Sprawozdanie - Metody numeryczne i optymailzacja

Jakub Andryszczak 259519,
Jakub Żak 244255,
Maciej Cierpisz 249163

Spis treści

1 Zadanie nr. 1

Znajdź zmienne x_1 oraz x_2, które minimalizują funkcję celu $x_1 + x_2$ przy ograniczeniu:

$$x_1^2 + x_2^2 = 2.$$

Aby rozwiązać podane zadanie optymalizacji, użyjemy metody mnożników Lagrange'a. Zadanie polega na znalezieniu zmiennych x_1 oraz x_2, które minimalizują funkcję celu $f(x_1, x_2) = x_1+x_2$ przy ograniczeniu $g(x_1, x_2) = x_1^2+x_2^2-2 = 0$.

Metoda mnożników Lagrange'a polega na wprowadzeniu nowej zmiennej λ (mnożnika Lagrange'a) i rozwiązaniu układu równań danych przez gradienty funkcji Lagrange'a:

$$\nabla f = \lambda \nabla g$$

Funkcja Lagrange'a jest zdefiniowana jako:

$$\mathcal{L}(x_1, x_2, \lambda) = f(x_1, x_2) + \lambda(g(x_1, x_2))$$

$$\mathcal{L}(x_1, x_2, \lambda) = (x_1 + x_2) + \lambda(x_1^2 + x_2^2 - 2)$$

Teraz obliczamy pochodne cząstkowe i przyrównujemy je do zera:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} = 1 + \lambda \cdot 2x_1 = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} = 1 + \lambda \cdot 2x_2 = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = x_1^2 + x_2^2 - 2 = 0$$

Rozwiązując te równania krok po kroku:
1. Z równania $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} = 0$:

$$1 + 2\lambda x_1 = 0$$

$$\lambda = -\frac{1}{2x_1}$$

2. Z równania $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} = 0$:

$$1 + 2\lambda x_2 = 0$$

$$\lambda = -\frac{1}{2x_2}$$

3. Przyrównując dwa wyrażenia dla λ:

$$-\frac{1}{2x_1} = -\frac{1}{2x_2}$$

$$x_1 = x_2$$

4. Używając ograniczenia $x_1^2 + x_2^2 = 2$:

$$x_1^2 + x_1^2 = 2$$

$$2x_1^2 = 2$$
$$x_1^2 = 1$$
$$x_1 = \pm 1$$

W związku z tym, x_2 również jest ± 1. To daje nam dwa punkty:

$$(x_1, x_2) = (1, 1) \quad \text{lub} \quad (-1, -1)$$

Teraz obliczamy wartość funkcji celu w tych punktach:

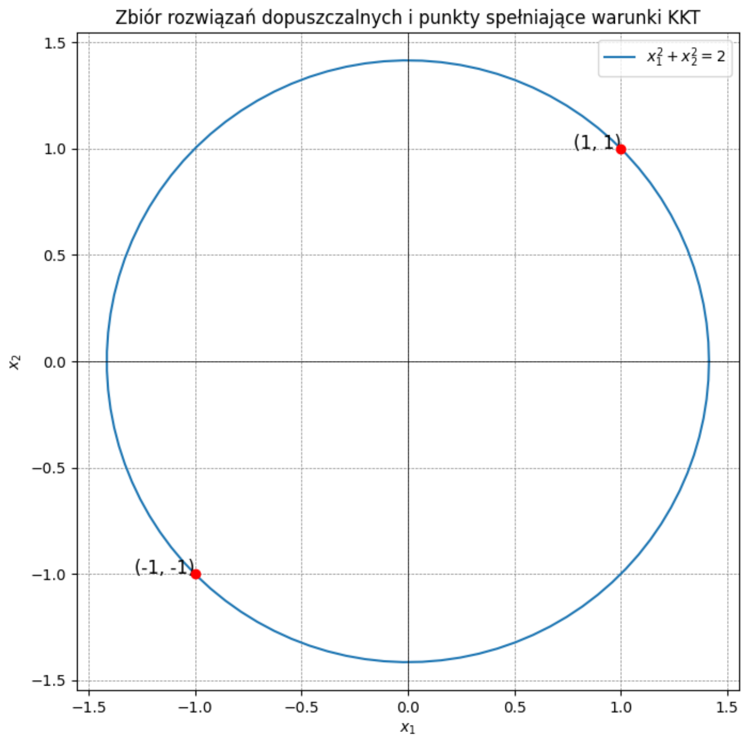
$$f(1, 1) = 1 + 1 = 2$$

$$f(-1, -1) = -1 - 1 = -2$$

Tak więc, minimalna wartość funkcji celu $x_1 + x_2$ przy danym ograniczeniu jest osiągana w punkcie $(x_1, x_2) = (-1, -1)$.

