DFT และ FFT

พินิจ กำหอม, ENE, KMUTT

1 บทนำ

เทคนิคการวิเคราะห์ฟูเรียร์ (Fourier Analysis) เป็นเทคนิคสำคัญสำหรับการวิเคราะห์ระบบและการวิเคราะห์สัญ-ญาณ เครื่องมือสำคัญของการวิเคราะห์ฟูเรียร์คืออนุกรมฟูเรียร์ (Fourier Series) ที่ใช้กับการวิเคราะห์เมื่อสัญญาณเป็นสัญญาณที่เป็นคาบ (periodic signals) และการแปลงฟูเรียร์ (Fourier Transfrom) ซึ่งใช้กับการวิเคราะห์ที่สัญ-ญาณไม่เป็นคาบแต่มีพลังงานจำกัด (finite energy) ตลอดช่วงเวลา อย่างไรก็ตามการใช้อนุกรมฟูเรียร์และการแปลงฟูเรียร์ข้อจำกัดอยู่ 2 กรณีคือ

- เมื่อสัญญาณเป็นสัญญาณที่ได้จากการวัด (measurement) ซึ่งจะมีลักษณะที่ไม่สามารถเขียนอยู่ในรูปของฟังก์ชันแบบปิด (closed-form function) และเป็นลักษณะที่เป็นจุด ๆ (discrete) สัญญาณลักษณะนี้จะอยู่ในรูปเป็นลำดับของตัวเลข (sequences of real number) แทนด้วย $x(n), n = 0, 1, 2, ..., N-1$ ซึ่งเรียกว่าสัญญาณแบบไม่ต่อเนื่อง (discrete signal)
- เมื่อสัญญาณเป็นสัญญาณที่ไม่อยู่ในรูปของฟังก์ชันปิด (closed-form function)

กรณีที่ 1 เป็นกรณีที่จะพบได้บ่อยในทางปฏิบัติ ซึ่งข้อจำกัดนี้สามารถแก้ปัญหาได้โดยการใช้ DFT (Discrete Fourier Transform) ในการประมาณสเปคตรัมของสัญญาณที่ได้จากการวัดที่อยู่ในรูปของลำดับของตัวเลข แต่ปัญหาของการใช้ DFT ก็คือถ้าคำนวณตามนิยามของ DFT จะใช้เวลาในการคำนวณนานเกินไป ปัญหานี้แก้ได้ด้วยการใช้อัลกอริธึมชื่อ FFT (Fast Fourier Transform) ในการคำนวณ DFT ฉะนั้นเราอาจกล่าวได้ว่า ***เราใช้ FFT ในการคำนวณ DFT เพื่อการประมาณสเปคตรัมของสัญญาณใด ๆ*** ดังนั้นในบทความนี้เราจะตอบคำถามที่สำคัญที่ทำให้ประโยคดังกล่าวเป็นจริงคือ

- อะไรคือ DFT และเราประมาณสเปคตรัมของสัญญาณด้วย DFT ได้อย่างไร ซึ่งจะอยู่ในหัวข้อ 2
- เราใช้ FFT คำนวณ DFT ให้เร็วได้อย่างไร ซึ่งจะอยู่ในหัวข้อ 3

2 Discrete Fourier Transform (DFT)

2.1 นิยาม

DFT เป็นวิธีการแปลงลำดับของตัวเลขทั้งที่เป็นจำนวนจริงและจำนวนเชิงซ้อนจำนวน N จุด ไปอยู่ในรูปของลำดับของตัวเลขเชิงซ้อนจำนวน N จุดอีกชุดหนึ่ง โดยมีวิธีการแปลงตามสมการที่ (1)

ให้ $x(n)$, $n = 0, 1, 2, ..., N-1$ เป็นลำดับของตัวเลขจำนวนจริง หรือลำดับของตัวเลขเชิงซ้อน และ $X(m)$, $m = 0, 1, 2, ..., N-1$ เป็น DFT ของ $x(n)$

$$X(m) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j2\pi nm/N}, j = \sqrt{-1} \tag{1}$$

เราอาจเรียก $X(m)$ ว่าเป็น DFT ขนาด N จุด (N-point DFT) ของ x เพราะจำนวนจุดที่ใช้ในการคำนวณ DFT นั้นมีผลกับการใช้งาน DFT ในการประมาณสเปคตรัมของสัญญาณ ในกรณีเช่นนี้เราจะแทน X ด้วย X_N

จะเห็นว่าค่าของ DFT หนึ่งจุดคือ $X(m)$ นั้นได้จากการบวกกันของผลคูณของ $x(n)$ กับเลขเชิงซ้อน $e^{-j2\pi nm/N}$, $n = 0, 1, 2, ..., N-1$ ซึ่งเป็นรากที่ N ของหนึ่ง (N^{th} root of unit) คำถามที่เราจะตอบต่อไปก็คือแล้วผลลัพธ์ที่ได้นี้มีความหมายอะไร

2.2 การตีความหมายสมการ DFT

เพื่อการทำความเข้าใจเราจะเขียนสมการที่ (1) ใหม่โดยแทน $e^{-j2\pi nm/N}$ ด้วย $\cos 2\pi nm/N - j \sin 2\pi nm/N$ ตามสมการของออยเลอร์ (Euler's Equation) ที่บอกว่า $e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta$ เราจะได้

$$X(m) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)[\cos(2\pi nm/N) - j\sin(2\pi nm/N)] \tag{2}$$

สมการที่ (2) เป็น DFT ในรูปแบบสี่เหลี่ยม (recfangular form) ซึ่งดูเหมือนว่าสมการนี้ดูยุ่งยากกว่าสมการที่ (1) ในรูปแบบเอ็กโปเนนเชี่ยล (exponential form) แต่รูปแบบนี้จะง่ายกว่าในการทำความเข้าใจ ขั้นแรกของการทำความเข้าใจคือ การพิจารณาว่า $\cos(2\pi nm/N) - j\sin(2\pi nm/N)$ คือตัวแทนของสัญญาณแบบไซด์ความถี่ f_m ที่จุด n (เราจะเห็นในภายหลังว่าค่าความถี่ f_m นั้นขึ้นอยู่กับทั้ง m และความถี่ในการชักตัวอย่างสัญญาณ $x(t)$ มาเป็น $x(n)$) โดยให้มองข้าม j ไปก่อนให้เข้าใจเพียงว่าหน้าที่ของ j คือใช้เพื่อการเปรียบเทียบเฟสของสัญญาณแบบไซน์ จะเห็นว่าค่าของ DFT หนึ่งจุดนั้น ได้มาจากการผลบวกของการคูณแบบจุดต่อจุด (dot product) ระหว่างสัญญาณแบบไซด์ความถี่ f_m กับสัญญาณ $x(n)$ ซึ่งการกระทำดังกล่าวเป็นการหาความสัมพันธ์ (correlation) ระหว่างสัญญาณ x กับสัญญาณแบบไซน์ความถี่ f_m ผลก็คือเราจะได้***องค์ประกอบสัญญาณไซน์ที่ความถี่ f_m ของสัญญาณ x***

เพื่อความเข้าใจที่ดีขึ้น เราจะกระจายสมการที่ (2) ในแต่ละค่าของ m สำหรับ $N = 4$ ดังนี้

$$X(m) = \sum_{n=0}^{3} x(n)[\cos(2\pi nm/4) - j\sin(2\pi nm/4)]$$

เริ่มจาก $m = 0$ เราจะได้

$$\begin{aligned} X(0) = {} & x(0)\cos(2\pi\cdot 0\cdot 0/4) - jx(0)\sin(2\pi\cdot 0\cdot 0/4) \\ & x(1)\cos(2\pi\cdot 1\cdot 0/4) - jx(1)\sin(2\pi\cdot 1\cdot 0/4) \\ & x(2)\cos(2\pi\cdot 2\cdot 0/4) - jx(2)\sin(2\pi\cdot 2\cdot 0/4) \\ & x(3)\cos(2\pi\cdot 3\cdot 0/4) - jx(3)\sin(2\pi\cdot 3\cdot 0/4) \end{aligned}$$

สำหรับ $m = 1$ เราจะได้

$$\begin{aligned} X(1) &= x(0)\cos(2\pi\cdot 0\cdot 1/4) - jx(0)\sin(2\pi\cdot 0\cdot 1/4) \\ & x(1)\cos(2\pi\cdot 1\cdot 1/4) - jx(1)\sin(2\pi\cdot 1\cdot 1/4) \\ & x(2)\cos(2\pi\cdot 2\cdot 1/4) - jx(2)\sin(2\pi\cdot 2\cdot 1/4) \\ & x(3)\cos(2\pi\cdot 3\cdot 1/4) - jx(3)\sin(2\pi\cdot 3\cdot 1/4) \end{aligned}$$

สำหรับ $m = 2$ เราจะได้

$$\begin{aligned} X(2) &= x(0)\cos(2\pi\cdot 0\cdot 2/4) - jx(0)\sin(2\pi\cdot 0\cdot 2/4) \\ & x(1)\cos(2\pi\cdot 1\cdot 2/4) - jx(1)\sin(2\pi\cdot 1\cdot 2/4) \\ & x(2)\cos(2\pi\cdot 2\cdot 2/4) - jx(2)\sin(2\pi\cdot 2\cdot 2/4) \\ & x(3)\cos(2\pi\cdot 3\cdot 2/4) - jx(3)\sin(2\pi\cdot 3\cdot 2/4) \end{aligned}$$

และสำหรับ $m = 3$ เราจะได้

$$\begin{aligned} X(3) &= x(0)\cos(2\pi\cdot 0\cdot 3/4) - jx(0)\sin(2\pi\cdot 0\cdot 3/4) \\ & x(1)\cos(2\pi\cdot 1\cdot 3/4) - jx(1)\sin(2\pi\cdot 1\cdot 3/4) \\ & x(2)\cos(2\pi\cdot 2\cdot 3/4) - jx(2)\sin(2\pi\cdot 2\cdot 3/4) \\ & x(3)\cos(2\pi\cdot 3\cdot 3/4) - jx(3)\sin(2\pi\cdot 3\cdot 3/4) \end{aligned}$$

เราใช้ '·' แทนการคูณเพื่อแยก n และ m/N ออกจากกัน เพราะ n ในที่นี้คือจุดของการชักตัวอย่าง (sampling) ของสัญญาณ $x(t)$, $\cos(2\pi\cdot f_m\cdot t)$ และ $\sin(2\pi\cdot f_m\cdot t)$ ซึ่งจะได้ $x(n)$, $\cos(2\pi\cdot n\cdot m/N)$ และ $\sin(2\pi\cdot n\cdot m/N)$ ตามลำดับ โดย f_m คือความถี่ของสัญญาณรูปแบบไซน์ที่ขึ้นอยู่กับทั้ง m และความถี่ของการชักตัวอย่าง (sampling frequency)

ให้ f_s คือความถี่ของการชักตัวอย่าง เพื่อความเข้าใจเราจะสมมุติให้ $f_s = 500\ \ samples/sec$ กล่าวคือในหนึ่งวินาทีเราจะชักตัวอย่างมา 500 จุด ซึ่งจะทำให้ได้ระยะเวลาระหว่างจุดชักตัวอย่าง 2 จุดติดกัน หรือเวลาระหว่างจุด $n-1$ และจุด n เป็น $1/f_s = t_s = 1/500\ \ sec$ ในกรณีตัวอย่างนี้สัญญาณถูกชักตัวอย่างมา 4 จุดซึ่งกินเวลาทั้งหมดเท่ากับ $4t_s = 4/500\ \ sec$ เราจะพิจารณาความถี่ f_m ว่ามีค่าเท่าไร

จะเห็นว่าเราชักตัวอย่างที่จุด $n = 0, 1, 2, 3$ ที่เวลา $t_0 = 0, t_1 = 1\cdot t_s, t_2 = 2\cdot t_s,$ และ $t_3 = 3\cdot t_s$ ตามลำดับ พิจารณาเฉพาะสัญญาณ $\cos 2\pi\cdot f_m\cdot t$ ผลจากการชักตัวอย่างคือ

$$\begin{aligned} n = 0, \cos(2\pi\cdot t_0\cdot f_m) &= \cos(2\pi\cdot 0t_s\cdot f_m) = \cos(2\pi\cdot 0\cdot m/4) \\ n = 1, \cos(2\pi\cdot t_1\cdot f_m) &= \cos(2\pi\cdot 1t_s\cdot f_m) = \cos(2\pi\cdot 1\cdot m/4) \\ n = 2, \cos(2\pi\cdot t_2\cdot f_m) &= \cos(2\pi\cdot 2t_s\cdot f_m) = \cos(2\pi\cdot 2\cdot m/4) \\ n = 3, \cos(2\pi\cdot t_3\cdot f_m) &= \cos(2\pi\cdot 3t_s\cdot f_m) = \cos(2\pi\cdot 3\cdot m/4) \end{aligned}$$

แสดงว่า $nt_s\cdot f_m = n\cdot\frac{m}{4}$ หรือ $f_m = \frac{m}{4t_s} = \frac{mf_s}{4}$ ในกรณี N ใด ๆ เราจะได้ความถี่ f_m ดังสมการ 3

$$f_m = \frac{mf_s}{N} \tag{3}$$

เราเรียกความถี่ f_m ว่าความถี่วิเคราะห์ (analysis frequency) ซึ่งหมายถึงความถี่ที่เราจะใช้เป็นองค์ประกอบสัญญาณไซน์ของสัญญาณ x (sinusoidal component of x) กล่าวคือ $X(m)$ เป็นตัวบอกว่า องค์ประกอบสัญญาณไซด์ที่ความถี่ f_m ของสัญญาณ x มีขนาดแปรตาม $X_{mag}(m) = |X(m)|$ และมีเฟสเท่ากับ $X_\phi = \arg X(m)$ เมื่อเรานำทุกองค์ประกอบสัญญาณไซน์ทุกความถี่ f_m, m มีค่าตั้งแต่ 0 ถึง $N-1$ มารวมกันเราจะได้สัญญาณ x โดยอาจจะต้องมีการปรับขนาด (scaling) ให้เหมาะสม กระบวนการนำเอาองค์ประกอบสัญญาณไซน์ของ x มารวมกันเพื่อสร้าง x ก็คือฟังก์ชันอินเวอร์สของ DFT (inverse DFT) ซึ่งจะกล่าวถึงในหัวข้อ 2.8

