

# Implémentation et Analyse du Modèle de Black-Scholes

Projet de Finance Quantitative - Master 1 Mathématiques Appliquées

BATIONO Zakaria  
*CY Cergy Paris Université*

26 novembre 2025

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Cadre Théorique et Dérivation</b>	<b>2</b>
2.1	Hypothèses du Marché . . . . .	2
2.2	Dynamique du Sous-jacent . . . . .	2
2.3	Application du Lemme d'Itô . . . . .	3
2.4	Construction du Portefeuille de Couverture (Delta-Hedging) . . . . .	3
2.5	L'Équation aux Dérivées Partielles (EDP) de Black-Scholes . . . . .	4
<b>3</b>	<b>Résolution Analytique par l'Équation de la Chaleur</b>	<b>4</b>
3.1	Changement de Variables . . . . .	4
3.2	Condition Initiale et Solution . . . . .	5
3.3	La Formule de Black-Scholes-Merton . . . . .	5
<b>4</b>	<b>Analyse des Sensibilités (Les Grecs)</b>	<b>5</b>
4.1	Delta : Le Ratio de Couverture . . . . .	5
4.2	Gamma : Le Risque de Modèle . . . . .	6
4.3	Relation Temps-Volatilité (Theta et Vega) . . . . .	7
<b>5</b>	<b>Inversion du Modèle : La Volatilité Implicite</b>	<b>7</b>
5.1	L'Algorithmme de Newton-Raphson . . . . .	7
<b>6</b>	<b>Conclusion et Perspectives</b>	<b>8</b>
6.1	Synthèse des Réalisations . . . . .	8
6.2	Critique du Modèle et Limites . . . . .	8
6.3	Ouverture : Vers des Modèles Avancés . . . . .	8

# 1 Introduction

Ce projet vise à détailler la théorie, l'implémentation et les limites du modèle de Black-Scholes-Merton (1973), pierre angulaire de l'évaluation des options européennes. Nous partirons des hypothèses fondamentales pour dériver l'équation aux dérivées partielles (EDP), avant de proposer une implémentation orientée objet en Python et d'analyser les sensibilités (Grecs).

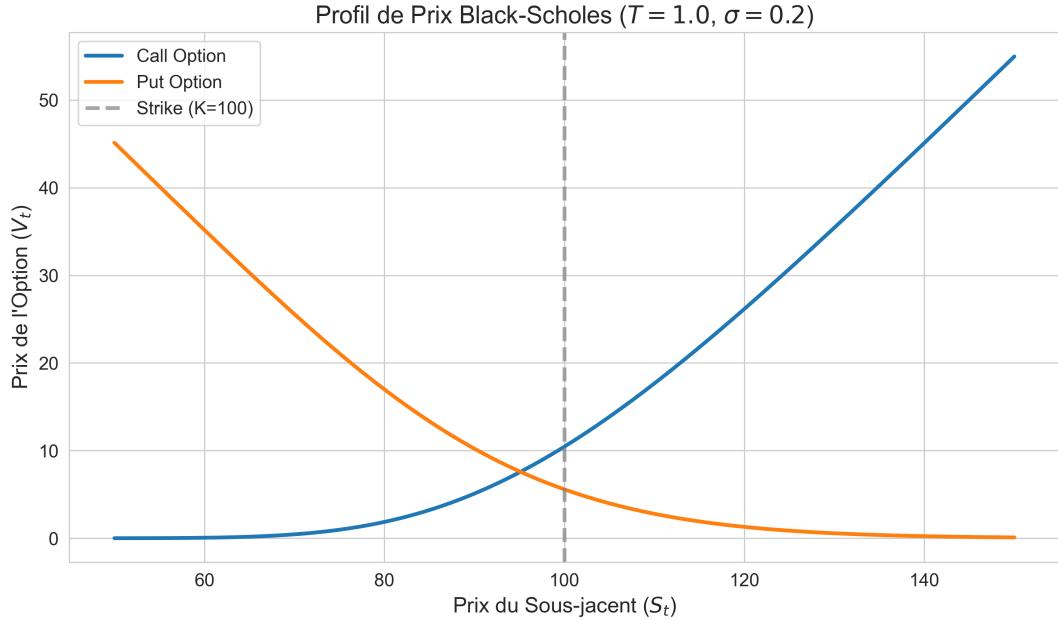


FIGURE 1 – Profil de prix des options Call et Put selon le modèle de Black-Scholes.

