Sprawozdanie - Metody numeryczne i optymailzacja

Jakub Andryszczak 259519,
Jakub Żak 244255,
Maciej Cierpisz 249163

Spis treści

1 Zadanie nr. 1 **3**

2 Zadanie nr. 2 **5**

3 Zadanie nr. 3 **5**

4 Zadanie nr. 4 **5**

5 Zadanie nr. 5 **7**

6 Zadanie nr. 6 **8**

7 Algorytmy **8**

1 Zadanie nr. 1

Znajdź liczby x1 i x2, które maksymalizują sumę x1 + x2 przy ograniczeniach:

$$\begin{cases} x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0 \\ x_1 + 2x_2 \leqslant 2 \\ 4x_1 + 2x_2 \leqslant 12 \\ -x_1 + x_2 \leqslant 1, \end{cases} . \tag{1}$$

Narysować zbiór dopuszczalnych rozwiązań na $\Re^2$ i znaleźć rozwiązanie w ujęciu geometrycznym, formułując zadanie programowania liniowego.

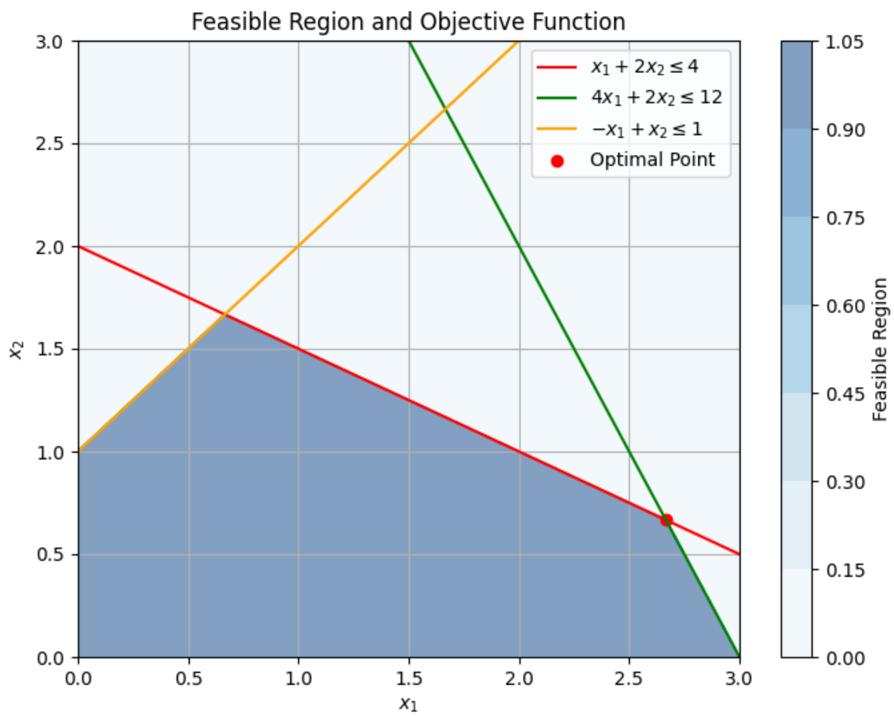
Początkowo zapisano wszystkie nierówności w formie równań z dodatkową niewiadomą,

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 \\ 4x_1 + 2x_2 + x_4 = 12 \\ -x_1 + x_2 + x_5 = 1, \end{cases} \tag{2}$$

Zapisano zadanie w postaci macierzowej:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 4 & 2 & 0 & 1 & 0 & 12 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3}$$

Następnie wyświetlono wszystkie proste na jednym wykresie.



Wykres.2.1. Zależność n-tej iteracji metody do błędu residualnego

Obszar zamalowany jest zbiorem dopuszczalnych rozwiązań dla podanych warunków zadania. Liczby x_1 i x_2, które maksymalizują ich sumę przy podanych ograniczeniach są:

$$\begin{cases} x_1 = 2.6667 \\ x_2 = 0.6667 \\ f(x_1, x_2) = 3.3333 \end{cases} \tag{4}$$

Kolejno zweryfikowano czy znalezione rozwiązanie jest poprawne. Do tego wykorzystano funkcję linprog(.). Zauważono, że wyniki są spójne. Wykonano obliczenia również na samodzielnie wykonanej funkcji, aby porównać czas i dokładność względem funkcji linprog.
Czas w jakim została wykonana ręcznie wykonana funkcja bez wykorzystania linprog: 0.0004387 [s]
Czas w jakim została wykonana funkcja z wykorzystania linprog: 0.0020085 [s]

W każdym przypadku wychodzi ten sam spójny wynik.