การเขียนองค์ประกอบสัญญาณไซด์นั้นเขียนได้ทั้งแบบสี่เหลี่ยม และแบบโพลาร์ หรือเอ็กโปเนนเชี่ยล ดังนี้

$$X(m) = X_{real}(m) + jX_{imag}(m) = X_{mag}(m)e^{jX_\phi(m)} \quad (4)$$

$$X_{mag}(m) = |X(m)| = \sqrt{X_{real}(m)^2 + X_{imag}(m)^2} \quad (5)$$

$$X_\phi(m) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{X_{imag}(m)}{X_{real}(m)}\right), & \text{เมื่อ } X(m) \text{ อยู่ใน Q1 และ Q4} \\ \arctan\left(\frac{X_{imag}(m)}{X_{real}(m)}\right) + \pi, & \text{เมื่อ } X(m) \text{ อยู่ใน Q2 และ Q3} \end{cases} \quad (6)$$

นอกจากนี้บ่อยครั้งที่เราจะสนใจสเปคตรัมกำลัง (power spectrum) แทนสเปคตรัมความถี่ (frequency spectrum) ในกรณีนี้เราต้องการคำนวณกำลังของสัญญาณที่ความถี่ f_m ตามสมการที่ (7)

$$X_{PS}(m) = X_{mag}^2 = |X(m)|^2 = X_{real}^2(m) + X_{imag}^2(m) \quad (7)$$

2.2.1 ตัวอย่างที่ 1: การคำนวณและการตีความหมาย DFT

เราจะใช้ตัวอย่างในการแสดงความหมายของสมการ DFT ในสมการที่ (1) และสมการที่ (2) โดยในตัวอย่างแรกนี้เราจะคำนวณ DFT ของลำดับ $x(n)$ ที่ได้จากการชักตัวอย่าง $x(t)$ ซึ่งเป็นฟังก์ชันที่ได้จากการบวกกันของสัญญาณไซน์ที่ความถี่ $1\ kHz$ และ $2\ kHz$ ดังนี้

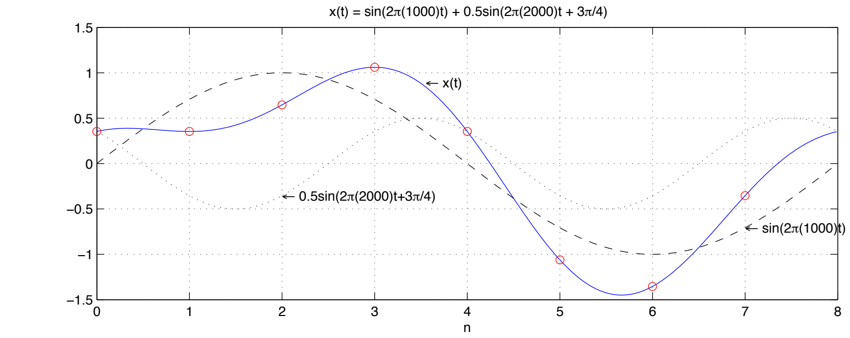
$$x(t) = \sin(2\pi(1000)t) + 0.5\sin(2\pi(2000)t + 3\pi/4) \quad (8)$$

โดย $x(n)$ ได้จากการชักตัวอย่างด้วยความถี่ของการชักตัวอย่าง $f_s = 8000$ จุดต่อวินาที หรือระยะห่างระหว่างจุดชักตัวอย่างสองจุดติดกันคือ

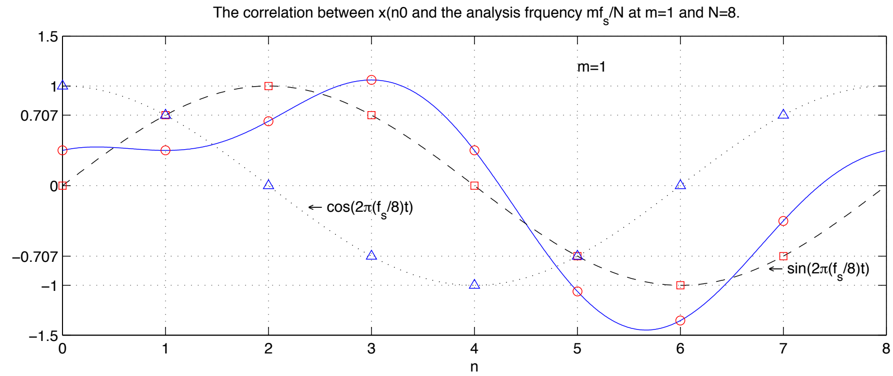
$$t_s = \frac{1}{f_s} = \frac{1}{8000} = \frac{1}{8}\,ms$$

เราจะหา DFT ของ $x(n)$ ซึ่งได้จาก $x(t)$ ภายในเวลา 1 คาบของ $\sin(2\pi(1000)t)$ และ 2 คาบของ $\sin(2\pi(2000)t + 3\pi/4)$ ซึ่งเป็นเวลา $1/1000 = 1\ ms$ จากเวลา 0 ถึง $7t_s$ ซึ่งมีทั้งหมด 8 จุด โดย $x(n)$ ทั้ง 8 จุดได้แก่

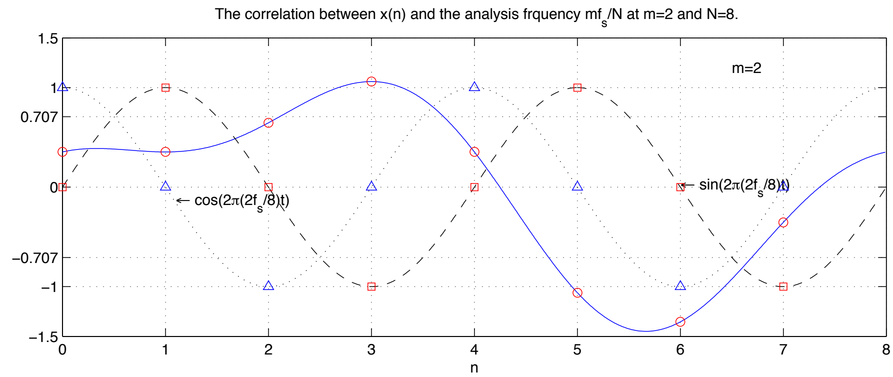
$$\begin{array}{ll} x(0) = 0.3535 & x(1) = 0.3535 \\ x(2) = 0.6464 & x(3) = 1.0607 \\ x(4) = 0.3535 & x(5) = -1.0607 \\ x(6) = -1.3535 & x(7) = -0.3535 \end{array}$$



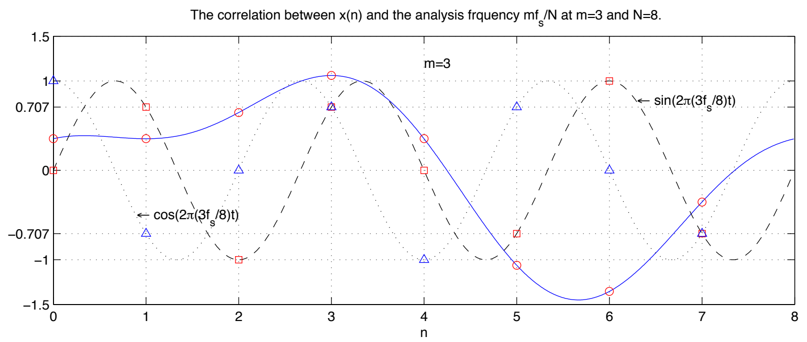
(a) $x(t) = \sin(2\pi(1000)t) + 0.5\sin(2\pi(2000)t + 3\pi/4)$ x(n) 8000



(b) $f_m = f_s \cdot \frac{m}{N}$ $m = 1,\ N = 8,\ f_s = 8000$ samples/sec



(c) $f_m = f_s \cdot \frac{m}{N}$ $m = 2,\ N = 8,\ f_s = 8000$ samples/sec



(d) $f_m = f_s \cdot \frac{m}{N}$ $m = 3,\ N = 8,\ f_s = 8000$ samples/sec

รูปที่ 1: สัญญาณอินพุท $x(t)$ และ $x(n)$ จากการชักตัวอย่าง และสัญญาณวิเคราะห์ที่ความถี่ $f_m = f_s \cdot \frac{m}{N}$ เมื่อ $f_s = 8000$ sample/sec, $N = 8$, และ $m = 1$ ถึง 3

รูปที่ 1(a) แสดงอินพุท $x(t)$ และ $x(n)$ ดังกล่าว

คำนวณ DFT ตามนิยามในสมการที่ (2) สำหรับกรณี $m = 1$ เราจะได้

$$
\begin{aligned}
X(1) &= 0.3535 \cdot \cos(2\pi \cdot 0 \cdot 1/8) - j0.3535 \cdot \sin(2\pi \cdot 0 \cdot 1/8) + \\
&\quad 0.3535 \cdot \cos(2\pi \cdot 1 \cdot 1/8) - j0.3535 \cdot \sin(2\pi \cdot 1 \cdot 1/8) + \\
&\quad 0.6464 \cdot \cos(2\pi \cdot 2 \cdot 1/8) - j0.6464 \cdot \sin(2\pi \cdot 2 \cdot 1/8) + \\
&\quad 1.0607 \cdot \cos(2\pi \cdot 3 \cdot 1/8) - j1.0607 \cdot \sin(2\pi \cdot 3 \cdot 1/8) + \\
&\quad 0.3535 \cdot \cos(2\pi \cdot 4 \cdot 1/8) - j0.3535 \cdot \sin(2\pi \cdot 4 \cdot 1/8) + \\
&\quad -1.0607 \cdot \cos(2\pi \cdot 5 \cdot 1/8) + j1.0607 \cdot \sin(2\pi \cdot 5 \cdot 1/8) + \\
&\quad -1.3535 \cdot \cos(2\pi \cdot 6 \cdot 1/8) + j1.3535 \cdot \sin(2\pi \cdot 6 \cdot 1/8) + \\
&\quad -0.3535 \cdot \cos(2\pi \cdot 7 \cdot 1/8) + j0.3535 \cdot \sin(2\pi \cdot 7 \cdot 1/8) \\
X(1) &= 0.3535(1) - j0.3535(0) + \\
&\quad 0.3535(0.707) - j0.3535(0.707) + \\
&\quad 0.6464(0) - j0.6464(1) + \\
&\quad 1.0607(-0.707) - j1.0607(0.707) + \\
&\quad 0.3535(-1) - j0.3535(0) + \\
&\quad -1.0607(-0.707) + j1.0607(-0.707) + \\
&\quad -1.3535(0) + j1.3535(-1) + \\
&\quad -0.3535(0.707) + j0.3535(-0.707) \\
&= 0.0 - j4.0 = 4e^{-j\pi/2} = 4\angle -90^\circ
\end{aligned}
$$

จะเห็นว่าการคำนวณนี้เป็นผลรวมของผลคูณกันระหว่าง $x(n)$ กับ $y(n)$ สำหรับทุกจุดของ $n = 0, 1, 2, ..., 7$ เมื่อ

$$
\begin{aligned}
y(n) &= \cos(2\pi \cdot n \cdot 1/8) - j \sin(2\pi \cdot n \cdot 1/8) \\
&= y_r(n) + j y_i(n) \\
y_r(n) &= \cos(2\pi \cdot n \cdot 1/8) \\
y_i(n) &= -\sin(2\pi \cdot n \cdot 1/8)
\end{aligned}
$$

ซึ่ง $y(n)$ นี้เป็นสัญญาณไซน์ที่ความถี่วิเคราะห์ $f_1 = \frac{1 \cdot f_s}{8}$ ตารางที่ 2 แสดงการคำนวณ $X(m)$ ในกรณี $m = 1$ นี้ ผลของการคำนวณนี้เป็นค่าความสัมพันธ์ (correlation) ของ $x(n)$ กับ $y(n)$ และเนื่องจากสัญญาณ $y(n)$ เป็นสัญญาณไซน์ขนาดเท่ากับ 1 ที่ความถี่ f_1 ผลของการ correlation ดังกล่าวก็คือขององค์ประกอบของ $x(n)$ บนสัญญาณไซน์ความถี่ $\frac{1 \cdot f_s}{8}$ รูปที่ 1(b) แสดงการ correlation ของ $x(n)$ กับสัญญาณไซน์ความถี่ $\frac{1 \cdot f_s}{8}$

ทำนองเดียวกันเมื่อ $m = 2$ เราจะได้

$$
\begin{aligned}
X(2) &= 0.3535 \cdot \cos(2\pi \cdot 0 \cdot 2/8) - j0.3535 \cdot \sin(2\pi \cdot 0 \cdot 2/8) + \\
&\quad 0.3535 \cdot \cos(2\pi \cdot 1 \cdot 2/8) - j0.3535 \cdot \sin(2\pi \cdot 1 \cdot 2/8) + \\
&\quad 0.6464 \cdot \cos(2\pi \cdot 2 \cdot 2/8) - j0.6464 \cdot \sin(2\pi \cdot 2 \cdot 2/8) + \\
&\quad 1.0607 \cdot \cos(2\pi \cdot 3 \cdot 2/8) - j1.0607 \cdot \sin(2\pi \cdot 3 \cdot 2/8) + \\
&\quad 0.3535 \cdot \cos(2\pi \cdot 4 \cdot 2/8) - j0.3535 \cdot \sin(2\pi \cdot 4 \cdot 2/8) + \\
&\quad -1.0607 \cdot \cos(2\pi \cdot 5 \cdot 2/8) + j1.0607 \cdot \sin(2\pi \cdot 5 \cdot 2/8) + \\
&\quad -1.3535 \cdot \cos(2\pi \cdot 6 \cdot 2/8) + j1.3535 \cdot \sin(2\pi \cdot 6 \cdot 2/8) + \\
&\quad -0.3535 \cdot \cos(2\pi \cdot 7 \cdot 2/8) + j0.3535 \cdot \sin(2\pi \cdot 7 \cdot 2/8) \\
X(2) &= 0.3535(1) - j0.3535(0) + \\
&\quad 0.3535(0) - j0.3535(1) + \\
&\quad 0.6464(-1) - j0.6464(0) + \\
&\quad 1.0607(0) - j1.0607(-1) + \\
&\quad 0.3535(1) - j0.3535(0) + \\
&\quad -1.0607(0) + j1.0607(1) + \\
&\quad -1.3535(-1) + j1.3535(0) + \\
&\quad -0.3535(0) + j0.3535(-1) \\
&= 1.414 - j1.414 = 2e^{j\pi/4} = 2\angle 45^\circ
\end{aligned}
$$

