Učinkovitost omrežij

Poročilo

Jure Babnik
Zala Stopar Špringer

2020
November

Kazalo

1 Priprava okolja

Pred začetkom simulacij sva si pripravila delovno okolje. Za programerski del naloge sva uporabila *Python* in knjižnico *Graph-Theory*.
Defirirala sva si funkcije, ki so nama ustvarile različne enostavne grafe, kot so mreže, 3-dimenzionalne mreže, popolna binomska drevesa, cikle, itd. Vsi grafi so neusmerjeni. Nato pa sva si še definirala funkcijo *generate_random*, ki sprejme število vozlišč n, na katerih funkcija naredi naključen usmerjen graf.
Prav tako sva si napisala funkcije, ki izračunajo učinkovitost omrežja.

Formula za **povprečno učinkovitost** grafa G je definirana kot:

$$E(G) = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i \neq j \in G} \frac{1}{d(i,j)},$$

kjer je $d(i,j)$ dolžina najkrajše poti med i-to in j-to točko, n pa je število vseh točk v grafu.

Globalna učinkovitost je definirana kot:

$$E_{glob}(G) = \frac{E(G)}{E(K_n)},$$

kjer K_n, predstavlja poln graf na n točkah.

Lokalna učinkovitost je definirana kot:

$$E_{loc}(G) = \frac{1}{n} \sum_{i \in G} E(G_i),$$

kjer G_i predstavlja podgraf grafa G, ki je sestavljen le iz sosedov točke i (brez točke i).

Vsa koda je zbrana v datoteki *graphs.py*

2 Povprečna učinkovitost v preprostih grafih

Ustvarila sva nekaj preprostih grafov različnih oblik in velikosti. Po zgornji formuli sva izračunala povprečno učinkovitost posameznega grafa in rezultate med seboj primerjala. Zanimalo naju je predvsem, kaj se dogaja z učinkovitostjo, ko povečujemo število vozlišč. Poleg tega pa želiva primerjati učinkovitosti grafov z enakim (podobnim) številom točk in različnih oblik.

2.1 Mreže $m \times n$

n	Povprečna učinkovitost						
	$m = 1$	$m = 2$	$m = 3$	$m = 4$	$m = 5$	$m = 10$	$m = 20$
2	1	0.83333333	0.7111111	0.625	0.5607404	0.3842982	0.2500188
3	0.8333333	0.7111111	0.6157407	0.5464646	0.4938095	0.3453350	0.2285143
4	0.7222222	0.625	0.5464646	0.4883333	0.4436090	0.3150960	0.2114040
5	0.6416667	0.5607407	0.4938095	0.4436090	0.4046429	0.2910526	0.1975453
10	0.4286596	0.3842982	0.3453350	0.3150960	0.2910526	0.2176605	0.1539108
20	0.2734463	0.2500188	0.2285143	0.2114040	0.1975453	0.1539108	0.1133842

Tabela 1: Povprečna učinkovitost $m \times n$ omrežij

2.2 3-dimenzionalne mreže

n	$r = 2$				$r = 3$			
	$m = 2$	$m = 3$	$m = 5$	$m = 10$	$m = 2$	$m = 3$	$m = 5$	$m = 10$
2	0.6904761	0.5959596	0.4782456	0.3357206	0.5959596	0.5193800	0.4223864	0.3018993
3	0.5959596	0.5193800	0.4223864	0.3018993	0.5193800	0.4562206	0.3753992	0.2728478
5	0.4782456	0.4223864	0.3498866	0.2565895	0.4223864	0.3753992	0.3141630	0.2339359
10	0.3357206	0.3018993	0.2565895	0.1954146	0.3018993	0.2728478	0.2339359	0.1805703

Tabela 2: Povprečna učinkovitost $m \times n \times r$ omrežij

n	$r = 5$				$r = 10$			
	$m = 2$	$m = 3$	$m = 5$	$m = 10$	$m = 2$	$m = 3$	$m = 5$	$m = 10$
2	0.4782456	0.4223864	0.3498866	0.2565895	0.3357206	0.3018993	0.2565895	0.1954146
3	0.4223864	0.3753992	0.3141630	0.2339359	0.3018993	0.2728478	0.2339359	0.1805793
5	0.3498866	0.3141630	0.2669560	0.2032711	0.2565895	0.2339359	0.2032711	0.1600518
10	0.2565895	0.2339359	0.2032711	0.1600518	0.1954146	0.1805703	0.1600518	0.1298527

Tabela 3: Povprečna učinkovitost $m \times n \times r$ omrežij

2.3 Cikli

n	Povprečna učinkovitost
3	1
4	0.8333333
5	0.75
10	0.4851852
20	0.3030493
50	0.1549371
100	0.0906910

Tabela 4: Povprečna učinkovitost ciklov z n točkami

2.4 Binomska drevesa

n	Povprečna učinkovitost
2	0.8333333
3	0.5634921
4	0.3907937
5	0.2776549
6	0.2028584
7	0.1530067
8	0.1193636
9	0.0962377

Tabela 5: Povprečna učinkovitost popolnih binomskih dreves globine n

2.5 Primerjava

Najprej primerjamo mreže oblike $1 \times n$ s cikli dolžine n. So namreč zelo podobne oblike, razlikujejo pa se v eni sami povezavi, ki je prisotna le v ciklu. Do razlike v učinkovitosti pride ravno zaradi te povezave. Če si za primer izberemo $n = 3$ opazimo, da je v ciklu poljuben par vozlišč med seboj oddaljen 1 povezavo, medtem ko se v mreži dimenzije 3×1 pojavi par, ki je oddaljen 2 povezavi. Ker se v formuli razdalja med parom vozlišč pojavlja v imenovalcu, večja razdalja pomeni manjšo učinkovitost. Poleg tega se v primeru cikla zaradi dodatne povezave pot med marsikaterim parom točk skrajša. Tudi najini izračuni povejo enako zgodbo. Če si spet pogledmo kot primer $n = 3$, ima cikel povprečno učinkovitost 1, mreža pa le 0.833. Tudi za večje grafe, npr. $n = 20$, opazimo razliko; cikel ima povepречno učinkovitost 0.303, mreža pa le 0.273.