## 2 Cadre Théorique et Dérivation

### 2.1 Hypothèses du Marché

Le modèle repose sur les hypothèses suivantes :

- L'actif sans risque rapporte un taux constant  $r$ .
- Il n'y a pas d'opportunités d'arbitrage.
- L'actif sous-jacent ne verse pas de dividendes.
- Le marché est fluide (pas de coûts de transaction, vente à découvert autorisée).

### 2.2 Dynamique du Sous-jacent

Nous supposons que le prix de l'actif  $S_t$  suit un Mouvement Brownien Géométrique (MBG), décrit par l'Équation Différentielle Stochastique (EDS) suivante sous la probabilité historique  $\mathbb{P}$  :

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t \quad (1)$$

Où :

- $\mu$  est le rendement espéré (drift).
- $\sigma$  est la volatilité constante.
- $W_t$  est un mouvement brownien standard ( $W_t \sim \mathcal{N}(0, t)$ ).

## 2.3 Application du Lemme d'Itô

Soit  $V(S_t, t)$  le prix d'une option européenne, fonction du prix de l'actif  $S_t$  et du temps  $t$ . Selon le Lemme d'Itô pour un processus de diffusion, la différentielle de  $V$  est donnée par :

$$dV = \frac{\partial V}{\partial t} dt + \frac{\partial V}{\partial S} dS_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} (dS_t)^2 \quad (2)$$

En substituant  $dS_t$  par son expression (1) et en utilisant les règles de calcul stochastique ( $dt \cdot dt = 0$ ,  $dt \cdot dW_t = 0$ ,  $dW_t \cdot dW_t = dt$ ), nous calculons le terme quadratique  $(dS_t)^2$  :

$$\begin{aligned} (dS_t)^2 &= (\mu S_t dt + \sigma S_t dW_t)^2 \\ &= \sigma^2 S_t^2 (dW_t)^2 + \text{termes négligeables en } dt^{3/2} \text{ et plus} \\ &= \sigma^2 S_t^2 dt \end{aligned}$$

En réinjectant dans l'expression de  $dV$ , nous obtenons la dynamique du prix de l'option :

$$dV = \left( \frac{\partial V}{\partial t} + \mu S_t \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) dt + \sigma S_t \frac{\partial V}{\partial S} dW_t \quad (3)$$

## 2.4 Construction du Portefeuille de Couverture (Delta-Hedging)

Pour éliminer le risque (le terme aléatoire en  $dW_t$ ), nous construisons un portefeuille  $\Pi$  composé de :

- Une position longue sur une option  $V$ .
- Une position courte de  $\Delta$  parts de l'actif sous-jacent  $S$ .

La valeur du portefeuille est :

$$\Pi_t = V_t - \Delta S_t \quad (4)$$

La variation du portefeuille sur un pas de temps infinitésimal  $dt$  est donnée par :

$$d\Pi_t = dV_t - \Delta dS_t \quad (5)$$

En remplaçant  $dV_t$  par (3) et  $dS_t$  par (1), nous avons :

$$\begin{aligned} d\Pi_t &= \left[ \left( \frac{\partial V}{\partial t} + \mu S_t \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) dt + \sigma S_t \frac{\partial V}{\partial S} dW_t \right] - \Delta(\mu S_t dt + \sigma S_t dW_t) \\ d\Pi_t &= \left( \frac{\partial V}{\partial t} + \mu S_t \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - \Delta \mu S_t \right) dt + \left( \sigma S_t \frac{\partial V}{\partial S} - \Delta \sigma S_t \right) dW_t \end{aligned}$$

Pour rendre ce portefeuille *sans risque*, nous devons annuler le terme stochastique (en  $dW_t$ ). Cela impose le choix du ratio de couverture  $\Delta$  :

$$\sigma S_t \left( \frac{\partial V}{\partial S} - \Delta \right) = 0 \implies \Delta = \frac{\partial V}{\partial S} \quad (6)$$

C'est ici qu'apparaît le "Delta" de l'option. Avec ce choix, le portefeuille devient déterministe :

$$d\Pi_t = \left( \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) dt \quad (7)$$

## 2.5 L'Équation aux Dérivées Partielles (EDP) de Black-Scholes

Puisque le portefeuille est sans risque, en l'absence d'opportunité d'arbitrage, il doit rapporter exactement le taux sans risque  $r$  :

$$d\Pi_t = r\Pi_t dt = r(V - \Delta S)dt \quad (8)$$

En égalisant les deux expressions de  $d\Pi_t$  :

$$\left( \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) dt = r \left( V - \frac{\partial V}{\partial S} S \right) dt \quad (9)$$

