

# Sprawozdanie nr. 2 - Metody numeryczne i optymalizacja

Jakub Andryszczak 259519,  
Jakub Żak 244255,  
Maciej Cierpisz 249163

## Spis treści

1	Zadanie nr. 1	3
2	Zadanie nr. 2	6
3	Zadanie nr. 3	7
4	Zadanie nr. 4	8
5	Zadanie nr. 5	10
6	Zadanie nr. 6	12
7	Zadanie nr. 7	13

## 1 Zadanie nr. 1

Wyznacz ręcznie pary własne (wyniki potwierdź obliczeniami komputerowymi):

$$A_1 = \begin{bmatrix} 21 & -6 & 0 \\ -6 & 18 & 6 \\ 0 & 6 & 15 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, A_3 = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad (1)$$

Sprawdź czy ślad macierzy jest równy sumie jej wartości własnych. Które macierze są diagonalizowalne i dlaczego? Czy któraś z tych macierzy jest osobliwa?

Macierzą osobliwą nazywamy taką, której wyznacznik jest równy zero. Dla każdej z wcześniej wymienionych macierzy wyliczono ich wyznaczniki.

$$A_1 = 21 \cdot 18 \cdot 15 + 6 \cdot (-6) \cdot 0 + 0 \cdot 6 \cdot (-6) - (21 \cdot 6 \cdot 6) - (-6 \cdot -6 \cdot 15) - (0 \cdot 0 \cdot 18) = 4374 \quad (2)$$

Wynik wyznacznika dla pierwszej macierzy nie jest równy zeru, a zatem wartość  $A_1$  nie należy do macierzy osobliwych.

$$A_2 = 2 \quad (3)$$

$$A_3 = 32 \quad (4)$$

Z obliczeń wynika żadna z macierzy nie spełnia warunku osobliwości.

Następnie obliczono ślad powyższych macierzy. Ślad macierzy jest to suma elementów leżących na przekątnej danej macierzy. A zatem:

$$A_1 = 54 \quad (5)$$

$$A_2 = 4 \quad (6)$$

$$A_3 = 11 \quad (7)$$

Do wyznaczenia par i wartości własnych macierzy oraz sprawdzenia czy podane macierze są diagonalizowalne obliczono wyznacznik  $\det(A - \lambda I) = 0$ :

$$\det(A_1 - \lambda) = (21 - \lambda)(18 - \lambda)(15 - \lambda) - (21 - \lambda) \cdot 6 \cdot 6 - (15 - \lambda) \cdot -6 \cdot -6 = 0 \quad (8)$$

$$\lambda^3 - 54\lambda^2 + 891\lambda - 4374 = 0 \quad (9)$$

Znaleziono pierwsze miejsce zerowe równania równe 18. Po podzieleniu wielomian wygląda następująco:

$$x^2 - 36x + 243 = 0 \quad (10)$$

Po wyliczeniu delty wyznaczono wartości własne tego równania:  $\lambda_1 = 9$ ,  $\lambda_2 = 18$ ,  $\lambda_3 = 27$ . Podstawiając pod macierz  $A_1$  wartość  $\lambda_1$  otrzymujemy układ równań:

$$\begin{bmatrix} 12 & -6 & 0 \\ -6 & 9 & 6 \\ 0 & 6 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (11)$$

Obliczamy w ten sposób wektor własny którego wartość jest równa:

$$\begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (12)$$

Dla  $\lambda_2$  i  $\lambda_3$  wektory własne prezentują się następująco:

$$\lambda_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \lambda_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} \quad (13)$$

Tym samym powstaje nam macierz

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad (14)$$

A macierzą odwrotną będzie macierz

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{2}{9} \\ \frac{2}{9} & \frac{1}{9} & \frac{2}{9} \\ -\frac{2}{9} & \frac{2}{9} & \frac{1}{9} \end{bmatrix} \quad (15)$$

Aby sprawdzić czy dana macierz jest diagonalizowalną należy sprawdzić czy  $A'$  jest równa macierzy  $A$ .

