Федеральное агенство по образованию
Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования
«ПЕНЗЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра «Информационная безопасность систем и технологий»

РАСЧЁТ ИНФОРМАЦИОННЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ИСТОЧНИКОВ СООБЩЕНИЙ, СИГНАЛОВ И КАНАЛОВ

Рассчётно-пояснительная записка к курсовой работе
по дисциплине «Теория информации»

ПГУ 3.090106.001 ПЗ

Руководитель КР,
профессор, д.т.н. _____________ Б.В. Султанов

Исполнилель КР,
студент _____________ М.А. Захаров

г. Пенза, 2008

Утверждаю
Зав. кафедрой ИБСТ

___________ С.Л. Зефиров
«__»___________ 2008 г.

Задание

на курсовую работу

по теме: «Расчёт информационных характеристик источников сообщений , сигналов и каналов»

1. Дисциплина — Теория информации
2. Вариант задания — 26
3. Студент — Захаров М.А. группа — 06УИ1
4. Исходные данные на проектирование:
   - расчёт информационных характеристик источников дискретных сообщений (задачи 1.39, 1.69, 1.87);
   - расчёт информационных характеристик дискретного канала (задачи 2.26, 2.49);
   - согласование дискретного источника с дискретным каналом (задачи 3.26, 3.43);
   - дискретизация канала (задачи 4.26, 4.56, 4.77).
5. Структура проекта

5.1 Пояснительная записка (содержание работы):

Рассчётно-пояснительная записка объемом 15-20 страниц должна содержать 4 раздела (в соответствии с пунктами задания), в которых приведены условия задач, полное и подробное изложение хода решения, получены результаты.

5.2 Графическая часть:

- графики, иллюстрирующие процесс формирования спектра дискретизированного сигнала по спектру непрерывного сигнала;
- графики, иллюстрирующие процесс восстановления непрерывного сигнала по дискретным отсчётам во временной области.

6. Календарный план выполнения проекта

6.1 Сроки выполнения по разделам:

Раздел 1 ______________________________ к 25.09.2008 г.

Раздел 2 ______________________________ к 20.10.2008 г.

Раздел 3 ______________________________ к 15.11.2008 г.

Раздел 4 ______________________________ к 05.12.2008 г.

Дата защиты проекта ______________________ 9 декабря 2008 г.

Руководитель работы Султанов Б.В.

Задание получил 8 сентября 2008 г.

Студент Захаров М.А.

Реферат

Отчет 26 с, 1 таблица, 8 рисунков, 2 источника.

ВЕРОЯТНОСТЬ, ЭНТРОПИЯ, ИСТОЧНИК, ПРОИЗВОДИТЕЛЬНОСТЬ ИСТОЧНИКА, СООБЩЕНИЕ, ДИСКРЕТНЫЙ СИММЕТРИЧНЫЙ КАНАЛ, КОЛИЧЕСТВО ИНФОРМАЦИИ, СКОРОСТЬ ПЕРЕДАЧИ ИНФОРМАЦИИ, СПЕКТР

Объектом исследования являются идеи и методы теории информации.

Цель работы — изучение информационных характеристик источника дискретного сообщения, дискретного канала связи, а также исследование методов согласования дискретного источника с дискретным каналом, дискретизации и квантования.

Результатом выполнения курсовой работы является расчет информационных характеристик источников сообщения, сигналов и каналов.

Содержание

Введение 6
1 Информационные характеристики источников
дискретных сообщений 8
2 Расчёт информационных характеристик
дискретного канала 12
3 Согласование дискретного источника с дискретным каналом 15
4 Дискретизация и квантование 18
Заключение 25
Список использованных источников 26

Введение

Теория информации имеет огромное значение для развития современной науки и техники. Она получила широкое применение в физике, микроэлектронике, а также во всех отраслях техники, где необходимо решать проблемы хранения, получения и передачи информации.

«Предметом теории информации, как правило, являются теоремы, устанавливающие предельные возможности методов обработки и передачи сообщений. Эти предельные возможности определяются свойствами источников и каналов. В качестве примера можно привести три типичные вопроса, ответы на которые можно найти в теории информации.

1. Допустим, что имеется статистическое описание (математическая модель) некоторого источника сообщений. Требуется определить наименьшее количество двоичных символов, которые необходимы для того, чтобы указать последовательность сообщений, порожденных источником. При этом может быть задана некоторая функция качества и требоваться указание сообщений с заданной величиной ошибки.

2. Допустим, что имеется статистическое описание (математическая модель) некоторого канала связи. Требуется определить наибольшую возможную скорость передачи по такому каналу при условии, что вероятность ошибки ограничена сверху некоторым достаточно малым числом.

3. Допустим, что заданы источник сообщений, канал связи и определена ошибка при восстановлении. Требуется определить наименьшее значение ошибки, которую можно достичь, передавая сообщения данного источника по данному каналу связи[1]».

В данной курсовой работе рассматривается решение задач, посвященных этим и другим важным вопросам теории информации.

«Хотя теория информации, как правило, не дает практических рекомендаций инженерам, проектирующим аппаратуру обработки и передачи информации, она тем не менее является важным инструментом при анализе различных технических систем: телеметрических, цифровой передачи речи или телевизионных изображений, передачи данных, хранения информации, управляющих или командных и т. д. В ряде случаев в теории информации даются ответы на вопросы о предельных возможностях систем. К сожалению, готовые ответы имеются пока далеко не на все возникающие вопросы. Однако, что особенно важно, на основе теории информации инженер может правильно сформулировать свою задачу, наметить ход решений и, быть может, решить её» [1].

Данная курсовая работа содержит четыре раздела, посвящённых вопросам изучения и расчёта информационных характеристик источников сообщений, сигналов и каналов.

Первый раздел содержит три задачи. В них производится расчёт информационных характеристик источников дискретных сообщений: энтропии, количества информации, производительности источника.

Раздел «Расчёт информационных характеристик дискретного канала» содержит две задачи, в которых рассматривается двоичный симметричный канал, для которого отыскиваются апостериорные вероятности символов, определяется скорость передачи информации по каналу.

Раздел «Согласование дискретного источника с дискретным каналом» демонстрирует методы эффективного кодирования на примере кода Фано, описывает возможность безошибочной передачи информации по двоичному каналу (теорема Шеннона для канала без шума).

В последнем разделе «Дискретизация и квантования» рассказывается о методе дискретизации непрерывного сигнала, процессе восстановления непрерывного сигнала по дискретным отсчётам с помощью интерполирующего фильтра, параметрах квантованного сообщения.

