§ 10. Сети. Потоки. Разрезы

Определение. Ориентированный граф $G=(V,E)$ называется *сетью,* если все его вершины разбиты на три непересекающихся класса: *источники*, *стоки и внутренние вершины*. Вершины из первых двух классов (источники и стоки) называются *полюсами*.

Для каждой вершины $v \in V$ выделим два множества дуг: $E^{+}(v)=\{(v,u)\in E\}$, выходящих из v, и $E^{-}(v)=\{(u,v)\in E\}$, входящих в v.

Пусть $f: E \to \mathbb{R}$ – некоторая вещественнозначная функция на дугах. *Дивиргенцией* функции f в вершине v называется число

$$div\, f(v)=\sum_{e\in E^{+}(v)} f(e)-\sum_{e\in E^{-}(v)} f(e).$$

Функция f называется *потоком* в сети G, если во всех внутренних узлах выполнено равенство

$$div\, f(v)=0. \qquad (1)$$

Если равенство (1) выполнено во всех вершинах сети, то поток f называется *циркуляцией*.

Условие (1) называется *условием неразрывности*. Если интерпретировать $f(e)$ как количество жидкости, протекающей по дуге e в единицу времени, то оно означает, что для любой внутренней вершины v количество жидкости, втекающей в эту вершину, равно количеству жидкости, вытекающей из нее; при этом если равенство (1) имеет место для всех вершин, то происходит просто циркуляция жидкости в сети.

Лемма 1. *Для любой функции $f: E \to \mathbb{R}$ на множестве дуг сети $G=(V,E)$ выполняется равенство* $\sum_{v\in V} div\, f(v)=0$.

Доказательство. Для каждой дуги $e=(u,v)\in E$ выражение для $div\, f(u)$ содержит слагаемое $f(e)$, а выражение для $div\, f(v)$ содержит слагаемое $-f(e)$. Поэтому при суммировании дивергенций по всем вершинам все входящие в них слагаемые взаимно сокращаются. ■

Пусть $f:E\to\mathbb{R}$ – все источники в сети $G=(V,E)$, а $t_1,\ldots,t_m$ – все стоки. Рассмотрим произвольный поток $f: E \to \mathbb{R}$. По определению он имеет нулевую дивергенцию во всех внутренних вершинах. Поэтому из леммы 1 следует, что сумма дивергенций f во всех полюсах равна нулю. Следовательно,

$$\sum_{i=1}^{n} div\, f(s_i) = -\sum_{j=1}^{m} div\, f(t_j). \tag{1}$$

Это равенство имеет очевидный смысл: количество жидкости, вытекающей из всех источников, совпадает с количеством жидкости, втекающей во все стоки. В частности, если в сети есть только один источник s (source) и только один сток t (target), то равенство (1) принимает вид $div\, f(s) = -div\, f(t)$.

Мощностью потока f называется число

$$M(f) = \sum_{i=1}^{n} div\, f(s_i) = -\sum_{j=1}^{m} div\, f(t_j).$$

Это есть не что иное, как общее количество жидкости, протекающее через сеть за единицу времени. Из определения мощности следует, что она линейно зависит от потока. В частности, если $\{f_i\}$ – конечное семейство потоков, то $M(\sum_i f_i) = \sum_i M(f_i)$.

Далее мы ограничимся рассмотрением сетей, имеющих только один источник s и только один сток t, а формулировку соответствующих понятий и доказательство результатов для сетей с несколькими источниками и стоками будем предоставлять читателю в качестве упражнений.

Очевидно, мощность потока f в сети с одним источником s и одним стоком t определяется равенствами

$$M(f) = div\, f(s) = -div\, f(t).$$

Здесь $M(f)$ интерпретируется как количество жидкости, “создаваемое” источником и соответственно равное количеству жидкости, “потребляемому” стоком. В частности, поток f является циркуляцией в том и только том случае, когда его мощность равна нулю.

Определение. Предположим, что некоторое множество вершин $X \subset V$ содержит источник s, а его дополнение $\bar{X} = V \setminus X$ содержит сток $\boldsymbol{t}$. Тогда пару $\left(\boldsymbol{X}, \bar{\boldsymbol{X}}\right)$ назовем *разрезом* (отделяющим источник от стока).

Для каждого разреза $\left(\boldsymbol{X}, \bar{\boldsymbol{X}}\right)$ определим два множества:

$$\boldsymbol{E}\left(\boldsymbol{X}, \bar{\boldsymbol{X}}\right) = \left\{\boldsymbol{e} = \left(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\right) : \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X}, \boldsymbol{y} \in \bar{\boldsymbol{X}}\right\},$$
$$\boldsymbol{E}\left(\bar{\boldsymbol{X}}, \boldsymbol{X}\right) = \left\{\boldsymbol{e} = \left(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\right) : \boldsymbol{x} \in \bar{\boldsymbol{X}}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{X}\right\}.$$

Иначе говоря, $\boldsymbol{E}\left(\boldsymbol{X}, \bar{\boldsymbol{X}}\right)$ – это множество всех дуг сети, идущих из $\boldsymbol{X}$ в $\bar{\boldsymbol{X}}$, а $\boldsymbol{E}\left(\bar{\boldsymbol{X}}, \boldsymbol{X}\right)$ – это множество всех дуг, идущих из $\bar{\boldsymbol{X}}$ в $\boldsymbol{X}$.

Дивергенцией потока $\boldsymbol{f}$ *на разрезе* $\left(\boldsymbol{X}, \bar{\boldsymbol{X}}\right)$ называется число

$$\boldsymbol{div\, f}\left(\boldsymbol{X}, \bar{\boldsymbol{X}}\right) = \sum_{\boldsymbol{e} \in \boldsymbol{E}\left(\boldsymbol{X}, \bar{\boldsymbol{X}}\right)} \boldsymbol{f}\left(\boldsymbol{e}\right) - \sum_{\boldsymbol{e} \in \boldsymbol{E}\left(\bar{\boldsymbol{X}}, \boldsymbol{X}\right)} \boldsymbol{f}\left(\boldsymbol{e}\right).$$

Лемма 2. *Для любого потока* $\boldsymbol{f}$ *и любого разреза* $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{X}^*)$ *выполнено*

$$\boldsymbol{M}(\boldsymbol{f}) = \boldsymbol{div\, f}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{X}^*).$$

Доказательство. Так как $\boldsymbol{s} \in \boldsymbol{X}$, а $\boldsymbol{t} \notin \boldsymbol{X}$, то в силу условия (1) имеем

$$\boldsymbol{M}(\boldsymbol{f}) = \sum_{\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{X}} \boldsymbol{div\, f}(\boldsymbol{v}).$$

Если начало и конец дуги $\boldsymbol{e} = (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u})$ принадлежат $\boldsymbol{X}$, то выражения для $\boldsymbol{div\, f}(\boldsymbol{v})$ и $\boldsymbol{div\, f}(\boldsymbol{u})$ содержат соответственно слагаемое $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{e})$ и слагаемое $-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{e})$, поэтому

$$\sum_{\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{X}} \boldsymbol{div\, f}(\boldsymbol{v}) = \sum_{\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{X}} \left(\sum_{(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}) \in \boldsymbol{E}, \boldsymbol{u} \in \boldsymbol{X}^*} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}) - \sum_{(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \in \boldsymbol{E}, \boldsymbol{u} \in \boldsymbol{X}^*} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \right).$$

Остается заметить, что

$$\sum_{\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{X}} \sum_{(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}) \in \boldsymbol{E}, \boldsymbol{u} \in \boldsymbol{X}^*} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}) = \sum_{\boldsymbol{e} \in \boldsymbol{E}^+(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{X}^*)} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{e})$$

и

$$\sum_{v \in X} \sum_{(u,v) \in E, u \in X^*} f(u,v) = \sum_{e \in E^-(X,X^*)} f(e),$$

т. е.

$$\sum_{v \in X} div\, f(v) = div\, f(X, X^*). \ ■$$

Определение. *Элементарными путями* в сети с источником s и стоком t будем называть любые ориентированные циклы без самопересечений, а также любые ориентированные пути без самопересечений, у которых начало и конец являются полюсами. Элементарный путь, не являющийся циклом, может вести как из s в t (в этом случае мы называем его (s,t)-*путь*), так и из t в s ((t,s)-*путь*).

Для каждого элементарного пути C определим *элементарный поток* вдоль C как функцию $f : E \to \mathbb{R}$, которая принимает одно и то же значение ρ на всех дугах из C, а на остальных дугах сети обращается в нуль.

Пусть f – элементарный поток вдоль элементарного пути C, принимающий значение ρ на всех дугах из C. Если вершина v не принадлежит C, то f обращается в нуль на всех дугах, инцидентных v. Следовательно, $div\, f(v) = 0$. А если v – внутренняя вершина, принадлежащая C, то имеется ровно одна дуга из C, выходящая из v, и ровно одна дуга из C, входящая в v. Поэтому опять $div\, f(v) = 0$. Значит, всякий элементарный поток действительно является потоком. При этом мощность элементарного потока f вдоль пути C равна

$$M(f) = \begin{cases} \rho, & \text{если } C \text{ идет из } s \text{ в } t, \\ -\rho, & \text{если } C \text{ идет из } t \text{ в } s, \\ 0, & \text{если } C \text{ - цикл.} \end{cases}$$

Отсюда следует, что всякий элементарный поток вдоль цикла является циркуляцией.

Определение. Пусть f_1, f_2 – два потока в сети G. Будем говорить, что

- f_1 *не меньше* f_2, и писать $f_1 \geq f_2$, если $f_1(e) \geq f_2(e)$ на любой дуге $e \in E$;
- f_1 *больше* f_2, и писать $f_1 > f_2$, если $f_1 \geq f_2$ и $f_1(e') > f_2(e')$ на некоторой дуге $e' \in E$.

Через $e \in E$ будем далее обозначать *нулевой поток*, т. е. такой, что $f(e) = 0$ ($e \in E$). Поток $f > 0$ назовем *положительным.*

Теорема 1 (о разложении циркуляции). *Любую положительную циркуляцию в сети можно разложить в сумму элементарных положительных потоков вдоль циклов, причем число этих потоков не превосходит числа дуг в сети.*

Доказательство. Пусть f – положительная циркуляция в сети $G = (V, E)$. В силу положительности f существует такая дуга $(x_0, x_1) \in E$, что $f(x_0, x_1) > 0$. По определению циркуляции $div\, f(x_1) = 0$. Следовательно, $\sum_{v \in V^+(x_1)} f(x_1, v) = \sum_{u \in V^-(x_1)} f(u, x_1)$. Но $\sum_{u \in V^-(x_1)} f(u, x_1) \geq f(x_0, x_1) > 0$. Поэтому обязательно найдется такая вершина $x_2 \in V^+(x_1)$, что $f(x_1, x_2) > 0$.

Далее будем повторять эту процедуру и находить такие вершины x_3, x_4, $\ldots$, что $f(x_i, x_{i+1}) > 0$. Поскольку число вершин в сети конечно, рано или поздно в последовательности $x_0, x_1, x_2 \ldots$ встретится такая вершина x_k, которая совпадает с одной из предшествующих вершин. Пусть $n = \max\{i < k \mid x_i = x_k\}$. Тогда последовательность $x_n, x_{n+1}, \ldots, x_k$ образует элементарный цикл C.

Положим $\rho = \min\{f(x_i, x_{i+1}) \mid i = 1, \ldots, k-1\}$. Очевидно, $\rho > 0$. Пусть f_C – элементарный поток вдоль цикла C, принимающий значение ρ на всех дугах из C. По построению $f \geq f_C$. Кроме того, в цикле C есть такая дуга e, что $f(e) = f_C(e) = \rho$. Рассмотрим разность двух циркуляций $f' = f - f_C$. Она неотрицательна и сама является циркуляцией. Если $f' = 0$, то теорема доказана. Допустим, что $\rho > 0$. По построению f' обращается в нуль на всех дугах, на которых циркуляция f нулевая, и еще, по крайней мере, на одной дуге e. Таким образом, мы отделили от исходной циркуляции f элементарный поток вдоль цикла f_C и получили новую циркуляцию $f' > 0$, которая отлична от нуля на меньшем числе дуг, чем f.

Далее будем повторять эту процедуру и отделять от f' элементарные потоки вдоль циклов до тех пор, пока остающаяся циркуляция не станет нулевой на всех дугах. В итоге f окажется разложенной в сумму элементарных потоков вдоль циклов, число которых не превосходит числа дуг в сети. ■

Теорема 2 (о разложении потока). *Любой положительный поток f в сети G можно представить в виде суммы не более чем $m+1$ ($m = |E|$) элементарных потоков:*

$$f = \sum_{C} f_C + \sum_{P} f_P, \tag{2}$$

где в первой сумме справа стоят элементарные потоки вдоль циклов, а во второй – элементарные потоки вдоль (s,t)-путей или (t,s)-путей. При этом, если $M(f) > 0$, то в (2) *войдет, по крайней мере, один поток вдоль (s,t)-пути, а если $M(f) < 0$, то в* (2) *войдет, по крайней мере, один поток вдоль (t,s)-пути.*

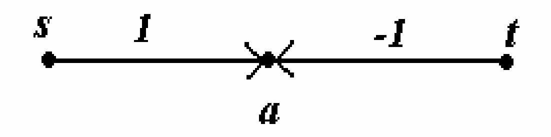
Доказательство. Сведем эту теорему к предыдущей. Если $M(f) = 0$, то поток f является циркуляцией. Этот случай рассмотрен в предыдущей теореме. Если $M(f) > 0$, то добавим к имеющейся сети одну дугу $e_0 = (t,s)$ и положим $f(e_0) = M(f)$. А если $M(f) < 0$, то добавим к имеющейся сети дугу $e_0 = (s,t)$ и положим $f(e_0) = -M(f)$. В любом случае поток f станет положительной циркуляцией в новой сети. По теореме 1 она раскладывается в сумму элементарных положительных потоков вдоль циклов, число которых не превосходит $m+1$. Выбросим дугу e_0 из каждого цикла, содержащего e_0. При этом все циклы, содержащие e_0, превратятся в элементарные пути, идущие из s в t или из t в s. В результате получится искомое разложение f в сумму элементарных потоков.

Мощность потока f_1 равна сумме мощностей элементарных потоков, из которых он состоит. Легко видеть, что мощность любого элементарного потока вдоль цикла равна нулю, мощность любого элементарного положительного потока, идущего из s в t, положительна, а мощность любого элементарного положительного потока, идущего из t в s, отрицательна. Значит, если $M(f) > 0$, то в разложении f есть хотя бы один поток, идущий из s в t, а если $M(f) < 0$, то есть хотя бы один поток, идущий из t в s. ■

Упражнение **1**. Изложенное доказательство не проходит, если в исходной сети с самого начала есть дуга G между s и t. Что делать в этом случае?

Упражнение **2.** Доказать, что если $M(f) > 0$ ($M(f) < 0$), то в разложении (2) вторую сумму справа можно составить только из элементарных потоков вдоль (s,t)-путей ((t,s)-путей) (при этом общее число слагаемых в (2), возможно, увеличится).

Из теоремы о разложении потока вытекает, в частности, что в сети может быть задан положительный поток положительной мощности только при условии достижимости стока из источника. Аналогично, необходимым условием существования положительного потока отрицательной мощности является достижимость источника из стока. Заметим при этом, что для потоков, не являющихся положительными, это не так. Рассмотрим, например, следующую сеть, в которой задан поток мощности 1:



(здесь над каждой дугой стоит величина потока на ней). Для этого потока вершины s и t недостижимы.