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} -\frac{1}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{2}{9} \\ \frac{2}{9} & \frac{1}{9} & \frac{2}{9} \\ -\frac{2}{9} & \frac{2}{9} & \frac{1}{9} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 18 & 0 \\ 0 & 0 & 27 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 & -6 & 0 \\ -6 & 18 & 6 \\ 0 & 6 & 15 \end{bmatrix} \quad (16)$$

A zatem macierz jest diagonalizowalna i nieosobliwa, a ślad macierzy jest równy sumie wartości własnych

Dla przykładu drugiego równanie prezentują się następująco:

$$\det(A_2 - \lambda) = -\lambda^3 + 4\lambda^2 - 5\lambda + 2 = 0 \quad (17)$$

$$\lambda^3 - 4\lambda^2 + 5\lambda - 2 = 0 \quad (18)$$

Suma współczynników jest równa 0, a zatem  $\lambda_1=1$ . Kolejno podzielono wielomian przez  $(\lambda - 1)$ .

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \quad (19)$$

Następnie wyliczono  $\Delta$  ze wzoru  $\Delta = b^2 - 4ac$ , której wartość wyszła 1. Ze względu na to obliczono pierwiastki za pomocą wzoru:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3 \pm \sqrt{1}}{2} \quad (20)$$

Wynikami tego działania są  $\lambda_2 = 1$  i  $\lambda_3 = 2$ . Dla wartości  $\lambda_1, \lambda_2$  i  $\lambda_3$  wyliczono wektory własne.

$$\lambda_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \lambda_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \lambda_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (21)$$

Tak jak w przykładzie wyżej do sprawdzenia czy macierz jest diagonalizowalna obliczono:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (22)$$

Macierz jest diagonalizowalna i nieosobliwa, a ślad macierzy jest równy sumie wartości własnych. Trzeci przykład:

$$\det(A_3 - \lambda) = \lambda^4 - 11\lambda^3 + 42\lambda^2 - 64\lambda + 32 = 0 \quad (23)$$

Znaleziono wartości własne równe 1 i 2. Po podzieleniu wielomianu przez  $(\lambda - 1)$  i  $(\lambda - 2)$  otrzymujemy  $\lambda^2 - 8\lambda + 16$ . Ostatnią wartością własną jest  $\lambda = 4$ . Wyliczając wektory własne  $\lambda_3$  ma tą samą wartość co  $\lambda_4$  a zatem macierz nie może być diagonalizowalna ze względu na powtarzające się wektory własne. Jest ona również nieosobliwa, a ślad jest równy sumie wartości własnych.

## 2 Zadanie nr. 2

Wyznacz największą i najmniejszą wartość własną stosując metodę Powera zwykłą i z przesunięciem:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \quad (24)$$

Napisano algorytm wyznaczający największą i najmniejszą wartość własną:

---

```
import numpy as np

A = np.array([ [4, 2, 0, 0],
               [1, 4, 1, 0],
               [0, 1, 4, 1],
               [0, 0, 2, 4],])

x = np.random.rand(4)
print(x)
print()

def normal_power_method(A,x):
    for i in range(200):
        x = np.dot(A,x)
        x = x/np.linalg.norm(x)

    return np.dot(np.dot(A,x),x)/np.dot(x, x)

def shifted_power_method(A, x0, tol=1e-6):
    n = len(A)
    # Estimate a shift close to the smallest eigenvalue
    sigma = np.trace(A) / n
    x = x0.copy()
    for _ in range(200):
        y = np.dot(A, x) - sigma * x

    lambda_ = np.dot(x.T, np.dot(A, x))
    return lambda_

lambda1 = normal_power_method(A, x)
lambda2 = 1 / normal_power_method(A, x)
lambda3 = shifted_power_method(A, x)
lambda4 = 1 / shifted_power_method(A, x)

print("Largest eigenvalue normal power",lambda1)
print("Smallest eigenvalue normal power", lambda2)
```

```
print("Largest eigenvalue shifted power", lambda3)
print("Smallest eigenvalue shifted power", lambda4)
```

