(matrix, name):
    centers, radii = gershgorin_circles(matrix)
    fig, ax = plt.subplots()

    # Rysowanie dysków Gershgorina
    for center, radius in zip(centers, radii):
        circle = plt.Circle((center.real, center.imag), radius,
            color='blue', fill=False)
        ax.add_artist(circle)

    # Obliczanie i rysowanie śwartoci łwasnych
    eigenvalues = np.linalg.eigvals(matrix)
    for eigenvalue in eigenvalues:
        plt.scatter(eigenvalue.real, eigenvalue.imag, color='red')
        # Wstawienie śwartoci łwasnych jako tekst na wykresie
        plt.text(eigenvalue.real, eigenvalue.imag, f'{eigenvalue:.2f}',
            fontsize=9,
            verticalalignment='bottom',horizontalalignment='right')

    # Dodanie etykiet dla łdokadnych śwartoci łwasnych
    for i, (eigenvalue_real, eigenvalue_imag) in
        enumerate(zip(eigenvalues.real, eigenvalues.imag)):
        ax.annotate(f'lambda{i + 1}', (eigenvalue_real,
            eigenvalue_imag), textcoords="offset points", xytext=(-10,
            10), ha='center')

    # Ustawienia wykresu
```

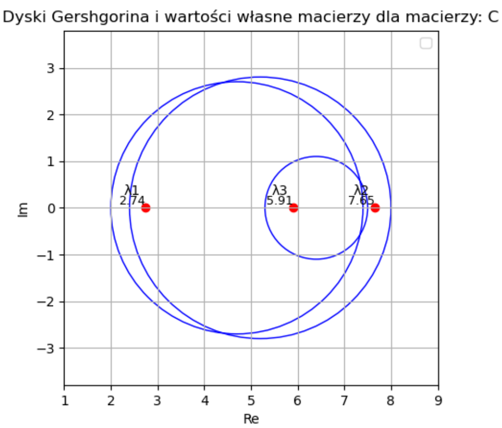
```
    ax.set_aspect('equal', 'box')
    plt.grid(True)
    plt.xlabel('Re')
    plt.ylabel('Im')
    plt.title('Dyski Gershgorina i śwartoci łwasne macierzy dla
        macierzy: '+str(name))
    plt.legend()

    # Ustaw zakres osi tak, aby łpasowa do dysków
    x_min = min(centers.real - radii)
    x_max = max(centers.real + radii)
    y_min = min(centers.imag - radii)
    y_max = max(centers.imag + radii)
    ax.set_xlim(x_min - 1, x_max + 1)
    ax.set_ylim(y_min - 1, y_max + 1)

    plt.show()

# łPrzykadowa macierz
A = np.array([[-2, 1, 0],[2, 0, 0],[0, 0, 2]])
B = np.array([[5, 1, 1],[0, 6, 1],[0, 0, -5]])
C = np.array([[5.2, 0.6, 2.2],[0.6, 6.4, 0.5],[2.2, 0.5, 4.7]])

plot_gershgorin_circles(A, "A")
plot_gershgorin_circles(B, "B")
plot_gershgorin_circles(C, "C")
```

Poniżej wyniki w postaci wykresów:



Rys. 2 Wyniki macierz A

Rys. 3 Wyniki macierz B



Rys. 4 Wyniki macierz C

6 Zadanie nr. 6

Wyznacz rozkład VD macierzy (bez użycia funkcji ”svd”):

$$(a) A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, (b) A_2 = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}, (c) A_3 = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ \frac{17}{10} & \frac{1}{10} & -\frac{17}{10} & -\frac{1}{10} \\ \frac{3}{5} & \frac{9}{5} & -\frac{3}{5} & -\frac{9}{5} \end{bmatrix} \tag{50}$$

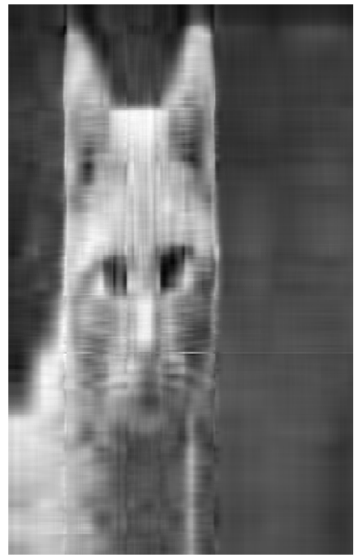
Wyniki obliczeń porównaj z obliczeniami komputerowymi wykorzystującymi funkcję ”svd”.

7 Zadanie nr. 7

Przekształć dowolny obraz (z Internetu) do macierzy o wymiarach 640 x 400 (standard VGA), a następnie przeskaluj wartości elementów aby: $0 \leqslant x \leqslant 1$; gdzie x = 0 odpowiada poziomowi czerni, x = 1 to poziom bieli. Wyznacz SVD takiej macierzy wykorzystując dowolną implementację algorytmu SVD. Następnie utwórz obraz z faktorów dla następujących przypadków: 10; 20 oraz 40 wartości osobliwych i odpowiadającym im wektorów osobliwych.

```
link =
    'https://www.alleycat.org/wp-content/uploads/2019/03/FELV-cat.jpg';
zdjecie = imread(link);

zdjecie_rozmiar = imresize(zdjecie, [640, 400]);

zdjecie_skala = double(zdjecie_rozmiar) / 255;

[U, S, V] = svd(zdjecie_skala);

wart_os = [10, 20, 40];

for w = wart_os
   zdjecie_wart = U(:, 1:w) * S(1:w, 1:w) * V(:, 1:w)';
   zdjecie_wart = max(min(zdjecie_wart, 1), 0);
   imshow(zdjecie_wart);
   pause;
end
```

Rys. 5 Obraz oryginalny



Rys. 6 Liczba wartości osobliwych: 10

Rys. 7 Liczba wartości osobliwych: 20

Rys. 8 Liczba wartości osobliwych: 40