§ 11. Потоки максимальной мощности и теорема Форда – Фалкерсона

Рассмотрим сеть $G = (V, E)$. Пусть каждой дуге $e \in E$ поставлено в соответствие некоторое число $c(e) > 0$, называемое *пропускной способностью* дуги. Мы будем говорить, что поток $f : E \to \mathbf{R}$ *допустим*, если для любой дуги $e \in E$ выполняется условие $0 \le f(e) \le c(e)$. Допустимый поток можно интерпретировать как такой поток жидкости в сети, при котором по каждой дуге жидкость течет только в направлесети, при котором по каждой дуге жидкость течет только в направлении ориентации дуги, а ее количество не превосходит пропускной способности дуги.

П р и м е р. На рис. 11.1 изображена сеть с допустимым потоком. Возле каждой дуги стоит пара чисел, из которых первое обозначает ее пропускную способность, а второе – поток, идущий по дуге.

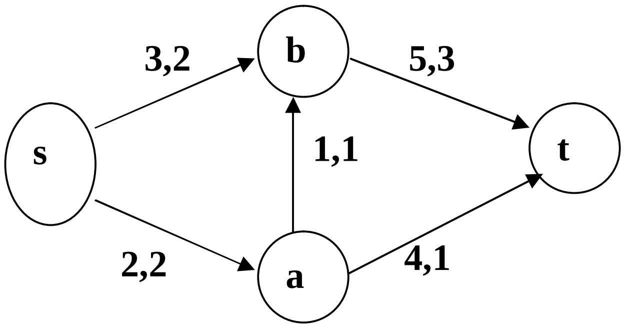


Рис. 11.1

Например, пропускная способность дуги (s,b) равна трем единицам, и на ней задан поток, равный двум единицам. Видно, что во внутренних вершинах a и b дивергенция потока равна нулю (выполняется условие неразрывности).

Рассмотрим любой разрез $(X,\bar{X})$ в сети G. Пусть, как и прежде, $E(X,\bar{X})$ обозначает множество дуг, идущих из X в $\bar{X}$. *Пропускной способностью* разреза $(X,\bar{X})$ называется число

$$c(X,\bar{X}) = \sum_{e \in E(X,\bar{X})} c(e),$$

которое равно сумме пропускных способностей всех дуг, идущих из X в $\bar{X}$. Например, для сети, изображенной на рис. 11.1, возьмем $X = \{s,a\}$ и $\bar{X} = \{b,t\}$. Тогда пропускная способность разреза $(X,\bar{X})$ равна

$$c(X,\bar{X}) = c(s,b) + c(a,b) + c(a,t) = 3 + 1 + 4 = 8.$$

Лемма 1. *Мощность допустимого потока в сети не может быть больше пропускной способности любого разреза.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. По лемме 2 из § 10 мощность потока f равна его дивергенции на любом разрезе $\left(X,\bar{X}\right)$. А если поток f к тому же допустимый, то

$$M(f)=div\, f\left(X,\bar{X}\right)=\sum_{e\in E\left(X,\bar{X}\right)} f(e)-\sum_{e\in E\left(\bar{X},X\right)} f(e)\le$$

$$\le\sum_{e\in E\left(X,\bar{X}\right)} c(e)=c\left(X,\bar{X}\right). \qquad +$$

Следствие. *Если для допустимого потока* f *существует такой разрез* $\left(X,\bar{X}\right)$, *что* $M(f)=c\left(X,\bar{X}\right)$, *то в данной сети не существует допустимого потока с мощностью больше* $M(f)$ *и не существует разреза с пропускной способностью меньше* $c\left(X,\bar{X}\right)$.

Допустимый поток, который имеет максимально возможную мощность в данной сети, называется *максимальным*.

Упражнение. Доказать, что в каждой сети с заданными пропускными способностями дуг существует максимальный допустимый поток.

З а м е ч а н и е. Максимальный поток не обязательно единственен. Например, на рис. 11.2 изображена сеть вместе с пропускными способностями дуг, в которой есть, по крайней мере, два максимальных потока.

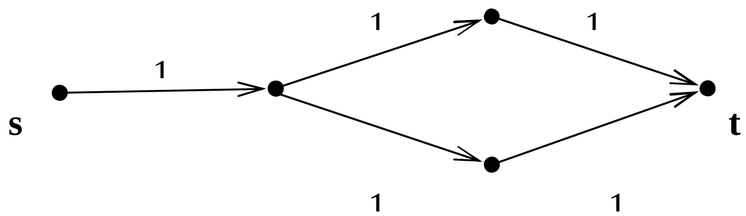


Рис. 11.2

Элементарной цепью (без ориентации) в сети $G=\left(V,E\right)$ договоримся называть любую последовательность несовпадающих вершин $\left(v_0,v_1,\ldots,v_n\right)$, в которой $v_0=s$ является источником, $v_n=t$ является стоком и каждая вершина v_i смежна с v_{i+1}. Иначе говоря, элементарная цепь – это путь от источника до стока, составленный из ребер (неориентированных дуг) сети. Для каждой пары соседних вершин v_i, v_{i+1} из цепи выполняется одно из двух условий: либо $(v_i, v_{i+1}) \in E$, либо $(v_{i+1}, v_i) \in E$. В первом случае дуга (v_i, v_{i+1}) называется *прямой* (для данной цепи), а во втором случае дуга (v_{i+1}, v_i) называется *обратной* (для данной цепи). Например, на рис. 11.3 дуги (s, v_1), (v_3, v_4), (v_4, t) прямые, а дуги (v_2, v_1) и (v_3, v_2) – обратные.

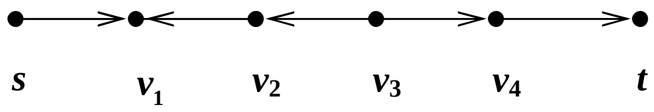


Рис. 11.3

Элементарным потоком мощности ρ вдоль элементарной цепи $(v_0, v_1, \ldots, v_n)$ называется функция

$$g(e) = \begin{cases} \rho, & \text{если } e \text{ - прямая дуга из цепи,} \\ -\rho, & \text{если } e \text{ - обратная дуга из цепи,} \\ 0, & \text{если дуга } e \text{ не из цепи.} \end{cases}$$

Вычислим дивергенцию g. Если вершина v не принадлежит цепи, то g обращается в нуль на всех дугах, инцидентных v. Поэтому $div\, g(v) = 0$. Если $v = v_0$, то либо $(v_0, v_1) \in E$, либо $(v_1, v_0) \in E$. В первом случае $g(v_0, v_1) = \rho$, а во втором случае $g(v_1, v_0) = -\rho$. Но в обоих случаях $div\, g(v_0) = \rho$. Аналогично доказывается, что $div\, g(v_n) = -\rho$. Наконец, если $v = v_i$, где $i = 1, \ldots, n-1$, то вершина v инцидентна ровно двум дугам из цепи. Прямой перебор показывает, что при любых ориентациях этих дуг $div\, g(v) = 0$. Значит, функция g действительно является потоком мощности ρ.

Пусть в сети G задан допустимый поток f. Элементарная цепь называется *увеличивающей* для потока f, если $f(e) < c(e)$ на всякой прямой дуге e из цепи и $f(e) > 0$ на всякой обратной дуге e из цепи.

Предположим, что цепь $(v_0, v_1, \ldots, v_n)$ увеличивающая. Определим по ней числа:

$$\rho_i = \begin{cases} c(v_i, v_{i+1}) - f(v_i, v_{i+1}), & \text{если } (v_i, v_{i+1}) \in E, \\ f(v_{i+1}, v_i), & \text{если } (v_{i+1}, v_i) \in E, \end{cases}$$

а также

$$\rho = \min\{\rho_i \mid i = 0, \ldots, n-1\}.$$

Из определения увеличивающей цепи следует, что все числа ρ_i и ρ строго положительны. Пусть g – элементарный поток мощности ρ вдоль цепи $(v_0, v_1, \ldots, v_n)$. По построению если $(v_i, v_{i+1}) \in E$, то $f(v_i, v_{i+1}) + g(v_i, v_{i+1}) = f(v_i, v_{i+1}) + \rho \le c(v_i, v_{i+1})$, а если $(v_{i+1}, v_i) \in E$, то $f(v_{i+1}, v_i) + g(v_{i+1}, v_i) = f(v_{i+1}, v_i) - \rho \ge 0$. Отсюда вытекает, что поток $f + g$ допустим. При этом его мощность равна сумме мощностей f и g, т. е. $M(f) + \rho$, что строго больше $M(f)$. Значит, если у допустимого потока f есть увеличивающая элементарная цепь $(v_0, v_1, \ldots, v_n)$, то его мощность может быть увеличена (на вышеопределенное число ρ) с сохранением допустимости. Ясно, что у допустимого потока максимальной мощности не существует увеличивающих цепей.

Приведем еще одно необходимое условие максимальности потока.

Теорема 1 (Ford – Fulkerson). *Если f – допустимый поток максимальной мощности в сети $G = (V, E)$, то существует такой разрез $(X, \bar{X})$,* что $M(f) = c(X, \bar{X})$.

Доказательство. Пусть $X_0 = \{s\}$. Построим последовательность подмножеств $X_i \subset V$ по следующему правилу. Каждое множество X_{i+1} получается из множества X_i путем добавления к последнему нескольких новых вершин, а именно к X_i добавляются все вершины v, для которых существует такая вершина $u \in X_i$, что $(u,v) \in E$ и $f(u,v) < c(u,v)$, а также все вершины v, для которых существует такая вершина $u \in X_i$, что $(v,u) \in E$ и $f(v,u) > 0$. Поскольку множество всех вершин в сети конечно, последовательность X_i рано или поздно перестает возрастать, и, начиная с какого-то номера n, все множества X_i совпадают между собой. Положим $X = X_n$.

Докажем, что построенное множество X определяет разрез. Для этого достаточно лишь проверить, что оно не содержит сток t. Допустим противное, что множество $X = X_n$ содержит сток. Обозначим его через v_n. По определению множества X_n существует такая вершина $v_{n-1} \in X_{n-1}$, что либо $(v_{n-1},v_n) \in E$ и $f(v_{n-1},v_n) < c(v_{n-1},v_n)$, либо $(v_n,v_{n-1}) \in E$ и $f(v_n,v_{n-1}) > 0$. Фиксируем эту вершину v_{n-1}. Для нее в свою очередь существует такая вершина $v_{n-2} \in X_{n-2}$, что либо $(v_{n-2},v_{n-1}) \in E$ и $f(v_{n-2},v_{n-1}) < c(v_{n-2},v_{n-1})$, либо $(v_{n-1},v_{n-2}) \in E$ и $f(v_{n-1},v_{n-2}) > 0$. Фиксируем эту вершину v_{n-2}. Действуя далее аналогично, построим последовательность вершин $v_i \in X_i$, $i = n-3,\ldots,1,0$. Вершина v_0 является источником. Легко видеть, что последовательность $(v_0,v_1,\ldots,v_n)$ образует увеличивающую элементарную цепь для f. Но тогда поток f не максимален. Полученное противоречие доказывает, что множество X не содержит стоков и определяет разрез.

Вычислим пропускную способность разреза $(X,\bar{X})$. По определению множества X не существует такой дуги $e \in E(X,\bar{X})$, что $f(e) < c(e)$, и не существует такой дуги $e \in E(\bar{X},X)$, что $f(e) > 0$. Значит, $f(e) = c(e)$ для всех дуг $e \in E(X,\bar{X})$ и $f(e) = 0$ для всех дуг $e \in E(\bar{X},X)$. Поэтому в силу леммы 2 из предыдущего параграфа

$$c(X,\bar{X}) = \sum_{e \in E(X,\bar{X})} c(e) = \sum_{e \in E(X,\bar{X})} f(e) - \sum_{e \in E(\bar{X},X)} f(e) =$$

$$= \operatorname{div} f(X,\bar{X}) = M(f).$$

Теорема доказана. ■

Следствие. *Для всякого немаксимального допустимого потока существует увеличивающая элементарная цепь.*

Действительно, если увеличивающей цепи нет, то множество $\boldsymbol{X}$, построенное при доказательстве теоремы Форда – Фалкерсона, определяет разрез. Пропускная способность этого разреза, как мы только что установили, равна мощности потока. Но в этом случае поток максимален.

Упражнение. Сформулировать и доказать утверждение типа теоремы Форда – Фалкерсона для сети, имеющей несколько источников и стоков.

§ 12. Построение максимальных потоков. Алгоритм Форда – Фалкерсона

Пусть задана сеть $\boldsymbol{G} = (\boldsymbol{V}, \boldsymbol{E})$ с одним источником $\boldsymbol{s}$, одним стоком $\boldsymbol{t}$ и фиксированными пропускными способностями дуг. Ставится задача построения допустимого потока максимальной мощности. Для решения этой задачи предлагается следующий алгоритм. Он основан на нахождении увеличивающих цепей и изменении потока вдоль них.

Алгоритм Форда – Фалкерсона

В процессе реализации алгоритма все вершины сети разбиваются на три класса: непомеченные, помеченные неокрашенные и помеченные окрашенные. Метки, которыми помечаются вершины, имеют вид пары $(\boldsymbol{v}, \rho)$, где $\boldsymbol{v}$ – одна из вершин сети, а ρ – положительное число.

Шаг 0. Пропускаем по сети любой допустимый поток $\boldsymbol{f}$ (например, нулевой).

Шаг 1. Присваиваем источнику метку $(\boldsymbol{s}, +\infty)$, но не окрашиваем. Все остальные вершины сети делаем непомеченными.

Шаг 2. Если вершина $\boldsymbol{t}$ помечена, то переходим к шагу 4. Если вершина $\boldsymbol{t}$ не помечена, а в сети есть помеченные неокрашенные вершины, то переходим к шагу 3. Если вершина $\boldsymbol{t}$ не помечена и в сети нет помеченных неокрашенных вершин, то переходим к шагу 5.

Шаг 3. Берем любую помеченную неокрашенную вершину $\boldsymbol{v}$. Просматриваем все непомеченные вершины $\boldsymbol{u}$, смежные с $\boldsymbol{v}$. Если $(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}) \in \boldsymbol{E}$

и $f(v,u) < c(v,u)$, то присваиваем вершине u метку (v, r), где $\mathrm{r} = c(v,u) - f(v,u)$. Если (u,v) Î E и $f(u,v) > 0$, то присваиваем вершине u метку (v, r), где $\mathrm{r} = f(u,v)$. Во всех других случаях оставляем вершину u непомеченной. После того как просмотрены все вершины, смежные с v, окрашиваем вершину v и переходим к шагу 2.

Шаг 4. Строим увеличивающую элементарную цепь $(v_0, v_1, \mathrm{K}, v_n)$, идя от $v_n = t$ назад к $v_0 = s$ по следующему правилу: если вершина v_i помечена меткой (u, r), то $v_{i-1} = u$. После этого пропускаем по цепи $(v_0, v_1, \mathrm{K}, v_n)$ элементарный поток мощности $\mathrm{r} = \min\{\mathrm{r}_i \mid i = 0, \mathrm{K}, n-1\}$, где (v_i, r_i) – метка при вершине v_{i+1}. Добавляем этот поток к f и переходим к шагу 1.

Шаг 5. Все вершины сети разбиты на два класса: помеченные окрашенные и непомеченные, причем сток t не помечен. Определяем разрез $(X, \bar{X})$, в котором X – множество помеченных окрашенных вершин, а $\bar{X}$ – множество непомеченных вершин. По построению его пропускная способность равна мощности потока. Максимальный поток построен, и алгоритм прекращает работу.