Poniżej wynik działania programu:

```
Largest eigenvalue normal power 5.68226505344719
Smallest eigenvalue normal power 0.17598615879302257
Largest eigenvalue shifted power 6.304928557128195
Smallest eigenvalue shifted power 0.15860607950417216
```

Rys. 1 Wyniki obliczeń

### 3 Zadanie nr. 3

Rozwiąż układ równań różniczkowych zwyczajnych:

$$\frac{du}{dt} = Pu \text{ dla } u_0 = \begin{bmatrix} 8 \\ 5 \end{bmatrix} \text{ oraz } P = \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$$

Układy równań wygląda następująco:

$$\frac{du_1}{dt} = 4u_1 - 5u_2 \quad (25)$$

$$\frac{du_2}{dt} = 2u_1 - 5u_2 \quad (26)$$

Równanie  $\frac{du}{dt} = \lambda u$  można przekształcić na  $u = \alpha e^{\lambda t}$ , a następnie podstawiając uzyskujemy:

$$\alpha_1 \lambda e^{\lambda t} = 4\alpha_1 e^{\lambda t} - 5\alpha_2 e^{\lambda t} \quad (27)$$

$$\alpha_2 \lambda e^{\lambda t} = 2\alpha_1 e^{\lambda t} - 3\alpha_2 e^{\lambda t} \quad (28)$$

Ze układu obustronnie usuwamy  $e^{\lambda t}$  a pozostałe wartości zapisujemy w macierzach:

$$\begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} \quad (29)$$

Następnie jak w zadaniu pierwszym przystąpiono do wyliczenia  $\det(A - \lambda I)$

$$\det \begin{bmatrix} 4 - \lambda & -5 \\ 2 & -3 - \lambda \end{bmatrix} = (4 - \lambda)(-3 - \lambda) + 10 = \lambda^2 - \lambda - 2 = 0 \quad (30)$$

Wyliczono, że wartościami własnymi są  $\lambda_1 = -1$  i  $\lambda_2 = 2$ .

Podstawiając wartości własne wyliczamy wektory własne. Dla  $\lambda_1 = -1$ :

$$\begin{bmatrix} 5 & -5 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} x_1 = 0 \Rightarrow x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (31)$$

Dla  $\lambda_2 = 2$ :

$$\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 2 & -5 \end{bmatrix} x_2 = 0 \Rightarrow x_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} \quad (32)$$

Rozwiązanie tego zadania wygląda następująco:

$$u = c_1 e^{\lambda_1 t} x_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} x_2$$

Podstawiając  $u^{(0)}$  wyliczamy wartości  $C_1$  i  $C_2$ :

$$c_1 x_1 + c_2 x_2 = u^{(0)}, \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 5 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (33)$$

Odpowiedzią dla tego zadania jest funkcja:

$$u = 3e^{-t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + e^{2t} \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} \quad (34)$$

## 4 Zadanie nr. 4

Wyznacz  $A^{100}$  metodą diagonalizacji macierzy

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (35)$$

Obliczanie wartości własnych:

$$\det(A - tI) = \begin{vmatrix} 4-t & 3 \\ 1 & 2-t \end{vmatrix} = t^2 - 6t + 5 = (t-1)(t-5) = 0 \quad (36)$$

$$\begin{cases} t_1 = 1 \\ t_2 = 5 \end{cases} \quad (37)$$

Obliczanie wektorów własnych:

$$(A - t_1 I) = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (38)$$

$$(A - tI) * v = 0 \quad (39)$$

$$\left[ \begin{array}{cc|c} 3 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{array} \right] \begin{array}{l} | \cdot (\frac{1}{3}) \\ \leftarrow \end{array} \begin{array}{l} \text{ } \\ + \end{array} \Big]^{-1}$$



$$\left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$$X = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (40)$$

$$(A - t_1 I) = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \quad (41)$$

$$(A - tI) * v = 0 \quad (42)$$

$$\left[ \begin{array}{cc|c} 3 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{array} \right] \begin{array}{l} | \cdot (-1) \\ \leftarrow \end{array} \begin{array}{l} ]^{-1} \\ + \end{array}$$

$$\left[ \begin{array}{cc|c} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$$X = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (43)$$