En simplifiant par  $dt$  et en réarrangeant les termes, nous obtenons la célèbre EDP de Black-Scholes :

$$\boxed{\frac{\partial V}{\partial t} + rS \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - rV = 0} \quad (10)$$

Cette équation doit être résolue avec la condition terminale (Payoff). Pour un Call Européen de Strike  $K$  et maturité  $T$  :

$$V(S, T) = \max(S_T - K, 0) \quad (11)$$

## 3 Résolution Analytique par l'Équation de la Chaleur

L'EDP de Black-Scholes (10) est une équation parabolique linéaire du second ordre. Pour la résoudre, nous allons effectuer une série de changements de variables pour la ramener à l'équation de la chaleur canonique, dont la solution est connue (noyau de la chaleur).

### 3.1 Changement de Variables

Nous cherchons à éliminer les termes en  $S$  et  $S^2$  ainsi que le terme de réaction  $-rV$ . Posons les nouvelles variables sans dimension :

$$x = \ln \left( \frac{S}{K} \right) \quad (\text{Log-moneyness}) \quad (12)$$

$$\tau = \frac{\sigma^2}{2}(T - t) \quad (\text{Temps inversé et normalisé}) \quad (13)$$

Nous définissons une nouvelle fonction  $u(x, \tau)$  telle que le prix de l'option s'écrive :

$$V(S, t) = K \cdot e^{-\frac{2r}{\sigma^2} \tau} \cdot u(x, \tau) \quad (14)$$

Cependant, pour éliminer complètement les termes de drift, nous devons introduire des constantes  $\alpha$  et  $\beta$  dans la transformation complète :

$$V(S, t) = K e^{\alpha x + \beta \tau} u(x, \tau) \quad (15)$$

En injectant ces dérivées dans l'EDP originale et en choisissant  $\alpha = -\frac{1}{2}(\frac{2r}{\sigma^2} - 1)$  et  $\beta = -\frac{1}{4}(\frac{2r}{\sigma^2} + 1)^2$ , l'équation se simplifie remarquablement pour devenir l'équation de la chaleur (diffusion pure) :

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}} \quad (16)$$

Cette équation décrit la diffusion de la température dans une tige infinie. Ici, elle décrit la diffusion de la probabilité du prix de l'actif.

### 3.2 Condition Initiale et Solution

La condition terminale du Call  $V(S, T) = \max(S - K, 0)$  devient une condition initiale pour  $u(x, 0)$  (car  $\tau = 0$  en  $t = T$ ) :

$$u(x, 0) = \max(e^{\frac{1}{2}(k+1)x} - e^{\frac{1}{2}(k-1)x}, 0) \quad \text{où } k = \frac{2r}{\sigma^2} \quad (17)$$

La solution de l'équation de la chaleur pour une condition initiale  $u_0(x)$  est donnée par le produit de convolution avec le noyau de la chaleur (Green's function) :

$$u(x, \tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} \int_{-\infty}^{+\infty} u_0(\xi) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4\tau}} d\xi \quad (18)$$

### 3.3 La Formule de Black-Scholes-Merton

En calculant cette intégrale et en revenant aux variables originales  $(S, t)$ , nous obtenons la formule fermée pour le prix d'un Call Européen :

$$C(S, t) = S \cdot \mathcal{N}(d_1) - Ke^{-r(T-t)} \cdot \mathcal{N}(d_2) \quad (19)$$

Avec  $\mathcal{N}(\cdot)$  la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite, et :

$$d_1 = \frac{\ln(S/K) + (r + \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \quad (20)$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t} \quad (21)$$

#### Interprétation financière :

- $\mathcal{N}(d_2)$  est la probabilité (sous la mesure risque-neutre) que l'option finisse "dans la monnaie" ( $S_T > K$ ).
- $S\mathcal{N}(d_1)$  représente la valeur attendue de l'actif reçu conditionnellement à l'exercice de l'option.

## 4 Analyse des Sensibilités (Les Greks)

L'utilité principale du modèle de Black-Scholes pour un trader n'est pas tant le prix de l'option que les sensibilités de ce prix aux différents paramètres de marché. Ces sensibilités, appelées "Greks", permettent la gestion des risques du portefeuille (Hedging).

