

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ ОЦЕНКИ КОЭФФИЦИЕНТА ВАРИАЦИИ ДЛИН ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ИНТЕРВАЛОВ ТОЧЕЧНОГО ПРОЦЕССА

И.В. Заляпин, В.Ф. Писаренко *

*Международный институт теории прогноза землетрясений и
математической геофизики РАН,
Москва*

В работе рассматриваются некоторые аспекты применения коэффициента вариации R при построении критериев для проверки гипотез о распределении интервалов между событиями стационарного точечного процесса. Установлено наличие систематической ошибки при эмпирическом оценивании R в случае пуассоновского процесса. Для такого процесса найдены среднее и дисперсия оценки при произвольном объеме выборки n . Доказана асимптотическая нормальность оценки при $n \rightarrow \infty$ и найдены параметры предельного закона. Сделана попытка сравнения статистики R со статистикой, использующей априорные знания о распределении интервалов между событиями.

Ключевые слова: коэффициент вариации, случайный процесс, точечный процесс, оценивание.

Коэффициентом вариации R_ξ случайной величины ξ называют отношение ее стандартного отклонения σ_ξ к математическому ожиданию m_ξ :

$$R_\xi = \frac{\sigma_\xi}{m_\xi}. \quad (1)$$

Статистику R_ξ обычно рассматривают применительно к положительным случайным величинам. Легко проверить, что она принимает значение 1 в случае экспоненциального распределения. Это свойство делает (1) чрезвычайно полезной при рассмотрении точечных процессов. В этом случае в качестве случайных величин выступают интервалы между последовательными событиями t_i точечного процесса $N(dt)$:

$$\tau_i = t_i - t_{i-1}. \quad (2)$$

Известно, что если процесс $N(dt)$ - стационарен, то τ_i из (2) одинаково распределены для любого i . Таким образом, в этом случае использование статистики R_τ оказывается законным.

* Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ №97-05-64583 и МНТЦ №415-96

Значение R_τ является характеристикой группируемости точечного процесса. В случае однородного пуассоновского процесса $R_\tau = 1$, что указывает на полную случайность или отсутствие группируемости. В случае наличия группируемости событий R_τ возрастает, принимая большие значения для более кластеризованного процесса. При наличии тенденции к периодичности величина R_τ становится меньше 1 и, наконец, $R_\tau = 0$ для полностью периодического процесса — процесса, события которого отстоят друг от друга на детерминированный интервал Δ .

Статистика R_ξ широко используется на практике для определения степени кластеризации событий точечного процесса и на основании ее значений нередко делаются качественные выводы о природе процесса. В связи с этим необходимо уметь определять статистическую значимость результатов, полученных по выборке конечного объема.

Рассмотрим задачу проверки гипотезы о распределении длин интервалов между событиями. Нулевая гипотеза состоит в том, что это распределение экспоненциально, то есть рассматриваемый процесс — пуассоновский:

$$H_0: \tau_i \sim f(x) = \begin{cases} ae^{-ax}; & x \geq 0 \\ 0; & x < 0. \end{cases}$$

Коэффициент вариации R_ξ может использоваться для построения критерия значимости при проверке такой гипотезы.

Нам будет удобнее работать не с самой статистикой R , а с ее квадратом

$$R_\xi^2 = \frac{\sigma_\xi^2}{m_\xi^2}. \quad (3)$$

Наблюдая процесс на конечном промежутке времени, мы получаем в распоряжение конечное количество интервалов τ_i , $i = 1, \dots, n$ между событиями. По ним могут быть вычислены эмпирические дисперсия $\hat{\sigma}_\tau$ и математическое ожидание \hat{m}_τ :

$$\hat{\sigma}_\tau = \frac{1}{n} \sum_i (\tau_i - \hat{m}_\tau)^2; \quad \hat{m}_\tau = \frac{1}{n} \sum_i \tau_i.$$

Зная эти величины, мы можем вычислить значение оценки \hat{R}_τ^2 величины R_τ^2 по формуле (3):

$$\hat{R}_\tau^2 = \frac{\hat{\sigma}_\tau^2}{\hat{m}_\tau^2}.$$

Справедливо следующее представление:

$$\hat{R}_\tau^2 = \sum_{i=1}^n \frac{n\tau_i^2}{(S_n)^2} - 1 = \sum_{i=1}^n nw_i^2 - 1, \quad (4)$$

где

$$S_n = \sum_{i=1}^n \tau_i, \quad w_i = \frac{\tau_i}{S_n}.$$

Таким образом, значение статистики выражается через сумму одинаково распределенных зависимых слагаемых. В связи с этим полезным оказывается следующее

Утверждение I

Пусть ξ_i , $i = 1, \dots, n$ — независимые экспоненциально распределенные случайные величины, $S_n = \sum_{i=1}^n \xi_i$.