ซึ่งเป็นผลบวกของ $x(n)$ กับ $y(n)$ สำหรับทุกค่า $n = 0, 1, 2, ..., 7$ เมื่อ

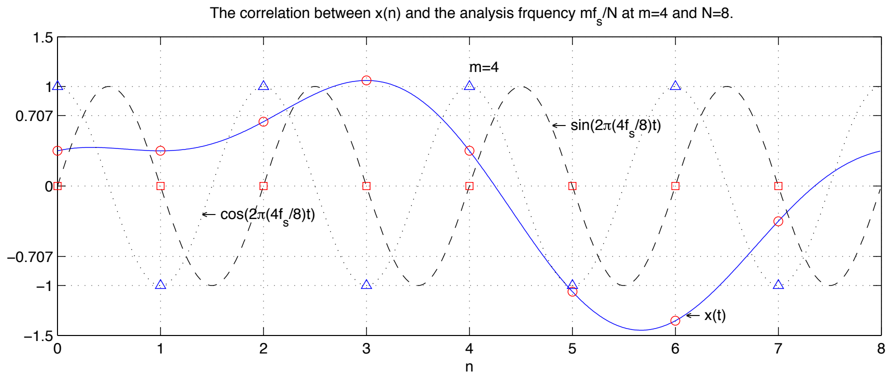
$$
\begin{aligned}
y(n) &= \cos(2\pi \cdot n \cdot 2/8) - j\sin(2\pi \cdot n \cdot 2/8) \\
&= y_r(n) + jy_i(n) \\
y_r(n) &= \cos(2\pi \cdot n \cdot 2/8) \\
y_i(n) &= -\sin(2\pi \cdot n \cdot 2/8)
\end{aligned}
$$

โดย $y(n)$ นี้เป็นสัญญาณไซน์ที่ความถี่วิเคราะห์ $f_2 = \frac{2 \cdot f_s}{8}$ ตารางที่ 1 แสดงการคำนวณ $X(m)$ ในกรณี $m = 2$ นี้ และผลของการคำนวณนี้เป็นค่าความสัมพันธ์ (correlation) ของ $x(n)$ กับ $y(n)$ และเนื่องจากสัญญาณ $y(n)$ เป็นสัญญาณไซน์ขนาดเท่ากับ 1 ที่ความถี่ $\frac{2 \cdot f_s}{8}$ ผลของการ correlation ดังกล่าวก็คือขององค์ประกอบของ $x(n)$ บนสัญญาณไซน์ความถี่ $\frac{2 \cdot f_s}{8}$ รูปที่ 1(c) แสดงการ correlation ของ $x(n)$ กับสัญญาณไซน์ความถี่ $\frac{2 \cdot f_s}{8}$

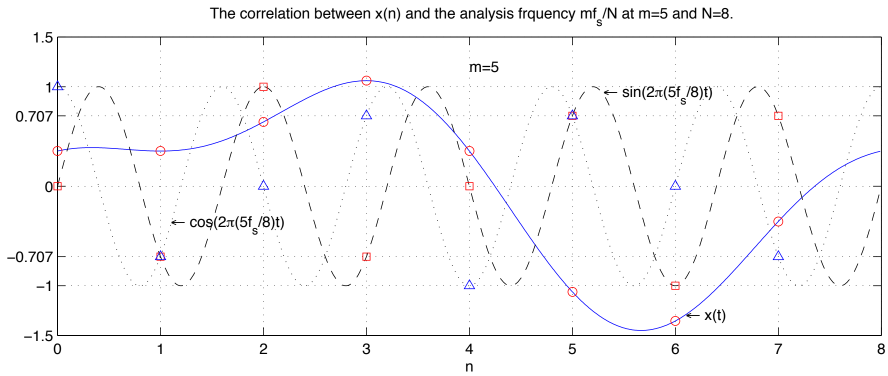
การคำนวณที่ m ค่าอื่น ๆ ก็เช่นเดียวกัน ตารางที่ 3 ถึง ตารางที่ 7 สรุปการคำนวณดังกล่าว และรูปที่ 1(d) ถึง 2(d) แสดงการ correlation ของ $x(n)$ กับสัญญาณไซน์ความถี่ $\frac{m \cdot f_s}{8}$ เมื่อ $m = 3$ ถึง 7 ตามลำดับ

จากตัวอย่างการคำนวณ DFT เราจะเห็นว่าการคำนวณ DFT หนึ่งจุด หรือการคำนวณ $X(m)$ นั้นหาได้จาก

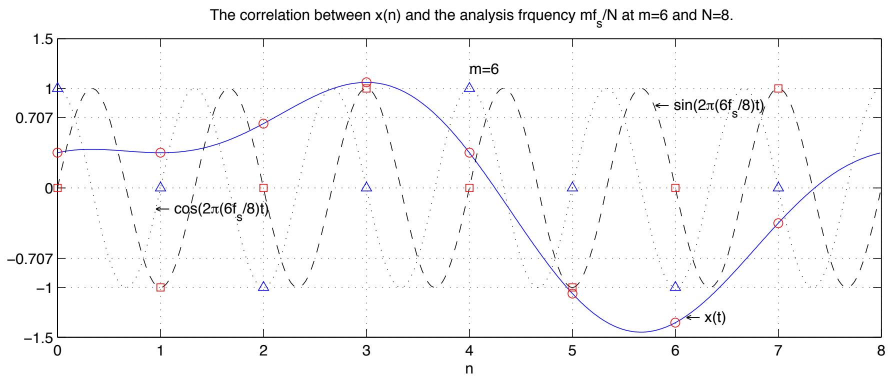
1. คำนวณส่วนจริงของ $X(m)$ หรือ $X_{real}(m)$ โดยการคูณ $x(n)$ และ $y_r(n) = \cos(2\pi \cdot \frac{mf_s}{N} \cdot nt_s)$ สำหรับทุกค่าของ n แบบจุดต่อจุด แล้วรวมผลคูณทั้งหมด ข้อสังเกตุที่สำคัญคือ $y_r(n)$ เป็นสัญญาณ



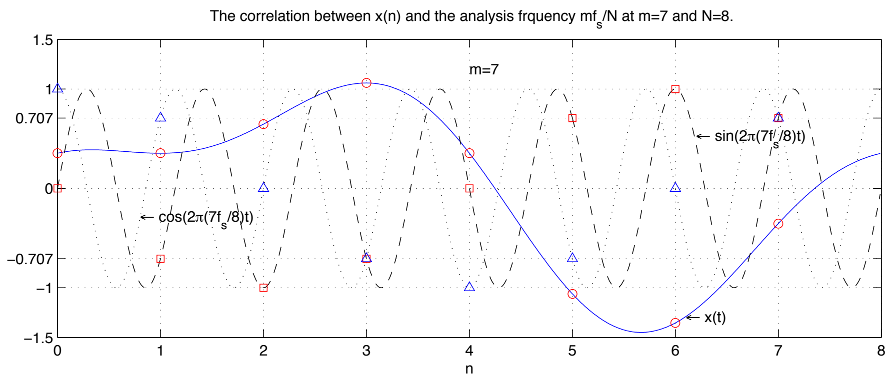
(a) $f_m = f_s \cdot \frac{m}{N} \quad m = 4,\ N = 8,\ f_s = 8000\ \text{samples/sec}$



(b) $f_m = f_s \cdot \frac{m}{N} \quad m = 5,\ N = 8,\ f_s = 8000\ \text{samples/sec}$



(c) $f_m = f_s \cdot \frac{m}{N} \quad m = 6,\ N = 8,\ f_s = 8000\ \text{samples/sec}$



(d) $f_m = f_s \cdot \frac{m}{N} \quad m = 7,\ N = 8,\ f_s = 8000\ \text{samples/sec}$

รูปที่ 2: สัญญาณวิเคราะห์ที่ความถี่ $f_m = f_s \cdot \frac{m}{N}$, $f_s = 8000$ sample/sec, $N = 8$, และ $m = 4$ ถึง 7

ตารางที่ 1: การคำนวณ DFT ของตัวอย่างที่ 1 สำหรับ $m = 1$

n	$x(n)$	$y_r(n) = \cos(2\pi \cdot \frac{1}{8} \cdot n)$	$x(n)y_r(n)$	$y_i(n) = -\sin(2\pi \cdot \frac{1}{8} \cdot n)$	$x(n)y_i(n)$
0	0.3535	1.0	0.3535	0.0	0.0
1	0.3535	0.707	0.25	-0.707	-0.25
2	0.6464	0.0	0.0	-1.0	-0.6464
3	1.0607	-0.707	-0.75	-0.707	-0.75
4	0.3535	-1.0	-0.3535	0.0	0.0
5	-1.0607	-0.707	0.75	0.707	-0.75
6	-1.3535	0.0	0.0	1.0	-1.3535
7	-0.3535	0.707	-0.25	0.707	-0.25
$X_{real}(6) = \sum_{n=0}^{7} x(n)y_r(n) = 0.0$				$X_{imag}(6) = \sum_{n=0}^{7} x(n)y_i(n) = -4.0$	
$X(1) = 0.0 - j4 = 4e^{-j\pi/2} = 4\angle{-90°}$					

ตารางที่ 2: การคำนวณ DFT ของตัวอย่างที่ 1 สำหรับ $m = 2$

n	$x(n)$	$y_r(n) = \cos(2\pi \cdot \frac{2}{8} \cdot n)$	$x(n)y_r(n)$	$y_i(n) = -\sin(2\pi \cdot \frac{2}{8} \cdot n)$	$x(n)y_i(n)$
0	0.3535	1.0	0.3535	0.0	0.0
1	0.3535	0.0	0.0	-1.0	-0.3535
2	0.6464	-1.0	-0.6464	0.0	0.0
3	1.0607	0.0	0.0	1.0	1.0607
4	0.3535	1.0	0.3535	0.0	0.0
5	-1.0607	0.0	0.0	-1.0	1.0607
6	-1.3535	-1.0	1.3535	0.0	0.0
7	-0.3535	0.0	0.0	0.1	-0.3535
$X_{real}(2) = \sum_{n=0}^{7} x(n)y_r(n) = 1.414$				$X_{imag}(2) = \sum_{n=0}^{7} x(n)y_i(n) = -1.414$	
$X(2) = 1.414 + j1.414 = 2e^{j\pi/4} = 2\angle 45°$					

ตารางที่ 3: การคำนวณ DFT ของตัวอย่างที่ 1 สำหรับ $m = 3$

n	$x(n)$	$y_r(n) = \cos(2\pi \cdot \frac{3}{8} \cdot n)$	$x(n)y_r(n)$	$y_i(n) = -\sin(2\pi \cdot \frac{3}{8} \cdot n)$	$x(n)y_i(n)$
0	0.3535	1.0	0.3535	0.0	0.0
1	0.3535	-0.707	-0.25	-0.707	-0.25
2	0.6464	0.0	0.0	1.0	0.6464
3	1.0607	0.707	0.75	-0.707	-0.75
4	0.3535	-1.0	-0.3535	0.0	0.0
5	-1.0607	0.707	-0.75	0.707	-0.75
6	-1.3535	0.0	0.0	-1.0	1.3535
7	-0.3535	-0.707	0.25	0.707	-0.25
$X_{real}(3) = \sum_{n=0}^{7} x(n)y_r(n) = 0.0$				$X_{imag}(3) = \sum_{n=0}^{7} x(n)y_i(n) = 0.0$	
$X(3) = 0.0 + j0.0 = 0.0e^{j0} = 0\angle 0^\circ$					

ตารางที่ 4: การคำนวณ DFT ของตัวอย่างที่ 1 สำหรับ $m = 4$

n	$x(n)$	$y_r(n) = \cos(2\pi \cdot \frac{4}{8} \cdot n)$	$x(n)y_r(n)$	$y_i(n) = -\sin(2\pi \cdot \frac{4}{8} \cdot n)$	$x(n)y_i(n)$
0	0.3535	1.0	0.3535	0.0	0.0
1	0.3535	-1.0	-0.3535	0.0	0.0
2	0.6464	1.0	0.6464	0.0	0.0
3	1.0607	-1.0	-1.0607	0.0	0.0
4	0.3535	1.0	0.3535	0.0	0.0
5	-1.0607	-1.0	1.0607	0.0	0.0
6	-1.3535	1.0	-1.3535	0.0	0.0
7	-0.3535	-1.0	0.3535	0.0	0.0
$X_{real}(4) = \sum_{n=0}^{7} x(n)y_r(n) = 0.0$				$X_{imag}(4) = \sum_{n=0}^{7} x(n)y_i(n) = 0.0$	
$X(4) = 0.0 + j0.0 = 0.0e^{j0} = 0\angle 0^\circ$					

ตารางที่ 5: การคำนวณ DFT ของตัวอย่างที่ 1 สำหรับ $m = 5$

n	$x(n)$	$y_r(n) = \cos(2\pi \cdot \frac{5}{8} \cdot n)$	$x(n)y_r(n)$	$y_i(n) = -\sin(2\pi \cdot \frac{5}{8} \cdot n)$	$x(n)y_i(n)$
0	0.3535	1.0	0.3535	0.0	0.0
1	0.3535	-0.707	-0.25	0.707	0.25
2	0.6464	0.0	0.0	-1.0	-0.6464
3	1.0607	0.707	0.75	0.707	0.75
4	0.3535	-1.0	-0.3535	0.0	0.0
5	-1.0607	0.707	-0.75	-0.707	0.75
6	-1.3535	0.0	0.0	1.0	-1.3535
7	-0.3535	-0.707	0.25	-0.707	0.25

$X_{real}(5) = \sum_{n=0}^{7} x(n)y_r(n) = 0.0$	$X_{imag}(5) = \sum_{n=0}^{7} x(n)y_i(n) = 0.0$
$X(5) = 0.0 + j0.0 = 0.0e^{j0} = 0\angle 0^\circ$	

ตารางที่ 6: การคำนวณ DFT ของตัวอย่างที่ 1 สำหรับ $m = 6$

n	$x(n)$	$y_r(n) = \cos(2\pi \cdot \frac{6}{8} \cdot n)$	$x(n)y_r(n)$	$y_i(n) = -\sin(2\pi \cdot \frac{6}{8} \cdot n)$	$x(n)y_i(n)$
0	0.3535	1.0	0.3535	0.0	0.0
1	0.3535	0.0	0.0	1.0	0.3535
2	0.6464	-1.0	-0.6464	0.0	0.0
3	1.0607	0.0	0.0	-1.0	-1.0607
4	0.3535	1.0	0.3535	0.0	0.0
5	-1.0607	0.0	0.0	1.0	-1.0607
6	-1.3535	-1.0	1.3535	0.0	0.0
7	-0.3535	0.0	0.0	-0.1	0.3535

$X_{real}(6) = \sum_{n=0}^{7} x(n)y_r(n) = 1.414$	$X_{imag}(6) = \sum_{n=0}^{7} x(n)y_i(n) = -1.414$
$X(6) = 1.414 - j1.414 = 2e^{-j\pi/4} = 2\angle -45^\circ$	