1 Информационные характеристики источников дискретных сообщений

Задача 1.39. Ансамбли событий X и Y объединены, причём вероятности совместных событий равны: $p(x_1, y_1) = 0{,}007$; $p(x_1, y_2) = 0{,}151$; $p(x_1, y_3) = 0{,}217$; $p(x_1, y_4) = 0{,}14$; $p(x_2, y_1) = 0{,}023$; $p(x_2, y_2) = 0{,}011$; $p(x_2, y_3) = 0{,}18$; $p(x_2, y_4) = 0{,}271$.Найти: энтропии ансамблей X и Y соответственно $H(X)$, $H(Y)$; энтропию объединенного ансамбля $H(X, Y)$; условные энтропии ансамблей $H(X/Y)$, $H(Y/X)$.

Решение

Для определения энтропий $H(X)$, $H(Y)$, необходимо знать безусловные вероятности $p(x_1)$, $p(x_2)$, $p(y_1)$, $p(y_2)$, $p(y_3)$, $p(y_4)$. Зная закон распределения двумерной случайной величины, можно найти закон распределения её составляющих:

$$p(x_i) = \sum_{i=1}^{n} p(x_i, y_j). \tag{1}$$

$p(x_1) = p(x_1, y_1) + p(x_1, y_2) + p(x_1, y_3) + p(x_1, y_4) = 0{,}007 + 0{,}151 + 0{,}217 + 0{,}14 = 0{,}515$;

$p(x_2) = 1 - p(x_1) = 1 - 0{,}515 = 0{,}485$;

$p(y_1) = p(x_1, y_1) + p(x_2, y_1) = 0{,}007 + 0{,}023 = 0{,}03$;

$p(y_2) = p(x_1, y_2) + p(x_2, y_2) = 0{,}151 + 0{,}11 = 0{,}162$;

$p(y_3) = p(x_1, y_3) + p(x_2, y_3) = 0{,}217 + 0{,}18 = 0{,}397$;

$p(y_4) = p(x_1, y_4) + p(x_2, y_4) = 0{,}14 + 0{,}271 = 0{,}411$.

Энтропия ансамбля рассчитывается по формуле:

$$H(x) = -\sum_{i=1}^{n} p(x_i) \log_2 p(x_i). \tag{2}$$

$H(X) = -0{,}515 \log_2 0{,}515 - 0{,}485 \log_2 0{,}485 = 0{,}999$ (бит);

$H(Y) = -0{,}03 \log_2 0{,}03 - 0{,}162 \log_2 0{,}162 - 0{,}397 \log_2 0{,}397 - 0{,}411 \times \log_2 0{,}411 = 0{,}152 + 0{,}423 + 0{,}529 + 0{,}527 = 1{,}631$(бит).

Энтропия объединения нескольких статистически независимых источников информации равна сумме энтропии исходных источников :

$$H(X,Y) = -\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M} p(x_i, y_j)\log_2 p(x_i, y_j).$$

$H(X,Y) = -p(x_1, y_1)\log_2 p(x_1, y_1) - p(x_1, y_2)\log_2(x_1, y_2) - p(x_1, y_3) \times \times \log_2 p(x_1, y_3) - p(x_1, y_4)\log_2 p(x_1, y_4) - p(x_2, y_1)\log_2 p(x_2, y_1) - p(x_2,y_2) \times \times \log_2 p(x_2,y_2) - p(x_2, y_3)\log_2 p(x_2, y_3) - p(x_2, y_4)\log_2 p(x_2, y_4) = -0{,}007 \times \times \log_2 0{,}007 - 0{,}151\log_2 0{,}151 - 0{,}217\log_2 0{,}217 - 0{,}14\log_2 0{,}14 - 0{,}023 \times \times \log_2 0{,}023 - 0{,}011\log_2 0{,}011 - 0{,}18\log_2 0{,}18 - 0{,}271\log_2 0{,}271 = 2{,}491$ (бит).

Выведем формулу для условной энтропии:
$H(Y/X) = -\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{K} p(y_i, x_j)\log_2 \frac{p(y_i, x_j)}{p(x_j)} = -\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{K} p(y_i, x_j) \times \times \log_2 p(y_i, x_j) + \sum_{i=1}^{N} p(y_i, x_j)\sum_{j=1}^{K}\log_2 p(x_j) = H(X,Y) - H(X).$

Из этого соотношения найдём условные энтропии ансамблей:
$H(Y/X) = H(X,Y) - H(X) = 2{,}491 - 0{,}999 = 1{,}492$ (бит);
$H(X/Y) = H(X,Y) - H(Y) = 2{,}491 - 1{,}631 = 0{,}86$ (бит).

Ответ: $H(X) = 0{,}999$ бит, $H(Y) = 1{,}631$ бит, $H(X,Y) = 2{,}491$ бит, $H(Y/X)$= 1,492 бит, $H(X/Y)$ 0,86 бит.

Задача 1.69. Принимаемый сигнал может иметь амплитуду A_1 (событие X_1) или A_2 (событие X_2), а также сдвиг фазы φ_1 (событие Y_1) или φ_2 (событие Y_2). Вероятности совместных событий имеют следующие значения: $p(x_1, y_1) = 0{,}4$; $p(x_1, y_2) = 0{,}12$; $p(x_2, y_1) = 0{,}08$; $p(x_2, y_2) = 0{,}4$. Вычислить количество информации, получаемой о фазовом сдвиге сигнала, если станет известной его амплитуда.

Решение

В задаче требуется найти взаимную информацию. Взаимная информа ция — статистическая функция двух случайных величин, описывающая количество информации, содержащееся в одной случайной величине относительно другой.

Взаимная информация определяется через энтропию и условную энтропию двух случайных величин как

$$I(X,Y) = H(Y) - H(Y/X). \tag{3}$$

Для определения энтропии $H(X)$, $H(Y)$, необходимо знать безусловные вероятности $p(x_1)$, $p(x_2)$, $p(y_1)$, $p(y_1)$. По формуле (1):

$p(y_1) = p(x_1, y_1) + p(x_2, y_1) = 0{,}4 + 0{,}08 = 0{,}48;$

$p(y_2) = 1 - p(y_1) = 1 - 0{,}48 = 0{,}52;$

$p(x_1) = p(x_1, y_1) + p(x_1, y_2) = 0{,}4 + 0{,}12 = 0{,}52;$

$p(x_2) = 1 - p(x_1) = 1 - 0{,}52 = 0{,}48.$

По формуле (2) энтропия ансамбля $H(Y)$:

$H(Y) = -0{,}48 \log_2 0{,}48 - 0{,}52 \log_2 0{,}52 = 0{,}998$ (бит);

Условная энтропия события Y относительно X определяется следующим образом:

$$H(Y/X) = -\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{M} p(y_i, x_j) \log_2 \frac{p(y_i, x_j)}{p(x_j)}.$$

$H(Y/X) = -p(x_1, y_1) \log_2 \frac{p(x_1,y_1)}{p(x_1)} - p(x_1, y_2) \log_2 \frac{p(x_1,y_2)}{p(x_1)} - p(x_2, y_1) \log{}_2 \frac{p(x_2,y_1)}{p(x_2)} - -p(x_2, y_2) \log_2 \frac{p(x_2,y_2)}{p(x_2)} = -0{,}4 \log_2 0{,}77 - 0{,}12 \log_2 0{,}23 - 0{,}08 \log_2 0{,}17 - 0{,}4 \log_2 0{,}83 = = 0{,}15 - 0{,}25 - 0{,}2 - 0{,}12 = 0{,}72$(бит).