Тогда величины $w_i^2 = \frac{\xi_i^2}{(S_n)^2}$ одинаково распределены, имеют функцию распределения $F(x)$:

$$F(x) = 1 - (1 - \sqrt{x})^{n-1}, \quad x \in [0, 1],$$

и плотность $f(x)$:

$$f(x) = \frac{n-1}{2} \cdot \frac{(1 - \sqrt{x})^{n-2}}{\sqrt{x}}.$$

Математическое ожидание величин w_i из (4) в случае экспоненциально распределенных интервалов τ_i может быть непосредственно вычислено:

$$\begin{aligned} Ew_i^2 &= \int_0^1 x f(x) dx = \frac{n-1}{2} \int_0^1 \sqrt{x} (1 - \sqrt{x})^{n-2} dx = \\ &= (n-1) \cdot \frac{\Gamma(3)\Gamma(n-1)}{\Gamma(n+2)} = 2 \cdot \frac{1}{n(n+1)}. \end{aligned}$$

Отсюда имеем для статистики \hat{R}_τ^2 :

$$E\hat{R}_\tau^2 = E \left\{ \sum n w_i^2 - 1 \right\} = n^2 \cdot \frac{2}{n(n+1)} - 1 = 1 - \frac{2}{n+1}. \quad (5)$$

Если для дисперсии в (3) использовать несмещенную оценку

$$\hat{\sigma}_n = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n \xi_i,$$

то аналогично получим

$$E\hat{R}_\tau^2 = 1 - \frac{1}{n+1}. \quad (6)$$

Из (5), (6) видим, что оценка \hat{R}_τ^2 является смещенной. Ее среднее значение оказывается меньше 1, что надо помнить, особенно при малых значениях n .

Отметим, что при нулевой гипотезе для величин w_i^2 в явном виде можно получить моменты любого порядка:

$$E[w_i^2]^k = \frac{(2k)!}{n(n+1)\dots(n+2k)}.$$

Зависимость величин w_i^2 не позволяет вычислить дисперсию оценки \hat{R}_τ^2 аналогичным образом. Однако, моменты высших порядков для статистики \hat{R}_τ^2 можно получить, используя теорему Дирихле [6]. Опуская промежуточные вычисления, приведем лишь окончательное выражение для дисперсии при нулевой гипотезе:

$$D\hat{R}_\tau^2 = 4 \frac{n^2(n-1)}{(n+1)^2(n+2)(n+3)}. \quad (7)$$

Обратимся теперь к асимптотическому поведению оценки \hat{R}_τ^2 при $n \rightarrow \infty$.

Утверждение II

Пусть τ_i , $i = 1, \dots, n$ — независимые экспоненциально распределенные случайные величины.

Тогда для статистики \hat{R}_τ^2 верно следующее асимптотическое представление:

$$\hat{R}_\tau^2 = 1 + \frac{1}{\sqrt{n}} (2\sqrt{5}\eta_2 - 4\eta_1) + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right), \quad n \rightarrow \infty,$$

где (η_1, η_2) — нормально распределенные случайные величины с нулевыми средними и матрицы ковариации

$$\Sigma_{\eta_1 \eta_2} = \begin{pmatrix} 1 & 2/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} & 1 \end{pmatrix}.$$

Из Утверждения II непосредственно вытекает, что при нулевой гипотезе асимптотическая дисперсия оценки \hat{R}_τ^2 равняется $4/n$, что согласуется с точным выражением (7).