ตารางที่ 7: การคำนวณ DFT ของตัวอย่างที่ 1 สำหรับ $m = 7$

n	$x(n)$	$y_r(n) = \cos(2\pi \cdot \frac{7}{8} \cdot n)$	$x(n)y_r(n)$	$y_i(n) = -\sin(2\pi \cdot \frac{7}{8} \cdot n)$	$x(n)y_i(n)$
0	0.3535	1.0	0.3535	0.0	0.0
1	0.3535	0.707	0.25	0.707	0.25
2	0.6464	0.0	0.0	1.0	0.6464
3	1.0607	-0.707	-0.75	0.707	0.75
4	0.3535	-1.0	-0.3535	0.0	0.0
5	-1.0607	-0.707	0.75	-0.707	0.75
6	-1.3535	0.0	0.0	-1.0	1.3535
7	-0.3535	0.707	-0.25	-0.707	0.25
$X_{real}(6) = \sum_{n=0}^{7} x(n)y_r(n) = 0.0$			$X_{imag}(6) = \sum_{n=0}^{7} x(n)y_i(n) = 4.0$		
$X(7) = 0.0 + j4 = 4e^{j\pi/2} = 4\angle 90°$					

$\cos(2\pi f_m t)$ ณ. จุดชักตัวอย่างลำดับที่ n ซึ่งเกิดขึ้น ณ. เวลา $t = nt_s$ เมื่อ $t_s = \frac{1}{f_s}$ โดยความถี่วิเคราะห์ f_m มีค่าเท่ากับ $\frac{mf_s}{N}$

2. คำนวณส่วนจินตภาพของ $X(m)$ หรือ $X_{imag}(m)$ โดยการคูณ $x(n)$ และ $y_i(n) = -\sin(2\pi \cdot \frac{mf_s}{N} \cdot nt_s)$ สำหรับทุกค่าของ n แบบจุดต่อจุด แล้วรวมผลคูณทั้งหมด เช่นเดียวกันข้อสังเกตุที่สำคัญคือ $y_i(n)$ เป็นสัญ-ญาณ $-\sin(2\pi f_m t)$ ณ. จุดชักตัวอย่างลำดับที่ n ซึ่งเกิดขึ้น ณ. เวลา $t = nt_s$ เมื่อ $t_s = \frac{1}{f_s}$ โดยความถี่วิเคราะห์ f_m มีค่าเท่ากับ $\frac{mf_s}{N}$

3. คำตอบคือ $X(m) = X_{real}(m) + jX_{imag}(m)$

การคำนวณดังกล่าวเป็นการหาความสัมพันธ์ของ $x(n)$ กับ $y(n)$ เมื่อ

$$
\begin{aligned}
y(n) &= e^{-j2\pi \cdot \frac{mf_s}{N} \cdot nt_s} = e^{-j2\pi \cdot \frac{mn}{N}} \\
&= \cos(2\pi \cdot \frac{mf_s}{N} \cdot nt_s) - j\sin(2\pi \cdot \frac{mf_s}{N} \cdot nt_s) \\
&= y_r(n) + jy_i(n) \\
y_r(n) &= \cos(2\pi \cdot \frac{mf_s}{N} \cdot nt_s) = \cos(2\pi \cdot \frac{mn}{N}) \\
y_i(n) &= -\sin(2\pi \cdot \frac{mf_s}{N} \cdot nt_s) = -\sin(2\pi \cdot \frac{mn}{N})
\end{aligned}
$$

ซึ่งเป็นสัญญาณไซน์ที่ความถี่วิเคราะห์ $f_m = \frac{mf_s}{N}$ และเนื่องจาก $y(n)$ เป็นสัญญาณไซน์ที่ความถี่ f_m ผลที่ได้จากการหาความสัมพันธ์ดังกล่าวคือ ก็คือองค์ประกอบสัญญาณไซน์ความถี่ f_m ของ $x(n)$ นั่นเอง

เราจะพิจารณากรณีที่ $m = 0$ ซึ่งเรายังไม่ได้คำนวณ เมื่อ $m = 0$ ค่าของ $y(n) = e^{j2\pi \cdot n \cdot 0} = 1 + j0$

สำหรับทุกค่าของ n ดังนั้นเราจะได้

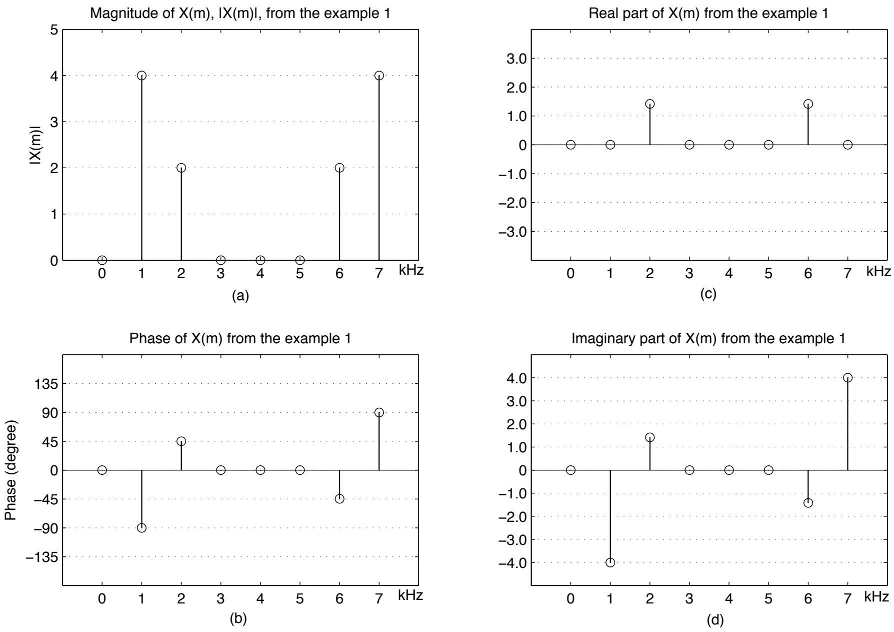
$$\begin{aligned} X(0) &= \sum_{n=0}^{7} x(n)\cdot 1 = \sum_{n=0}^{7} x(n) = 7\cdot\frac{1}{7}\sum_{n=0}^{7} x(n) = 7x_{avg} \\ &= 0.3535 + 0.3535 + 0.6464 + 1.0607 + 0.3535 \\ &\quad +(-1.0607) + (-1.3535) + (-0.3535) \\ &= 0.0 \end{aligned}$$

จะเห็นว่า $X(0)$ มีค่าเป็น 7 เท่า (หรือ N เท่า สำหรับกรณีทั่วไป) ของค่าเฉลี่ยของ $x(n)$ เมื่อค่าเฉลี่ยของ $x(n)$ คือ x_{agv} มีค่า

$$x_{avg} = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N} x(n)$$

นั่นคือ $X(0)$ คือองค์ประกอบ DC ของสัญญาณ $x(n)$ นั่นเอง ในกรณีตัวอย่างที่ 1 นี้ไม่มีองค์ประกอบ DC จึงได้ $X(0) = 0.0$

เมื่อเรานำผลของการคำนวณ DFT ในตัวอย่างที่ 1 มาพล็อต เราจะได้กราฟที่บอกถึงองค์ประกอบสัญญาณไซน์ที่ความถี่วิเคราะห์ f_m ดังแสดงในรูปที่ 3



รูปที่ 3: ผลการคำนวณ DFT ของตัวอย่างที่ 1 (a) ขนาด (magnitude) ของ Xm; (b) เฟส (phase) ในหน่วยองศาของ $X(m)$; (c) ส่วนจริง (real part) ของ $X(m)$ และ (d) ส่วนจินตภาพ (imaginary part) ของ $X(m)$

2.3 ความสมดุลย์ของ DFT (DFT Symmetry)

สังเกตผลของการคำนวณ DFT ในรูปที่ 3 อีกครั้งหนึ่ง จะเห็นว่าค่า DFT ของ $x(n)$ ในตัวอย่างนี้มีความสมดุลย์ในลักษณะที่

$$X(N-m) \quad = \quad X^*(m), m = 1, 2, ..., N/2 - 1 \tag{9}$$

เมื่อ $X^*(m)$ เป็น complex conjugate ของ $X(m)$ กล่าวคือถ้า

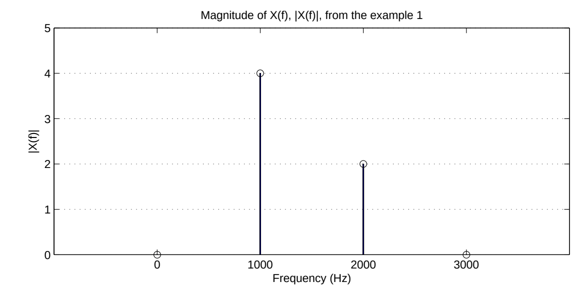
$$X(m) = X_{real}(m) + jX_{imag}(m) = X_{mag}(m)e^{X_\phi(m)}$$

แล้ว

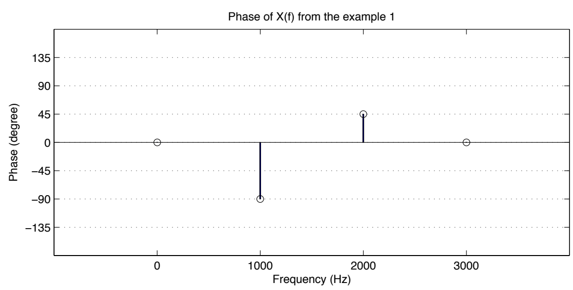
$$X(N-m) \quad = \quad X^*(m) = X_{real}(m) - jX_{imag}(m) \quad \text{หรือ} \tag{10}$$
$$X(N-m) \quad = \quad X^*(m) = X_{mag}(m)e^{-jX_\phi(m)} \tag{11}$$

โดย $X_{mag}(m)$ และ $X_\phi(m)$ เป็นไปตามสมการที่ (5) และสมการที่ (6) กล่าวคือเมื่ออยู่ในรูปแบบสี่เหลี่ยม (rectangular form) เราจะได้

$$X_{real}(N-m) \quad = \quad X_{real}(m) \text{ และ} \tag{12}$$
$$X_{imag}(N-m) \quad = \quad -X_{imag}(m) \tag{13}$$



(a) $x(n)$ $(|X(f_m)|)$



(b) $x(n)$ $(X_\phi(f_m))$

รูปที่ 4: องค์ประกอบสัญญาณไซน์ที่ความถี่วิเคราะห์ของ $x(n)$ $(X(f_m))$ในตัวอย่างที่ 1

หรือ

$$X_{mag}(N-m) = X_{mag}(m) = |X(m)| \text{ และ} \quad (14)$$
$$X_{\phi}(N-m) = -X_{\phi}(m) \quad (15)$$

เมื่ออยู่ในรูปแบบโพลาร์ (polar form)

ความสมดุลย์ดังกล่าวจะเกิดขึ้นเสมอถ้า $x(n)$ เป็นลำดับของเลขจำนวนจริง (real-value sequence) ซึ่งในทางปฏิบัติแล้ว สัญญาณทางกายภาพทั้งหมดจะเป็นฟังก์ชันจำนวนจริง จึงทำให้ $x(n)$ ในทางปฏิบัติเป็นลำดับของเลขจำนวนจริง และ DFT ของมันจะมีความสมดุลย์ตามสมการที่ (9)

ดังนั้นในกรณีที่ $x(n)$ เป็นลำดับของเลขจำนวนจริง เราจะใช้เฉพาะ $X(m) = X(f_m)$ ในครึ่งแรกคือเมื่อ $m = 0$ ถึง $m = \frac{N}{2} - 1$ ดังแสดงในรูปที่ 4

เราสามารถพิสูจน์สมการที่ (9) โดยเขียน $X(N-m)$ ในรูปเอ็กโปเนนเชี่ยลของ DFT ตามสมการที่ (1) ดังนี้

$$\begin{aligned}
X(N-m) &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j2\pi\cdot\frac{n(N-m)}{N}} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j2\pi\cdot\frac{n(-m)}{N}}e^{-j2\pi\frac{nN}{N}} \\
&= \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{j2\pi\cdot\frac{nm}{N}} \quad \text{เพราะ} \\
e^{-j2\pi\frac{nN}{N}} &= e^{-j2\pi n} = 1
\end{aligned}$$

เนื่องจาก $z^* = |z|e^{j\theta}$ เมื่อ $z = |z|e^{-j\theta}$ และ $\alpha(z_1 + z_2)^* = \alpha(z_1^* + z_2^*)$ เมื่อ α เป็นจำนวนจริง เราจึงสรุปได้ว่า

$$X(N-m) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{j2\pi\cdot\frac{nm}{N}} = X^*(m) \quad (16)$$

2.4 ความเป็นเชิงเส้นของ DFT (DFT Linearity)

เราอาจมอง DFT เป็นระบบอันหนึ่งที่เปลี่ยนอินพุท $x(n)$ ไปเป็นเอ้าท์พุท $X(m)$ และคุณสมบัติสำคัญอันหนึ่งของระบบใด ๆ คือคุณสมบัติความเป็นเชิงเส้น (linearity) ซึ่งกล่าวไว้ดังนี้

ให้ A เป็นระบบอันหนึ่ง โดย y_1 เป็นเอ้าท์พุทของ A เมื่อป้อน x_1 เป็นอินพุท และ y_2 เป็นเอ้าท์พุทของ A เมื่อป้อน x_2 เป็นอินพุท แล้ว A จะมีคุณสมบัติเชิงเส้น หรือเราเรียกอีกอย่างหนึ่งว่า A จะเป็นระบบเชิงเชิง (linear system) ถ้า $\alpha y_1 + \beta y_2$ เป็นเอ้าท์พุทของ A เมื่อป้อน $\alpha x_1 + \beta x_2$ เป็นอินพุท

DFT มีคุณสมบัติความเป็นเชิงเส้น ซึ่งพิสูจน์ได้ดังนี้

ให้ $x_1(n)$ และ $x_2(n)$ ($n = 0, 1, 2, ..., N-1$) เป็นลำดับของเลขจำนวนเชิงซ้อน N จุด แล้วเราจะได้

$$\begin{aligned}
X_1(m) &= \sum_{n=0}^{N-1} x_1(n)e^{-j2\pi nm/N} \quad \text{และ} \\
X_2(m) &= \sum_{n=0}^{N-1} x_2(n)e^{-j2\pi nm/N}
\end{aligned}$$

เป็น DFT ของ $x_1(n)$ และ $x_2(n)$ ตามลำดับ กล่าวคือ $X_1(m)$ และ $X_2(m)$ เป็นเอ้าท์พุทจากระบบ DFT เมื่อป้อนอินพุทเป็น $x_1(n)$ และ $x_2(n)$ ตามลำดับ ถ้าให้

$$y(n) = \alpha x_1(n) + \beta x_2(n)$$

เป็นลำดับของจำนวนเชิงซ้อนจำนวน N จุด ที่เกิดจากการผลรวมของ $\alpha x_1(n)$ และ $\beta x_2(n)$ โดย α และ β เป็นค่าคงที่เชิงซ้อน (complex constants) แล้ว เราจะได้

$$\begin{aligned}
Y(m) &= \sum_{n=0}^{N-1} y(n)e^{-j2\pi nm/N} = \sum_{n=0}^{N-1} (\alpha x_1(n) + \beta x_2(n))e^{-j2\pi nm/N} \\
&= \sum_{n=0}^{N-1} \alpha x_1(n)e^{-j2\pi nm/N} + \sum_{n=0}^{N-1} \beta x_2(n)e^{-j2\pi nm/N} \\
&= \alpha \sum_{n=0}^{N-1} x_1(n)e^{-j2\pi nm/N} + \beta \sum_{n=0}^{N-1} x_2(n)e^{-j2\pi nm/N} \\
&= \alpha X_1(m) + \beta X_2(m)
\end{aligned}$$