### 4.1 Delta : Le Ratio de Couverture

Le Delta ( $\Delta = \frac{\partial V}{\partial S}$ ) mesure la sensibilité du prix de l'option à une variation infinitésimale du sous-jacent.

L'analyse graphique (Figure 2) met en évidence trois régimes distincts en fonction de la "Moneyness" :

- **Out-of-the-Money ( $S \ll K$ )** : Le Delta tend vers 0. L'option a une très faible probabilité d'être exercée. Une variation du sous-jacent n'impacte pas le prix de l'option.
- **At-the-Money ( $S \approx K$ )** : Le Delta est proche de 0.5. C'est la zone de transition où l'incertitude est maximale.
- **In-the-Money ( $S \gg K$ )** : Le Delta tend vers 1. L'option se comporte quasiment comme l'action elle-même.

**Interprétation financière** : Pour immuniser un portefeuille contenant une option Call courte (vendue) contre les variations du marché, le trader doit acheter  $\Delta$  unités de l'actif sous-jacent. Puisque  $\Delta$  varie avec  $S$ , cette couverture doit être réajustée dynamiquement.

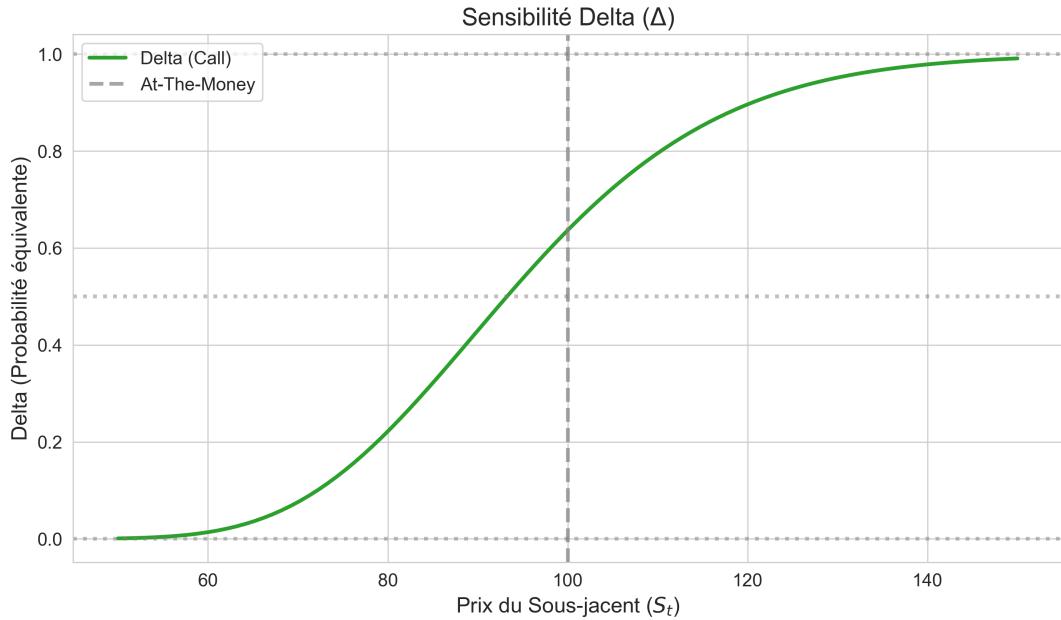


FIGURE 2 – Le Delta d'un Call illustrant la transition OTM → ITM.

## 4.2 Gamma : Le Risque de Modèle

Le Gamma ( $\Gamma = \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}$ ) mesure la vitesse de variation du Delta. C'est la dérivée seconde du prix par rapport au spot.