По формуле (3) находим взаимную информацию:

$I(X,Y) = 0{,}998 - 0{,}72 = 0.278$ (бит).

Ответ: $I(X, Y) = 0{,}278$ бит.

Задача 1.87. Дискретный источник выбирает сообщения из ансамбля $U = = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ 0{,}14 & 0{,}22 & 0{,}29 & 0{,}35 \end{pmatrix}$. Длительности сообщений соответственно равны $t_{u_1} = 0{,}43$ с, $t_{u_2} = 0{,}26$ с, $t_{u_3} = 0{,}09$ с, $t_{u_4} = 0{,}093$ с. Определить производительность источника.

Решение

Под производительностью источника сообщений подразумевают количество информации, вырабатываемое источником в единицу времени:

$$H'(U) = \frac{1}{T} H(U). \tag{4}$$

Так как длительность выдачи знаков источником в каждом из состояний различна, то средняя длительность выдачи источником одного знака найдётся как математическое ожидание от распределения времени:

$$T = \sum_{i=1}^{n} t_i p(t_i).$$

$T = 0{,}14 \cdot 0{,}43 + 0{,}22 \cdot 0{,}26 + 0{,}29 \cdot 0{,}09 + 0{,}35 \cdot 0{,}93 = 0{,}469$ (с).

По формуле (2) энтропия источника:

$H(U) = -0{,}14 \log_2 0{,}14 - 0{,}22 \log_2 0{,}22 - 0{,}29 \log_2 0{,}29 - 0{,}35 \log_2 0{,}35 = 0{,}397 + 0.481 + 0{,}518 + 0{,}530 = 1{,}926$ (бит).

С помощью формулы (4) найдём производительность источника:

$H'(U) = \frac{1{,}962}{0{,}469} = 4{,}18$ (бит/с).

Ответ: $H'(U) = 4{,}18$ бит/с.

2 Расчёт информационных характеристик дискретного канала

Задача 2.26. На вход дискретного симметричного канала без памяти поступают двоичные символы $u_1 = 0$ и $u_2 = 1$ с априорными вероятностями $p(u_1)$ и $p(u_2)$. Переходные вероятности: $p(z_i/u_j) = \begin{cases} p, & i = j \\ 1 - p, & i \neq j \end{cases}$, где p — вероятность ошибки. $p = 0{,}05, p(U_1) = 0{,}35, p(U_2) = 0{,}65$ Определить все апостериорные вероятности.

Решение

Схема канала представлена на рисунке 2.1:

Рисунок 2.1 — Схема канала

Для определения апостериорных вероятностей необходимо воспользоваться формулой Байеса, которая определяет вероятность наступления события в условиях, когда на основе наблюдений известна лишь некоторая частичная информация о событиях:

$$p(u_i/z_j) = \frac{p(u_i)p(z_j/u_i)}{\sum_{i=1}^{n} p(u_i)p(z_j/u_i)}.$$

$$p(0/0) = p(u_1/z_1) = \frac{p(u_1)p(z_1/u_1)}{p(u_1)p(z_1/u_1) + p(u_2)p(z_1/u_2)} = \frac{0{,}35 \cdot 0{,}95}{0{,}35 \cdot 0{,}95 + 0{,}65 \cdot 0{,}05} = 0{,}91;$$

$$p(0/1) = p(u_1/z_2) = \frac{p(u_1)p(z_2/u_1)}{p(u_1)p(z_2/u_1) + p(u_2)p(z_2/u_2)} = \frac{0{,}35 \cdot 0{,}05}{0{,}35 \cdot 0{,}2 + 0{,}65 \cdot 0{,}95} = 0{,}03;$$

$$p(1/0) = p(u_2/z_1) = \frac{p(u_2)p(z_1/u_2)}{p(u_1)p(z_1/u_1) + p(u_2)p(z_1/u_2)} = \frac{0{,}65 \cdot 0{,}05}{0{,}35 \cdot 0{,}95 + 0{,}65 \cdot 0{,}05} = 0{,}09;$$

$$p(1/1) = p(u_2/z_2) = \frac{p(u_2)p(z_2/u_2)}{p(u_1)p(z_2/u_1) + p(u_2)p(z_2/u_2)} = \frac{0{,}65 \cdot 0{,}95}{0{,}35 \cdot 0{,}05 + 0{,}65 \cdot 0{,}95} = 0{,}97.$$

Ответ: $p(0/0) = 0{,}91$, $p(0/1) = 0{,}03$; $p(1/0) = 0{,}09$; $p(1/1) = 0{,}97$.

Задача 2.49. Двоичный источник с равновероятными элементами имеет производительность $H'(U) = 6200$ бит в секунду. При передаче по каналу в среднем один из $n = 430$ символов принимается ошибочно. Определить скорость передачи информации по данному каналу.

Решение

Ситуация в канале характеризуется схемой, показанной на рисунке 2.2:

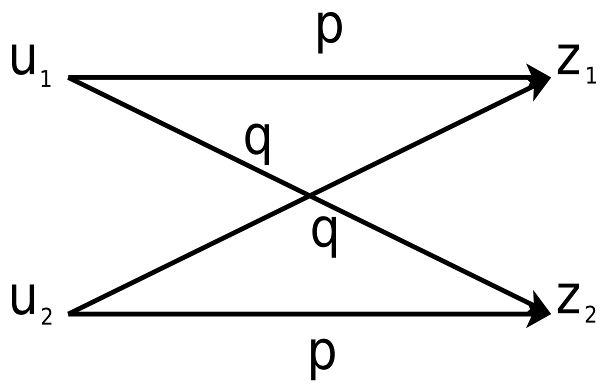

Рисунок 2.2 — Ситуация в канале

Так как в среднем из 430 символов принимается неверно вероятность ошибки $q = 1/430$, вероятность правильного приёма $p = 1 - 1/430$.