Obliczanie potęgi macierzy po diagonalizacji:

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \quad (44)$$

$$P = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (45)$$

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \quad (46)$$

$$A^{100} = P * D^{100} * P^{-1} \quad (47)$$

$$A^{100} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1^{100} & 0 \\ 0 & 5^{100} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \quad (48)$$

## 5 Zadanie nr. 5

Wykreśl dyski Gershgorina i określ lokalizację wartości własnych macierzy:

$$A_1 = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 0 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}, A_3 = \begin{bmatrix} 5.2 & 0.6 & 2.2 \\ 0.6 & 6.4 & 0.5 \\ 2.2 & 0.5 & 4.7 \end{bmatrix}, \quad (49)$$

Zaznacz na dyskach lokalizację dokładnych wartości własnych wyznaczonych dowolną metodą.

---

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def gershgorin_circles(matrix):
    """
    Generuje środki i promienie dysków Gershgorina dla danej macierzy.
    """
    n = matrix.shape[0]
    centers = np.diag(matrix)
    radii = np.sum(np.abs(matrix), axis=1) - np.abs(centers)
    return centers, radii

def plot_gershgorin_circles(matrix, name):
    centers, radii = gershgorin_circles(matrix)
    fig, ax = plt.subplots()

    # Rysowanie dysków Gershgorina
    for center, radius in zip(centers, radii):
        circle = plt.Circle((center.real, center.imag), radius,
                             color='blue', fill=False)
        ax.add_artist(circle)

    # Obliczanie i rysowanie wartości własnych
    eigenvalues = np.linalg.eigvals(matrix)
    for eigenvalue in eigenvalues:
        plt.scatter(eigenvalue.real, eigenvalue.imag, color='red')
        # Wstawienie wartości własnych jako tekst na wykresie
        plt.text(eigenvalue.real, eigenvalue.imag, f'{eigenvalue:.2f}',
                  fontsize=9,
                  verticalalignment='bottom', horizontalalignment='right')

    # Dodanie etykiet dla łokadnych wartości własnych
    for i, (eigenvalue_real, eigenvalue_imag) in
        enumerate(zip(eigenvalues.real, eigenvalues.imag)):
        ax.annotate(f'lambda{i + 1}', (eigenvalue_real,
                                         eigenvalue_imag), textcoords="offset points", xytext=(-10,
                                         10), ha='center')

    # Ustawienia wykresu
```

```

ax.set_aspect('equal', 'box')
plt.grid(True)
plt.xlabel('Re')
plt.ylabel('Im')
plt.title('Dyski Gershgorina i wartości własne macierzy dla
          macierzy: '+str(name))
plt.legend()

# Ustaw zakres osi tak, aby łpasowa do dysków
x_min = min(centers.real - radii)
x_max = max(centers.real + radii)
y_min = min(centers.imag - radii)
y_max = max(centers.imag + radii)
ax.set_xlim(x_min - 1, x_max + 1)
ax.set_ylim(y_min - 1, y_max + 1)

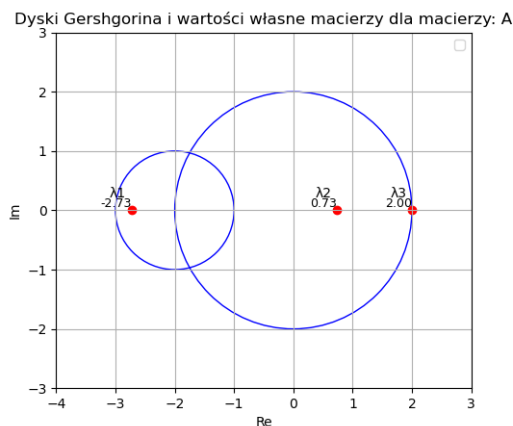
plt.show()