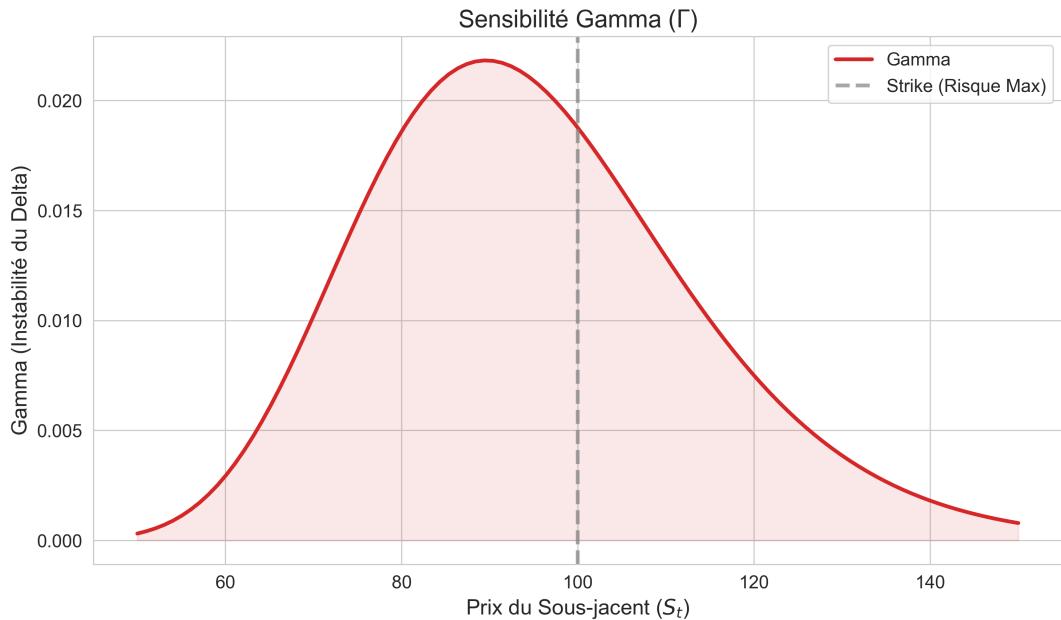


FIGURE 3 – Le Gamma : Une mesure du risque de couverture maximale "À la monnaie".

Comme illustré sur la Figure 3, le Gamma prend la forme d'une courbe en cloche centrée sur le Strike  $K$ .

- Le Gamma est **maximal à la monnaie** ( $S \approx K$ ). C'est là que le Delta est le plus instable. Une petite variation de  $S$  entraîne un grand changement de  $\Delta$ , forçant le trader à rebalancer sa couverture massivement.

- Loin de la monnaie (Deep ITM ou Deep OTM), le Gamma tend vers 0. La couverture est stable (le Delta ne bouge plus).

**Implication pratique :** Un portefeuille avec un Gamma élevé est très risqué en cas de forte volatilité des marchés, car la couverture (Delta-Hedging) devient coûteuse et difficile à exécuter (slippage).

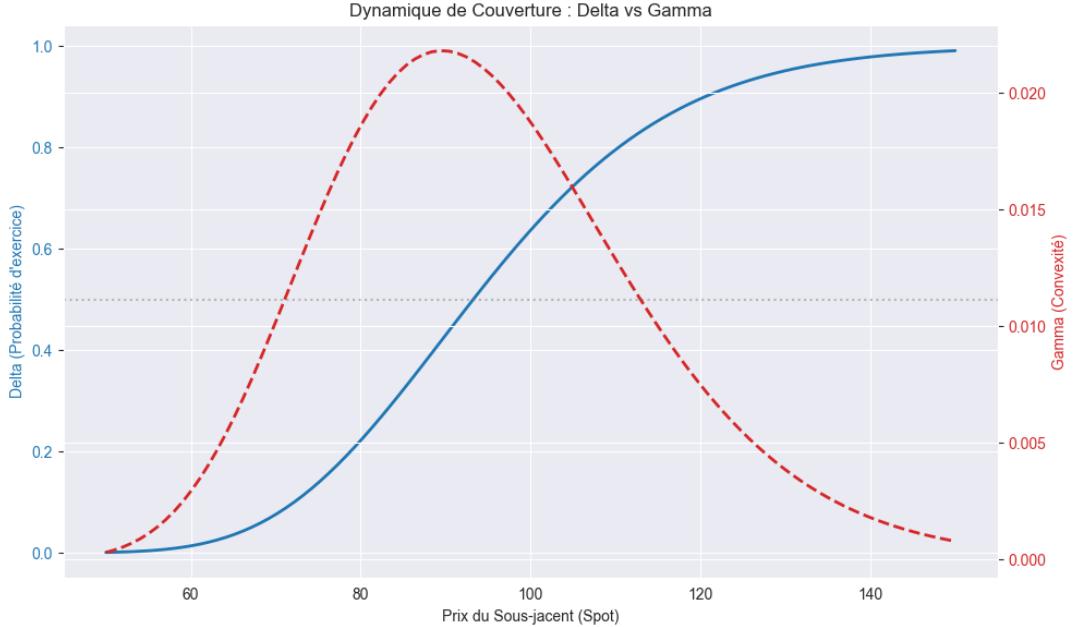


FIGURE 4 – évolution du delta et du gamma.