Таким образом, канал характеризуется следующим расределением переходных вероятностей:

$p(z_1/u_1) = p(z_2/u_2) = p = 1 - 1/430 = 0{,}998;$

$p(z_1/u_2) = p(z_2/u_1) = q = 1/430 = 0{,}002;$

$p(u_1) = p(u_2) = 0{,}5.$

Скорость передачи информации определяется средним количеством информации, которое передается по каналу в единицу времени. Она определяется как

$$I'(Z,U) = V_c \left[H(Z) - H(Z/U)\right], \tag{5}$$

$H(U) = H(Z) = \log_2 2 = 1$ (бит);

Канальная скорость:

$V_c = \frac{H'(U)}{H(U)} = \frac{6200}{1} = 6200(\text{с}^{-1}).$

Энтропию шума преобразования $H(Z/U)$ можно найти по формуле:

$$H(Z/U) = \sum_{j=1}^{M} p(u_j) \sum_{i=1}^{N} p(z_k/u_j) \log_2 \frac{1}{p(z_k/u_j)}.$$

$H(Z/U) = p(u_1)[p(z_1/u_1)\log_2\frac{1}{p(z_1/u_1)} + p(z_2/u_1)\log_2\frac{1}{p(z_2/u_1)}] + p(u_2)[p(z_1/u_2)\times$ $\times\log_2\frac{1}{p(z_1/u_2)} + p(z_2/u_2)\log_2\frac{1}{p(z_2/u_2)}] = 0{,}5[0{,}998\log_2\frac{1}{0{,}998} + 0{,}002\log_2\frac{1}{0{,}002}] + 0{,}5\times$ $\times[0{,}002\log_2\frac{1}{0{,}002} + 0{,}998\log_2\frac{1}{0{,}998}] = 0{,}02$ (бит).

По формуле (5) скорость передачи информации по каналу:

$I'(Z{,}U) = 6200(1 - 0.02) = 6070$ (бит/с).

Ответ: $I'(Z{,}U) = 6070$ бит/с.

3 Согласование дискретного источника с дискретным каналом

Задача 3.26. Закодировать двоичным кодом Фано ансамбль сообщений a_i. Закодировать произвольную комбинацию, состоящую из 5 символов из ансамбля a_i. Определить потенциальный минимум среднего количества символов кода, приходящихся на одно сообщение ансамбля a_i, и среднее количество символов, разработанного кода Фано, приходящихся на одно сообщение из a_i. Рассчитать эффективность разработанного кода.

Решение

«Код строят следующим образом: знаки алфавита сообщений выписывают в таблицу в порядке убывания вероятностей. Затем их разделяют на две группы так, чтобы суммы вероятностей в каждой из групп были по возможности одинаковы. Всем знакам верхней половины в качестве первого символа приписывают 0, а всем нижним — 1. Каждую из полученных групп, в свою очередь, разбивают на две подгруппы с одинаковыми суммарными вероятностями и т. д. Процесс повторяется до тех пор, пока в каждой подгруппе останется по одному знаку» [2].

Процесс кодирования представлен в таблице 1.

Таблица 1 — Кодирование методом Фано

a_i	$p(a_i)$	Знаки	Вероятность	Комбинация
a_1	0,055	a_5	0,3	00
a_2	0,072	a_7	0,23	01
a_3	0,09	a_3	0,09	100
a_4	0,016	a_2	0,072	1010
a_5	0,3	a_9	0,067	1011
a_6	0,019	a_{10}	0,064	1100
a_7	0,23	a_1	0,055	1101
a_8	0,015	a_{11}	0,04	11100
a_9	0,067	a_{12}	0,032	11101
a_{10}	0,064	a_6	0,019	11110
a_{11}	0,04	a_4	0,016	111110
a_{12}	0,032	a_8	0,015	111111

Комбинация из пяти символов $a_{11}a_9a_5a_8a_3$ кодируется следующим образом: 11100101100111111100.

Потенциальный минимум среднего количества символов кода, приходящихся на одно сообщение ансамбля a_i, можно найти следующим образом:

$$\eta_{min} = \frac{H(U)}{\log M};$$

По формуле (2):

$H(U) = -0{,}3\log_2 0{,}3 - 0{,}23\log_2 0{,}23 - 0{,}09\log_2 0{,}09 - 0{,}072\log_2 0{,}072 - 0{,}067\log_2 0{,}067 - 0{,}064\log_2 0{,}064 - 0{,}055\log_2 0{,}055 - 0{,}04\log_2 0{,}04 - 0{,}032 \times \log_2 0{,}032 - 0{,}019\log_2 0{,}019 - 0{,}016\log_2 0{,}016 - 0{,}015\log_2 0{,}015 = 0{,}521 + 0{,}489 + 0{,}313 + 0{,}274 + 0{,}262 + 0{,}256 + 0{,}23 + 0{,}186 + 0{,}159 + 0{,}109 + 0{,}095 + 0{,}091 = 2{,}985$ (бит).

$\eta_{min} = \frac{2{,}985}{\log_2 2} = 2{,}985.$

Среднее количество символов, приходящихся на одно сообщение:

$\eta = \sum_{i=1}^{n} p(a_i)n_i = 2(0{,}3 + 0{,}23) + 3 \cdot 0{,}09 + 4(0{,}072 + 0{,}067 + 0{,}064 + 0{,}055) + 5(0{,}04 + 0{,}032 + 0{,}019) + 6(0{,}016 + 0{,}015) = 3{,}003.$

Эффективность разработанного кода, которая характеризует степень близости неравномерного статистического кода к оптимальному:

$\psi = \frac{\eta_{min}}{\eta} = \frac{2{,}985}{3{,}003} = 0{,}994.$

Ответ: $\eta_{min} = 2{,}985$; $\eta = 3{,}003$; $\psi = 0{,}994$.

Задача 3.43. Дискретный источник U выдает независимые равновероятные сообщения с объемом алфавита $N = 15$ со скоростью $V_c = 1200$ сообщений в секунду. Оценить, возможна ли безошибочная передача сообщений источника по двоичному симметричному каналу, вероятность ошибки в котором p = 0,04, а скорость передачи канальных символов V_k не может превышать V_c более чем в n=4 раза. В случае отсутствия такой возможности оценить минимально неизбежные потери информации в единицу времени.