กล่าวคือถ้าเราป้อน $\alpha x_1(n) + \beta x_2(n)$ เป็นอินพุทให้ DFT แล้วเราจะได้ $\alpha X_1(m) + \beta X_2(m)$ เป็นเอ้าท์พุท ซึ่ง แสดงว่า DFT มีคุณสมบัติความเป็นเชิงเส้น ซึ่งเป็นจริงทั้งกรณีที่อินพุท $x(n)$ ของมันจะเป็นลำดับของเลขเชิงซ้อนหรือเป็นลำดับของเลขจำนวนจริง เนื่องจากจำนวนจริงเป็นเซตย่อยของจำนวนเชิงซ้อน สมการข้างบนจึงเป็นจริงสำหรับกรณีที่ $x_1(n)$, $x_2(n)$, α, และ β เป็นจำนวนจริง

ถ้าปราศจากความเป็นเชิงเส้น DFT จะไม่มีประโยชน์อะไรเลยในการวิเคราะห์สัญญาณ เพราะเราจะสามารถหา DFT ได้เฉพาะสัญญาณที่มีเพียงความถี่เดียว แต่ในความเป็นจริงสัญญาณในทางปฏิบัตินั้น เป็นผลรวมของสัญญาณไซน์หลายความถี่ ด้วยคุณสมบัติความเป็นเชิงเส้นเราจึงใช้ DFT ในการวิเคราะห์หาองค์ประกอบสัญญาณไซน์ที่ความถี่ต่าง ๆ ได้

2.5 ทฤษฎีการเลื่อนของ DFT (DFT Shift Theorem)

ถ้า $y(n) = x(n+l)$ เป็นลำดับของตัวเลขที่ได้จากการเลื่อน (shift) $x(n)$ ไปทางซ้ายจำนวน l จุด ทำให้ $y(n)$ เร็วกว่า $x(n)$ อยู่ l จุด กล่าวคือจุดแรกของ y คือ $x(l)$ หรือ $y(0) = x(l)$ แล้วเราจะได้

$$Y(m) = e^{j2\pi \cdot l \cdot \frac{m}{N}} X(m) \tag{17}$$

2.6 ขนาดของ DFT (DFT Magnitudes)

ถ้า $x(n)$ เป็นลำดับของเลขจำนวนจริงที่ได้จากการชักตัวอย่าง $x(t)$ ซึ่งมีองค์ประกอบสัญญาณไซน์ความถี่ $f_k = f_r = \frac{rf_s}{N}$ ให้

$$x_k(t) = A_k \cos(2\pi f_k t + \phi_k) = A_r \cos(2\pi f_r t + \phi_r)$$
$$x_k(n) = A_r \cos(2\pi \frac{rnt_s f_s}{N} + \phi_r) = A_r \cos(2\pi \cdot n \cdot \frac{r}{N} + \phi_r)$$

โดย $x_k(n), 0 \leq n < N$ เป็นลำดับที่ได้จากการชักตัวอย่าง $x_k(t)$ ด้วยความถี่ f_s โดยเลือก N ที่ทำให้การชักตัวอย่างครอบคลุม $x_k(t)$ เป็นจำนวน q คาบโดย q เป็นจำนวนเต็มบวก แล้วเราจะได้ความสัมพันธ์ระหว่างขนาดของ DFT ที่จุด r หรือ $|X(r)|$ และแอมปลิจูดของ $x_k(t)$ ดังนี้

$$X_{mag}(r) = |X(r)| = \frac{N}{2} A_r \tag{18}$$

ถ้า $x(n)$ เป็นลำดับของเลขเชิงซ้อน โดยเงื่อนไขอย่างอื่นยังเหมือนเดิม เราจะได้

$$X_{mag}(r) = |X(r)| = N A_r \tag{19}$$

2.6.1 พิสูจน์

แสดงให้เห็นว่าสมการที่ (18) เป็นจริงดังนี้ ให้

$$x(n) \quad = \quad A_1 x_1(n) + A_2 x_2(n) + \cdots A_k x_k(n) + \cdots + A_K x_K(n) = \sum_{k=1}^{K} A_k x_k$$

โดย x_k เป็นสัญญาณไซน์ความถี่ f_k ดังนั้น $x(n)$ มีองค์ประกอบสัญญาณไซน์ความถี่ f_k ที่มีขนาดเท่ากับ A_k และมีเฟสเท่ากับ ϕ_k กล่าวคือ

$$\begin{aligned} x_k(n) &= A_k \cos(2\pi f_k n t_s + \phi_k) = A_k \cos(2\pi \cdot n \cdot \frac{f_k}{f_s} + \phi_k) \\ x(n) &= \sum_{k=1}^{K} A_k \cos(2\pi \cdot n \cdot \frac{f_k}{f_s} + \phi_k) \end{aligned}$$

ถ้าการชักตัวอย่างด้วยความถี่ f_s ทำให้ f_k มีค่าเท่ากับความถี่วิเคราะห์ $f_p = \frac{pf_s}{N}$ สำหรับทุกค่าของ k กล่าวคือ

$$\begin{aligned} f_k &= f_p = \frac{pf_s}{N}, \text{ เมื่อ } 0 \leq p < N \\ x(n) &= \sum_{k=1}^{K} A_k \cos(2\pi \cdot n \cdot \frac{pf_s}{Nf_s} + \phi_k) \\ &= \sum_{k=1}^{K} A_k \cos(2\pi \cdot n \cdot \frac{p}{N} + \phi_k) \end{aligned}$$

หรือ

$$x_k(n) \quad = \quad \cos(2\pi \cdot n \cdot \frac{p}{N} + \phi_k) = \mathrm{Re}\{e^{j\phi_k} e^{j2\pi \frac{p}{N}}\}$$

ถ้าเราให้

$$\begin{aligned} z_k(n) &= e^{j\phi_k} e^{j2\pi\frac{p}{N}} \\ &= \cos(2\pi \cdot n \cdot \frac{p}{N} + \phi_k) + j\sin(2\pi \cdot n \cdot \frac{p}{N} + \phi_k) \\ &= x_k(n) + jy_k(n) \end{aligned}$$

โดย

$$\begin{aligned} y_k(n) &= \text{Im}\{z_k(n)\} = \sin(2\pi \cdot n \cdot \frac{p}{N} + \phi_k) \\ &= -\cos(2\pi \cdot n \cdot \frac{p}{N} + \phi_k + \frac{\pi}{2}) \\ &= -x(n+l) \end{aligned}$$

โดยที่จุดชักตัวอย่าง l คือจุดที่ทำให้

$$2\pi \cdot l \cdot \frac{m_r}{N} = \frac{\pi}{2}$$

ซึ่งจะได้

$$\begin{aligned} l &= \frac{N}{4r} \\ y_k(n) &= -x_k(n + \frac{N}{4r}) \end{aligned}$$

เมื่อ $f_r = \frac{rf_s}{N}$ เป็นความถี่หนึ่งในองค์ประกอบสัญญาณไซน์ของ $x(n)$ หรือ

$$f_r = \frac{rf_s}{N}, \quad \text{เมื่อ } 0 < r < N$$

แล้ว

$$\begin{aligned} z(n) &= \sum_{k=1}^{K} A_k e^{j\phi_k} e^{j2\pi\frac{p}{N}} = x(n) + jy(n), \qquad \text{โดย} \\ x(n) &= \sum_{k=1}^{K} A_k x_k(n) = \sum_{k=1}^{K} A_k \cos(2\pi \cdot n \cdot \frac{p}{N} + \phi_k) \\ y(n) &= \sum_{k=1}^{K} A_k y_k(n) = \sum_{k=1}^{K} A_k \sin(2\pi \cdot n \cdot \frac{p}{N} + \phi_k) \\ &= -x(n+l) = -x(n + \frac{N}{4r}) \\ z(n) &= x(n) - jx(n + \frac{N}{4r}) \end{aligned}$$

พิจารณาหา DFT ของ $x(n)$ ที่ $m = r$ (หา $X(r)$) โดยคำนวณจาก $Z(r)$ ดังนี้

$$\begin{aligned}
Z(r) &= \sum_{n=0}^{N-1} z(n)e^{-j2\pi nr/N} = \sum_{n=0}^{N-1}(x(n) - jx(n + \frac{N}{4r}))e^{-j2\pi nr/N} \\
&= X(r) - je^{j2\pi\frac{N}{4r}\frac{r}{N}}X(r) \\
&= (1 + e^{-j\frac{\pi}{2}}e^{j\frac{\pi}{2}})X(r) = (1+1)X(r) \\
&= 2X(r)
\end{aligned}$$

หรือ

$$\begin{aligned}
X(r) &= \frac{1}{2}Z(r) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{N-1}\{\sum_{k=1}^{K} A_k e^{j\phi_k} e^{j2\pi np/N}\}e^{-j2\pi nr/N} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{k=1}^{K} A_k e^{j\phi_k} e^{j2\pi np/N} e^{-j2\pi nr/N} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{K} A_k e^{j\phi_k} \sum_{n=0}^{N-1} e^{j2\pi n(p-r)/N} \\
&= \frac{1}{2}A_r e^{j\phi_r}\{\sum_{n=0}^{N-1} 1\} \\
&= \frac{N}{2}A_r e^{j\phi_r}
\end{aligned}$$

ทั้งนี้เพราะ

$$\sum_{n=0}^{N-1} e^{j2\pi n(p-r)/N} = \begin{cases} \sum_{n=0}^{N-1} e^{j2\pi n(m)/N} = 0, & \text{เมื่อ } p \neq r \\ \sum_{n=0}^{N-1} e^{j2\pi n(0)/N} = NA_r e^{j\phi_r}, & \text{เมื่อ } p = r \end{cases}$$

จะเห็นว่า

$$\begin{aligned}
X_{mag}(r) &= |X(r)| = \frac{N}{2}A_r \\
X_\phi(r) &= \phi_r
\end{aligned}$$

นั่นคือ $X(r)$ คือองค์ประกอบสัญญาณไซน์ความถี่ $f_r = \frac{rf_s}{N}$ ของ $x(n)$ ซึ่งเป็นไปตามสมการมี่ (18)

2.6.2 การสเกลขนาดของ DFT (DFT Scale Factors)

ขนาด DFT บอกถึงขนาดขององค์ประกอบสัญญาณไซน์ความถี่วิเคราะห์ $\frac{mf_s}{N}$ แต่ไม่เท่ากับแอมปลิจูดของสัญญาณไซน์ดังกล่าว ดังนั้นจึงอาจมีการปรับขนาดหรือสเกลขนาดของสัญญาณ DFT หลายวิธีเพื่อจุดประสงค์ที่แตกต่างกันไป

สำหรับการสเกลแบบที่ 1 คือตามสมการที่ (1)หรือกล่าวอีกนัยหนึ่งว่าเป็น DFT ที่มีแฟคเตอร์ของการสเกลเท่ากับ 1 (หรือไม่มีการสเกล) ในกรณีนี้สเกลแฟคเตอร์ของการอินเวอร์ส DFT จะเป็น $\frac{1}{N}$ ตามสมการ 26

การสเกลแบบที่ 2 ตามสมการที่ (20) มีสเกลแฟคเตอร์เท่ากับ $\frac{1}{N}$ เพื่อให้ขนาดของ DFT ที่ได้เท่ากับครึ่งหนึ่งของแอมปลิจูดของสัญญาณไซน์ที่ความถี่วิเคราะห์ ในกรณีนี้สเกลแฟคเตอร์ของการอินเวอร์สจะเป็น 1

$$X(m) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j2\pi nm/N} \quad (20)$$

$$x(n) = \sum_{m=0}^{N-1} X(m)e^{j2\pi nm/N} \quad (21)$$

จะเห็นว่า DFT ที่ได้นั้นบ่งบอกถึงแอมปลิจูด แต่เราต้องแลกด้วยการที่ต้องทำการคำนวณการหารด้วย N เพิ่มเติม

การสเกลแบบที่ 3 เป็นการแบ่งสเกลแฟคเตอร์ไปทั้งทางด้าน DFT และอินเวอร์ส DFT เท่า ๆ กันคือ $\frac{1}{\sqrt{N}}$ ดังสมการที่ (22) และสมการที่ (23) สำหรับ DFT และอินเวอร์ส DFT ตามลำดับ

$$X(m) = \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j2\pi nm/N} \quad (22)$$

$$x(n) = \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{m=0}^{N-1} X(m)e^{j2\pi nm/N} \quad (23)$$

2.7 แกนความถี่ของ DFT (DFT Frequency Axis)

ผลการคำนวณ DFT ที่ตำแหน่ง m คือ $X(m)$, $m = 0, 1, \ldots, N-1$ ซึ่งสามารถตีความหมายเป็นองค์ประกอบสัญญาณไซน์ที่ความถี่วิเคราะห์ $f_m = \frac{mf_s}{N}$ ของ $x(n)$ (สมการที่ (3)) ดังนั้นในการตีความหมายนี้ เราสนใจ $X(f_m)$ ซึ่งก็ไม่มีอะไรมากเพราะ $X(f_m) = X(m)$ นั่นเอง ดังนั้นเมื่อเราต้องการตีความหมายของ DFT เพื่อประมาณสเปคตรัมความถี่ (frequency spectrum) หรือสเปคตรัมกำลัง (power spectrum) ของ $x(t)$ แล้วเราจะตีความหมายแกน x ของการพล็อต $X(m)$ เป็นความถี่ โดยจุด $X(m)$ จะถูกพล็อตทีตำแหน่งความถี่วิเคราะห์ f_m ซึ่งจะขึ้นอยู่กับตัวแปร 3 ตัวคือ

- ความถี่การชักตัวอย่าง (sampling frequency) f_s
- จำนวนจุดที่นำมาคำนวณ N ซึ่งจะสัมพันธ์กับ f_s ถ้าเราคงที่ระยะเวลาของสัญญาณไว้ แต่ถ้าเราคงที่ f_s แต่เปลี่ยนระยะเวลาแล้ว N จะมีผลกับความถี่วิเคราะห์
- ตัวชี้ (index) m ซึ่งเป็นตัวบอกตำแหน่งความถี่บนแกนความถี่ จะเห็นว่าความถี่วิเคราะห์ที่จุด m ใด ๆ เป็นฮาร์มอนิกที่ m ของความถี่ $\frac{f_s}{N}$ ซึ่งเป็นความถี่วิเคราะห์เมื่อ $m = 1$ หรือเป็นความถี่ฐาน (fundamental frequency) ของความถี่วิเคราะห์ นอกจากนี้แล้วความถี่ $\frac{f_s}{N}$ ยังเป็นระยะห่างระหว่างความถี่ของ DFT (DFT's frequency spacing) หรือความละเอียดทางความถี่ของ DFT (DFT's frequency resolution)