Пример. На рис. 12.1 изображена сеть с заданным допустимым потоком и пропускными способностями дуг. Требуется построить поток максимальной мощности f и найти разрез $(X, \bar{X})$, для которого $M(f) = c(X, \bar{X})$.

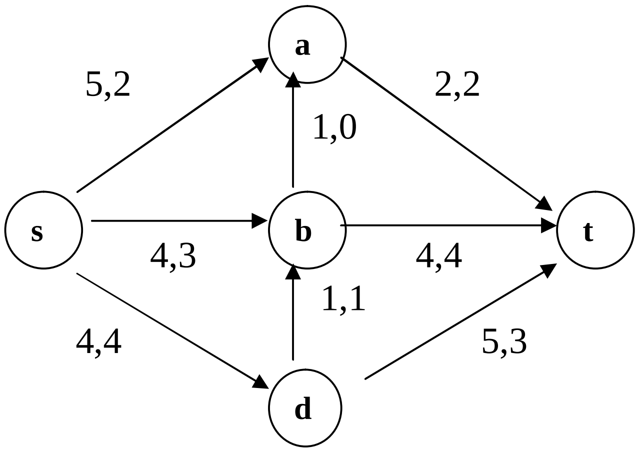


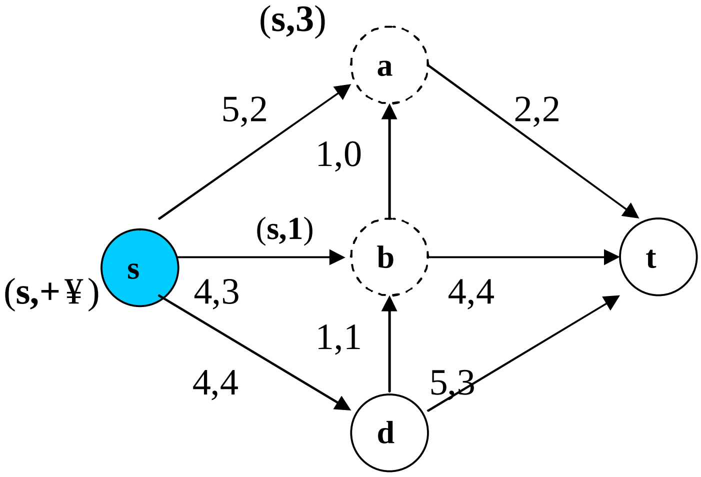
Рис. 12.1

Решение

1. Присваиваем вершине s метку $(s,+\infty)$. Остальные вершины не помечены.

2. Вершина t не помечена, но в сети есть помеченная неокрашенная вершина s.

3. Просматриваем вершины a,b,d, смежные с s. Очевидно, $(s,a)\in E$ и при этом $f(s,a)=2<5=c(s,a)$. Поэтому вершина a получает метку $(s,3)$. Далее, $(s,b)\in E$ и $f(s,b)=3<4=c(s,b)$. Поэтому вершина b получает метку $(s,1)$. А вершина d не помечается, так как $(s,d)\in E$ и $f(s,d)=4=c(s,d)$. Окрашиваем вершину s и переходим к шагу 2.



4. Вершина t не помечена, а в сети есть помеченные неокрашенные вершины.

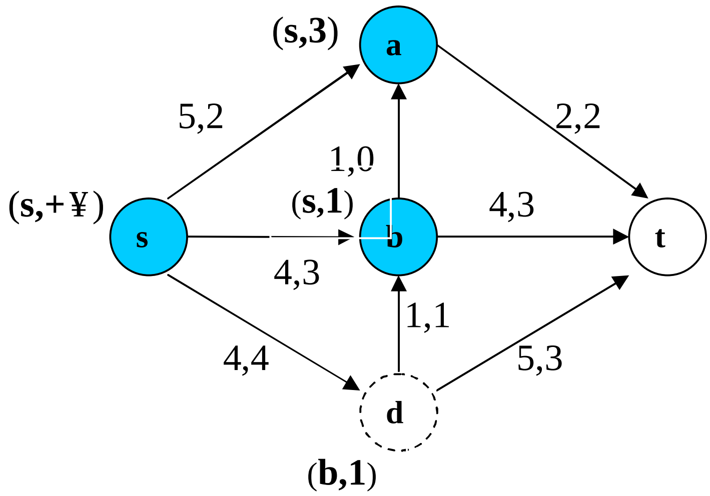
5. Повторяем шаг 3 для вершины a. Ей смежна только одна непомеченная вершина t. Поскольку $(a,t)\in E$ и $f(a,t)=2=c(a,t)$, вершина t остается непомеченной. Окрашиваем вершину a и переходим к шагу 2.

6. Вершина t не помечена, а в сети еще есть помеченные неокрашенные вершины.

7. Повторяем шаг 3 для вершины b. Ей смежны две непомеченные вершины: t и d. Вершина t не помечается, так как $(b,t)\in E$ и

$f(b,t) = 4 = c(b,t)$. Вершина d получает метку $(b,1)$, поскольку (d,b) Î E и $f(d,b) = 1 > 0$. Вершина b окрашивается.

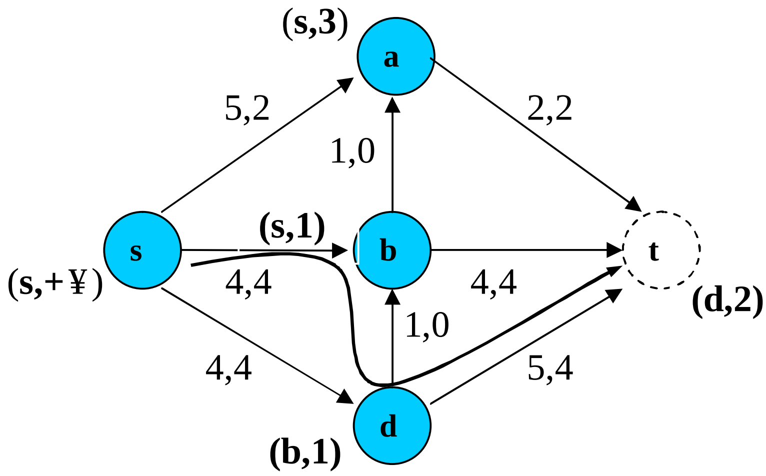
8. Вершина t не помечена, но в сети остается помеченная неокрашенная вершина d.



9. Вершине d смежна только одна непомеченная вершина t. Она получает метку $(d,2)$, так как (d,t) Î E и $f(d,t) = 3 < 5 = c(d,t)$.

10. Сток t помечен. Переходим к шагу 4.

11. Строим увеличивающую элементарную цепь, идя от t назад по меткам. Получается цепь (s,b,d,t). Определяем мощность элементарного потока вдоль этой цепи: $r = \min\{1,1,2\} = 1$. Добавляем этот поток к f. При этом на прямых дугах (s,b) и (d,t) он увеличится на единицу, а на обратной дуге (d,b) он уменьшится на единицу. Переходим к шагу 1.



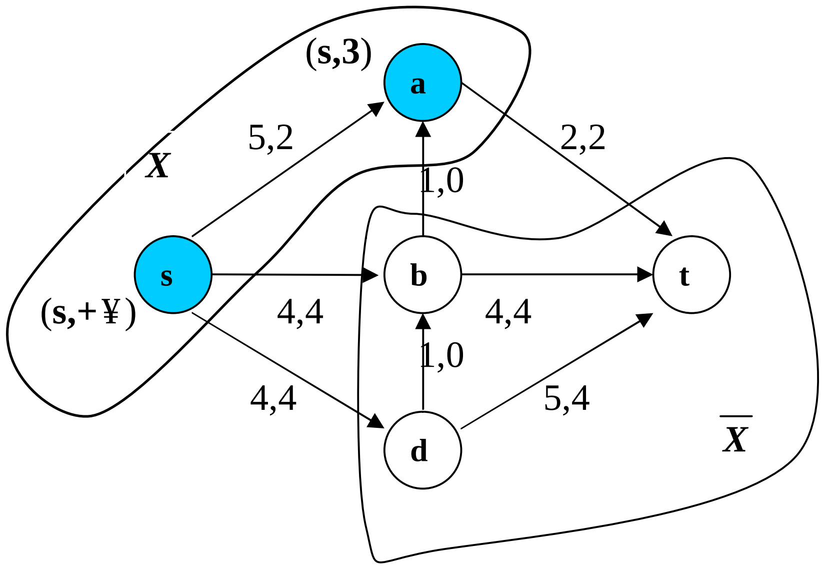
12. Помечаем вершину s меткой $(s,+\infty)$. Остальные вершины делаем непомеченными.

13. Вершина t не помечена, а в сети есть помеченная неокрашенная вершина s.

14. Просматриваем вершины a,b,d, смежные с s. Из них помечается только вершина a меткой $(s,3)$. Вершина s окрашивается.

15. Вершина t не помечена, и в сети есть помеченная неокрашенная вершина a.

16. Вершине a смежны непомеченные вершины b и t. Вершина t не помечается, так как $(a,t)\in E$ и $f(a,t)=2=c(a,t)$. Вершина b не помечается, поскольку $(b,a)\in E$ и $f(b,a)=0$. Вершина a окрашивается.



17. Вершина t не помечена, и в сети нет помеченных неокрашенных вершин. Переходим к шагу 5.

18. Все вершины сети разбиты на два класса: помеченные окрашенные $X=\{s,a\}$ и непомеченные $\bar{X}=\{b,d,t\}$. Эти классы определяют разрез $(X,\bar{X})$. Построенный поток максимален, а его мощность равна пропускной способности разреза $(X,\bar{X})$. Вычисляем ее:

$$M(f) = c(X, \bar{X}) = c(s,b) + c(s,d) + c(a,t) = 4 + 4 + 2 = 10.$$

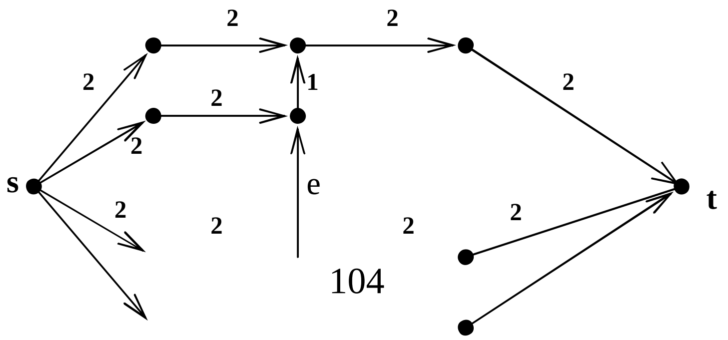
Теорема 1. *Если пропускные способности всех дуг сети – рациональные числа и все значения начального допустимого потока* $f(e)$, *где* $e \in E$, *тоже рациональны, то алгоритм Форда – Фалкерсона строит максимальный поток за конечное число шагов.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Приведением к общему знаменателю теорема сводится к случаю целых неотрицательных значений $c(e)$ и $f(e)$. В этом случае каждая увеличивающая цепь добавляет к имеющемуся потоку не меньше чем единицу мощности. Но пропускная способность сети конечна. Поэтому максимальный поток рано или поздно будет построен. ■

Из доказанной в предыдущем разделе теоремы Форда – Фалкерсона следут, что мощность максимального потока равна минимальной пропускной способности разрезов в сети. В общем случае алгоритм Форда – Фалкерсона *не строит* максимальный поток за конечное число шагов (см. следующее упражнение). Но с его помощью можно строить потоки с мощностями, сколь угодно близкими к максимальной. Для этого достаточно сделать пропускные способности дуг рациональными, чуть-чуть уменьшив их, и затем применить алгоритм. Он построит поток, мощность которого равна минимальной пропускной способности разрезов в новой сети. А она мало отличается от минимальной пропускной способности разрезов с исходной сети.

Упражнение*. Привести пример, когда алгоритм Форда – Фалкерсона работает бесконечно долго, а мощность создаваемого им потока даже не приближается к максимально возможной.

У к а з а н и е. Соответствующая сеть и пропускные способности дуг изображены на рис. 12.2. Нужно только определенным образом подобрать положительное число e и организовать работу алгоритма, используя его неоднозначность.



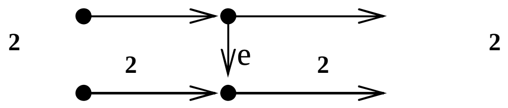


Рис. 12.2

§ 13. Задачи, сводящиеся к алгоритму Форда – Фалкерсона

Потоки в сетях с несколькими источниками и стоками

Пусть в сети G есть несколько источников $s_1, \ldots, s_n$, несколько стоков $t_1, \ldots, t_m$ и заданы пропускные способности всех дуг. Ставится задача построения допустимого потока максимальной мощности.

Для решения этой задачи определим новую сеть $\tilde{G}$, которая получается добавлением к сети G фиктивного источника s и фиктивного стока t. Вершина s связывается со старыми источниками s_i дугами (s, s_i) с бесконечными пропускными способностями, а вершина t связывается со старыми стоками t_j дугами (t_j, t) с бесконечными пропускными способностями. После этого считается, что в сети $\tilde{G}$ есть один источник s и один сток t. Для нее строится максимальный допустимый поток с помощью алгоритма Форда – Фалкерсона. Он определяет максимальный поток в исходной сети.

Потоки в сетях, имеющих пропускные способности вершин

Рассматривается сеть $G = (V, E)$ с одним источником s и одним стоком t. В ней каждой дуге $e \in E$ поставлена в соответствие пропускная способность $c(e) > 0$, а каждой вершине $v \in V$ – пропускная способность $d(v) > 0$. Поток f в такой сети называется допустимым, если

а) для любой дуги e выполняется условие $0 \le f(e) \le c(e)$;

б) для любой вершины v выполняются условия:

$$\sum_{u \in V^+(v)} f(v,u) \le c(v), \qquad V^+(v) = \{u \in V \mid (v,u) \in E\},$$

$$\sum_{u \in V^-(v)} f(u,v) \le c(v), \qquad V^-(v) = \{u \in V \mid (u,v) \in E\}.$$

Ставится задача найти допустимый поток максимальной мощности.

Чтобы решить эту задачу, нужно из сети G сделать новую сеть G' следующим образом. Каждую вершину v сети G заменим на пару вершин v', v'', которые соединим дугой (v', v'') с пропускной способностью $c(v', v'') = d(v)$. Затем каждую дугу $(u,v) \in E$ заменим на дугу (u'', v') с пропускной способностью $c(u'', v') = c(u,v)$. Для новой сети G' найдем максимальный допустимый поток f. Он же будет максимальным и для исходной сети.

П р и м е р. На рис. 13.1 изображена сеть G с пропускными способностями дуг и соответствующая ей модифицированная сеть G'.