Решение

В соответствии с теоремой Шеннона, безошибочная передача сообщений источника по двоичному симметричному каналу возможна, когда производительность источника меньше пропускной способности канала:

$$H'(U) < C.$$

Энтропия источника:

$H(U) = \log_2 15 = 3{,}91$ (бит), тогда производительность источника равна

$H'(U) = V_c H(U) = 1200 \cdot 3{,}91 = 4692$ (бит/с).

Пропускная способность канала определяется следующим образом:

$$C = V_k \left[1 + p \log_2 p + (1-p) \log_2 (1-p)\right].$$

По условию V_k не может превышать V_c более чем в n=4 раза:

$V_k \leq 4800$ (симв/с).

$C = 4800(1 + 0{,}04 \log_2 0{,}04 + 0{,}96 \log_2 0{,}96) = 4800(1 - 0{,}024) = 3648$ (бит/с).

Таким образом, потери в канале неизбежны.

Минимально неизбежные потери информации в единицу времени:

$H'(U/U^*) = H'(U) - C = 4692 - 3648 = 1044$ (бит/с).

Ответ: безошибочная передача не возможна, $H'(U/U^*) = 1044$ бит/с.

4 Дискретизация и квантование

Задача 4.26. Непрерывный сигнал $x(t)$, имеющий спектр $X(j\omega)$ дискретизируется с частотой дискретизации $\omega_д$ (вид $X(j\omega)$ и значение $\omega_д$ задаются на рисунке 4.1). Выполняется ли в данном случае условие теоремы Котельникова? Построить график спектра дискретизированного сигнала (изобразить 5 периодов спектра). Проиллюстрировать графически процесс восстановления спектра непрерывного сигнала с помощью идеального интерполирующего фильтра в частотной области.

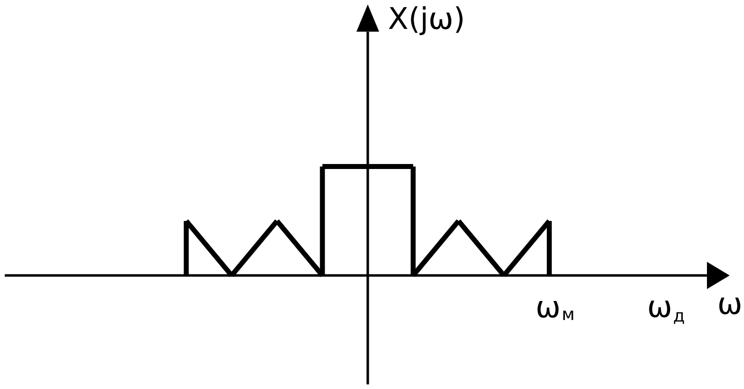

Рисунок 4.1 — Вид сигнала

Решение

Согласно теореме Котельникова, сигнал $x(t)$, имеющий ограниченный спектр, может быть восстановлен однозначно и без потерь по своим дискретным отсчётам, взятым с частотой не менее удвоенной максимальной частоты спектра ω_{max}:

$$\omega_д \geq 2\omega_{max}.$$

В данном случае, из предложенного графика непрерывного сигнала видно, что частота дискретизации меньше удвоенной частоты максимальной частоты, то есть условие теоремы Котельникова не выполняется.

Спектр дискретного сигнала можно построить, используя формулу:

$$X_д(j\omega) = f_д \sum_{i=-\infty}^{\infty} X\left[j(\omega - k\omega_д)\right].$$

$$X_д(j\omega) = f_д[\ldots + X(j(\omega+2\omega_д)) + X(j(\omega+\omega_д)) + X(j\omega) + X(j(\omega-\omega_д)) + + X(j(\omega+2\omega_д))\ldots].$$

Процесс построения графика спектра дискретизированного сигнала представлен на рисунке 4.2. Этот график строится посредством суммирования его отдельных периодов.