ถึงจุดนี้เราจะสรุปประเด็นสำคัญขงอสิ่งที่เราได้เรียนรู้เกี่ยวกับ DFT ก่อนดังนี้

- แต่ละจุด ($X(m)$) ของการคำนวณ DFT ขนาด N จุด (N-point DFT) คือผลรวมของการคูณแบบจุดต่อจุดระหว่าง $x(n)$ กับ $y(n) = e^{-j2\pi nm/N}$ สำหรับทุกค่า $n = 0, 1, 2, \ldots, N-1$

- $y(n) = e^{-j2\pi nm/N} = \cos(2\pi nm/N) - j\sin(2\pi nm/N)$ เป็นจุดชักตัวอย่างตำแหน่งที่ n ของฟังก์ชันเชิงซ้อน $e^{-j2\pi f_m t}$ ที่ใช้แทนสัญญาณไซน์ความถี่ $f_m = \frac{mf_s}{N}$
- การที่ $y(n)$ เป็นลำดับที่ได้จากการชักตัวอย่างฟังก์ชัน $e^{-j2\pi f_m t}$ ทำให้ $X(m)$ เป็นองค์ประกอบสัญญาณไซน์ที่ความถี่ f_m ของ $x(t)$
- เมื่อลำดับ $x(n)$ เป็นเลขจำนวนจริงทั้งหมด ผลจาก DFT ขนาด N จุดจะเป็นอิสระ (independent) เพียง $N/2$ จุด กล่าวคือ $X(N-m) = X^*(m)$ เมื่อ $X^*(m)$ เป็น complex conjugate ของ $X(m)$ หรือ $X(N-m)$ และ $X(m)$ ขึ้นต่อกัน (dependent) สำหรับทุกค่าของ $m = 0, 1, 2, \ldots, N/2 - 1$
- DFT มีคุณสมบัติความเป็นเชิงเส้น
- DFT มีคุณสมบัติการเลื่อน (shifting) เช่นเดียวกับการแปลงฟูเรียร์แบบต่อเนื่อง (continuous Fourier transform) (ดูตามสมการที่ (17)
- ขนาดของ DFT แปรตรงกับ N และแอมปลิจูดขององค์ประกอบสัญญาณไซน์ที่ความถี่ f_m (ดูตามสมการที่ (18) และสมการที่ (19
- ความละเอียดทางความถี่ของ DFT (DFT's frquency resolution) หรือระยะห่างของความถี่ของ DFT (DFT's frequency spacing) คือ f_s/N

2.8 อินเวอร์ส DFT (Inverse DFT)

ผลของการคำนวณ DFT คือองค์ประกอบสัญญาณไซน์ความถี่ f_m ของ $x(n)$ ฟังก์ชันที่เป็นตัวแทนของสัญญาณไซน์ความถี่ f_m คือ

$$u_m(t) = e^{j2\pi f_m t} = \cos(2\pi f_m t) + j\sin(2\pi f_m t) \tag{24}$$

เมื่อเรานำชักตัวอย่าง $u_m(t)$ ด้วยความถี่ f_s ทั้งหมด N จุดเราจะได้

$$u_m(n) = e^{j2\pi f_m (n/f_s)} = e^{j2\pi nm/N} = \cos(2\pi nm/N) + j\sin(2\pi nm/N) \tag{25}$$

องค์ประกอบสัญญาณไซน์ที่ความถี่ f_m ของ $x(n)$ คือ $X(m)u_m(t)$ ซึ่งเมื่อชักตัวอย่างด้วยความถี่ f_s แล้วจะได้ $X(m)e^{j2\pi nm/N}$ เมื่อเรานำองค์ประกอบไซน์ที่ความถี่ f_m ที่ทุกค่า m เมื่อรวมกันเราจะได้ $x(n)$ ดังนี้

$$x(n) = \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} X(m)e^{j2\pi nm/N} \tag{26}$$

หรือเขียนในรูปแบบสี่เหลี่ยมเป็น

$$x(n) = \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} X(m)(\cos(2\pi nm/N) + j\sin(2\pi nm/N)) \tag{27}$$

สมการที่ (26) และสมการที่ (27) เป็นนิยามของอินเวอร์ส DFT ของ $X(m)$ ในรูปแบบโพลาร์และสี่เหลี่ยมตามลำดับ โดย $X(m)$ เป็น DFT ที่ได้จากสมการที่ (1) หรือสมการที่ (2) หรือ DFT แบบไม่มีการสเกล ดังนั้นเราจำเป็นต้องคูณแฟคเตอร์การสเกล $\frac{1}{N}$ ในสมการที่ (26) และสมการที่ (27) เพื่อให้ได้ $x(n)$ ตามขนาดเดิม

2.9 การรั่วของ DFT (DFT Leakage)

ในการทำความเข้าใจ DFT ที่ผ่านมาเราสมมุติให้สัญญาณ $x(t)$ นั้นประกอบขึ้นจากผลบวกของสัญญาณไซน์ความถี่ f_k โดยที่ f_k เท่ากับความถี่วิเคราะห์ค่าหนึ่ง หรือ $f_k = \frac{rf_s}{N}$ ซึ่งจะเป็นจริงก็ต่อเมื่อเรานำเอาจุด $x(n)$ จากการชักตัวอย่าง $x(t)$ เป็นระยะเวลา q คาบโดย q เป็นจำนวนเต็มบวก ในกรณีนี้พลังงานทั้งหมดของ $x(t)$ ที่ความถี่ f_k จะไปลงที่ความถี่วิเคราะห์ $f_q = \frac{qf_s}{N}$ ทั้งหมด แต่ถ้าจำนวนจุด N และความถี่การชักตัวอย่าง f_s ไม่ทำให้เกิดกรณีที่ $f_k = \frac{qf_s}{N}$ แล้วพลังงานของ $x(t)$ ที่ความถี่ f_k จะกระจายไปทั่วทุกความถี่ เรียกปรากฏการณ์นี้ว่าการรั่วของ DFT (DFT Leakage)

เราจะใช้ตัวอย่างในการทำความเข้าใจปรากฏการณ์นี้ สมมุติให้ $x(t)$ มีองค์ประกอบไซน์ความถี่ f_k อยู่ ดังนั้นเราจะพิจารณาเฉพาะองค์ประกอบนี้ของ $x(t)$ กล่าวคือเราพิจารณาเฉพาะ $x(t)$ ที่เป็นสัญญาณไซน์ความถี่เดียว โดยกรณีของ $x(t)$ ใด ๆ ก็เกิดจากการรวมกันของสัญญาณไซน์ที่ความถี่ f_k ต่าง ๆ เท่านั้น

พิจารณา $x(t)$ ที่ความถี่ f_k นั่นคือ

$$x(t) = \sin(2\pi f_k t) \tag{28}$$

เมื่อชักตัวอย่างด้วยความถี่ f_s จะได้

$$x(n) = \sin(2\pi f_k (n/f_s)) = \sin(2\pi n \frac{f_k}{f_s}) \tag{29}$$

อันดับแรกเราพิจารณากรณีที่ไม่มีการรั่วโดยเลือก N และ f_s ให้ $x(n), n = 0, 1, 2, \ldots, N-1$ มีความยาวเป็น q คาบซึ่งจะทำให้ $f_k = \frac{rf_s}{N}$ ยกตัวอย่างถ้าให้ $q = 3$ เราจะได้เวลาของการชักตัวอย่างทั้งหมดเท่ากับ $\frac{3}{f_k}$ ซึ่งมีจำนวนจุดของการชักตัวอย่างเท่ากับ N จุดระยะห่างระหว่างจุดคือ $t_s = \frac{1}{f_s}$ ดังนั้นเราจะได้

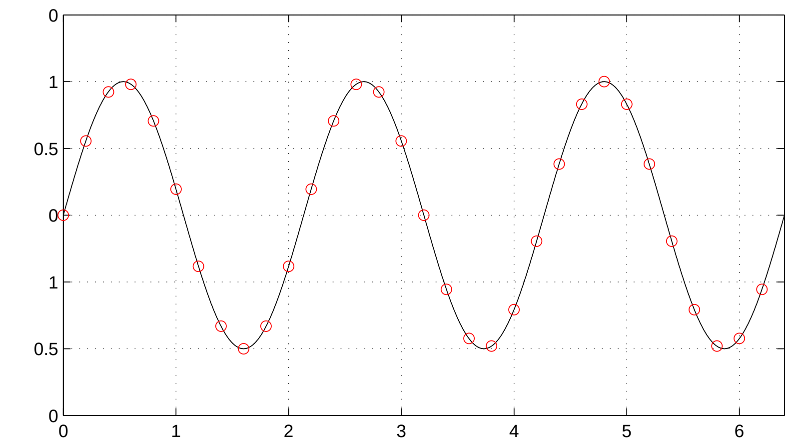
$$\begin{aligned} \frac{N}{f_s} &= \frac{3}{f_k} \\ f_k &= \frac{3f_s}{N} \end{aligned}$$

ซึ่งจะเห็นว่า f_k มีค่าเท่ากับความถี่วิเคราะห์ที่ $m = 3$ ทั้งนั้นพลังงานทั้งหมดของ $x(t)$ จะไปลงที่ความถี่ $\frac{3f_s}{N}$ เพียงความถี่เดียวจึงไม่มีการรั่ว ดังแสดงในรูปที่ 5

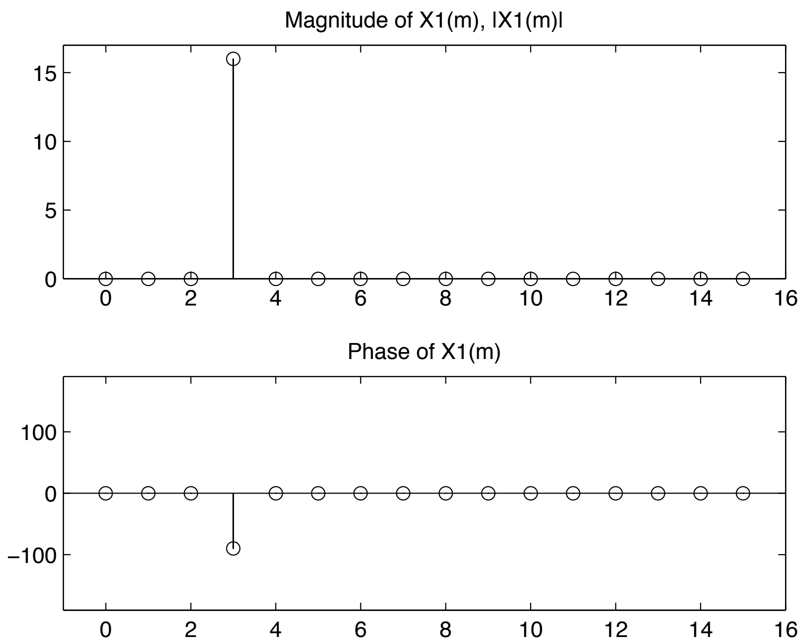
แต่ถ้าจำนวนจุด N ภายใต้ความถี่การชักตัวอย่าง f_s จากระยะเวลาที่ไม่ครบรอบของแต่ละคาบของ $x(t)$ การรั่วของ DFT จะเกิดขึ้นดังนี้ สมมุติให้ระยะเวลาในการชักตัวอย่างทั้งหมดคือ 3.4 คาบของความถี่ f_k หรือระยะเวลาที่ได้อินพุท N จุดจากการชักตัวอย่างด้วยความถี่ f_s คือ $\frac{3.4}{f_k}$ นั่นคือ

$$\begin{aligned} \frac{N}{f_s} &= \frac{3.4}{f_k} \\ f_k &= \frac{3.4f_s}{N} \end{aligned}$$

ในกรณีเช่นนี้พลังงานของ $x(t)$ จะกระจายลงไปยังความถี่วิเคราะห์ที่อยู่รอบ ๆ ความถี่ f_k โดยความถี่ที่อยู่ใกล้สุดจะได้พลังงานไปมากที่สุด และลดหลั่นลงไปตามระยะห่างจาก f_k อย่างเช่นในกรณีนี้ พลังงานกระจายลงไปที่ความถี่

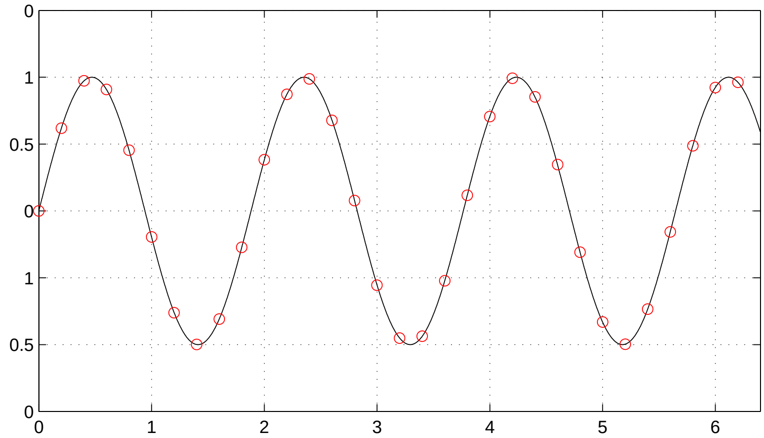


(a) $x = \sin(2\pi f_k t)$ $x(n)$ f_s 3

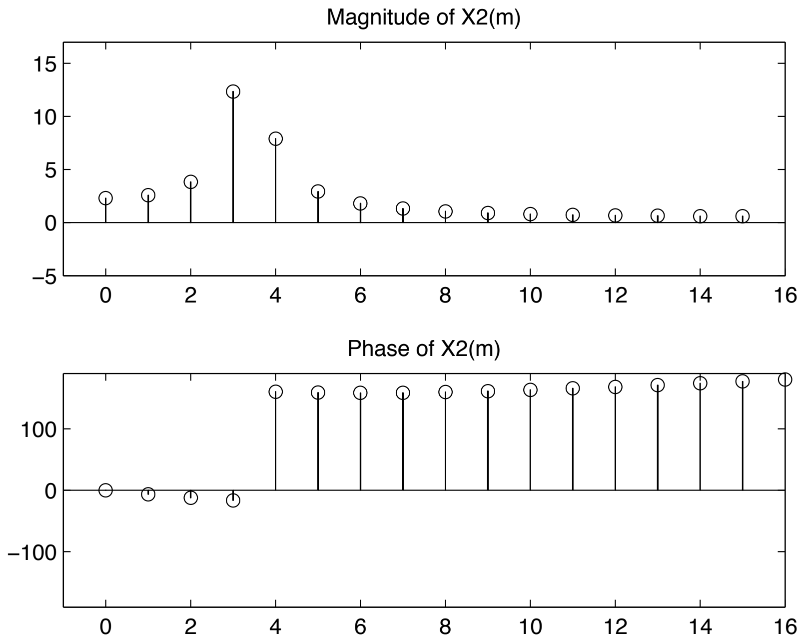


(b) DFT x (a)