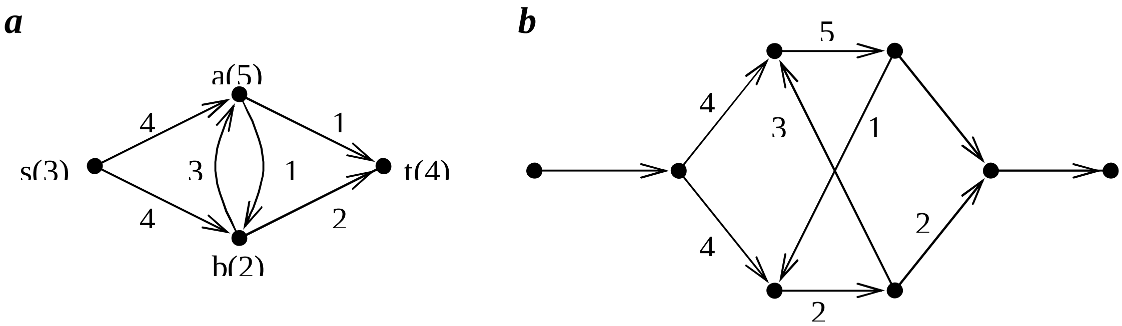


Рис. 13.1

Потоки в сетях, имеющих неориентированные ребра

Предположим, что в графе G с одним источником s и одним стоком t имеются как ориентированные дуги, так и неориентированные ребра. При этом каждая дуга e и каждое ребро e имеют пропускную способность $c(e) > 0$. Ставится задача ориентировать все ребра так, чтобы по полученной ориентированной сети можно было пропустить допустимый поток максимально возможной мощности. Например, такая задача возникает, если требуется пропустить максимальный транспортный поток из пункта s в пункт t по имеющейся железнодорожной сети.

Для решения этой задачи каждое неориентированное ребро (u,v) из графа G заменяют на пару дуг (u,v) и (v,u), каждая из которых имеет пропускную способность ребра (u,v). Получается ориентированная сеть $\vec{G}$. Для нее находят максимальный допустимый поток f. После этого каждое ребро (u,v) графа G ориентируют по следующему правилу: если $f(u,v) \ge f(v,u)$, то оно получает ориентацию (u,v), а если $f(u,v) < f(v,u)$, то оно получает ориентацию (v,u). Затем по полученной дуге пропускают поток, равный абсолютному значению разности потоков по дугам (u,v) и (v,u). А на ориентированных дугах графа G поток f оставляют без изменений.

П р и м е р. На рис. 13.2 изображены a) исходный граф G, b) построенная по нему ориентированная сеть $\vec{G}$ вместе с максимальным допустимым потоком и, наконец, c) ориентированный граф G вместе с максимальным потоком.

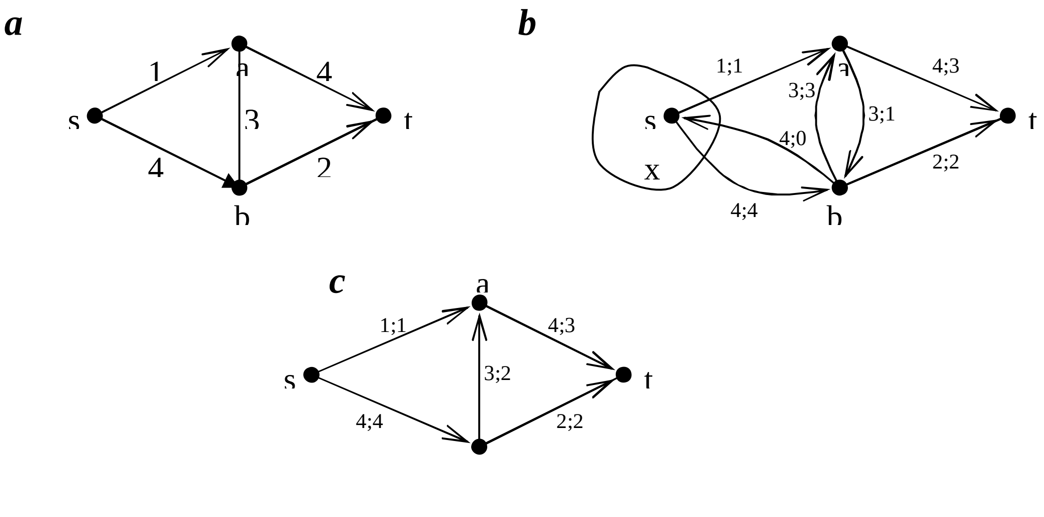


Рис. 13.2

Сети с двусторонним ограничением потока по дугам

Рассмотрим сеть $G = (V, E)$, у которой каждой дуге $e \in E$ поставлены в соответствие два числа, $c_1(e)$ и $c_2(e)$, причем $c_2(e) \ge c_1(e) \ge 0$. Поток f в такой сети называется допустимым, если он удовлетворяет условию $c_1(e) \le f(e) \le c_2(e)$ на всех дугах e. Конечно, такие потоки не всегда существуют (приведите пример). Поэтому вначале установим необходимое условие существования допустимых потоков.

Возьмем любой разрез $(X,\bar{X})$ в сети G. Определим для него нижнюю пропускную способность $c_1(X,\bar{X})$ и верхнюю пропускную способность $c_2(X,\bar{X})$ формулами

$$c_1(X,\bar{X}) = \sum_{e\in E(X,\bar{X})} c_1(e) - \sum_{e\in E(\bar{X},X)} c_2(e),$$

$$c_2(X,\bar{X}) = \sum_{e\in E(X,\bar{X})} c_2(e) - \sum_{e\in E(\bar{X},X)} c_1(e),$$

где $E(X,\bar{X})$ – множество всех дуг, начинающихся в X и заканчивающихся в $\bar{X}$, а $E(\bar{X},X)$ – множество всех дуг, начинающихся в $\bar{X}$ и заканчивающихся в X. Определим также нижнюю пропускную способность сети $c_1(G)$ как максимальное значение $c_1(X,\bar{X})$ по всем разрезам и верхнюю пропускную способность сети $c_2(G)$ как минимальное значение $c_2(X,\bar{X})$ по всем разрезам.

Напомним, что в силу леммы 2 из § 10 мощность потока f равна его дивергенции на любом разрезе:

$$M(f) = div\, f(X,\bar{X}) = \sum_{e\in E(X,\bar{X})} f(e) - \sum_{e\in E(\bar{X},X)} f(e).$$

Поэтому для любого допустимого потока f выполняется условие $c_1(X,\bar{X}) \le M(f) \le c_2(X,\bar{X})$. Следовательно, $c_1(G) \le M(f) \le c_2(G)$. Таким образом, необходимое условие существования допустимого потока состоит в том, что $c_1(G) \le c_2(G)$.

Элементарную цепь $(v_0, v_1, \ldots, v_n)$ будем называть увеличивающей для потока f, если $f(e) < c_2(e)$ на всякой прямой дуге e из цепи и $f(e) > c_1(e)$ на всякой обратной дуге e из цепи. Ту же цепь будем называть уменьшающей для f, если $f(e) > c_1(e)$ на всякой прямой дуге и $f(e) < c_2(e)$ на всякой обратной дуге. По определению элементарной цепи вершина v_0 должна быть источником, а вершина v_n – стоком. Нетрудно видеть, что если у допустимого потока f есть увеличивающая цепь, то его мощность может быть увеличена (с сохранением допустимости), а если есть уменьшающая цепь, то его мощность может быть уменьшена.

***Упражнение* 1.** Сформулировать и доказать теорему типа Форда – Фалкерсона для потоков *минимальной* мощности и *максимальной* мощности в сети с двусторонним ограничением потока по дугам.

***Упражнение* 2.** Разработать для таких сетей алгоритм типа алгоритма Форда – Фалкерсона построения потока минимальной мощности и максимальной мощности.

Замечание. В действительности по сети с двусторонним ограничением потока по дугам можно построить вспомогательную сеть, в которой все нижние пропускные способности дуг нулевые. Тогда во вспомогательной сети существует нулевой допустимый поток. Начиная с него, можно строить максимальный поток во вспомогательной сети. А последний будет определять максимальный допустимый поток в исходной сети. Подробности см. в [2], с. 327.

§ 14. Потоки минимальной стоимости

Продолжим изучение сети $G=(V,E)$. Предположим, что каждой дуге $e\in E$ поставлены в соответствие два числа: пропускная способность $c(e)>0$ и *удельная стоимость* $d(e)$. Пропускная способность истолковывается как максимальный поток (например, грузов), который можно пропустить по данной дуге, а удельная стоимость – как стоимость доставки единицы потока (перевозки единицы груза). При этом не исключается случай отрицательной удельной стоимости. Если в сети G пропущен поток f, то его стоимостью называется число

$$S(f)=\sum_{e\in E} d(e)\,f(e).$$

Стоимость линейно зависит от потока. В частности, при сложении потоков их стоимости тоже складываются.

Напомним, что поток $f:E\to\mathbb{R}$ называется допустимым, если он удовлетворяет неравенствам $0\le f(e)\le c(e)$ для всякой дуги $e\in E$. Для сети $\boldsymbol{G}$ с фиксированными пропускными способностями и удельными стоимостями дуг ставится задача нахождения допустимого потока $\boldsymbol{f}$, имеющего заданную мощность $\boldsymbol{m}$ и минимально возможную стоимость $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{f})$.

При решении этой задачи полезно использовать так называемый *граф модифицированных стоимостей* $\boldsymbol{G_f} = (\boldsymbol{V}, \boldsymbol{E_f})$, который строится по исходной сети $\boldsymbol{G}$ и любому допустимому потоку $\boldsymbol{f}$ в ней. Множество вершин графа $\boldsymbol{G_f}$ совпадает с множеством вершин сети $\boldsymbol{G}$. А из каждой дуги сети $\boldsymbol{G}$ делается одна или две дуги графа $\boldsymbol{G_f}$ по следующим правилам.

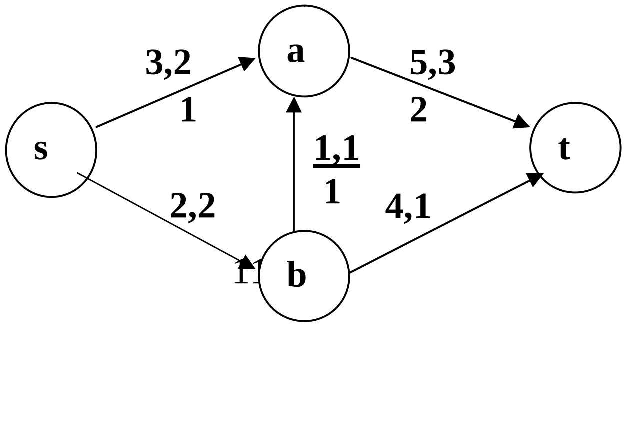
1) Если $\boldsymbol{e} \in \boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{e}) = \boldsymbol{0}$, то та же самая дуга $\boldsymbol{e}$ рисуется в графе $\boldsymbol{G_f}$. Ей присваиваются такая же пропускная способность $\boldsymbol{c_f}(\boldsymbol{e}) = \boldsymbol{c}(\boldsymbol{e})$ и удельная стоимость $\boldsymbol{d_f}(\boldsymbol{e}) = \boldsymbol{d}(\boldsymbol{e})$.

2) Если $\boldsymbol{e} = (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \in \boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{e}) = \boldsymbol{c}(\boldsymbol{e})$, то в графе $\boldsymbol{G_f}$ рисуют обратную дугу $\overline{\boldsymbol{e}} = (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u})$ с пропускной способностью $\boldsymbol{c_f}(\overline{\boldsymbol{e}}) = \boldsymbol{c}(\boldsymbol{e})$ и удельной стоимостью $\boldsymbol{d_f}(\overline{\boldsymbol{e}}) = -\boldsymbol{d}(\boldsymbol{e})$.

3) Если $\boldsymbol{e} = (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \in \boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{0} < \boldsymbol{f}(\boldsymbol{e}) < \boldsymbol{c}(\boldsymbol{e})$, то в графе $\boldsymbol{G_f}$ рисуют две дуги: исходную дугу $\boldsymbol{e} = (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ и обратную дугу $\overline{\boldsymbol{e}} = (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u})$; их пропускные способности задаются числами $\boldsymbol{c_f}(\boldsymbol{e}) = \boldsymbol{c}(\boldsymbol{e}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{e})$ и $\boldsymbol{c_f}(\overline{\boldsymbol{e}}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{e})$, а удельные стоимости – числами $\boldsymbol{d_f}(\boldsymbol{e}) = \boldsymbol{d}(\boldsymbol{e})$ и $\boldsymbol{d_f}(\overline{\boldsymbol{e}}) = -\boldsymbol{d}(\boldsymbol{e})$.

Очевидно, граф модифицированных стоимостей тоже является сетью.

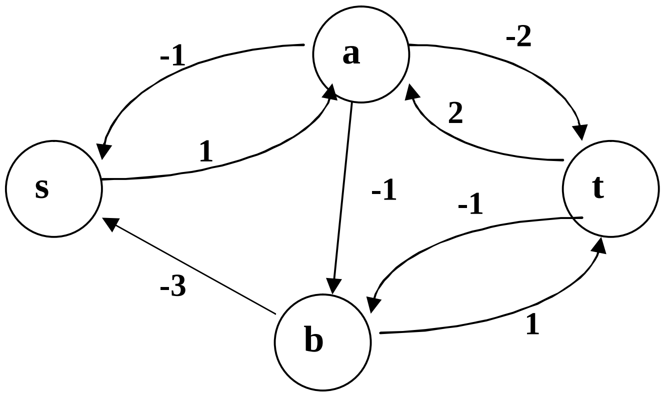
П р и м е р. На рис. 14.1 изображена сеть $\boldsymbol{G} = (\boldsymbol{V}, \boldsymbol{E})$, в которой пропущен допустимый поток $\boldsymbol{f}$. Возле каждой дуги стоят три числа: сверху $\boldsymbol{c}(\boldsymbol{e})$ и $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{e})$, а снизу $\boldsymbol{d}(\boldsymbol{e})$.



3 **1**

Рис. 14.1

Соответствующий граф модифицированных стоимостей $G_f = \left(V, E_f\right)$ имеет вид:



Рядом с каждой дугой помечена ее удельная стоимость. Образно выражаясь, граф G_f показывает, в каком направлении и за какую цену можно изменять грузопоток, если поток f уже задан.

Упражнение. Доказать, что каждому простому ориентированному пути в графе G_f, ведущему из источника в сток, соответствует увеличивающая цепь в сети G (определение увеличивающей цепи дано в § 11).

Для всякого потока h в графе G_f определим соответствующий поток $\overline{h}$ в сети G по формуле

$$\overline{h}(e) = h(e) - h(\overline{e}).$$

Здесь e – произвольная дуга сети G, а в разности $h(e) - h(\overline{e})$ может отсутствовать $h(e)$ или $h(\overline{e})$, если в графе G_f нет дуги e или $\overline{e}$.

Заметим, что для любой вершины $v \in V$ выполняется равенство

$$div\,\overline{h}(v) = div\,h(v).$$

Поэтому $\overline{h}$ действительно является потоком.

Лемма 1. *Пусть* f *— допустимый поток в сети* $G = (V, E)$, h *– допустимый поток в графе модифицированных стоимостей* $G_f = (V, E_f)$ *и* $\overline{h}$ *– определенный выше поток в графе* G*, построенный по потоку* h*. Тогда поток* $f + \overline{h}$ *допустим в* G*, причем* $M(\overline{h}) = M(h)$ *и* $S(\overline{h}) = S(h)$.