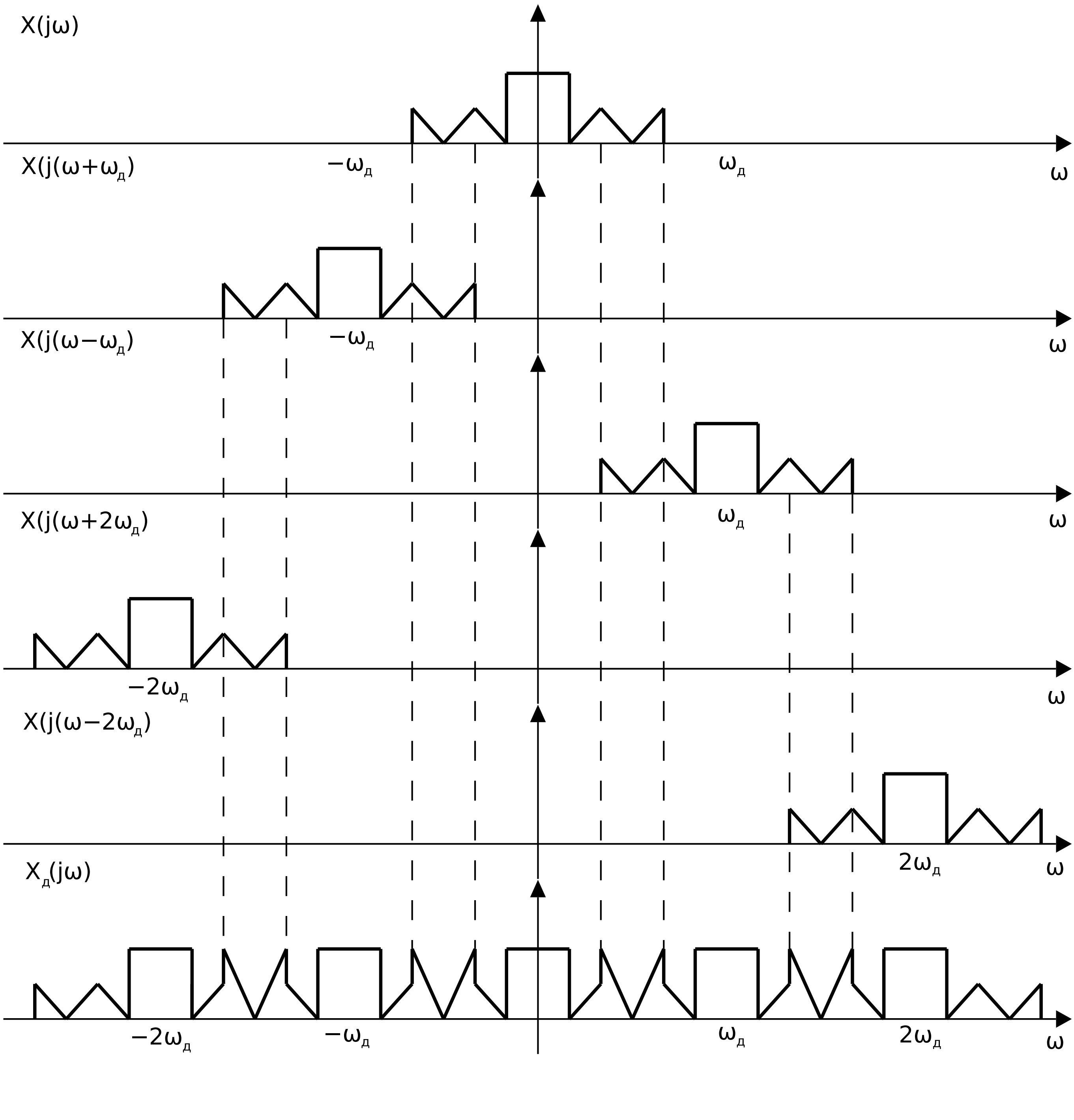

Рисунок 4.2 — Спектр дискретизированного сигнала

Процесс восстановления непрерывного сигнала по дискретному (рисунок 4.3) заключается в подаче дискретного сигнала на вход интерполятора. При этом спектр выходного сигнала $\hat{X}(j\omega)$ описывается функцией:

$$\hat{X}(j\omega) = X_{\text{д}}(j\omega)H(j\omega) \text{ , где}$$

$$H(j\omega) = \begin{cases} \dfrac{1}{f_{\text{д}}} & \text{при } -\frac{\omega_{\text{д}}}{2} \leqslant \omega \leqslant \frac{\omega_{\text{д}}}{2}; \\ 0 & \text{при других } \omega. \end{cases}$$

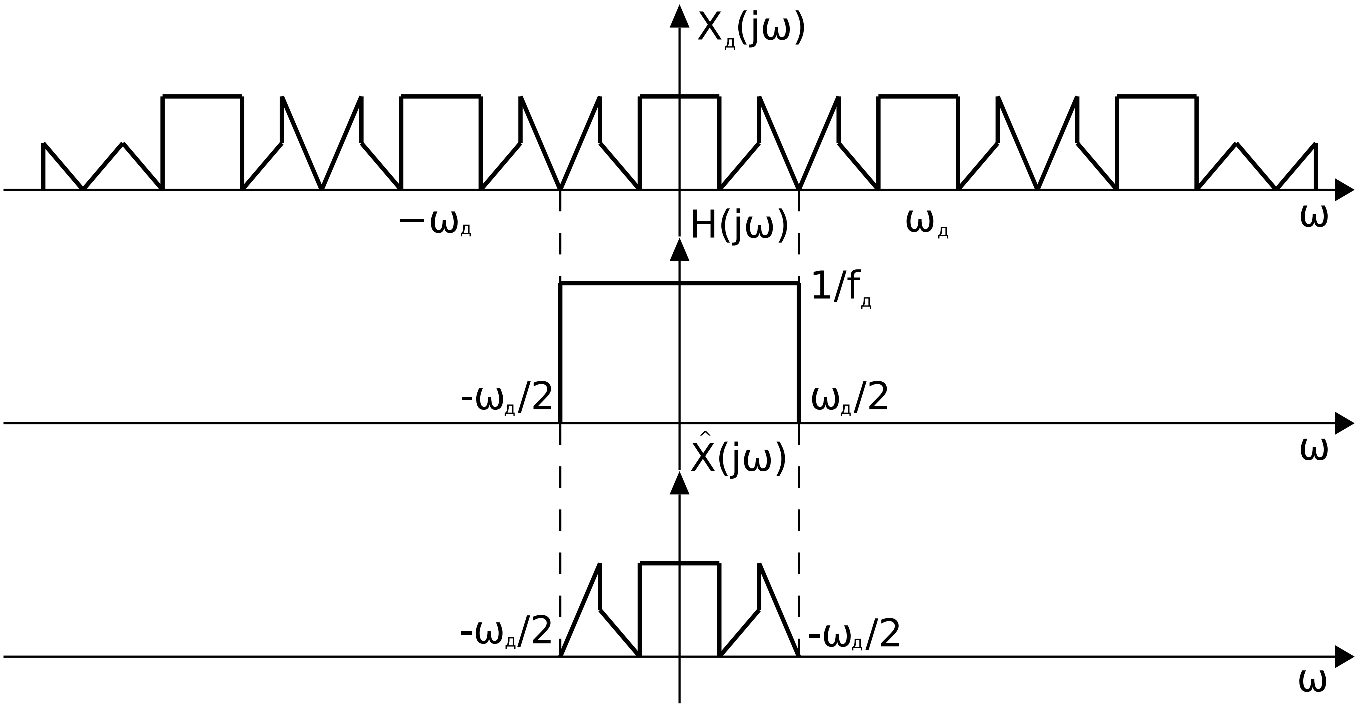

Рисунок 4.3 — Процесс восстановления сигнала

Таким образом, по дискретизированному сигналу нельзя точно восстановить спектр $X(j\omega)$ функции $x(t)$, а, следовательно, и саму эту функцию.

Ответ: условие теоремы Котельникова не выполняется, сигнал не может быть восстановлен.

Задача 4.56. Непрерывный сигнал $x(t) = \cos(\omega_0 t + \varphi)$ дискретизируется с частотой дискретизации $\omega_{\text{д}}$. Построить графики непрерывного и дискретизированного сигналов (изобразить не менее пяти периодов). Проиллюстрировать графически процесс восстановления непрерывного сигнала по дискретному во временной области с помощью интерполятора 0-го порядка. Значение $\omega_0 = 3$, $\omega_{\text{д}} = 5$, $\varphi = 0$.

Решение

Вид непрерывного сигнала $x(t) = \cos(3t)$ представлен на рисунке 4.4 . Период функции $T = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi}{3}$, пероид дискретизации $\Delta t = \frac{1}{5f_д} = \frac{3}{5f_0} = \frac{3}{5}T$. По найденным отсчётам строится график дискретизированного сигнала $X_д(t)$.