รูปที่ 5: DFT ของอินพุทไซน์ความถี่ f_k ในกรณีที่ $f_k = 3f_s/N$ จะไม่มีการรั่ว



(a) $x = \sin(2\pi f_k t)$ $x(n)$ f_s 3.4



(b) DFT x (a)

รูปที่ 6: DFT ของอินพุทไซน์ความถี่ f_k ในกรณีที่ $f_k = 3.4f_s/N$ จะมีการรั่ว

$\frac{3f_s}{N}$ มากที่สุด รองลงมาคือความถี่ $\frac{4f_s}{N}$ ตามด้วยความถี่ $\frac{2f_s}{N}$ และความถี่ $\frac{5f_s}{N}$ ตามลำดับ รูปที่ 6 แสดงการกระจายของพลังงานของ $x(t)$ ที่ความถี่ f_k ไปยังความถี่วิเคราะห์รอบความถี่ f_k

ปัญหาการรั่วของ DFT ไม่สามารถขจัดได้ เพราะสัญญาณ $x(t)$ ใด ๆ อาจมีองค์ประกอบไซน์หลายความถี่ที่ต่อเนื่อง หรืออยู่ใกล้กันมาก จนต้องมีบางความถี่ที่จะเกิดการรั่ว แต่เรามีวิธีที่จะทำให้ผลของมันเบาบาง จนไม่มีผลต่อการวิเคราะห์เลยก็ได้

3 Fast Fourier Transform (FFT)

ในหัวข้อ 2 เราได้ตอบคำถามข้อที่หนึ่งที่ตั้งไว้คือ จะใช้ DFT ทำประโยชน์อะไรบ้าง โดยเฉพาะจะใช้ DFT ประมาณสเปคตรัมความถี่ หรือสเปคตรัมกำลังของสัญญาณอินพุท $x(t)$ ได้อย่างไร ในหัวข้อนี้เราจะตอบคำถามที่สองคือจะคำนวณ DFT อย่างไรให้เร็ว ทั้งนี้เพราะประโยชน์ของ DFT นั้นจะเกิดขึ้นจริงได้ เราต้องใช้ DFT ที่มีจำนวนจุด N สูงมากพอ แต่ปัญหาของ DFT คือ การคำนวณตามนิยามของ DFT ในสมการที่ (1) นั้นแปรตาม N^2 ดังนั้นถ้าไม่มีวิธีการคำนวณ DFT ให้เร็วพอที่จะคำนวณ DFT ที่ N มีค่าสูง ๆ ได้ภายในเวลาอันสมควรแล้ว DFT ก็ไม่มีประโยชน์ แน่นอนว่าเรามีวิธีการคำนวณ DFT ให้เร็วซึ่งวิธีนั้นก็คือใช้อัลกอริธึมชื่อ FFT (Fast Fourier Transform) ในการคำนวณ ดังนั้นในหัวข้อนี้เราจะทำความเข้าใจว่าอัลกอริธึม FFT เป็นอย่างไร ทำไมจึงคำนวณ DFT ได้เร็ว และที่คำนวณได้เร็วนั้นเร็วขนาดไหน

3.1 Cooley-Tukey FFT

FFT ได้รับการคิดค้นโดยนักคณิตศาสตร์ 2 ท่านชื่อ Cooley และ Tukey โดยทั้งสองท่านได้นำเสนอการคิดค้นดังกล่าวต่อสาธารณในปี ค.ศ. 1965 หรือปี พ.ศ. 2508 เราเรียกวิธีการคำนวณตามหลักการของ Cooley และ Tukey ว่า Cooley-Tukey FFT หรือ CT-FFT สิ่งที่ทั้งสองท่านนำเสนอมีดังนี้

ให้ $x(n)$ เป็นลำดับเลขเชิงซ้อน หรือลำดับเลขจำนวนจริง จำนวน $N = 2^k$ จุด โดย $n = 0, 1, 2, \ldots N-1$ แล้ว $X(m)$ คือ DFT ของ $x(n)$ ที่จุด m โดย $m = 0, 1, 2, \ldots, N-1$ จะได้

$$X(m) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j2\pi nm/N} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_N^{mn} \tag{30}$$

เมื่อ

$$W_N = e^{-j2\pi 1/N} \tag{31}$$

คือรากที่ N ของ 1 ตัวหลัก (a primitive N^{th}-root of unity)

ถ้าเราแบ่งอินพุท $x(n)$ เป็นสองส่วน โดยส่วนที่หนึ่งเป็นส่วนที่ตัวชี้เป็นเลขคู่ และอีกส่วนหนึ่งเป็นเลขคู่ แล้วเราจะเขียน $X(m)$ ใหม่ได้ดังนี้

$$\begin{aligned} X(m) &= \sum_{n=0}^{N/2-1} x(2n)W_N^{2mn} + \sum_{n=0}^{N/2-1} x(2n+1)W_N^{(2n+1)m} \\ &= \sum_{n=0}^{N/2-1} x(2n)(W_N^2)^{mn} + \sum_{n=0}^{N/2-1} x(2n+1)W_N^m(W_N^2)^{mn} \end{aligned} \tag{32}$$

และเนื่องจาก

$$W_N^2 = e^{-j2\pi 2/N} = e^{-j2\pi\frac{1}{N/2}} = W_{N/2} \tag{33}$$

ซึ่งคือรากที่ $N/2$ ของ 1 ตัวหลัก (a primitive $(N/2)^{th}$-root of unity) เราจะได้

$$X(m) = \sum_{n=0}^{N/2-1} x(2n)W_{N/2}^{mn} + W_N^m \sum_{n=0}^{N/2-1} x(2n+1)W_{N/2}^{mn} \tag{34}$$

จะเห็นว่า $\sum_{n=0}^{N/2-1} x(2n)W_{N/2}^{mn}$ และ $\sum_{n=0}^{N/2-1} x(2n+1)W_{N/2}^{mn}$ คือการคำนวน (N/2)-point DFT ดังนั้นวิธีการนี้ได้แบ่งการคำนวณ N-point DFT ออกเป็นการคำนวณ (N/2)-point DFT จำนวน 2 ส่วน โดยนำเอา W_N^m ซึ่งเป็นเลขเชิงซ้อนตัวหนึ่งเรียกว่า twiddle factor ไปคูณกับผลที่ได้จากส่วนที่สอง แล้วนำไปบวกกับส่วนที่ 1 สังเกตว่าในขั้นตอนแรกนี้เป็นการแบ่งตัวชี้ n ออกเป็นสองส่วน

ทำนองเดียวกันเราสามารถแบ่งตัวชี้ m ออกเป็น 2 ส่วนเช่นเดียวกัน โดยส่วนแรกคือ $m = 0, 1, 2, \ldots, N/2-1$ ซึ่งใช้การคำนวณตามสมการที่ (34) และส่วนที่สองคือ $m = N/2, \ldots, N-1$ ซึ่งเท่ากับตัวชี้ส่วนนี้จะเป็น $m + N/2$ เมื่อ m เป็นตัวชี้ในส่วนแรก พิจารณา $X(m + N/2)$ โดยแทน m ด้วย $m + N/2$ ในสมการที่ (34) ดังนี้

$$\begin{aligned}
X(m+N/2) &= \sum_{n=0}^{N/2-1} x(2n)W_{N/2}^{(m+N/2)n} + W_N^{m+N/2}\sum_{n=0}^{N/2-1} x(2n+1)W_{N/2}^{(m+N/2)n} \\
&= \sum_{n=0}^{N/2-1} x(2n)W_{N/2}^{mn}(W_{N/2}^{N/2})^n + W_N^m W_N^{N/2}\sum_{n=0}^{N/2-1} x(2n+1)W_{N/2}^{mn}(W_{N/2}^{N/2})^n
\end{aligned}$$

และเนื่องจาก

$$W_{N/2}^{N/2} = e^{-j2\pi} = 1 \tag{35}$$

และ

$$W_N^{N/2} = e^{-j2\pi(N/2)/N} = e^{-j\pi} = -1 \tag{36}$$

เราจะได้

$$X(m+N/2) = \sum_{n=0}^{N/2-1} x(2n)W_{N/2}^{mn} - W_N^m \sum_{n=0}^{N/2-1} x(2n+1)W_{N/2}^{mn} \tag{37}$$

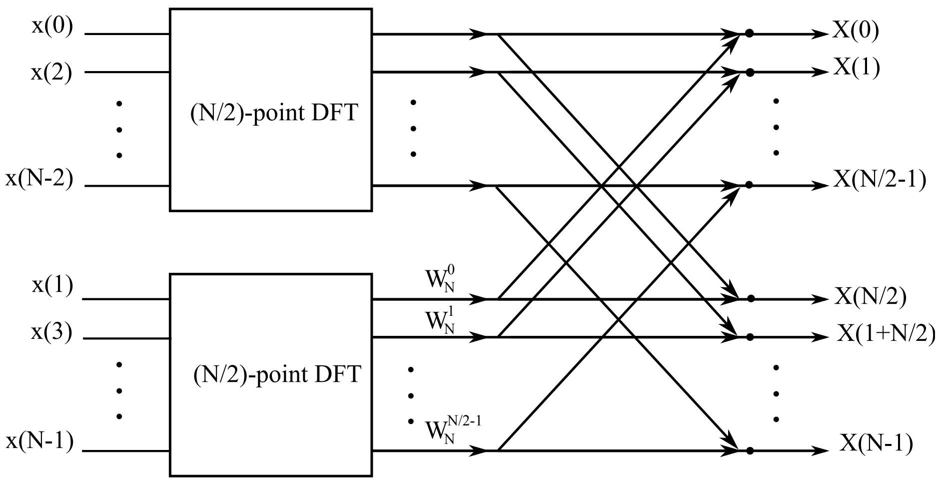
จะเห็นว่าในการคำนวณ $X(m + N/2)$ นั้น ต่างกับการคำนวณ $X(m)$ เพียงการนำส่วนหลังไปลบออกจากส่วนหน้า แทนการไปบวก ด้วยวิธีการนี้เราสามารถคำนวณ DFT โดย

1. ให้ $m = 0$
2. คำนวณ (N/2)-point DFT ที่จุด m ของอินพุท $x(n)$ ส่วนที่ n เป็นเลขคู่ ให้ผลลัพธ์คือ $X_0(m)$
3. คำนวณ (N/2)-point DFT ที่จุด m ของอินพุท $x(n)$ ส่วนที่ n เป็นเลขคี่ ให้ผลลัพธ์คือ $X_1(m)$
4. คูณ $X_1(m)$ กับ twiddle factor W_N^m ได้ผลลัพธ์ $W_N^m X_1(m)$
5. คำนวณ $X(m)$ และ $X(m + N/2)$ ดังนี้

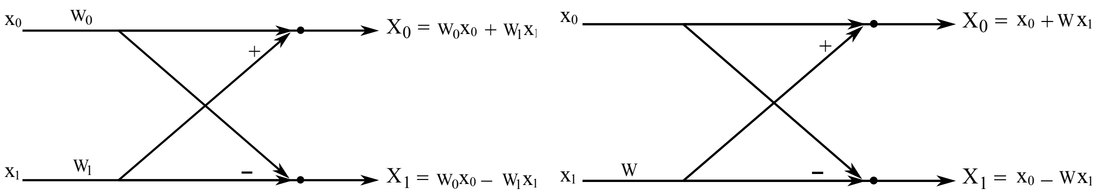
$$X(m) = X_0(m) + W_N^m X_1(m) \tag{38}$$
$$X(m+N/2) = X_0(m) - W_N^m X_1(m) \tag{39}$$

6. $m = m + 1$

7. ถ้า $m = N/2$ จบ ถ้าไม่ใช่ให้กลับไปขั้นที่ 2



รูปที่ 7: ไดอะแกรมการไหล (dataflow diagram) ของการคำนวณ DFT ตามสมการที่ (34) และ (37)



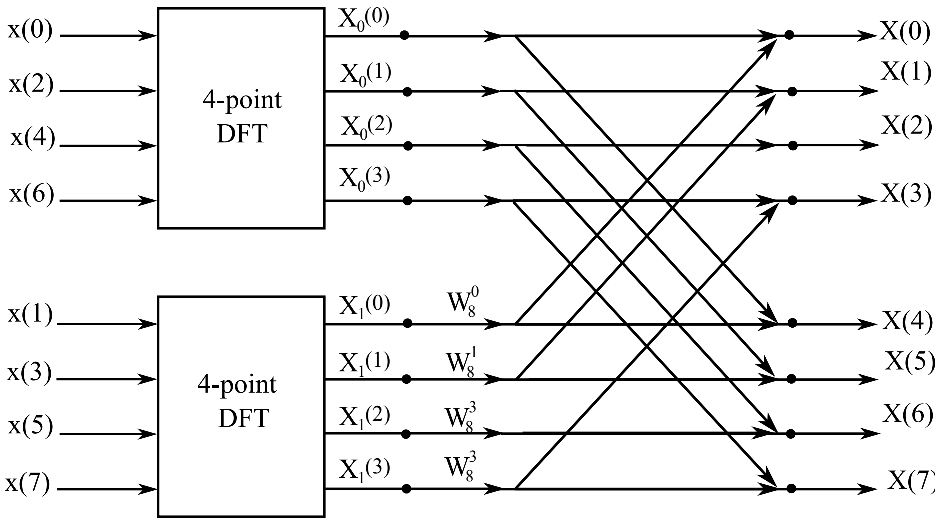
(a) Butterfly operation twiddle factor (b) Butterfly operation twiddle factor

รูปที่ 8: Butterfly operations (a) แบบ twiddle factor ด้านเดียว และ (b) แบบ twiddle factor สองด้าน

รูปที่ 7 แสดงไดอะแกรมการไหล (dataflow diagram) ของการคำนวณ N-point DFT ตามอัลกอริธึมข้างบนหรือตามสมการสมการที่ (34) และ (37) เราเรียกการคำนวณในสมการที่ (38) และ (39) ว่า butterfly operation ซึ่งสามารถแสดงได้ด้วยไดอะแกรมการไหล (dataflow diagram) ได้ดังรูปที่ 8