# Przykładowa macierz
A = np.array([[ -2, 1, 0],[2, 0, 0],[0, 0, 2]])
B = np.array([[5, 1, 1],[0, 6, 1],[0, 0, -5]])
C = np.array([[5.2, 0.6, 2.2],[0.6, 6.4, 0.5],[2.2, 0.5, 4.7]])

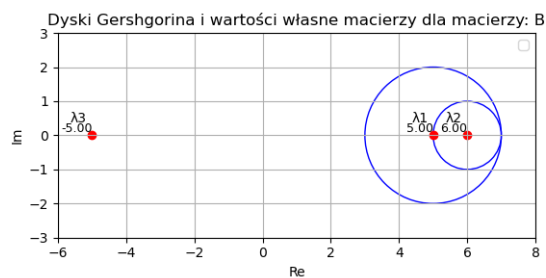
plot_gershgorin_circles(A, "A")
plot_gershgorin_circles(B, "B")
plot_gershgorin_circles(C, "C")

```

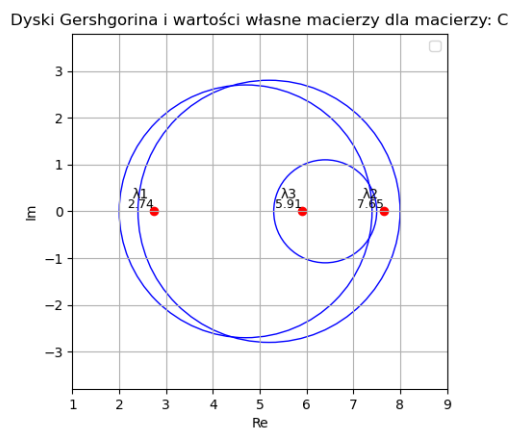
Poniżej wyniki w postaci wykresów:



Rys. 2 Wyniki macierz A



Rys. 2 Wyniki macierz B



Rys. 2 Wyniki macierz C

## 6 Zadanie nr. 6

Wyznacz rozkład VD macierzy (bez użycia funkcji "svd"):

$$(a)A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, (b)A_2 = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}, (c)A_3 = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ \frac{17}{10} & \frac{1}{10} & -\frac{17}{10} & -\frac{1}{10} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix} \quad (50)$$

Wyniki obliczeń porównaj z obliczeniami komputerowymi wykorzystującymi funkcję "svd".

## 7 Zadanie nr. 7

Przekształć dowolny obraz (z Internetu) do macierzy o wymiarach 640 x 400 (standard VGA), a następnie przeskaluj wartości elementów aby:  $0 \leq x \leq 1$ ; gdzie  $x = 0$  odpowiada poziomowi czerni,  $x = 1$  to poziom bieli. Wyznacz SVD takiej macierzy wykorzystując dowolną implementację algorytmu SVD. Następnie utwórz obraz z czynników dla następujących przypadków: 10; 20 oraz 40 wartości osobliwych i odpowiadającym im wektorów osobliwych.

---

```
link =  
    'https://www.alleycat.org/wp-content/uploads/2019/03/FELV-cat.jpg';  
zdjecie = imread(link);  
  
zdjecie_rozmiar = imresize(zdjecie, [640, 400]);  
  
zdjecie_skala = double(zdjecie_rozmiar) / 255;  
  
[U, S, V] = svd(zdjecie_skala);  
  
wart_os = [10, 20, 40];  
  
for w = wart_os  
    zdjecie_wart = U(:, 1:w) * S(1:w, 1:w) * V(:, 1:w)';  
    zdjecie_wart = max(min(zdjecie_wart, 1), 0);  
    imshow(zdjecie_wart);  
    pause;  
end
```

---