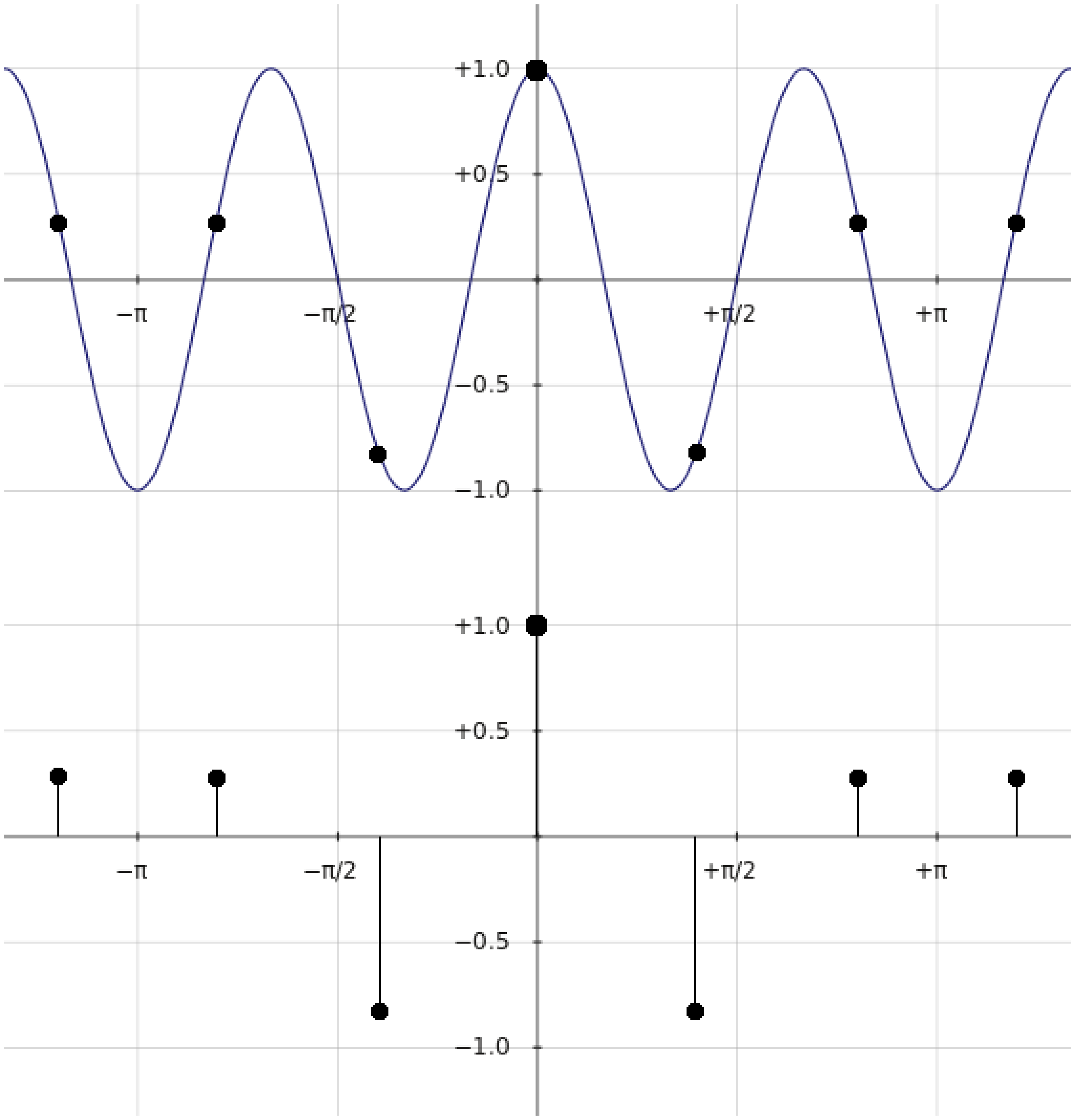

Рисунок 4.4 — Дискретизация сигнала

Процесс восстановления непрерывного сигнала по дискретному осуществляется с помощью интерполирующего фильтра нулевого порядка. Во временной области процесс преобразования входного сигнала фильтром описывается уравнением:

$$X^*(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_д(k\Delta t) h_и(t - k\Delta t),$$

где $h_{и}(t)$ — импульсная характеристика интерполирующего фильтра. На рисунке 4.5 изображён вид этой характеристики для интерполятора нулевого порядка.

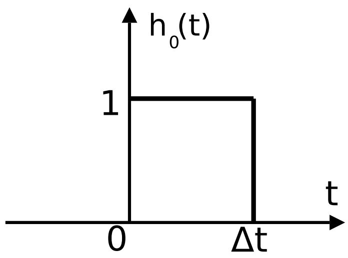

Рисунок 4.5 — Интерполятор нулевого порядка

Уравнение выходного сигнала:

$X^{*}(t) = \ldots X_{д}(-2\Delta t)h_0(t+2\Delta t) + X_{д}(-\Delta t)h_0(t+\Delta t) + X_{д}(0)h_0(t) + $
$+ X_{д}(\Delta t)h_0(t-\Delta t) + X_{д}(2\Delta t)h_0(t-2\Delta t)\ldots$

Процесс восстановления непрерывного сигнала можно увидеть на рисунке 4.6 . Искомый сигнал получается в результате суммирования его отдельных составляющих.

Задача 4.77. Непрерывное сообщение $u(t)$ квантуется с округлением с постоянным шагом Δu при числе уровней квантования $N_y = 100$. Плотность распределения вероятностей сообщения $w_U(u)$ — равномерная в интервале от $-U_m$ до U_m, т.е $w_u = \begin{cases} \dfrac{1}{2U_m}, & -U_m \leqslant u \leqslant U_m; \\ 0, & \text{при других } U. \end{cases}$

Определить соотношение сигнал — шум в квантованном сообщении.

Решение

Соотношение сигнал — шум можно определить как отношение мощности сигнала к мощности шума:

$$h^2 = \frac{P_{с}}{P_{ш}}. \tag{6}$$

Мошность сигнала $P_{с}$ и мощность шума $P_{ш}$ определяются как дисперсии сигнала и шума соответственно.