Для построения критериев более естественно использовать статистику \hat{R}_τ , а не ее квадрат, который был введен исключительно из технических

соображений. Извлекая корень из \hat{R}_τ^2 и пользуясь *Утверждением II*, получаем, что \hat{R}_τ может быть представлена при $n \rightarrow \infty$ как

$$\hat{R}_\tau = 1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\eta + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right),$$

где η – стандартная нормальная величина.

Обратим внимание, что использование статистики \hat{R}_τ при проверке гипотезы H_0 ничем не ограничивает круг альтернативных гипотез H_A . Можно надеяться, что, рассматривая статистики, пригодные лишь для некоего специального класса распределений, мы повысим надежность критерия.

В качестве такого класса может выступать, например, 2-параметрическое семейство распределений Вейбула:

$$f(x, \alpha, \lambda) = \begin{cases} \frac{\alpha}{x} \left(\frac{x}{\lambda}\right)^\alpha \exp\left\{-\left(\frac{x}{\lambda}\right)^\alpha\right\}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0. \end{cases} \quad (8)$$

Семейство (8) достаточно богато, чтобы описывать широкий спектр реальных процессов (см., например, [2]). При этом интересующий нас феномен кластеризация – в данном семействе определяется одним параметром α . Нулевая гипотеза, таким образом, может быть параметрически задана как

$$H_0 : \alpha = 1.$$

Утверждение III

Статистика

$$\hat{\alpha}_n = \frac{2 + \frac{1}{n} \sum_1^n \ln w_i - \frac{1}{n} \sum_1^n w_i \ln w_i + \frac{1}{n} \sum_1^n w_i \ln^2 w_i}{1 + \frac{1}{n} \sum_1^n w_i \ln^2 w_i}, \quad (9)$$

где

$$w_i = \frac{x_i}{x_n}, \quad x_n = \frac{1}{n} \sum_1^n x_i$$

при нулевой гипотезе H_0 допускает следующее асимптотическое представление:

$$\hat{\alpha}_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\eta + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right),$$

где η – нормальная случайная величина с нулевым средним и дисперсией

$$\sigma^2 = \frac{1}{(1-c)^2 + \pi^2/6} = 0.5483...,$$

$c = 0.57721566490...$ – константа Эйлера.

Пользуясь асимптотическим выражением для моментов распределения Вейбула [4], можно показать, что производная по параметру α от асимптотического математического ожидания статистики $\hat{\alpha}_n$ в точке $\alpha = 1$ приближенно равна 1.084, в то время как соответствующая производная коэффициента вариации равняется -1. Поэтому критерий проверки гипотезы H_0 , основанный на статистике $\hat{\alpha}_n$ будет более мощным в окрестности точки $\alpha = 1$, чем критерий, основанный на коэффициенте вариации.

Зная асимптотическое распределение статистики при нулевой гипотезе H_0 , мы можем строить критерий значимости. Однако такой критерий будет надежен лишь при достаточно больших объемах выборки, что не всегда выполняется на практике. Поэтому нам хотелось бы уметь строить подходящие критерии для любых значений n .

Ниже мы опишем способ вычисления распределения оценки квадрата коэффициента вариации \hat{R}_r^2 при нулевой гипотезе для произвольного n . Отметим, что точные выражения для этого распределения, описанные в литературе, известны лишь для $n < 5$ (см. например [6]) и при непосредственной аналитической реализации описываемого ниже способа мы сталкиваемся с существенными трудностями уже при $n = 3$. Однако он может быть использован в качестве основы для численного оценивания.

Известно (см. [5, стр.95]), что если τ_i , $i = 1, \dots, n$ распределены экспоненциально и независимы, то строка $(w_1, w_2, \dots, w_{n-1})$ (обозначения взяты из (4)) распределена равномерно в области

$$\Omega = \left\{ (w_1, w_2, \dots, w_{n-1}) : w_1 + \dots + w_{n-1} \leq 1, w_i \geq 0 \right\}.$$

Отсюда непосредственно вытекает, что при условии $w_n = w_0$ строка $(w_1, w_2, \dots, w_{n-1})$ оказывается вырожденной, то есть принимает значения в $(n-2)$ -мерном пространстве, причем ее распределение в области

$$\Omega_1 = \left\{ (w_1, w_2, \dots, w_{n-1}) : w_1 + \dots + w_{n-1} = 1 - w_0, w_i \geq 0 \right\}$$

равномерно.