Butterfly operations ในรูปทั่วไปจะมีการคูณด้วย twiddle factor ทั้งด้านอินพุท $x0$ และอินพุท $x1$ ดังแสดงในรูปที่ 8(a) แต่ในการคำนวณ FFT ของ Cooley-Tukey นั้น twiddle factor ที่คูณอยู่กับ $x0$ คือ $W0$ ในรูปจะมีค่าเป็น 1 ซึ่งจะได้ butterfly operation ดังแสดงในรูปที่ 8(b)

หัวใจสำคัญของการคำนวณตามอัลกอรึมข้างบนก็คือ เราสามารถใช้วิธีการนี้กับการคำนวณ (N/2)-point DFT ซึ่งแบ่งเป็นการคำนวณ (N/4)-point DFT สองส่วน และเนื่องจาก มี (N/2)-point DFT สองส่วน เราจะได้การคำนวณ (N/4)-point DFT ทั้งหมด 4 ส่วน และถ้า $N/4 \neq 2$ เราสามารถแบ่งต่อไปจนกว่า จะได้การคำนวณแต่ละส่วนเป็น 2-point DFT และ butterfly operations นอกจากนี้ 2-point DFT เองก็คำนวณด้วย butterfly operations ทำให้ผลจากการแบ่งจนถึง 2-point DFT เราจะได้การคำนวณ DFT จากการคำนวณ butterfly operations จำนวน $\frac{N/2}{\log_{2}}N$ ครั้ง เข้าใจว่าคงนึกภาพดังกล่าวนี้ยังไม่ออก เราจะใช้ตัวอย่างกรณีที่ $N = 8 = 2^3$ เพื่อการทำความเข้าใจ



รูปที่ 9: ไดอะแกรมการไหล (dataflow diagram) ของการคำนวณ 8-point DFT หลังทำการแบ่งเป็น 4-point DFT สองส่วน

3.1.1 ตัวอย่าง: FFT ขนาด 8 จุด (8-point FFT)

การคำนวณ FFT ขนาด 8 จุดก็คือ การคำนวณ 8-point DFT ด้วยอัลกอริธึม FFT ในการแบ่งครั้งแรกตามสมการที่ (34) และ (37) เราจะได้

$$X(m) = \sum_{n=0}^{3} x(2n)W_4^{mn} + W_8^m \sum_{n=0}^{3} x(2n+1)W_4^{mn} = X_0(m) + W_8^m X_1(m) \tag{40}$$

$$X(m+4) = \sum_{n=0}^{3} x(2n)W_4^{mn} - W_8^m \sum_{n=0}^{3} x(2n+1)W_4^{mn} = X_0(m) - W_8^m X_1(m) \tag{41}$$

โดย

- $X_0(m)$ เป็น DFT ขนาด 4 จุดของ $x(0), x(2), x(4), x(6)$ และ
- $X_1(m)$ เป็น DFT ขนาด 4 จุดของ $x(1), x(3), x(5), x(7)$

รูปที่ 9 แสดงไดอะแกรมการไหลหลังการแบ่ง 8-point DFT เป็น 4-point DFT 2 ส่วน และ butterfly operations เพื่อรวมทั้งสองส่วนเข้าด้วยกัน

สำหรับ $X_0(m)$ เราจะหาได้จากการแบ่ง 4-point DFT เป็น 2-point DFT สองส่วนดังนี้

$$\begin{aligned} X_0(m) &= \sum_{n=0}^{1} x(4n)W_2^{mn} + W_4^m \sum_{n=0}^{1} x(4n+2)W_2^{mn} \\ &= X_{0,0}(m) + W_4^m X_{0,1}(m) \end{aligned} \tag{42}$$

$$\begin{aligned} X_0(m+2) &= \sum_{n=0}^{1} x(4n)W_2^{mn} - W_4^m \sum_{n=0}^{1} x(4n+2)W_2^{mn} \\ &= X_{0,0}(m) - W_4^m X_{0,1}(m) \end{aligned} \tag{43}$$

โดย

- $X_{0,0}(m)$ เป็น DFT ขนาด 2 จุดของ $x(0), x(4)$
- $X_{0,1}(m)$ เป็น DFT ขนาด 2 จุดของ $x(2), x(6)$

ทำนองเดียวกันสำหรับ $X_1(m)$ เราจะได้

$$\begin{aligned} X_1(m) &= \sum_{n=0}^{1} x(4n+1)W_2^{mn} + W_4^m \sum_{n=0}^{1} x(4n+3)W_2^{mn} \\ &= X_{1,0}(m) + W_4^m X_{1,1}(m) \end{aligned} \tag{44}$$

$$\begin{aligned} X_1(m+2) &= \sum_{n=0}^{1} x(4n+1)W_2^{mn} - W_4^m \sum_{n=0}^{1} x(4n+3)W_2^{mn} \\ &= X_{1,0}(m) - W_4^m X_{1,1}(m) \end{aligned} \tag{45}$$

โดย

- $X_{1,0}(m)$ เป็น DFT ขนาด 2 จุดของ $x(1), x(5)$
- $X_{1,1}(m)$ เป็น DFT ขนาด 2 จุดของ $x(3), x(7)$

พิจารณา 2-point DFT โดยมี $x(0)$ และ $x(1)$ เป็นอินพุท ตามนิยามเราจะได้

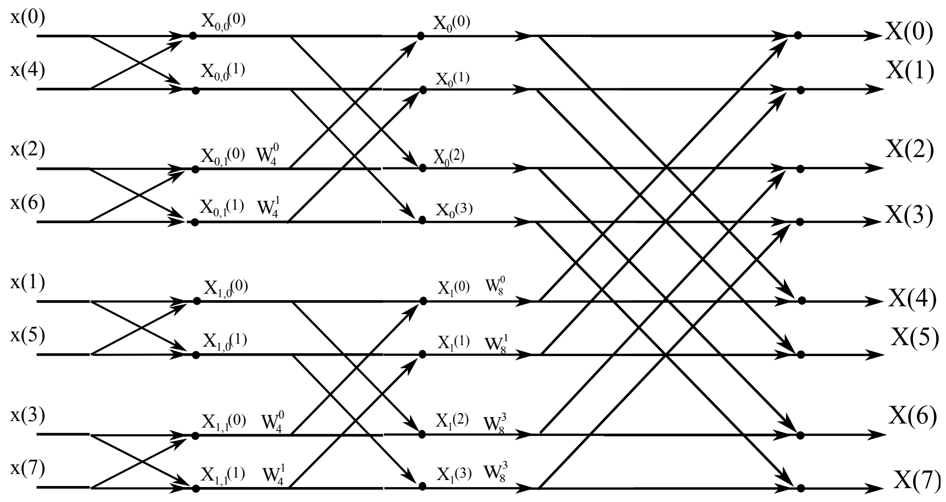
$$X(0) = \sum_{n=0}^{1} x(n)W_2^{0n} = x(0) + x(1) \tag{46}$$

$$X(1) = \sum_{n=0}^{1} x(n)W_2^{n} = x(0) - x(1)W_2 = x(0) - x(1) \tag{47}$$

เพราะ $W_2 = e^{-j2\pi(1/2))} = e^{-j\pi} = -1$ ซึ่งจะเห็นว่าเราหา 2-point DFT ได้จาก butterfly operation ที่มี twiddle factor เท่ากับ 1 ดังนั้น เราจะได้

$$
\begin{aligned}
X_{0,0}(0) &= x(0) + x(4) \\
X_{0,0}(1) &= x(0) - x(4) \\
X_{0,1}(0) &= x(2) + x(6) \\
X_{0,1}(1) &= x(2) - x(6) \\
X_{1,0}(0) &= x(1) + x(5) \\
X_{1,0}(1) &= x(1) - x(5) \\
X_{1,1}(0) &= x(3) + x(7) \\
X_{1,1}(1) &= x(3) - x(7)
\end{aligned}
$$

ซึ่งได้จาก butterfly operations จำนวน 4 ตัว แต่ละตัวมี twiddle factors เท่ากับ 1



รูปที่ 10: ไดอะแกรมการไหล (dataflow diagram) ของการคำนวณ 8-point DFT ด้วยวิธี Cooley-Tukey FFT ขนาด 8 จุด

ผลจากการคำนวณ 2-point DFT ทั้ง 8 ค่าจะถูกนำไปคำนวณ $X_0(m)$ และ $X_0(m+2)$ สำหรับ $m = 0, 1$ และคำนวณ $X_1(m)$ และ $X_1(m+2)$ สำหรับ $m = 0, 1$ ตามสมการที่ (42) ถึงสมการที่ (45) ซึ่งจะได้ผลลัพท์

เป็น

$$\begin{aligned}
X_0(0) &= X_{0,0}(0) + W_4^0 X_{0,1}(0) = X_{0,0}(0) + X_{0,1}(0) \\
X_0(2) &= X_{0,0}(0) - W_4^0 X_{0,1}(0) = X_{0,0}(0) - X_{0,1}(0) \\
X_0(1) &= X_{0,0}(1) + W_4^1 X_{0,1}(1) = X_{0,0}(1) - jX_{0,1}(1) \\
X_0(4) &= X_{0,0}(1) - W_4^1 X_{0,1}(1) = X_{0,0}(1) + jX_{0,1}(1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
X_1(0) &= X_{1,0}(0) + W_4^0 X_{1,1}(0) = X_{1,0}(0) + X_{1,1}(0) \\
X_1(2) &= X_{1,0}(0) - W_4^0 X_{1,1}(0) = X_{1,0}(0) - X_{1,1}(0) \\
X_1(1) &= X_{1,0}(1) + W_4^1 X_{1,1}(1) = X_{1,0}(1) - jX_{1,1}(1) \\
X_1(4) &= X_{1,0}(1) - W_4^1 X_{1,1}(1) = X_{1,0}(1) + jX_{1,1}(1)
\end{aligned}$$

ซึ่งได้จาก butterfly operations จำนวน 4 ตัวเช่นเดียวกัน โดย 2 ตัวมี twiddle factor เท่ากับ $W_4^0 = 1$ ส่วนอีกสองตัวมี twiddle factor เท่ากับ $W_4 = e^{-j2\pi/4} = e^{-j\pi/2} = -j$

ผลจากการคำนวณ 2-point DFT ทั้ง 8 ค่าจะถูกนำไปคำนวณ $X(m)$ และ $X_0(m+4)$ สำหรับ $m = 0, 1, 2, 3$ ตามสมการที่ (40) และสมการที่ (41) ซึ่งจะได้ผลลัพท์เป็น

$$\begin{aligned}
X(0) &= X_0(0) + W_8^0 X_1(0) \\
X(4) &= X_0(0) - W_8^0 X_1(0) \\
X(1) &= X_0(1) + W_8^1 X_1(1) \\
X(5) &= X_0(1) - W_8^1 X_1(1) \\
X(2) &= X_0(2) + W_8^2 X_1(2) \\
X(6) &= X_0(2) - W_8^2 X_1(2) \\
X(3) &= X_0(3) + W_8^3 X_1(3) \\
X(7) &= X_0(3) - W_8^3 X_1(3)
\end{aligned}$$

ซึ่งได้จาก butterfly operations จำนวน 4 ตัวที่มี twiddle factors เท่ากับ $W_8^m, m = 0, 1, 2, 3$

เราเขียนไดอะแกรมการไหลของการคำนวณ 8-point FFT นี้ได้ตามแสดงในรูปที่ 10 โดยอินพุท $x(n)$ มาทางด้านซ้ายเข้าสู่ butterfly operations สำหรับการคำนวณ 2-point DFT จำนวน 4 ตัว ผลลัพธ์ที่ได้ก็คือ $X_{0,0}(m)$, $X_{0,1}(m)$, $X_{1,0}(m)$ และ $X_{1,1}(m)$ สำหรับ $m = 0, 1$ เราเรียกการคำนวณนี้ว่าเป็น stage 1 ผลลัพธ์จาก stage 1 จะเป็นอินพุทให้กับ butterfly operations จำนวน 4 ตัวใน stage 2 และผลจาก stage 2 ก็จะเป็นอินพุทให้กับ butterfly operations จำนวน 4 ตัวของ stage 3 จากรูปที่ 10 เราจะได้

$$\text{จำนวน buttery operations แต่ละ stage} = N/4 \tag{48}$$

$$\text{จำนวน stages} = \log_2 N = \log_2 2^k = k \tag{49}$$

$$\text{จำนวน buttery operations ทั้งหมด} = \frac{N}{2}\log_2 N = \frac{N}{2}\log_2 2^k = \frac{kN}{2} \tag{50}$$

เนื่องจาก buttery operation หนึ่งตัวมีการคูณเลขเชิงซ้อน 1 ครั้งและการบวกเลขเชิงซ้อน 2 ครั้ง ในการคำนวณ N-point DFT ด้วย N-point FFT มีการคูณเลขเชิงซ้อนทั้งหมด $\frac{N}{2}\log_2 N$ และมีการบวกเลขเชิงซ้อน $N\log_2 N$ ครั้ง สำหรับการคำนวณตามนิยาม การคำนวณ DFT หนึ่งจุดต้องทำการคูณเลขเชิงซ้อนจำนวน N ครั้งและทำการบวก N-1 ครั้ง ดังนั้นการคำนวณ N-point DFT ตามนิยามต้องใช้การคูณทั้งหมด N^2 ครั้ง และการบวกทั้งหมด $(N-1)^2$ ตารางที่ 8 เปรียบเทียบปริมาณการคูณและบวกระหว่างการคำนวณ N-point DFT ตามนิยาม และการคำนวณด้วย N-point FFT

ตารางที่ 8: เปรียบปริมาณการคูณและการบวกเลขเชิงซ้อนสำหรับการคำนวณ DFT ตามนิยามและการคำนวณด้วย FFT

k	$N=2^k$	จำนวนครั้งของการบวก			จำนวนครั้งของการคูณ		
		ตามนิยาม	FFT	นิยาม/FFT	ตามนิยาม	FFT	นิยาม/FFT
4	16	225	64	3.5	256	32	8
6	64	3969	384	10.3	4096	192	21.3
8	256	65025	2048	31.8	65536	1024	64
10	1024	1.04×10^6	1.02×10^4	102.2	1.05×10^6	5.12×10^3	204.8
12	4096	1.68×10^7	4.92×10^4	341.2	1.68×10^7	2.46×10^4	682.7
14	16384	2.68×10^8	2.29×10^5	1.17×10^3	2.68×10^8	1.15×10^5	2.34×10^3
16	65536	4.29×10^9	1.05×10^6	4.09×10^3	4.29×10^9	5.24×10^5	8.19×10^3
18	262144	6.87×10^{10}	4.72×10^6	1.45×10^4	6.87×10^{10}	2.36×10^6	2.91×10^4
20	1048576	1.10×10^{12}	2.10×10^7	5.24×10^4	1.10×10^{12}	1.05×10^7	1.05×10^5