$$P_c = D_c = \int_{-\infty}^{+\infty} (u - M_u)^2 w_U(u) du, . \tag{7}$$

где M_u — математическое ожидание, которое определяется как

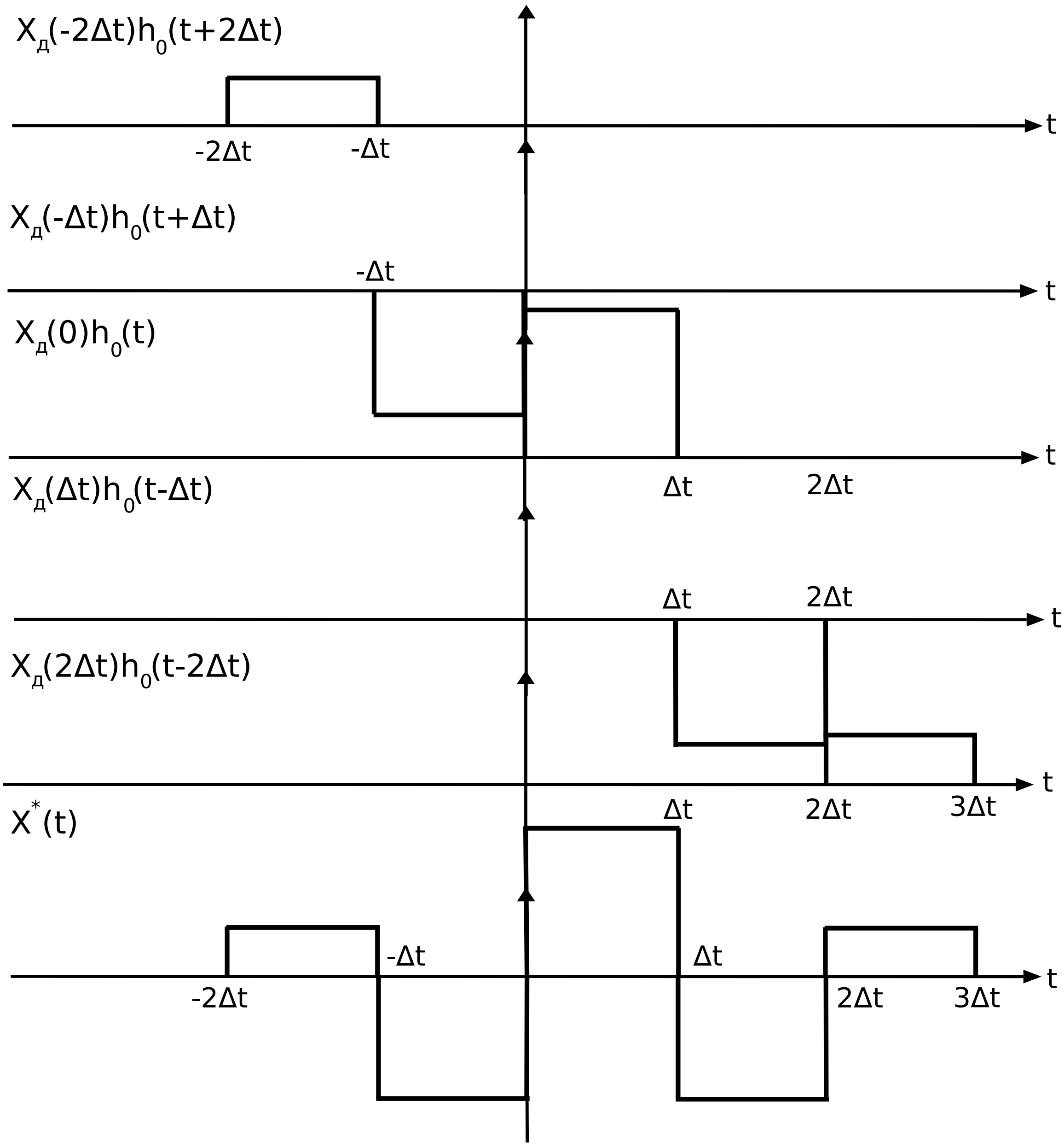

Рисунок 4.6 — Процесс восстановления сигнала

$$M_u = \int_{-\infty}^{+\infty} u w_U(u) du = \int_{-U_0}^{U_0} \frac{1}{2U_0} U du = \frac{1}{2U_0} \cdot \frac{u^2}{2}\Big|_{-U_0}^{U_0} = \frac{1}{2U_0}\left(\frac{U_0^2}{2} - \frac{U_0^2}{2}\right) =$$

$= 0$, тогда по формуле (7)

$$P_c = \int_{-U_0}^{U_0} \frac{u^2}{2U_0} du = \frac{1}{2U_0} \frac{u^3}{3}\Big|_{-U_0}^{U_0} = \frac{1}{2U_0}\left(\frac{U_0^3}{3} + \frac{U_0^3}{3}\right) = \frac{U_0^3}{3} \ .$$

При квантовании с округлением мощность шума равна:

$$P_{\text{ш}} = D_{\text{ш}} = \frac{\Delta u^2}{12}. \tag{8}$$

Число уровней квантования в диапазоне от $-U_0$ до U_0:

$N_{\text{у}} = \frac{U_0 - (-U_0)}{\Delta u} + 1 = \frac{2U_0}{\Delta u} + 1$, откуда шаг квантования $\Delta u = \frac{2U_0}{N_{\text{у}} - 1}$.

Подставляя найденные выражения в формулу (8)
$P_{\text{ш}} = \left(\frac{2U_0}{N_{\text{у}}-1}\right) \Big/ 12 = \frac{U_0^2}{3(N_{\text{н}}-1)^2}$.
Соотношение сигнал — шум по формуле (6):
$h^2 = \frac{U_0}{3} \Big/ \frac{U_0^2}{3(N_{\text{у}}-1)} = (N_{\text{у}} - 1)^2 = 99^2 = 9801.$
Ответ: $h^2 = 9801.$

Заключение

В результате выполнения курсовой работы были изучены информационные характеристики источника дискретного сообщения, дискретного канала связи, а также исследованы методы согласования дискретного источника с дискретным каналом, дискретизация и квантование.

Задание на курсовое проектиование было полностью выполнено.

Результатом выполнения курсовой работы явилось проведение соответствующих расчётов информационных характеристик источников сообщения, сигналов и каналов.

Можно сделать вывод, что идеи и методы теории информации представляют интерес не только в плане решения задач, связанных с передачей и хранением информации. «Теоретико-информационный подход приобрел значение метода исследования, позволяющего качественно и количественно сопоставлять специфические характеристики конкретных устройств и систем независимо от их физической сущности.

Широкое проникновение идей и методов теории информации в различные области науки и техники вполне естественно, поскольку информация является характеристикой такого всеобщего свойства материи, как разнообразие.

В свою очередь, различные приложения теории способствуют ее дальнейшему развитию, например, в направлении учета ценности информации и других аспектах.

Следует ожидать, что идеи и методы теории информации будут успешно использоваться и в дальнейшем, особенно при создании сложных систем, объединяющих различные по целям, функциям и даже физическому воплощению подсистемы» [2].

Список использованных источников

1 Колесник В.Д., Полтырев Г.Ш. *Введение в теорию информации (Кодирование источников).* Учеб. пособие. — Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1980. — 164 с.

2 Дмитриев В.И. *Прикладная теория информации*: Учеб. для студ. вузов по спец. «Автоматизированные системы обработки информации и управления.» — М.: Высш. шк., 1989. — 320 с.