Доказательство. В силу допустимости потока h в графе G_f для любой дуги $e \in E$ справедливы неравенства $0 \le h(e) \le c(e) - f(e)$ и $0 \le h(\overline{e}) \le f(e)$. Поэтому $0 \le f(e) + \overline{h}(e) \le c(e)$, что означает допустимость потока $f + \overline{h}$. Из равенства $div\,\overline{h}(v) = div\,h(v)$ вытекает, что $M(\overline{h}) = M(h)$. Наконец

$$S(\overline{h}) = \sum_{e \in E} \big(h(e) - h(\overline{e})\big) d(e) = \sum_{e' \in E_f} h(e')\, d_f(e') = S(h). \ \blacksquare$$

Для любых двух допустимых потоков f, g в сети G определим новый поток $h = g \ominus f$ в графе G_f следующим образом. Если $e \in E$ и $g(e) > f(e)$, то автоматически $f(e) < c(e)$, и, следовательно, в графе G_f тоже есть дуга e. В этом случае положим $h(e) = g(e) - f(e)$. Если $e = (u, v) \in E$ и $g(e) < f(e)$, то тогда $f(e) > 0$, и в графе G_f есть обратная дуга $\overline{e} = (v, u)$. В этом случае положим $h(\overline{e}) = f(e) - g(e)$. На всех остальных дугах графа G_f значение функции $h = g \ominus f$ считается равным нулю. Очевидно, разность $g \ominus f$ всегда неотрицательна. Поэтому, вообще говоря, $g \ominus f \ne -f \ominus g$. Более того, функции $g \ominus f$ и $f \ominus g$ определены на *разных* графах G_f и G_g!

Отметим, что для любых допустимых потоков f, g в сети G и для любой вершины $v \in V$ выполняется равенство

$$div(g \ominus f)(v) = div(g - f)(v). \qquad (1)$$

Оно вытекает непосредственно из определения $g \ominus f$. Дело в том, что при любых ориентациях дуг, инцидентных вершине v, и любых значениях разности $g - f$ на этих дугах выражения для $div(g - f)(v)$ и $div(g \ominus f)(v)$ состоят из одних и тех же слагаемых. Из (1) следует, что $div(g \ominus f)(v) = 0$ во всех внутренних вершинах v. Значит, $g \ominus f$ является потоком.

Лемма 2. *Для любых двух допустимых потоков* f, g *в сети* $G = (V, E)$ *поток* $h = g \ominus f$ *в графе модифицированных стоимостей* $G_f = (V, E_f)$ *тоже допустим. Для него справедливы равенства* $M(h) = M(g) - M(f)$ *и* $S(h) = S(g) - S(f)$.

Доказательство. Рассмотрим произвольную дугу $e \in E$. В силу допустимости потоков f, g, если $g(e) > f(e)$, то $h(e) = g(e) - f(e) \le$ $\le c(e) - f(e)$, а если $g(e) < f(e)$, то $h(\bar{e}) = f(e) - g(e) \le f(e)$. Отсюда видно, что поток h допустим. Из (1) вытекает, что мощность потока h равна $M(g - f) = M(g) - M(f)$. Далее, из определения h следует, что для любой дуги $e \in E$ выполняется равенство $(g(e) - f(e))d(e) = h(e)d_f(e) + h(\bar{e})d_f(\bar{e})$ (в правой части которого одно из слагаемых нулевое или вообще отсутствует). Поэтому

$$S(h) = \sum_{e' \in E_f} h(e')d_f(e') = \sum_{e \in E} (g(e) - f(e))d(e) =$$

$$= S(g - f) = S(g) - S(f). \qquad \blacksquare$$

Удельной стоимостью пути (или цикла) в графе будем называть сумму удельных стоимостей входящих в него дуг.

Упражнение. Показать, что если f, g и $h = g \ominus f$ – потоки, рассматриваемые в лемме 2, а $\bar{h}$ – поток, рассматриваемый в лемме 1, то $f + \bar{h} = g$.

Теорема 1 (критерий оптимальности потока фиксированной мощности). *Пусть в сети* G *с заданными пропускными способностями и* *удельными стоимостями дуг есть только один источник* $\boldsymbol{s}$ *и только один сток* $\boldsymbol{t}$. *Тогда допустимый поток* $\boldsymbol{f}$ *в сети* $\boldsymbol{G}$ *имеет минимальную стоимость среди всех допустимых потоков той же мощности в том и только том случае, когда в графе* $\boldsymbol{G_f}$ *нет ориентированных циклов с отрицательной удельной стоимостью*.

Доказательство. Предположим, что в графе $\boldsymbol{G_f}$ есть ориентированный цикл с отрицательной удельной стоимостью. Обозначим через r минимальную пропускную способность дуг этого цикла. Число r положительно. Пропустим по циклу элементарный поток $\boldsymbol{h}$, который принимает значение r на всех дугах цикла и нулевое значение на остальных дугах. Легко видеть, что этот поток допустим в сети $\boldsymbol{G_f}$, имеет отрицательную стоимость, а его мощность равна нулю. Ему соответствует поток $\boldsymbol{\bar{h}}$ в сети $\boldsymbol{G}$. По лемме 1 поток $\boldsymbol{f} + \boldsymbol{\bar{h}}$ допустим, имеет мощность $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{f})$, а его стоимость строго меньше $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{f})$. Значит, стоимость потока $\boldsymbol{f}$ не минимальна.

С другой стороны, допустим, что поток $\boldsymbol{f}$ не оптимален. Тогда существует такой допустимый поток $\boldsymbol{g}$ в сети $\boldsymbol{G}$, что $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{g}) = \boldsymbol{M}(\boldsymbol{f})$, а $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{g}) = \boldsymbol{M}(\boldsymbol{f})$. Напомним, что $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{f}) = \boldsymbol{div}\, \boldsymbol{f}(\boldsymbol{s}) = -\boldsymbol{div}\, \boldsymbol{f}(\boldsymbol{t})$. Поэтому разность $\boldsymbol{g} - \boldsymbol{f}$ является циркуляцией. В силу (1) поток $\boldsymbol{h} = \boldsymbol{g}$ у $\boldsymbol{f}$ в графе $\boldsymbol{G_f}$ тоже является циркуляцией. По лемме 2 ее стоимость $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{h}) = \boldsymbol{S}(\boldsymbol{g}) - \boldsymbol{S}(\boldsymbol{f})$ отрицательна. Но сама циркуляция $\boldsymbol{h}$ положительна. Она раскладывается в сумму элементарных положительных потоков вдоль ориентированных циклов (теорема 1 из § 10). Стоимость $\boldsymbol{h}$ равна сумме стоимостей этих элементарных потоков. Следовательно, хотя бы один из элементарных потоков имеет отрицательную стоимость. Но тогда и соответствующий цикл имеет отрицательную удельную стоимость. ■

Следствие 1. *В условиях теоремы* 1 *нулевой поток в сети* $\boldsymbol{G}$ *тогда и только тогда имеет минимальную стоимость среди всех допустимых потоков нулевой мощности, когда в* $\boldsymbol{G}$ *нет ориентированных циклов отрицательной удельной стоимости.*

Оно вытекает непосредственно из теоремы 1, потому что граф модифицированных стоимостей G_0, отвечающий нулевому потоку, совпадает с G.

Следствие 2. *В условиях теоремы* 1 *допустимый поток* f *в сети* G *имеет минимальную стоимость среди всех допустимых потоков той же мощности в том и только том случае, когда не существует элементарного потока* h *вдоль неориентированного цикла в сети* G*, который удовлетворял бы следующим двум условиям: а) поток* $f+h$ *допустим и б)* $S(h)<0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Леммы 1 и 2 позволяют отождествить элементарные потоки h, удовлетворяющие условию а), с элементарными допустимыми потоками в графе G_f. Поэтому следствие 2 равносильно теореме 1. ■

Упражнение. Доказать следующий аналог теоремы Форда – Фалкерсона. *Допустимый поток* f *в сети* G *максимален в том и только том случае, когда в графе* G_f *существует такой разрез* $(X,\bar{X})$*, что* $E(X,\bar{X})=\varnothing$.

Упражнение. Разработать соответствующий алгоритм построения максимального потока с использованием графов модифицированных стоимостей $f(e)$.

§ 15. Алгоритм Басакера – Гоуэна

Пусть задана сеть $G=(V,E)$ с одним источником s и одним стоком t, в котором каждой дуге $e \in E$ поставлены в соответствие два числа: пропускная способность $c(e)>0$ и удельная стоимость $d(e)$. Требуется найти допустимый поток f заданной мощности $M(f)=m$, имеющий минимально возможную стоимость $S(f)$. Для решения этой задачи предлагается следующий алгоритм. На каждом его шаге находится наиболее дешевый простой ориентированный путь из s в t в графе модифицированных стоимостей G_f. По леммам 1, 2 из предыдущего параграфа этому пути соответствует увеличивающая элементарная цепь минимальной удельной стоимости в сети $\boldsymbol{G}$. Затем по этой цепи пропускается максимальный элементарный поток, который можно добавить к имеющемуся потоку $\boldsymbol{f}$, не нарушая его допустимости.

Алгоритм Басакера – Гоуэна
(Busaker – Gowen)

Шаг 0. В сети $\boldsymbol{G}$ пропускаем нулевой поток $\boldsymbol{f}$. Его мощность и стоимость равны нулю.

Шаг 1. Строим граф модифицированных стоимостей $\boldsymbol{G_f}$.

Шаг 2. Если в $\boldsymbol{G_f}$ нет ни одного ориентированного пути из $\boldsymbol{s}$ в $\boldsymbol{t}$, то мощность потока $\boldsymbol{f}$ не может быть увеличена, и задача не имеет решения. В противном случае среди всех простых путей из $\boldsymbol{s}$ в $\boldsymbol{t}$ в графе $\boldsymbol{G_f}$ находим путь с минимальной удельной стоимостью. Обозначим его $\boldsymbol{P_f}$.

Шаг 3. В исходной сети $\boldsymbol{G}$ определяем неориентированную цепь $\boldsymbol{P}$, соответствующую пути $\boldsymbol{P_f}$. Для всех дуг $\boldsymbol{e}$ из цепи $\boldsymbol{P}$ вычисляем числа $\mathrm{r}(\boldsymbol{e})$: на прямых дугах $\mathrm{r}(\boldsymbol{e})=\boldsymbol{c}(\boldsymbol{e})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{e})$, а на обратных дугах $\mathrm{r}(\boldsymbol{e})=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{e})$. Затем находим $\mathrm{r}=\mathbf{min}\left\{\mathrm{r}(\boldsymbol{e}), \boldsymbol{m}-\boldsymbol{M}(\boldsymbol{f}) \middle| \boldsymbol{e}\ \text{Î}\ \boldsymbol{P}\right\}$. На прямых дугах цепи $\boldsymbol{P}$ увеличиваем поток $\boldsymbol{f}$ на r, а на обратных дугах уменьшаем поток $\boldsymbol{f}$ на r. При этом мощность потока увеличивается на r.

Шаг 4. Если мощность нового потока меньше $\boldsymbol{m}$, то переходим к шагу 1. Если же она равна $\boldsymbol{m}$, то в сети построен оптимальный поток мощности $\boldsymbol{m}$.

З а м е ч а н и е. Для решения задачи о нахождении *максимального потока минимальной стоимости* достаточно в приведенном алгоритме взять $\boldsymbol{m}=\text{¥}$.

П р и м е р. Построить поток мощности $\boldsymbol{m}=\mathbf{3}$ с минимальной стоимостью в сети $\boldsymbol{G}$, изображенной на рис. 15.1.

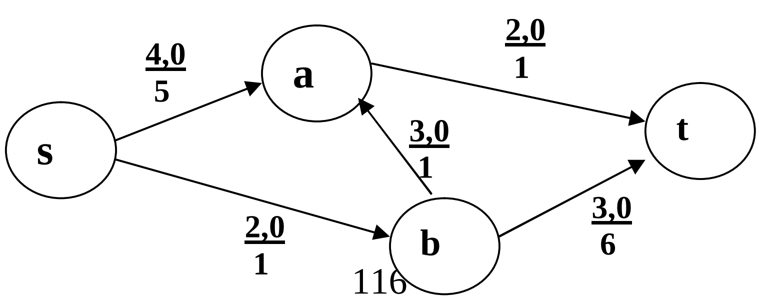


Рис. 15.1

Решение

1. Пропускаем в сети поток $\boldsymbol{f} \equiv \mathbf{0}$.

2. Строим граф модифицированных стоимостей $\boldsymbol{G_f}$. Он изображен на рис. 15.2.

3. Находим наиболее дешевый простой путь $\boldsymbol{P_f}$ из $\boldsymbol{s}$ в $\boldsymbol{t}$. Он имеет вид $\boldsymbol{P_f} : \boldsymbol{s} \to \boldsymbol{b} \to \boldsymbol{a} \to \boldsymbol{t}$. Его удельная стоимость равна 3.

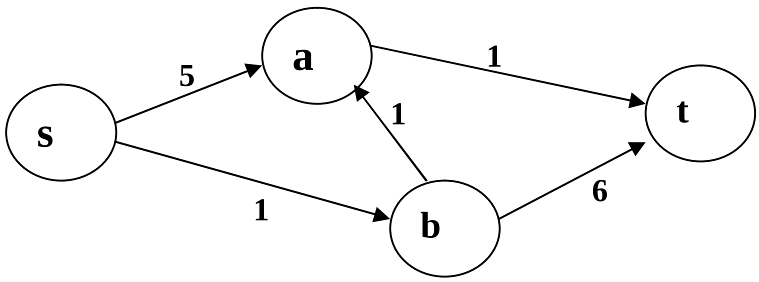
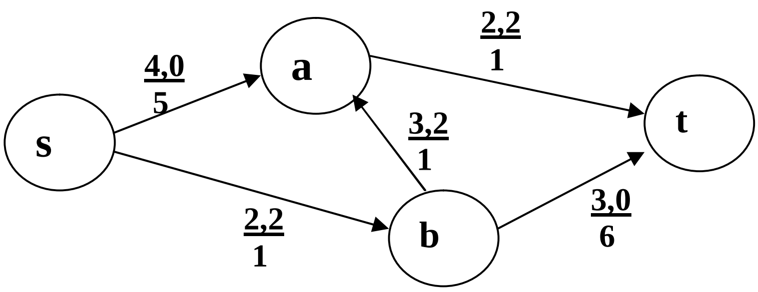
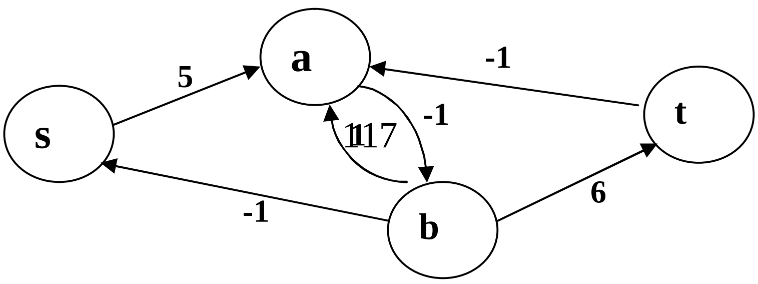


Рис. 15.2

4. Соответствующая цепь $\boldsymbol{P}$ в сети $\boldsymbol{G}$ имеет вид $\boldsymbol{P} : \boldsymbol{s} \to \boldsymbol{b} \to \boldsymbol{a} \to \boldsymbol{t}$. Для нее $\rho = \mathbf{min}\{\mathbf{2}, \mathbf{3}, \mathbf{2}, \mathbf{3} - \mathbf{0}\} = \mathbf{2}$. Все дуги цепи $\boldsymbol{P}$ прямые. Увеличивая поток по ним на $\mathbf{2}$, получаем новый поток $\boldsymbol{f}$ мощности $\mathbf{2}$:

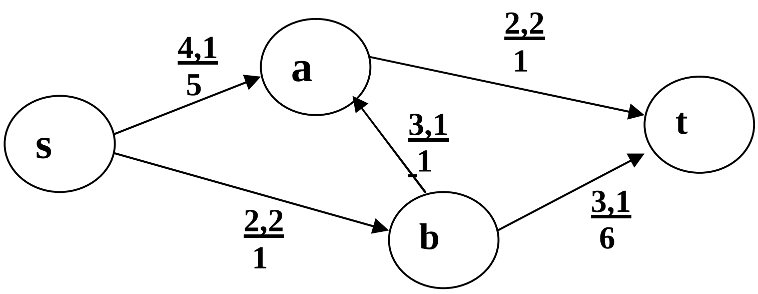


5. Мощность нового потока $\boldsymbol{f}$ меньше $\boldsymbol{m} = \mathbf{3}$. Поэтому переходим к шагу 1 и строим для него граф модифицированных стоимостей $\boldsymbol{G_f}$.