Zatem zmienne x_1 oraz x_2, które minimalizują funkcję celu to:

$$x_1 = -1, \quad x_2 = -1$$



Rys. 1.1. Wykres dopuszczalnych rozwiązań oraz punktów spełniających warunki optymalności KKT

2 Zadanie nr. 2

Znajdź zmienne x_1 oraz x_2, które minimalizują funkcję celu $x_1 + x_2$ przy ograniczeniach:

$$x_2 \geqslant 0,$$

$$2 - x_1^2 - x_2^2 \geqslant 0.$$

Narysuj zbiór rozwiązań dopuszczalnych na płaszczyźnie $\mathbb{R}^2$ i znajdź punkty spełniające warunki optymalności KKT. Które ograniczenia są aktywne? Zilustruj zadanie geometrycznie. Minimalizujemy funkcję celu:

$$f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$$

przy ograniczeniach:

$$g_1(x_1, x_2) = x_2 \geqslant 0,$$

$$g_2(x_1, x_2) = 2 - x_1^2 - x_2^2 \geqslant 0.$$

Definiujemy funkcję Lagrange'a:

$$\mathcal{L}(x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2) = x_1 + x_2 + \lambda_1(-x_2) + \lambda_2(2 - x_1^2 - x_2^2)$$

Gradient funkcji Lagrange'a:

$$\nabla\mathcal{L} = \left(1 - 2\lambda_2 x_1, 1 - \lambda_1 - 2\lambda_2 x_2, -x_2, 2 - x_1^2 - x_2^2\right)$$

Warunki KKT:

$$1 - 2\lambda_2 x_1 = 0,$$
$$1 - \lambda_1 - 2\lambda_2 x_2 = 0,$$
$$\lambda_1 \geqslant 0, \quad \lambda_1 x_2 = 0,$$
$$\lambda_2 \geqslant 0, \quad \lambda_2(2 - x_1^2 - x_2^2) = 0.$$

Rozwiązywanie układu równań

$$1 - 2\lambda_2 x_1 = 0 \implies \lambda_2 = \frac{1}{2x_1},$$
$$1 - \lambda_1 - 2\lambda_2 x_2 = 0 \implies 1 - \lambda_1 - \frac{x_2}{x_1} = 0,$$

$$x_1^2 + x_2^2 = 2.$$

Sprawdzanie ograniczeń aktywnych

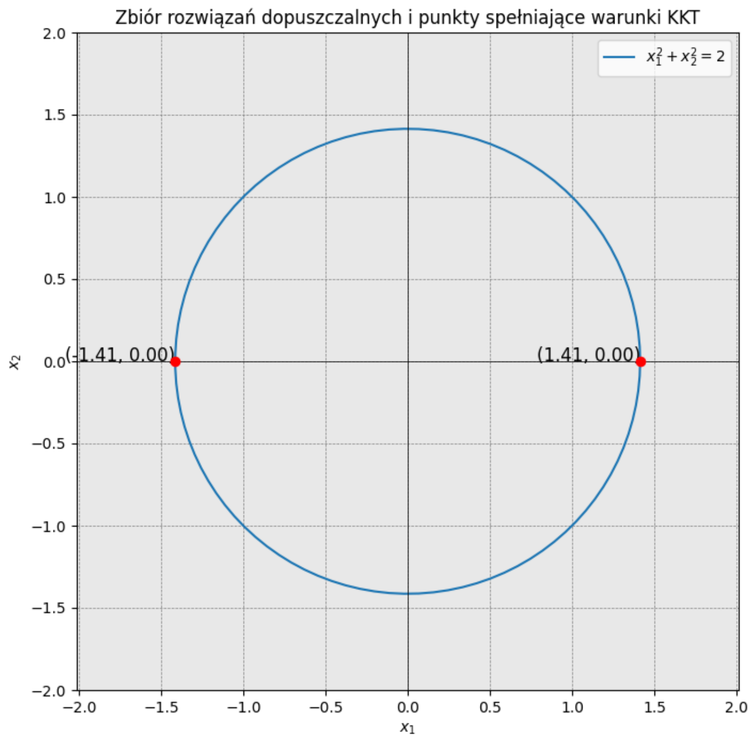
- Jeśli $\lambda_1 = 0$, $x_2 \geqslant 0$. - Jeśli $\lambda_2 = 0$, $x_1^2 + x_2^2 = 2$. Rozwiązanie dla punktów aktywnych