С учетом этого мы заключаем, что вероятность

$$P(r^2, w_0) \equiv \Pr \left\{ w_1^2 + w_2^2 + \dots + w_{n-1}^2 \leq r^2 \mid w_1 + \dots + w_{n-1} = 1 - w_0 \right\}$$

равна отношению объемов областей Ω_2 и Ω_1 :

$$P(r^2, w_0) = \frac{V(\Omega_2)}{V(\Omega_1)},$$

где

$$\Omega_2 = \Omega_1 \cap \left\{ w_i : \sum_1^{n-1} w_i^2 \leq r^2, w_i \geq 0 \right\}.$$

Нас интересует распределение $F_\eta(x)$ величины $\eta = \sum_1^n w_i^2$. Полагая w_i фиксированным, мы можем записать

$$F_\eta(x|w_n) = \Pr\{\eta \leq x\} = \Pr\left\{\sum_1^{n-1} w_i^2 \leq x - w_n^2\right\} = P(x - w_n^2, w_n). \quad (10)$$

Воспользовавшись Утверждением I, усредняем (10) по величине w_n .

$$F_\eta(x) = \int_0^1 w(u)P(x - u^2, u)du = \int_0^1 (n-1)(1-u)^{n-2}P(x - u^2, u)du,$$

и, дифференцируя по x , получаем плотность $f_\eta(x)$:

$$f_\eta(x) = \frac{dF_\eta(x)}{dx} = \int_0^1 w(u)p(x - u^2, u)du,$$

где $p(x, u) = \frac{dP(x, u)}{dx}$.

Доказательства

Доказательство Утверждения I.

Утверждение о совпадении распределений случайных величин w_i^2 является тривиальным.

Доказательство по сути сводится к нахождению распределения случайной величины

$$w_i = \frac{\xi_i}{S_n} = \frac{\xi_i}{\xi_i + \eta_i}, \quad \eta_i = \sum_{k \neq i} \xi_k.$$

Величина η_i является суммой независимых экспоненциально распределенных величин и, следовательно, имеет гамма распределение с параметрами $(\lambda, n-1)$, где λ — параметр экспоненциального закона суммируемых:

$$\eta_i \sim \gamma_{\lambda, n-1}(x) = \lambda \cdot \frac{(\lambda x)^{n-2}}{(n-2)!} e^{-\lambda x}.$$

Из независимости величин ξ_i вытекает, что ξ_i и η_i также независимы. Полагая значение η_i фиксированным и обозначая функцию распределения ξ_i через $F_\xi(x)$, найдем условное распределение $W(x|\eta)$ случайной величины w_i :

$$W(x|\eta) \equiv \Pr\left\{\frac{\xi_i}{\xi_i + \eta} \leq x\right\} = \Pr\left\{\xi_i \leq \eta \cdot \frac{x}{1-x}\right\} = F_\xi\left(\eta \cdot \frac{x}{1-x}\right). \quad (11)$$

Условная плотность $w(x|\eta)$ находится дифференцированием (11) по x :

$$w(x|\eta) = \frac{dW(x)}{dx} = \frac{dF\left(\eta \cdot \frac{x}{1-x}\right)}{dx} = \frac{\eta}{(1-x)^2} \cdot f\left(\eta \cdot \frac{x}{1-x}\right). \quad (12)$$

Безусловные функцию распределения $W(x)$ и плотность $w(x)$ находим, усредняя (11) и (12) по η :

$$W(x) = \int_0^\infty \gamma_{\lambda, n-1}(y) W(x|y) dy, \quad w(x) = \int_0^\infty \gamma_{\lambda, n-1}(y) w(x|y) dy.$$

Приведем вычисления для плотности:

$$w(x) = \frac{1}{(1-x)^2} \int_0^\infty y \lambda \exp\left\{-\frac{\lambda xy}{1-x}\right\} \lambda \frac{(\lambda y)^{n-2}}{(n-2)!} e^{-\lambda y} dy =$$

$$\frac{1}{(n-2)!} \cdot \frac{\lambda^n}{(1-x)^2} \int_0^\infty y^{n-1} e^{-\frac{\lambda y}{1-x}} dy.$$