6. Находим в нем простой путь $\boldsymbol{P_f}$ из $\boldsymbol{s}$ в $\boldsymbol{t}$ с минимальной удельной стоимостью. Он имеет вид $\boldsymbol{P_f : s \to a \to b \to t}$, а его удельная стоимость равна $\mathbf{10}$.

7. Этому пути в исходной сети соответствует цепь $\boldsymbol{P : s \to a \leftarrow b \to t}$. Для нее $\rho = \mathbf{min}\{\mathbf{4 - 0, 2, 3 - 0, 3 - 2}\} = \mathbf{1}$. Поток $\boldsymbol{f}$ на прямых дугах $(\boldsymbol{s,a})$ и $(\boldsymbol{b,t})$ увеличиваем на единицу, а на обратной дуге $(\boldsymbol{b,a})$ уменьшаем на единицу. При этом мощность нового потока становится равной $\mathbf{3}$.



8. Необходимая мощность достигнута. Искомый поток построен. Вычисляем его стоимость: $\boldsymbol{S(f)} = \mathbf{5 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 6 \cdot 1 = 16}$.

Упражнение. Для сети, изображенной на рис. 14, построить поток минимальной стоимости среди потоков максимальной мощности.

Теорема 1. *Если в сети* $\boldsymbol{G}$ *нет ориентированных циклов с отрицательной удельной стоимостью, то всякий поток, построенный с помощью алгоритма Басакера – Гоуэна, обладает минимальной стоимостью среди потоков равной ему мощности.*

Доказательство проводится методом математической индукции по числу шагов алгоритма. На нулевом шаге алгоритма строится нулевой поток $\boldsymbol{f}$. Он оптимален по следствию 1 из теоремы 1 предыдущего параграфа.

Предположим, что некоторый допустимый поток f имеет наименьшую стоимость среди всех равномощных ему потоков. Рассмотрим соответствующий граф модифицированных стоимостей G_f. По теореме 1 из предыдущего параграфа в нем нет ориентированных циклов с отрицательной удельной стоимостью. Если один путь в графе G_f идет из s в t, а другой путь идет из t в s, то их объединение образует ориентированный цикл. Сумма удельных стоимостей этих путей равна удельной стоимости указанного цикла и потому неотрицательна.

Пусть в графе G_f найден простой путь P_f из s в t с минимальной удельной стоимостью, которая равна d, и вдоль этого пути пропущен элементарный допустимый поток h мощности $\rho > 0$. Он порождает элементарный поток $\bar{h}$ в сети G с теми же мощностью и стоимостью. Нам достаточно всего лишь убедиться в оптимальности потока $f + \bar{h}$.

Допустим противное: в сети G существует допустимый поток g, для которого выполняются условия $M(g) = M(f + \bar{h})$ и $S(g) < S(f + \bar{h})$. Рассмотрим поток $h' = g \ominus f$ в графе G_f. По лемме 2 из предыдущего параграфа этот поток допустим, его мощность равна $M(h') = M(g) - M(f) = M(\bar{h}) = M(h)$, а для его стоимости выполняются соотношения

$$S(h') = S(g) - S(f) < S(\bar{h}) = S(h).$$

По теореме 2 из § 10 поток h' раскладывается в сумму элементарных положительных потоков в графе G_f. Запишем это разложение в виде

$$h' = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i + \sum_{i=1}^{k} \varphi'_i + \sum_{j=1}^{m} \psi_j,$$

где φ_i – потоки вдоль некоторых простых путей C_i из s в t, φ'_i – потоки вдоль некоторых простых путей C'_i из t в s, а ψ_j – потоки вдоль циклов. По построению для каждого пути C_i справедливо неравенство

$$\text{удельная стоимость } C_i \geq d.$$

Кроме того, для каждого пути C'_i объединение путей P_f и C'_i образует ориентированный цикл. Значит,

$$\text{удельная стоимость } P_f + \text{удельная стоимость } C_i' \geq 0,$$

т. е.

$$\text{удельная стоимость } C_i' \geq -d. \qquad (1)$$

Очевидно, стоимость каждого потока φ_i равна произведению его мощности на удельную стоимость соответствующего пути. Отсюда следует, что

$$S(\varphi_i) \geq M(\varphi_i)d. \qquad (2)$$

А так как φ_i' – поток вдоль пути из t в s, то его стоимость вычисляется по формуле:

$$S(\varphi_i') = -M(\varphi_i') \times \text{удельная стоимость } C_i'.$$

Отсюда, принимая во внимание (1), мы заключаем, что

$$S(\varphi_i') \geq M(\varphi_i') \cdot (-d). \qquad (3)$$

Тогда

$$\sum_{i=1}^{n} S(\varphi_i) + \sum_{i=1}^{k} S(\varphi_i') + \sum_{j=1}^{m} S(\psi_j) = S(h') < S(h) = M(h)d = M(h')d =$$
$$= \left(\sum_{i=1}^{n} M(\varphi_i) + \sum_{i=1}^{k} M(\varphi_i') \right) \cdot d = \sum_{i=1}^{n} M(\varphi_i)d + \sum_{i=1}^{k} M(\varphi_i')d \leq$$
$$\leq \sum_{i=1}^{n} S(\varphi_i) + \sum_{i=1}^{k} S(\varphi_i'),$$

где последнее неравенство следует из (2) и (3). Значит, хотя бы один из потоков ψ_j имеет отрицательную стоимость. Тогда соответствующий ориентированный цикл имеет отрицательную удельную стоимость, что вступает в противоречие с оптимальностью потока f. Доказательство закончено. ■

Теорема 1 показывает, что алгоритм Басакера – Гоуэна имеет смысл применять только к таким сетям G, в которых нет ориентированных циклов отрицательной удельной стоимости. Выполнение или невыполнение этого условия можно проверять с помощью алгоритма Флойда.

Для поиска самого дешевого пути из s в t в графе G_f (шаг 2 алгоритма Басакера – Гоуэна) тоже можно использовать алгоритм Флойда, хотя на практике для достаточно простых сетей этот путь часто можно определить “на глазок”, безо всяких алгоритмов.

Упражнение. Доказать, что если пропускные способности всех дуг рациональны, то алгоритм Басакера – Гоуэна строит оптимальный поток мощности m за конечное число шагов.

Упражнение*. Верно ли это в общем случае?

Очевидно, алгоритм Басакера – Гоуэна непригоден, если в сети G есть циклы отрицательной удельной стоимости. Кроме того, при больших значениях задаваемой мощности m этот алгоритм работает слишком долго. В указанных случаях оптимальный поток можно строить другим способом, с помощью *алгоритма Клейна*.

§ 16. Алгоритм Клейна

Как и в предыдущем разделе, рассматривается сеть G с одним источником s и одним стоком t, в которой для каждой дуги e определены пропускная способность $c(e)>0$ и удельная стоимость $d(e)$. Требуется найти допустимый поток заданной мощности m с минимальной стоимостью.

Алгоритм решения этой задачи, предложенный М. Клейном, основан на критерии оптимальности потока фиксированной мощности (теореме 11.3). Его сущность заключается в том, что вначале нужно найти *какой-нибудь* допустиый поток f мощности m, а затем последовательно уменьшать его стоимость, перестраивая вдоль имеющихся циклов с отрицательной удельной стоимостью. При этих перестройках мощность потока f будет сохраняться. В тот момент, когда циклы с отрицательной удельной стоимостью исчезнут, поток f станет оптимальным.

Алгоритм Клейна (Klein)

Шаг 0. Находим любой допустимый поток f мощности $M(f)=m$. Это можно сделать подбором или с помощью алгоритма Форда – Фалкерсона (в котором вычисления нужно проводить до тех пор, пока поток не достигнет мощности m). Если в сети не существует допустимого потока мощности m, то задача не имеет решения.

Шаг 1. Строим граф модифицированных стоимостей G_f. Если в нем нет ориентированных циклов с отрицательной удельной стоимостью, то задача решена: построенный поток f имеет минимальную стоимость среди потоков мощности m. В противном случае находим в графе G_f ориентированный цикл P_f с отрицательной удельной стоимостью (например, с помощью алгоритма Флойда).

Шаг 2. В исходной сети G определяем неориентированный цикл P, соответствующий циклу P_f. Все дуги e Î P разбиваются на два класса: *прямые*, для которых e Î P_f, и *обратные*, для которых $\bar{e}$ Î P_f (где $\bar{e}$ – дуга, противоположная e). Вычисляем $r = \mathbf{min}\{r(e) \mid e$ Î $P\}$, где $r(e) = c(e) - f(e)$ на прямых дугах и $r(e) = f(e)$ на обратных дугах.

Шаг 3. На прямых дугах цикла P увеличиваем поток f на r, а на обратных дугах цикла P уменьшаем поток f на r. Переходим к шагу 1.

П р и м е р. Построить поток мощности $m = 5$ с минимальной стоимостью в сети, изображенной на рис. 16.1.

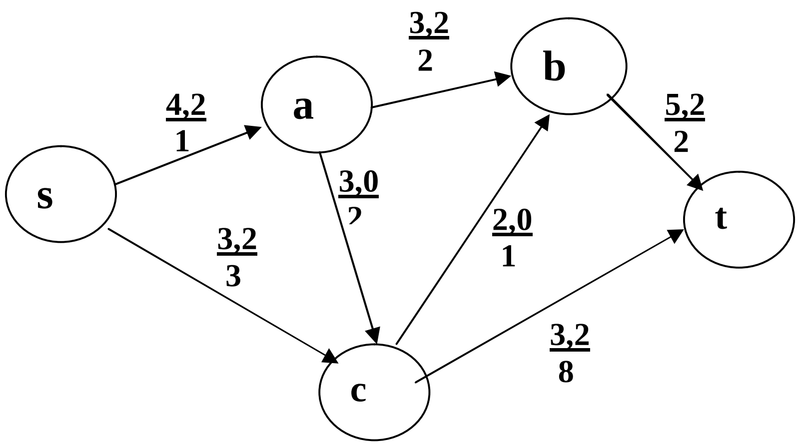
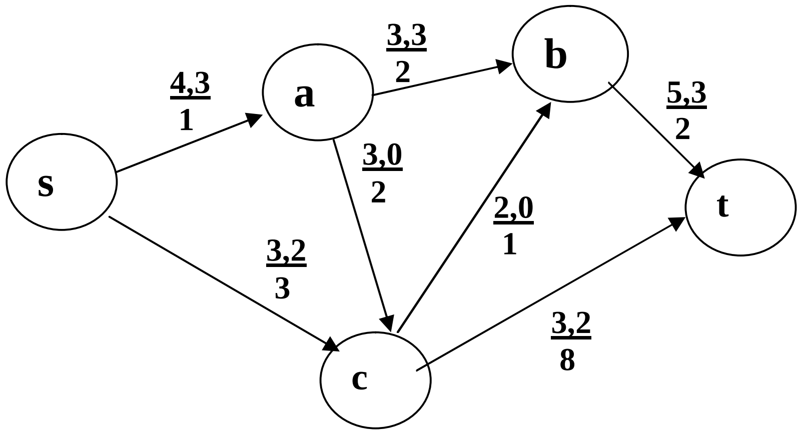


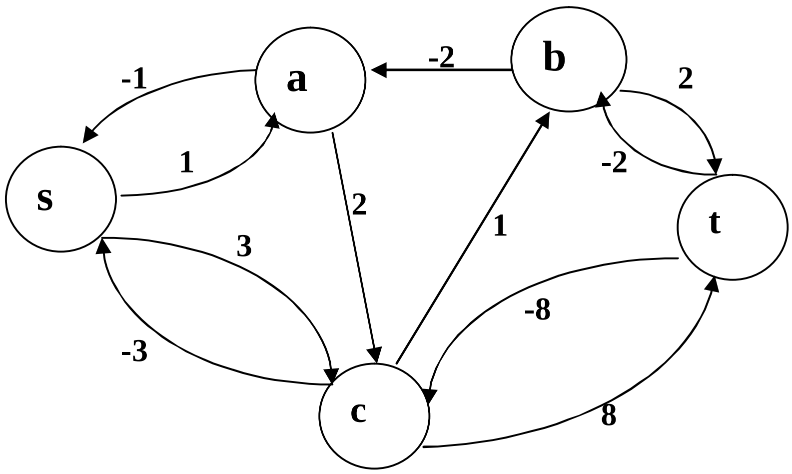
Рис. 16.1

Р е ш е н и е

1. В сети уже имеется поток мощности 4. Пропускаем элементарный поток единичной мощности вдоль пути $s \to a \to b \to t$. Получается поток заданной мощности $m = 5$.

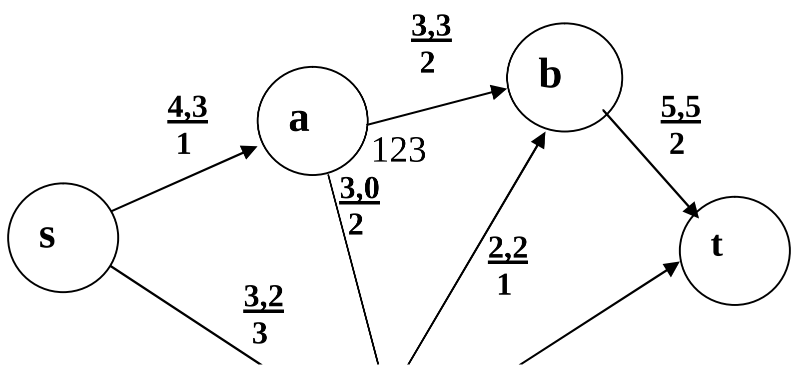


2. Строим граф модифицированных стоимостей G_f.



Находим в нем цикл с отрицательной удельной стоимостью $P_f : b \to t \to c \to b$.

3. Ему соответствует цикл $P : b \to t \leftarrow c \to b$ в исходной сети. Вычисляем $\rho = \min\{5 - 3, 2, 2 - 0\} = 2$. На дугах (b,t) и (c,b) увеличиваем поток на 2, а на дуге (c,t) уменьшаем на 2. Переходим к шагу 1.



4. Для нового потока строим граф модифицированных стоимостей G_f . Он изображен на рис. 16.2. Очевидно, нем отсутствуют циклы с отрицательной удельной стоимостью. Значит, построенный поток оптимален.