- $x_1 = -\sqrt{2}$, $x_2 = 0$, - $x_1 = \sqrt{2}$, $x_2 = 0$.

Minimalizacja funkcji celu

$$f(-\sqrt{2}, 0) = -\sqrt{2} + 0 = -\sqrt{2},$$
$$f(\sqrt{2}, 0) = \sqrt{2} + 0 = \sqrt{2}.$$

Minimalna wartość funkcji celu jest osiągana w punkcie $(-\sqrt{2}, 0)$.



Rys. 2.1. Wykres dopuszczalnych rozwiązań oraz punktów spełniających warunki optymalności KKT

3 Zadanie nr. 3

Znajdź zmienne x_1 oraz x_2, które minimalizują funkcję celu $x_1^2 + x_2^2$ przy ograniczeniu:

$$x_1 + x_2 \geqslant 1.$$

Znajdź rozwiązanie i wykaż, że funkcja celu dla tego rozwiązania ma punkt przegięcia.

Minimalizujemy funkcję celu:

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$$

przy ograniczeniu:

$$g(x_1, x_2) = x_1 + x_2 - 1 \geqslant 0.$$

Definiujemy funkcję Lagrange'a:

$$\mathcal{L}(x_1, x_2, \lambda) = x_1^2 + x_2^2 + \lambda(1 - x_1 - x_2)$$

Gradient funkcji Lagrange'a:

$$\nabla \mathcal{L} = (2x_1 - \lambda, 2x_2 - \lambda, 1 - x_1 - x_2)$$

Warunki KKT:

$$2x_1 - \lambda = 0, \quad 2x_2 - \lambda = 0, \quad 1 - x_1 - x_2 \geqslant 0, \quad \lambda \geqslant 0, \quad \lambda(1 - x_1 - x_2) = 0$$

Z pierwszych dwóch równań mamy:

$$2x_1 = \lambda \quad \text{i} \quad 2x_2 = \lambda \implies 2x_1 = 2x_2 \implies x_1 = x_2$$

Podstawiamy $x_1 = x_2$ do ograniczenia:

$$x_1 + x_1 = 2x_1 \geqslant 1 \implies x_1 \geqslant \frac{1}{2}$$

Zatem $x_1 = x_2 = \frac{1}{2}$ i $\lambda = 2x_1 = 1$.
Minimalizowana funkcja celu przyjmuje wartość:

$$f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

Aby wykazać, że funkcja celu ma punkt przegięcia w $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, sprawdzimy drugie pochodne funkcji celu:

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$$

Drugie pochodne:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = 0$$

Macierz Hessego:

$$H = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Wyznacznik macierzy Hessego:

$$\det(H) = 2 \times 2 - 0 \times 0 = 4 > 0$$

Ponieważ wyznacznik macierzy Hessego jest dodatni i drugie pochodne są dodatnie, funkcja $f(x_1, x_2)$ ma minimum w punkcie $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Jest to punkt przegięcia, co można zilustrować geometrycznie.

4 Zadanie nr. 4

Rozwiąż następujące zadanie programowania kwadratowego:

$$\begin{aligned} \min \frac{1}{2}x^T Q x + c^T x \\ \text{przy ograniczeniach:} \\ Ax \geqslant b, \\ x \geqslant 0, \end{aligned}$$

Sformułuj zadanie dualne dla powyższego problem. Następnie rozwiąż poniższe zadanie:

$$\begin{aligned} \min \quad & \frac{1}{2}x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 - 2x_1 - 6x_2 \\ \text{p.o.} \quad & x_1 + x_2 \leqslant 2, \\ & -x_1 + 2x_2 \leqslant 2, \\ & 2x_1 + x_2^2 \leqslant 2, \\ & x_1 \geqslant 0, \\ & x_2 \geqslant 0. \end{aligned}$$