2 Zadanie nr. 2

Zrównoważona normalna dieta zakłada, że codziennie powinniśmy spożywać co najmniej 60 gramów białka i co najmniej 120 gramów węglowodanów. Zakładamy, że 100 gram sera zawiera 20 gramy białka i 20 gramy węglowodanów, natomiast taka sama ilość chleba zawiera 10 gram białka i 30 gramy węglowodanów. Proszę wyznaczyć najbardziej ekonomiczną dietę przy założeniu, że cena sera wynosi 30 zł/kg, a chleba 20 zł/kg.

Kod realizujący zadanie:

```
from pulp import *

# Definicja problemu
problem = LpProblem("Zrównoważona normalna dieta")

# Zmienne decyzyjne
x = LpVariable("x", lowBound=0)
y = LpVariable("y", lowBound=0)

# Funkcja celu
problem += 30 * x + 20 * y, LpMinimize

# Ograniczenia
problem += 20 * x + 10 * y >= 60
problem += 20 * x + 30 * y >= 120

# Rozwiązanie problemu
problem.solve()

# śWywietlenie wyników
print("śćIlo sera:", x.value())
print("śćIlo chleba:", y.value())
print("Koszt diety:", problem.objective.value())
```

Wyniki obliczeń przedstawiono w formie tabeli:

Ilość sera	1,5 kg
Ilość chleba	3 kg
Koszt diety	105 zł

3 Zadanie nr. 3

4 Zadanie nr. 4

W pewnej rafinerii proces rafinacji wymaga wyprodukowania co najmniej dwóch litrów benzyny na każdy litr oleju opałowego. Aby sprostać przewidywanemu zapotrzebowaniu w okresie zimowym, trzeba będzie produkować co najmniej trzy miliony litrów oleju opałowego dziennie. Z kolei, zapotrzebowanie na benzynę wynosi nie więcej niż 6,4 miliona litrów dziennie. Jeśli benzynę sprzedaje się po 1,90 dolara za litr, a olej opałowy po 1,50 dolara za litr, to ile należy wyprodukować każdego z tych produktów, aby zmaksymalizować przychody?

Aby rozwiązać zadania, sformułowano funkcję celu, którą chcemy zmaksymalizować. Dla x_1 oznaczamy litry oleju opałowego, a x_2 litry benzyny, które należy wyprodukować. Przychody można obliczyć jako iloczyn ilości litrów każdego produktu i odpowiadających im cen:

$$f(x_1, x_2) = 1.5x_1 + 1.9x_2 \tag{5}$$

Należy wyprodukować co najmniej trzy miliony litrów oleju opałowego, a proces rafinacji wymaga wyprodukowania co najmniej dwóch litrów benzyny na każdy litr oleju opałowego, a ograniczenie zapotrzebowania na benzynę wynosi nie więcej niż 6,4 miliona litrów dziennie, więc

$$\begin{cases} x_1 \geqslant 3 \\ x_2 \leqslant 6.4 \\ -2x_1 + x_2 \geqslant 0 \end{cases} \tag{6}$$

Nastepnie przekształcono nierówności na równania z dodatkową niewiadomą i zapisano w postaci macierzowej

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 6.4 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1.9 & 1.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{7}$$

Wykorzystano algorytmy z wcześniejszych zadań do rozwiązania tego zadania a następnie porównano wyniki.
Dla funkcji bez linprog:

$$\begin{cases} x_1 = 3.2 \\ x_2 = 6.4 \\ f(x_1, x_2) = 16.96 \\ Czas : 0.0004787[s] \end{cases} \tag{8}$$

Dla funkcji z linprog:

$$\begin{cases} x_1 = 3.2 \\ x_2 = 6.4 \\ f(x_1, x_2) = 16.96 \\ Czas : 0.0016223[s] \end{cases} \tag{9}$$

Można zauważyć, że tak samo jak w zadaniu 1 czas wykonanywania się funkcji z linprog jest dłuższy. Może to być związane z poziomem rozbudowania tej metody.