### 4.3 Relation Temps-Volatilité (Theta et Vega)

Bien que non illustrés ici, il est crucial de noter que :

- Le **Theta** ( $\Theta$ ) est généralement négatif pour une position longue ("Time Decay"). L'option perd de la valeur à mesure que l'échéance approche, accélérant cette perte lorsque l'option est à la monnaie.
- Le **Vega** ( $\nu$ ) suit un profil similaire au Gamma (maximal à la monnaie). Il représente l'exposition à une variation de la volatilité implicite.

## 5 Inversion du Modèle : La Volatilité Implicite

Sur les marchés financiers, le prix de l'option  $V_{mkt}$  est observable, mais la volatilité  $\sigma$  ne l'est pas. La volatilité implicite est la valeur  $\sigma_{imp}$  telle que le prix théorique égale le prix de marché :

$$BS(S, K, T, r, \sigma_{imp}) = V_{mkt} \quad (22)$$

Puisqu'il n'existe pas de solution analytique fermée pour inverser la formule de Black-Scholes par rapport à  $\sigma$ , nous utilisons une méthode de recherche de racine.

### 5.1 L'Algorithme de Newton-Raphson

Nous cherchons la racine de la fonction  $f(\sigma) = BS(\sigma) - V_{mkt}$ . La méthode de Newton-Raphson consiste à itérer la suite suivante en partant d'une estimation initiale  $\sigma_0$  :

$$\sigma_{n+1} = \sigma_n - \frac{f(\sigma_n)}{f'(\sigma_n)} \quad (23)$$

Or, la dérivée du prix par rapport à la volatilité  $f'(\sigma)$  est exactement le \*\*Vega\*\* ( $\nu$ ) de l'option. L'algorithme se réécrit donc :

$$\sigma_{n+1} = \sigma_n - \frac{BS(\sigma_n) - V_{mkt}}{\nu(\sigma_n)} \quad (24)$$

Cette méthode converge quadratiquement, ce qui la rend extrêmement efficace pour les besoins de trading en temps réel.

## 6 Conclusion et Perspectives

Ce projet a permis de couvrir l'intégralité de la chaîne de valeur de l'ingénierie financière, depuis la théorie fondamentale jusqu'à l'implémentation industrielle.

### 6.1 Synthèse des Réalisations

Nous avons démontré que le modèle de Black-Scholes-Merton repose sur une transformation élégante de la dynamique stochastique du sous-jacent (Mouvement Brownien Géométrique) en une équation de la chaleur déterministe. L'implémentation en Python, structurée selon le paradigme Orienté Objet, a permis de :

1. Calculer précisément le prix des options Européennes.
2. Quantifier les risques via les Grechs ( $\Delta, \Gamma, \nu, \Theta$ ), outils indispensables au Hedging dynamique.
3. Résoudre le problème inverse par l'algorithme de Newton-Raphson pour extraire la Volatilité Implicite des prix de marché.

### 6.2 Critique du Modèle et Limites

Bien que constituant une référence académique, le modèle de Black-Scholes souffre d'hypothèses simplificatrices qui limitent son usage sur les marchés modernes :

- **La Volatilité Constante :** L'hypothèse  $\sigma = \text{cte}$  est contredite par l'observation empirique du "Smile de Volatilité", où les options OTM et ITM ont des volatilités implicites plus élevées que les options ATM.
- **Les Queues de Distribution :** Les rendements réels des actifs financiers présentent une leptokurtose ("Fat Tails") que la loi Normale sous-estime, minimisant ainsi le risque d'événements extrêmes (Krachs).

### 6.3 Ouverture : Vers des Modèles Avancés

Pour pallier ces limites, la suite logique de ce portfolio s'orientera vers deux axes d'amélioration :

- **La Gestion de Portefeuille (Markowitz) :** Pour comprendre comment diversifier le risque entre plusieurs actifs corrélés.
- **La Simulation de Monte Carlo :** Pour pricer des options dont le payoff dépend du chemin parcouru (Options Asiatiques, Barrières) et pour lesquelles aucune formule fermée n'existe.
- **Les Modèles à Volatilité Stochastique :** Comme le modèle de Heston, pour capturer la dynamique réelle du Smile de volatilité.

*Fin du Projet 1*