Poniżej kod realizujący zadanie:

```
    import cvxpy as cp

# Zdefiniowane zmienne
x1 = cp.Variable()
x2 = cp.Variable()

# Funkcja celu (do zminimalizowania)
objective = cp.Minimize(x1**2 + x2**2 - 4*x1 - 2*x2 - 6)

# Ograniczenia
constraints = [x1 + x2 <= 2, -x1 + 2*x2 <= 2, 2*x1 + x2 <= 2, x1 >= 0,
    x2 >= 0]

# Problem programowania kwadratowego
prob = cp.Problem(objective, constraints)

# Rozwiązanie problemu
prob.solve()

# śWywietlenie wyników
print("śćWarto minimalna funkcji:", prob.value)
print("x1:", x1.value)
print("x2:", x2.value)
```

Wyniki:

$$\begin{cases} min.funkcji = -9.2 \\ x1 = 0.7999999999999999 \\ x2 = 0.39999999999999997 \end{cases} \tag{1}$$

5 Zadanie nr. 5

Rozwiąż zadanie:

$$\begin{array}{ll} \min & x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \\ \text{p.o.} & x_1 + 2x_2 - x_3 = 4, \\ & x_1 - x_2 + x_3 = -2. \end{array}$$

Kod realizujący zadanie:

```
import cvxpy as cp

# Definiowanie zmiennych
x1 = cp.Variable()
x2 = cp.Variable()
x3 = cp.Variable()

# Funkcja celu
objective = cp.Minimize(x1**2 + x2**2 + x3**2)

# Ograniczenia
constraints = [
    x1 + 2*x2 - x3 == 4,
    x1 - x2 + x3 == -2
]

# Definiowanie problemu
problem = cp.Problem(objective, constraints)

# Rozwiązywanie problemu
problem.solve()

# śWywietlanie wyników
print("Optymalne śwartoci zmiennych:")
print("x1 =", x1.value)
print("x2 =", x2.value)
print("x3 =", x3.value)
print("Minimalna śćwarto funkcji celu =", problem.value)
```

Wyniki:

$$\begin{cases} x1 = 0.28571428571428564 \\ x2 = 1.4285714285714284 \\ x3 = -0.8571428571428571 \end{cases} \tag{2}$$

Minimalna wrtość funkcji celu = 2.8571428571428568.

6 Zadanie nr. 6

Rozwiąż zadanie:

$$\begin{aligned} \min \quad & x_1^2 - x_2^2 \\ \text{p.o.} \quad & x_1 + 2x_2 \geqslant 2, \\ & -5x_1 + 4x_2 \leqslant 10, \\ & x_1 \leqslant 0, \\ & x_2 \geqslant 0. \end{aligned}$$

Kod realizujący zadanie:

```
from scipy.optimize import minimize
import numpy as np

# Define the objective function
def objective(x):
    return x[0]**2 - x[1]**2

# Define the constraints
def constraint1(x):
    return x[0] + 2*x[1] - 2

def constraint2(x):
    return -5*x[0] + 4*x[1] - 10

# Define the bounds manually since COBYLA doesn't support bounds
    directly
def cobyla_bounds(x):
    return [x[0], -x[0], x[1]]

# Define the initial guess
x0 = [-0.1, 1.0] # Feasible initial guess

# Define the constraints dictionary
cons = [{'type': 'ineq', 'fun': constraint1},
        {'type': 'ineq', 'fun': constraint2},
        {'type': 'ineq', 'fun': lambda x: x[0]}, # x1 <= 0 --> x1 is
            negative
```

```
        {'type': 'ineq', 'fun': lambda x: x[1]}] # x2 >= 0 --> x2 is
            positive

# Solve the problem
solution = minimize(objective, x0, method='COBYLA', constraints=cons)

# Print the results
print(f"Optimal value: {solution.fun}")
print(f"Optimal x1: {solution.x[0]}")
print(f"Optimal x2: {solution.x[1]}")
```

Wyniki:

$$\begin{cases} x1 = 9.038781217079983 \\ x2 = 974.2149836274926 \end{cases} \tag{3}$$

Optymalna wartość: -949013.1347584255

7 Zadanie nr. 7