Проведя замену переменных $z = \frac{\lambda y}{1-x}$, получаем

$$w(x) = \frac{(1-x)^{n-2}}{(n-2)!} \int_0^\infty z^{n-1} e^{-z} dz = \frac{(1-x)^{n-2}}{(n-2)!} \Gamma(n) = (n-1)(1-x)^{n-2}.$$

Легко заметить, что соответствующая функция распределения есть

$$W(x) = 1 - (1-x)^{n-1}.$$

Искомые функцию и плотность распределения теперь не составляет труда получить, используя выражение для распределения квадрата случайной величины:

$$F_{\xi^2}(x) = F_\xi(\sqrt{x}), \quad f_{\xi^2}(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} f_\xi(\sqrt{x}).$$

Утверждение доказано.

Доказательство утверждения II.

Статистика \hat{R}_τ^2 является функцией от первых двух эмпирических моментов:

$$\hat{R}_\tau^2 = f(\hat{m}_1, \hat{m}_2), \quad f(x, y) = \frac{y}{x^2} - 1, \quad \hat{m}_1 = \frac{1}{n} \sum \tau_i, \quad \hat{m}_2 = \frac{1}{n} \sum \tau_i^2.$$

В окрестности точки (x_0, y_0) функция $f(x, y)$ разлагается в ряд Тейлора:

$$f(x_0+x, y_0+y) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} \cdot x + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} \cdot y + o(h), \quad x < h, y < h, h \rightarrow 0$$

$$f(x_0+x, y_0+y) = \frac{y_0}{x_0^2} - 2\frac{y_0}{x_0^3}x + \frac{y}{x_0^2} + o(h). \quad (13)$$

По центральной предельной теореме для эмпирических моментов \hat{m}_1, \hat{m}_2 справедливы представления

$$\hat{m}_1 = \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\sqrt{n}}\xi_1 + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right), \quad \hat{m}_2 = \frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\sqrt{n}}\xi_2 + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right), \quad n \rightarrow \infty,$$

где (ξ_1, ξ_2) – нормально распределены с нулевыми средними и матрицей ковариаций

$$\Sigma_{\xi_1, \xi_2} = \begin{pmatrix} 1/\lambda^2 & 2/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} & 20/\lambda^4 \end{pmatrix}.$$

Подставляя эти представления в (13), получим

$$\hat{R}_\tau^2 = 1 + \frac{1}{\sqrt{n}}(\lambda^2\xi_2 - 4\lambda\xi_1) + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right), \quad n \rightarrow \infty,$$

или

$$\hat{R}_\tau^2 = 1 + \frac{1}{\sqrt{n}}(2\sqrt{5}\eta_2 - 4\eta_1) + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right), \quad n \rightarrow \infty,$$

где (η_1, η_2) – нормально распределены с нулевыми средними и матрице ковариаций

$$\Sigma_{\eta_1, \eta_2} = \begin{pmatrix} 1 & 2/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} & 1 \end{pmatrix}.$$

Утверждение доказано.

Доказательство Утверждения III.

Докажем сначала справедливость асимптотического представления $\hat{\alpha}_n$, отложив на некоторое время объяснение способа, которым эта статистика была получена.

Перепишем (9) в виде

$$\hat{\alpha}_n = \frac{2 + \eta_n}{1 + \xi_n}, \quad (14)$$

где

$$\eta_n = \frac{1}{n} \sum (1 - w_i) \ln w_i, \quad \xi_n = \frac{1}{n} \sum w_i \ln^2 w_i.$$

В асимптотическом разложении

$$w_i = \frac{x_i}{\bar{x}_n} = \frac{x_i}{a + O(1/\sqrt{n})} = ax_i + O(1/\sqrt{n})$$

главный член ax_i распределен экспоненциально с параметром 1. Так как нас в дальнейшем будет интересовать лишь главный член разложения (14) при $n \rightarrow \infty$, то можно считать, что величины w_i распределены экспоненциально с параметром 1.

При таком предположении можно найти математические ожидания η_n и ξ_n .

$$E\eta_n = \int_0^{\infty} (1-x) \ln x e^{-x} dx = -1;$$

$$E\xi_n = \int_0^{\infty} x \ln^2 x e^{-x} dx = c^2 - 2c + \pi^2/6,$$

где c — эйлерова константа.