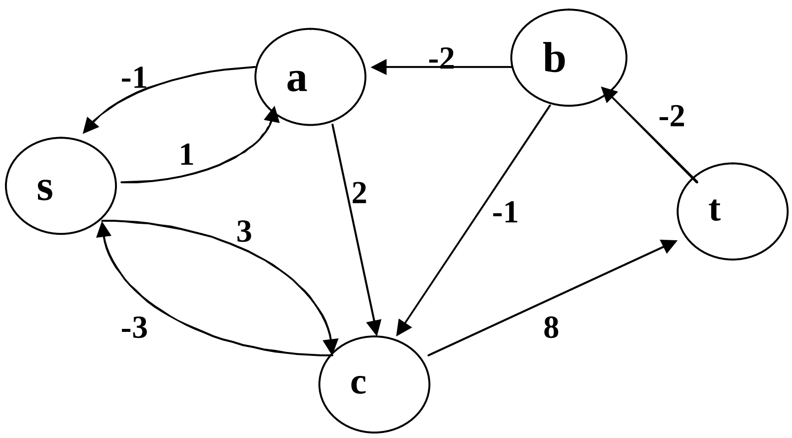


Рис. 16.2

Вычисляем стоимость построенного потока:

$$S(f) = \mathbf{1} \times \mathbf{3} + \mathbf{3} \times \mathbf{2} + \mathbf{2} \times \mathbf{0} + \mathbf{2} \times \mathbf{3} + \mathbf{1} \times \mathbf{2} + \mathbf{8} \times \mathbf{0} + \mathbf{2} \times \mathbf{5} = \mathbf{27}.$$

Упражнение 1. Доказать отсутствие циклов отрицательной удельной стоимости в последнем графе с помощью алгоритма Флойда.

Упражнение 2. Построить в сети, изображенной на рис. 16.1, поток минимальной стоимости среди потоков максимальной мощности.

Упражнение 3. Объясните, почему при поиске максимального потока с минимальной стоимостью сеть можно разбить на две части и применять алгоритм Клейна к каждой из них по отдельности.

Указание. Эти части определяются разрезом с минимальной пропускной способностью (см. теорему Форда – Фалкерсона).

Упражнение 4. Доказать, что если пропускные способности всех дуг и заданная мощность $\boldsymbol{m}$ рациональны, то алгоритм Клейна строит решение за конечное число шагов.

Указание. С помощью умножения на общий знаменатель задача сводится к случаю натуральных пропускных способностей и мощности $\boldsymbol{m}$. А множество допустимых потоков, принимающих целые значения на всех дугах, конечно.

Упражнение 5*. Привести пример, когда алгоритм Клейна может совершить бесконечное число итераций и при этом даже не приблизиться к решению.

Указание. Соответствующая сеть вместе с пропускными способностями дуг изображена на рис. 16.3. В ней нужно строить оптимальный поток нулевой мощности, считая, что $\boldsymbol{d(t,s) = -1}$, а удельные стоимости остальных дуг нулевые.

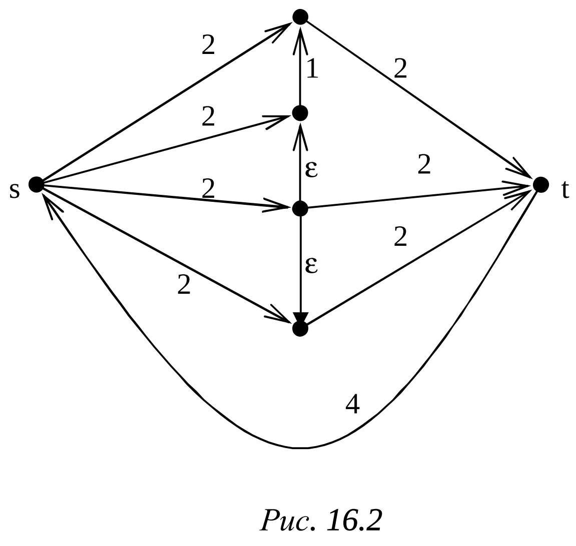


Рис. 16.2

§ 17. Метод управления проектами. Сетевое планирование

Управление крупными проектами, состоящими из большого числа взаимосвязанных работ, сопряжено с решением сложных проблем планирования, установления сроков и контроля, особенно когда работы должны выполняться в заданной технологической последовательности.

PERT (метод оценки и пересмотра планов) был создан в конце 50-х гг. в военно-морских силах США для ускорения разработки лодочной баллистической ракеты “Полярис”. При разработке этой системы оружия требовалось координировать работу нескольких тысяч частных подрядчиков и правительственных организаций. Координация работ с помощью PERT оказалась настолько успешной, что весь проект был завершен на два года раньше планового срока. Это привело к дальнейшему применению PERT в других программах разработки оружия в ВМС, ВВС и сухопутных войсках США. В настоящее время он широко применяется в промышленности, а также в обслуживающих организациях.

Обычно при осуществлении научных исследований и разработок заранее неизвестно время, необходимое для выполнения различных работ. Поэтому при использовании PERT учитывается неопределенность в задании продолжительности работ. Метод позволяет определить вероятность завершения различных этапов проекта в заданный срок, а также вычислить ожидаемую продолжительность проекта. Важным и исключительно полезным результатом применения PERT является определение узких мест проекта. Иначе говоря, выявляются те работы, которые с большей вероятностью способны вызвать задержку сроков завершения проекта. Таким образом, еще до начала работ руководитель проекта знает, где могут ожидаться задержки. Он имеет возможность заранее принять необходимые меры с целью устранить возможные задержки и обеспечить осуществление проекта в срок.

PERT применим к проектам, когда для достижения определенной цели должна выполняться упорядоченная последовательность заданий. Эти проекты имеют ряд общих характеристик.

1. Они состоят из хорошо определенной совокупности операций, выполнение которых означает завершение проекта.
2. Хотя некоторые операции проекта независимы друг от друга, в общем случае между ними существует достаточно сильная зависимость по времени.
3. Продолжительность выполнения каждого задания известна заранее либо может быть оценена достаточно точно.
4. Предполагается, что начатая работа продолжается без перерыва до завершения.
5. Выполнение последующей работы необязательно должно начинаться сразу же после завершения непосредственно предшествую-

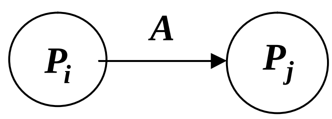
щей ей, однако оно не может начинаться, пока не будет завершена предыдущая работа.

Ориентированный граф является естественным средством для описания и анализа вышеназванных проектов.

Создадим граф – *сетевую модель,* в котором каждая дуга, называемая *работой,* соответствует одной операции, а каждая вершина $\boldsymbol{P_j}$, называемая ***j-м*** *событием,* соответствует некоторому моменту времени.

Например, событие может представлять собой момент времени, когда в наличии имеются все детали, что позволяет начать сборку изделия. Сам процесс сборки, требующий определенного времени, представляет собой работу.

Направление дуги в графе определяет соотношение предшествования. На отрезке сети



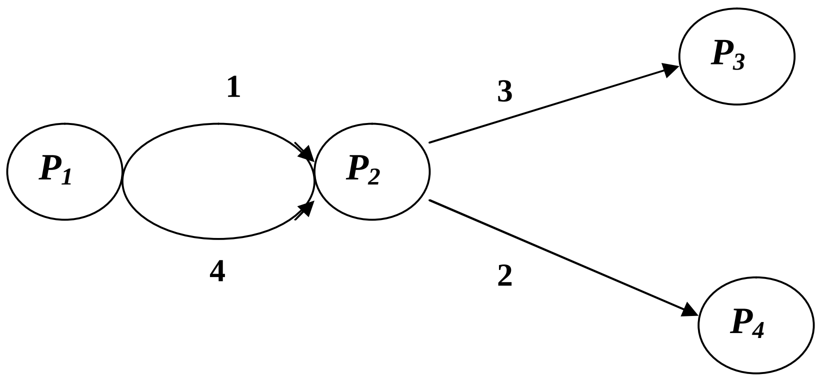
$\boldsymbol{P_i}$-е событие должно произойти до начала работы $\boldsymbol{A}$. Аналогично $\boldsymbol{P_j}$-е событие не может произойти до завершения работы $\boldsymbol{A}$.

Иногда отношение предшествования между работами нельзя представить точно с помощью обычной структуры работ и событий.

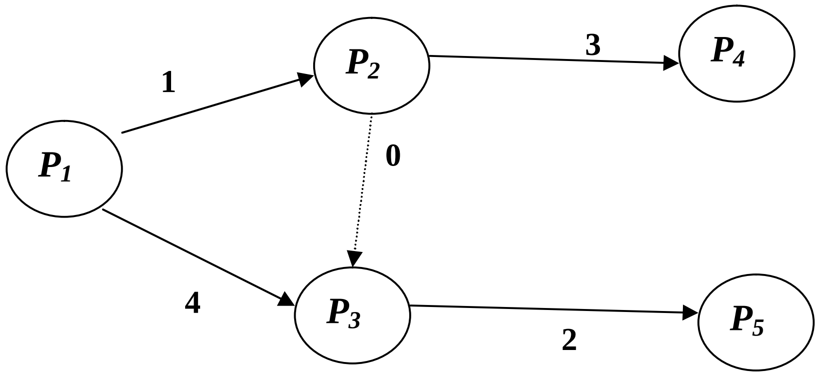
Допустим, например, что нужно построить сетевую модель, соответствующую следующей совокупности работ:

1. Работа **3** должна быть выполнена после выполнения работы **1**.
2. Работа **2** должна быть выполнена после выполнения работ **1** и **4**.

Сетевая модель



является неправильной, поскольку она показывает, что как работа 2, так и работа 3 следуют за работами 1 и 4. Чтобы получить правильное представление, необходимо ввести фиктивную работу 0, продолжительность которой равна нулю, как показано на следующем рисунке:



Этот простой прием позволяет показать требуемое соотношение без изменений фактической продолжительности проекта.

Справедливо следующее основное утверждение: *если операция **a** имеет начальное событие в виде вершины **v**, то она не может быть начата до тех пор , пока все операции, заканчивающиеся в **v**, не будут выполнены.*

Естественно, ***a*** может начаться в любой момент после того, как выполнены все предшествующие операции. Граф такого типа, представляющий процесс выполнения операций, является основой многих методов организационного управления.

Для иллюстрации построения сетевой модели рассмотрим следующий

П р и м е р . Производственная задача.

Рассмотрим построение сетевой модели, изображающей соотношение между работами, выполняемыми при сборке крупного станка, в котором узлы 1 и 2 объединяются в узел 4, а соединение узлов 3 и 4 дает готовое изделие. Вследствие необходимости согласовать некоторые детали узла 3 с соответствующими деталями узла 2 нельзя собрать узел 3 раньше, чем будут иметься в наличии детали для узла 2. Основные работы, которые необходимо выполнить для изготовления станка, покажем в следующей таблице.

РАБОТА		Продолжительность, сут.	Непосредственно предшествующая работа
Обозначение	Описание		

1	Закупка деталей для узла	5	**Нет**
2	Закупка деталей для узла	3	**Нет**
3	Закупка деталей для узла	10	**Нет**
4	Изготовление узла	7	**1**
5	Изготовление узла	10	**2**
6	Изготовление узла	5	**4 и 5**
7	Изготовление узла	9	**2 и 3**
8	Окончательная работа	4	**6 и 7**
9	Окончательная проверка и испытания	2	**8**

Сетевая модель

Сеть, описывающая данную производственную задачу, приведена на рис. 17.1.

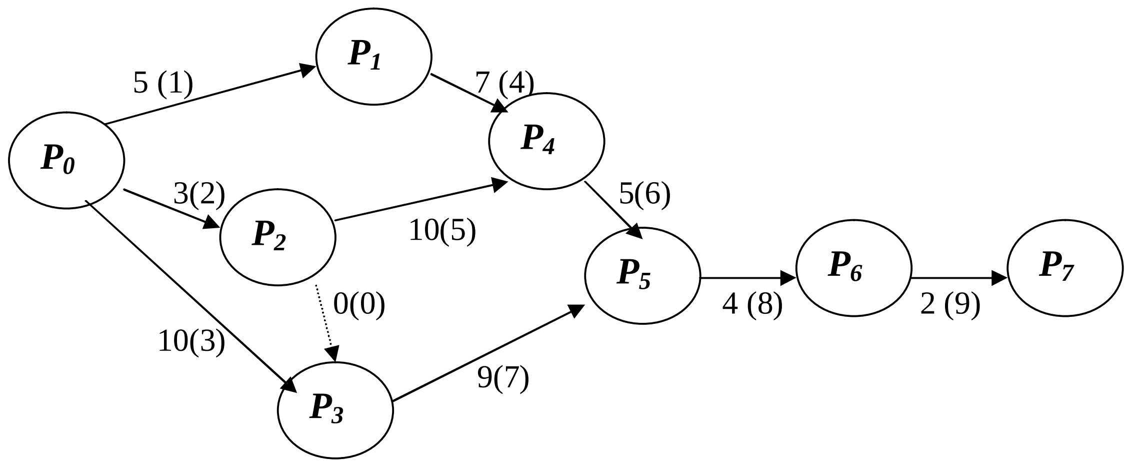


Рис. 17.1

Заметим, что имеется одно *начальное* событие (событие, которому не предшествует ни одна работа) и одно *завершающее* событие (событие, которое не предшествует ни одной работе). За исключением этих событий, все остальные события имеют хотя бы одну работу, предшествующую ему, и хотя бы одну работу, следующую за ним. Каждая работа обеспечивает однозначную связь между двумя узлами, что дает возможность определить работу через соединяемые ею события. Узловые события должны иметь последовательную нумерацию, поэтому все работы идут от узлов с меньшими номерами к узлам с большими номерами.

Для того чтобы правильно пронумеровать события, необходимо применить *алгоритм ранжировки событий*.

Алгоритм ранжировки событий

Шаг 0. Событие P_0 относим к нулевому рангу.

Шаг 1. Пусть определены все события, относящиеся к k-му рангу. Тогда вычеркиваем работы, непосредственно следующие за всеми событиями этого ранга.

Шаг 3. К рангу $k+1$ отнесем события, оставшиеся без невычеркнутых предшествующих работ. Переходим к **шагу 1**.

Алгоритм повторяется до тех пор, пока не будут пронумерованы все события.

Для нашего примера получаем: события P_1, P_2 имеют ранг 1, события P_3, P_4 имеют ранг 2, событие P_5 имеет ранг 3, событие P_6 – ранг 4, событие P_7 – ранг 5.

Конечной целью сетевой модели является получение информации о плановых сроках выполнения отдельных работ. Для этого необходимо вначале определить наиболее ранний возможный и наиболее поздний допустимый сроки выполнения каждого события.

Длительностью (продолжительностью) пути от события P_k *до события* P_l, состоящего из работ

$$(P_k, P_{r_1})(P_{r_1}, P_{r_2}).....(P_{r_n}, P_l),$$

называется число $L = t_{kr_1} + t_{r_1r_2} + ... + t_{r_nl}$, где t_{ij} – срок выполнения работы (P_i, P_j).

Наиболее ранним возможным сроком наступления события P_j называют продолжительность самого длинного пути от события P_0 до события P_j. Наиболее ранний возможный срок наступления события P_j обозначают T_j^0.

Число T_n^0 (где P_n – завершающее событие) называют *критическим временем*. Путь из P_0 в P_n, имеющий максимальную продолжительность, называется *критическим*. Работы, составляющие этот путь, называются *критическими*. Время T_j^0 вычисляется по следующей формуле:

$$T_j^0 = \begin{cases} 0, & i = 0 \\ \max\limits_{i<j}\left\{T_{ij}^0 + t_{ij}\right\}, & i \neq 0. \end{cases}$$

Упражнение. Вывести данную формулу.