5 Zadanie nr. 5

Załóżmy, że mamy do zainwestowania 12 000 USD i trzy różne fundusze do wyboru. Fundusz obligacji komunalnych ma stopę zwrotu 7%, lokata bankowa ma stopę zwrotu 8%, a konto wysokiego ryzyka ma oczekiwaną (spodziewaną) stopę zwrotu 12%. Aby zminimalizować ryzyko, postanawiasz nie inwestować więcej niż 2000 USD na koncie wysokiego ryzyka. Ze względów podatkowych musisz zainwestować co najmniej trzy razy więcej w obligacje komunalne niż w lokatę bankową. Zakładając, że zyski na koniec roku będą zgodne z oczekiwaniami, jakie są optymalne kwoty inwestycji?

Kod realizujący zadanie:

```
 import pulp

# Inicjalizacja problemu
prob = pulp.LpProblem("Maximize Returns", pulp.LpMaximize)

# Zmienne decyzyjne
x1 = pulp.LpVariable("Obligacje", lowBound=0) # Inwestycja w fundusz
    obligacji
x2 = pulp.LpVariable("Depozyt", lowBound=0) # Inwestycja w ęlokat bankową
x3 = pulp.LpVariable("Wysokie ryzyko", lowBound=0, upBound=2000) #
    Inwestycja w konto wysokiego ryzyka

# Funkcja celu - maksymalizacja zwrotów
prob += 0.07 * x1 + 0.08 * x2 + 0.12 * x3, "Total_Returns"

# Ograniczenia
prob += x1 >= 3 * x2 # Inwestycja w obligacje komunalne musi ćby co
    najmniej trzy razy ęwiksza niż w ęlokat bankową
prob += x1 + x2 + x3 <= 12000 # Suma inwestycji nie może ćprzekroczy
    12000 USD

# Rozwiązanie problemu
prob.solve()

# śWywietlenie wyników
print("Optymalne kwoty:")
for v in prob.variables():
   print(v.name, "=", "${:,.2f}".format(v.varValue))

print("Szacowana stopa zwrotu =
    ${:,.2f}".format(pulp.value(prob.objective)))
```

Wyniki obliczeń przedstawiono w formie tabeli:

Depozyt	2500 $
Obligacje	7500 $
Wysokie ryzyko	2000 $
Szacowana stopa zwrotu	965 $

6 Zadanie nr. 6

7 Algorytmy

```
def simplex(c, A, b, bounds, maximize=False):


    if maximize:
        c = [-i for i in c]

    res = linprog(c, A_ub=A, b_ub=b, bounds=bounds, method='simplex')

    if res.success:
        if maximize:
            objective_value = -res.fun
        else:
            objective_value = res.fun
        return f"Optymalnymi śwartociami funkcji jest {objective_value}
             w {' '.join(f'x{i + 1} = {x:.4f}' for i, x in
             enumerate(res.x))}"
    else:
        return "No feasible solution found."
```

```
def pivot_on(A, row, col):

    pivot = A[row, col]

    A[row, :] /= pivot

    for r in range(A.shape[0]):
        if r != row:
            A[r, :] -= A[r, col] * A[row, :]


def find_pivot(A):

    col = np.argmin(A[-1, :-1])
    if A[-1, col] >= 0:
        return -1, -1
```

```
    ratios = np.array([A[r, -1] / A[r, col] if A[r, col] > 0 else np.inf
        for r in range(A.shape[0] - 1)])
    row = np.argmin(ratios)
    if ratios[row] == np.inf:
        return -1, -1

    return row, col


def custom_linprog(c, A_ub, b_ub, bounds):
    num_vars = len(c)


    tableau = np.zeros((len(A_ub) + 1, len(A_ub[0]) + len(A_ub) + 1))


    tableau[-1, :num_vars] = -np.array(c)


    for i in range(len(A_ub)):
        tableau[i, :num_vars] = A_ub[i]
        tableau[i, num_vars + i] = 1
        tableau[i, -1] = b_ub[i]


    while True:
        row, col = find_pivot(tableau)
        if row == -1 or col == -1:
            break
        pivot_on(tableau, row, col)

    if np.min(tableau[-1, :-1]) < 0:
        return None


    solution = np.zeros(num_vars)
    for i in range(num_vars):
        if np.sum(tableau[:, i] == 1) == 1 and np.sum(tableau[:, i] !=
            0) == 1:
            solution[i] = tableau[np.where(tableau[:, i] == 1)[0], -1]

    return solution, tableau[-1, -1]
```