Podobna pričakovanja sva imela glede primerjave med mrežami oblike $1 \times n$ ter $m \times n$ (na enakem številu točk). Mreže z več povezavami so zaradi podobnega premisleka kot v prejšnjem primeru bolj učinkovite. Če si primerjamo npr. mrežo 10×1 z mrežo 5×2 opazimo, da ima kljub enakemu številu točk slednja učinkovitost 0.561, kar je več kot 0.273 (učinkovitost mreže 10×1).

Podobno, če za primer vzamemo mreži dimenzij 10×2 in 5×4, lahko iz tabele razberemo, da ima tabela dimenzije 5×4 večjo učinkovitost, kljub enakemu številu točk.

Kot nadaljevanje prejšnje točke sva primerjala tudi 2-dimenzionalne mreže s 3-dimenzionalnimi. Pričakovala sva podoben rezultat; da so 3-dimenzionalne bolj učinkovite od 2-dimenzionalnih. Predvidevanje se je izkazalo za resnično. 2-dimenzionalne mreže dimenzije $m \times n$ lahko razumemo kot 3-dimenzionalno dimenzij $1 \times m \times n$. Po podobnem premisleku kot v primerjavi mrež $1 \times n$ z $m \times n$ rezultat ni nobeno presenečenje.

Nazadnje sva primerjala še mreže z binomskimi drevesi. Zaradi povsem različne strukture obeh grafov nisva bila povsem prepričana, kakšne rezultate naj pričakujeva. Vseeno pa sva se rahlo nagibala v prid mrež, saj imajo več povezav. Rezultati so najino hipotezo podprli. Za primer vzamemo mrežo dimenzije 3×5 ter binomsko drevo višine 4 (saj imata oba 15 vozlišč). Mreža ima učinkovtost 0.494, drevo pa le 0.390. Podobno ima mreža dimenzij $5 \times 5 \times 5$ 125 točk in povprečno učinkovitost 0.267, drevo višine 7 pa 127 točk in povprečno učinkovitost 0.153 (torej bistveno manj).

Po zgornjih ugotovitvah sva vsakič prišla do sklepa, da je graf z več povezavami bolj učinkovit. Zato sva se odločila, da bova binomska drevesa in mreže primerjala tako, da med seboj primerjava grafa z enakim (podobnim) številom povezav. Za začetek si poglejmo manjši primer; mreža 2×3 in binomsko drevo višine 3. Drevo ima 6 povezav in povprečno učinkovitost 0.563, mreža pa ima povezavo več in učinkovitost 0.711. Če nato primerjamo mrežo dimenzij $2 \times 3 \times 5$ z binomskim drevesom višine 6, dobimo podoben rezultat; mreža ima 59 povezav in povprečno učinkovitost 0.422, drevo pa 3 povezave več in učinkovitost 0.202. Je pa treba omeniti, da ima mreža precej manj točk kot drevo.

3 Globalna učinkovitost

4 Povprečna učinkovitost izračunana s približkom

4.1 Mreža dimenzije $3x1$

5 Sklep

uvodna beseda
Po pričakovanjih povprečna učinkovitost pada z večanjem števila točk. To se zdi smiselno, saj so v večjih omrežjih posamezni pari točk med seboj bolj oddaljeni. Slednje velja za grafe vseh zgoraj omenjenih oblik. Ugotovila sva tudi, da so izmed preizkovanih omrežij najbolj učinkovite 3-dimenzionalne mreže, najmanj pa mreže dimenzije $n \times 1$. To je zato, ker imajo 3-dimenzionalne mreže več povezav, čeprav primerjamo grafa z enakim številom vozlišč. S tem, ko sva primerjala binomska drevesa in mreže, sva ugotovila, da večje število povezav ne pomeni nujno večje učinkovitosti. Iz najinih izračunov sklepava, da so najbolj učinkoviti tisti grafi, pri katerih je posamezno vozlišče povezano s čim več

Procent	Povprečna učinkovitost	Približek 10	Približek 100	Približek 1000
0.01	0.8333333333333334	0.8	0.79	0.815
0.02	0.8333333333333334	0.85	0.825	0.8405
0.03	0.8333333333333334	0.75	0.81	0.8365
0.04	0.8333333333333334	0.85	0.86	0.8405
0.05	0.8333333333333334	0.9	0.855	0.828
0.1	0.8333333333333334	0.75	0.815	0.8315
0.15	0.8333333333333334	1.0	0.87	0.8335
0.2	0.8333333333333334	0.85	0.835	0.82975
0.25	0.8333333333333334	0.8	0.845	0.8315
0.5	0.8333333333333334	0.85	0.8383333333333332	0.8321666666666705

Tabela 6: Povprečna učinkovitost in približki za mrežo dimenzije 3 x 1

ostalimi. Za primer lahko uzamemo poln graf, ki ima povprečno učinkovitost vedno enako 1.