Выражение (14) можно записать как

$$\hat{\alpha}_n = \frac{\eta_n - E\eta_n}{1 + E\xi_n + (\xi_n - E\xi_n)} + 1. \quad (15)$$

Оставляя в (15) только главный член, получим

$$\hat{\alpha}_n - 1 \approx \frac{\eta_n - E\eta_n}{(1-c)^2 + \pi^2/6}.$$

Вычислим дисперсию числителя:

$$\begin{aligned} \text{Var}(\eta_n - E\eta_n) &= E(\eta_n + 1)^2 = \frac{1}{n} E \sum (1 - w_i)^2 \ln^2 w_i = \frac{1}{n} = \\ &= \frac{1}{n} \left[\int_0^1 (1 - 2x + x^2) \ln^2 x e^{-x} dx - 1 \right] = \frac{1}{n} [c^2 - 2c + \pi^2/6 + 1]. \end{aligned}$$

Таким образом, главный член в выражении для дисперсии величины $\hat{\alpha}_n - 1$ оказывается равен

$$\frac{1}{(1-c)^2 + \pi^2/6},$$

что завершает первую часть доказательства.

Обратимся теперь к рассуждениям, с помощью которых была получена статистика $\hat{\alpha}_n$.

Функция правдоподобия для распределения Вейбула выглядит следующим образом:

$$L = \alpha^n \frac{\prod \left(\frac{x_i}{\lambda}\right)^\alpha}{\prod x_i} \cdot \exp \left\{ - \sum \left(\frac{x_i}{\lambda}\right)^\alpha \right\}.$$

Взяв логарифм и оставив только зависящие от параметров члены, получаем

$$\ln L \sim n \ln \alpha + \alpha \sum \ln \left(\frac{x_i}{\lambda}\right) - \sum \left(\frac{x_i}{\lambda}\right)^\alpha. \quad (16)$$

Из (16) получаем оценку максимального правдоподобия параметра λ :

$$\hat{\lambda}_\alpha = \left(\frac{1}{n} \sum x_i^\alpha \right)^{1/\alpha} \rightarrow \lambda, \quad n \rightarrow \infty.$$

Уравнение правдоподобия для α выглядит следующим образом:

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \alpha} = \frac{n}{\alpha} + \sum \ln \frac{x_i}{\lambda} - \sum \left(\frac{x_i}{\lambda}\right)^\alpha \ln \frac{x_i}{\lambda} = 0. \quad (17)$$

Будем рассматривать значения α близкие к 1: $\alpha = 1 + \epsilon$.

Линеаризуя (17) по ϵ , получаем статистику $\hat{\alpha}_n$.

Обратим внимание, что $\hat{\alpha}_n$, рассматриваемая как функция от α , линейна лишь в некоторой окрестности точки $\alpha = 1$ с точностью до ϵ^2 и как оценка параметра α в общем случае применяться не может.

Список литературы

- 1 Ризниченко Ю.В. Проблемы сейсмологии // Избр гр // М Наука, 1985 498 с
- 2 Kagan Y.Y. Jeckson D.D. *Long-term earthquake clustering* // Jeophys J Int ,1991 Vol 104 P 117-133
- 3 Bartlett M.S. *The Statistical Analysis of Spatial Pattern* // Adv Appl Prob 1974 Vol 6. P 336-358
- 4 Крамер Г. Математические методы статистики М Мир, 1975 648 с
- 5 Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения Т 2 М Мир, 1984 746 с
- 6 Кендалл М., Моран П. Геометрические вероятности М Наука, 1972 192 с

SUMMARY

Some application aspects of this coefficient R at construction of criteria for check of hypotheses about distribution of intervals between events of stationary dot process are considered in this work. The presence of a systematic bias is established at empirical estimation R in a Poisson process case. For such process are found average and variance of the coefficient for any sample number n . Asymptotically Gaussian distribution law of a rating at $n \rightarrow \infty$ is proved and the parameters of the limiting law are found. The attempt of comparison of statistics R with statistics using a priori knowledge of intervals between events distribution is made.