Посчитаем наиболее ранние возможные сроки наступления событий для нашего примера. Положим $T_0^0 = 0$. Далее считаем T_j^0 для событий первого ранга:

$$T_1^0 = 5, \quad T_2^0 = 3.$$

Рассмотрим события, относящиеся ко второму рангу: P_3, P_4. Так как в событие P_3 входят две дуги (P_0, P_3) и (P_2, P_3), то на максимум сравниваем два числа:

$$T_0^0 + t_{03} = 0 + 10 = 10$$

и

$$T_2^0 + t_{23} = 3 + 0 = 3.$$

В результате имеем

$$T_3^0 = 10.$$

Аналогично поступаем с событием P_4, получаем

$$T_3^0 = 13.$$

К третьему рангу относится событие P_5. В это событие входят две дуги – (P_4, P_5) и (P_3, P_5). Поэтому имеем

$$T_5^0 = \max\left\{T_4^0 + t_{45}, T_3^0 + t_{35}\right\} = 19.$$

Очевидно, что

$$T_6^0 = 23 \quad \text{и} \quad T_7^0 = 25.$$

На графе числа T_j^0 записываются в прямоугольниках.

Теорема 1. *Из всех путей, соединяющих* P_0 *с* P_n, *критическим является тот и только тот, для каждой работы* (P_i, P_j) *которого выполняется условие* $T_j^0 - T_i^0 = t_{ij}$.

Упражнение. Доказать теорему.

Для нашего примера критическим является путь

$$(P_0, P_3), (P_3, P_5), (P_5, P_6), (P_6, P_7).$$

Критическое время – $T_7^0 = 25$.

Пусть число T_j^1 обозначает *наиболее поздний допустимый срок наступления события* P_j, не влияющий на время завершения проекта, т. е. на критическое время. Начиная с n-го события, движемся в *обратном направлении* через каждое предшествующее событие. Чтобы гарантировать, что продолжительность критического пути не будет превышена, необходимо начинать процедуру с приравнивания наиболее позднего допустимого срока наступления завершающего события наиболее раннему возможному сроку завершения проекта. В частности, $T_n^0 = T_n^1$.

Для вычисления наиболее позднего допустимого срока наступления любого P_i-го события ($i < n$) рассмотрим все работы, идущие от этого события. Вычислим для каждой такой работы наиболее поздний допустимый срок наступления всех последующих событий и вычтем продолжительность работ. Наименьшее значение является наиболее поздним сроком наступления P_i-го события:

$$T_j^1 = \begin{cases} T_n^0, & i = n \\ \min\limits_{j \succ i}\left\{T_j^1 - t_{ij}\right\}, & i \neq n. \end{cases}$$

Минимум берется по всем P_j-м событиям, соединенным с P_i-м событием работой $\left(P_i, P_j\right)$. Вычисления ведутся до тех пор, пока не будет определен наиболее поздний срок наступления начального события.

На графе T_j^1 обозначается числом в треугольнике.

Возвращаясь к нашему примеру, выполним следующие вычисления:

$$T_7^1 = 25,$$

$$T_6^1 = T_7^1 - t_{67} = 23,$$

$$T_5^1 = T_6^1 - t_{56} = 19,$$

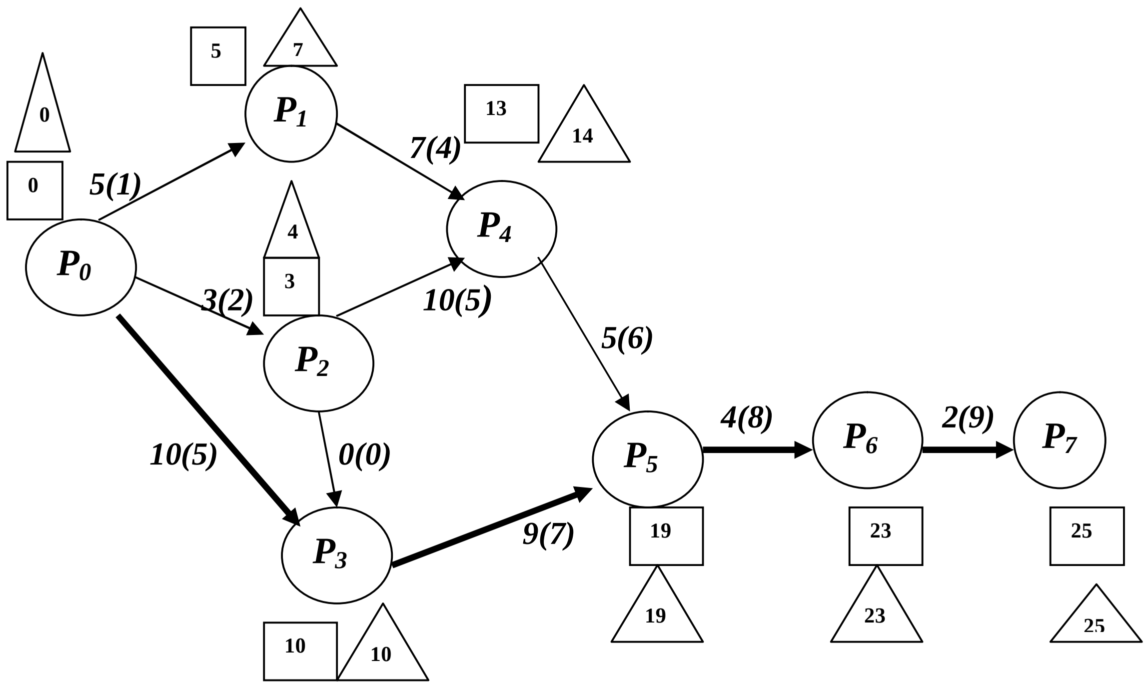
$$T_4^1 = T_5^1 - t_{45} = 14,$$

$$T_3^1 = T_5^1 - t_{35} = 10,$$

$$T_2^1 = \min \begin{Bmatrix} T_4^1 - t_{24} \\ T_3^1 - t_{23} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 4 \\ 10 \end{Bmatrix} = 4,$$

$$T_1^1 = 7, \quad T_0^1 = 0.$$

Нарисуем сетевую модель с соответствующими вычислениями:



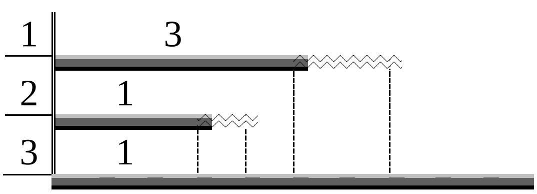
Величина $R_{ij}^{c} = T_j^0 - T_i^0 - t_{ij}$ называется *свободным резервом времени* работы (P_i, P_j). Свободный резерв времени показывает, на какое максимально допустимое время можно задержать начало работы (P_i, P_j), не изменяя при этом начала других работ. События с нулевым резервом времени находятся на критическом пути. Задержка наступления любого события на критическом пути приведет к задержке срока завершения всего проекта. Напротив, работы и события, не находящиеся на критическом пути, могут быть задержаны на ненулевой промежуток времени без влияния на срок завершения всего проекта. С точки зрения руководителя, при управлении проектом основное внимание должно уделяться работам, находящимся на критическом пути. Если требуется сократить срок завершения всего проекта, то необходимо приложить усилия к сокращению продолжительности работ, находящихся на критическом пути.

Величина $R_{ij}^{П} = T_j^1 - T_i^0 - t_{ij}$ называется *полным резервом времени* работы (P_i, P_j). Полный резерв времени показывает, на какое максимально допустимое время можно задержать начало работы (P_i, P_j), не изменяя при этом критического времени.

Календарное планирование и распределение ресурсов

Для более наглядного изображения построим сетевой график (рис. 17.1) в шкале времени (так называемую Gant-карту) следующим образом:

- каждая работа изображается в виде горизонтального отрезка, расположенного над осью времени ;
- начало работы (P_i, P_j) имеет абсциссу, равную T_i^0;
- окончание работы (P_i, P_j) имеет абсциссу, равную T_j^1;
- длина сплошного отрезка, обозначающего работу (P_i, P_j), равна t_{ij};
- длина пунктира равна $R_{ij}^{П}$.



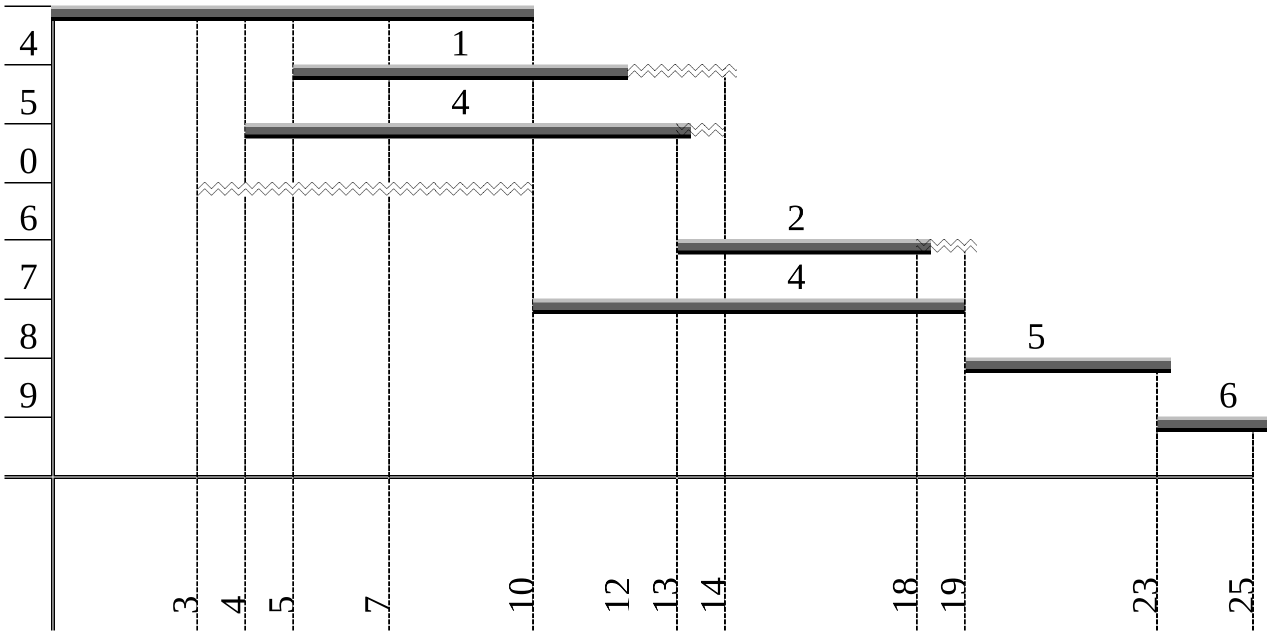


Рис. 17.1

После того как Gant-карта построена, проставим над каждой работой потребность в ресурсах. На рис. 17.2 показана общая интенсивность потребления ресурса для каждого интервала времени, соответствующая сетевому графику (рис. 17.1). Для удобства ось, по которой откладывается потребность в ресурсах, направляется вниз (обычно рисунки типа 17.1, 17.2 располагаются один под другим).

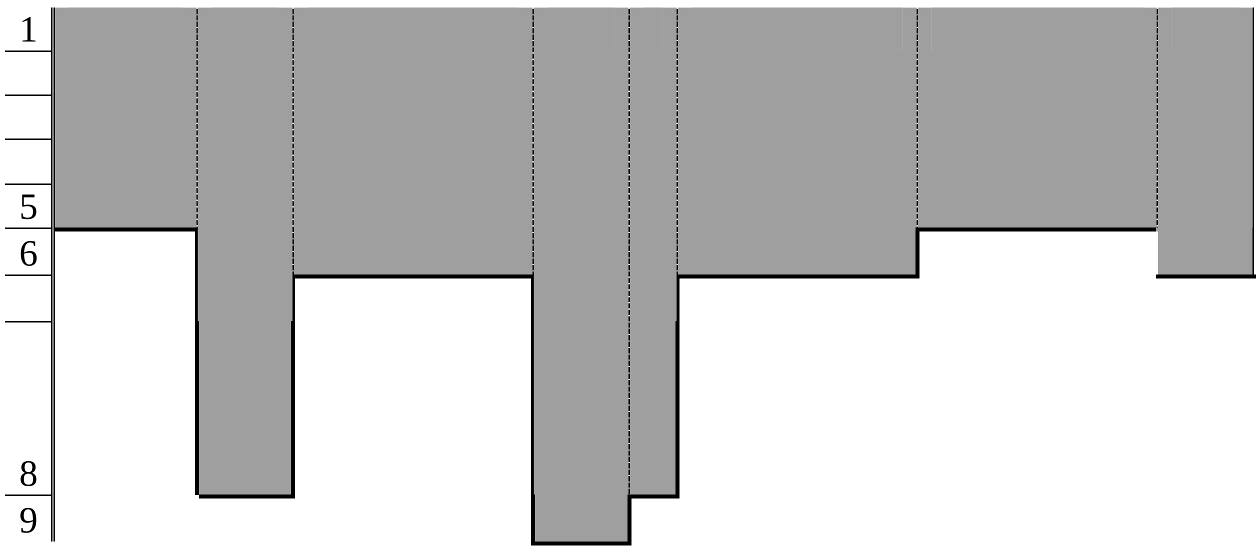


Рис. 17.2

Упражнение. На сколько необходимо в нашем примере увеличить критическое время, чтобы максимальная потребность в ресурсах не превышала 6 ед.?

Литература к главе 1

1. *Акофф Р., Сасиени М.* Основы исследования операций. М.: Мир, 1971.
2. *Басакер Р., Саати Т.* Конечные графы и сети. М.: Наука, 1974.
3. *Кузнецов О. П., Адельсон-Вельский Г. М.* Дискретная математика для инженера. М.: Энергия, 1980.
4. *Майника Э.* Алгоритмы оптимизации на сетях и графах. М.: Наука, 1977.
5. *Моудер Дж., Филлипс С.* Метод сетевого планирования и организации работ. М.; Л.: Энергия, 1966.
6. *Моудер Дж., Элмаграби С.* Исследование операций. Т. 1, 2. М.: Мир, 1981.
7. *Оре О.* Теория графов. М.: Наука, 1980.
8. *Таха Х.* Введение в исследование операций. Т. 1, 2. М.: Мир, 1985.
9. *Форд Л., Фалкерсон Д.* Потоки в сетях. М.: Мир, 1966.

Глава 2
Теория игр

Введение

Теория игр – это раздел анализа, в котором исследуются правила поведения в конфликтных ситуациях, обеспечивающие достижение лучших (в некотором заранее заданном смысле) результатов. Как научная дисциплина она возникла сравнительно недавно. Первые фундаментальные математические достижения здесь были получены в работах Дж. фонНоймана и О. Моргенштерна в 40-х гг. прошлого столетия (ставшая классической теорема фон Ноймана о существовании равновесия в игре двух лиц с нулевой суммой излагается в § 5). Эти результаты породили большие надежды на перспективы создания универсальной математической теории разрешения конфликтов. Последовавший бурный всплеск активизации исследований в теории игр привел к появлению новых значительных достижений и одновременно к осознанию несбыточности возникших надежд. Не став универсальной и всеобъемлющей, теория игр заняла свое прочное законное место в математическом арсенале методов изучения и анализа социально-экономических явлений.

В данный момент провести какую-либо полную классификацию всех разделов (направлений) теории игр, по-видимому, не представляется возможным. Разные исследователи классифицируют игры по разным признакам, например по "правилам" игры – *кооперативные* или *некооперативные*; математическому аппарату, используемому для их описания, – *стохастические*, *дифференциальные* и т. д.

В настоящей главе, по существу, описаны объекты и результаты, относящиеся к классической теории некооперативных игр, т. е. игр, в которых участники не вступают в переговоры для разрешения конфликта – не кооперируются. При изложении § 10 мы предполагаем у читателя знание теории линейного программирования, в частности симплекс-метода и теории двойственности. В ряде других параграфов (например, в §§ 2,3,6,9) мы предполагаем знание элементов функционального анализа (топологические пространства, метрические пространства, банаховы пространства, компактность, *-слабая топология и т. п.).