Pepper's rechte Hand: Inverse Kinematik

1 Einleitung

In diesem Dokument wird die inverse Kinematik für den rechten Arm von Pepper entwickelt. Das Ziel ist es, alle fünf Gelenkswinkel $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ zum Erreichen eines vorgegenenen Punktes t. Nachdem der Roboterarm nur 5 Freiheitsgrade hat, wird nur das Erreichen von $t = (t_x, t_y, t_z)$ sichergestellt.

Die Orientierung im Raum kann nur bedingt vorgegeben werden. Der Arm von Pepper hat 5 Achsen, also 5 Freiheitsgrade. Für die genaue Vorgabe t sind davon 3 Freiheitsgrade notewendig. Für die Rotation bleiben also nur 2 Freiheitsgrade verfügbar: Die genaue Position des Ellenbogens auf einem Kreis im Raum (1. Freiheitsgrad für die Orientierung) und der Achswinkel für die Rotation des Unterarms (2. Freiheitsgrad für die Orientierung).

2 Zentrum und Radius Ellenbogen-Kreis

Das Ziel ist es zunächst, Zentrum und Radius des Kreises zu bestimmen, auf dem der Ellenbogen liegen muss. Die Längen von Oberarm und Unterarm sind bekannt. Die Länge des Oberarms ist $r_s = 183.304638mm$. Die Länge des Unterarms ist $r_t = 222.394835mm$. Wir definieren die Position der Schulter als $s = (0, 0, 0)$ im Ursprung des Welt-Koordinatensystems.

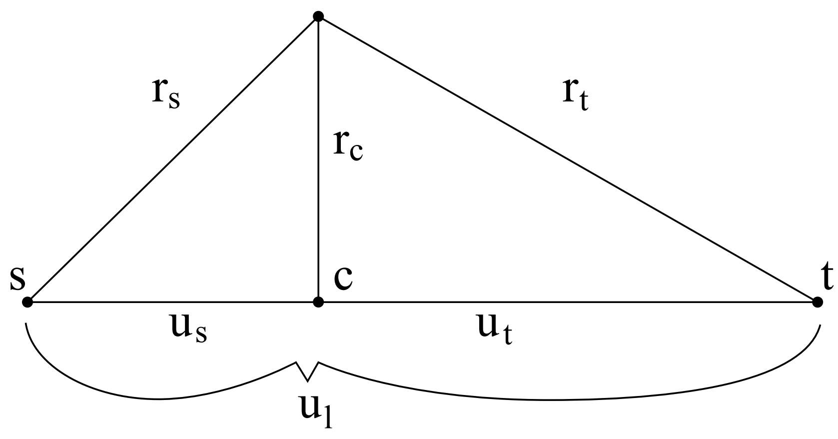
Der Verbindungsvektor u zeigt von s nach t: $u = t - s$. Die Punkte s und t (Kreismittelpunkte) definieren gemeinsam mit den entsprechenden Radien r_s und r_t zwei Kugeln im Raum. Die Schnittmenge dieser beiden Kugeln ist ein Kreis mit Mittelpunkt c und Radius r_c. Ziel des aktuellen Kapitels ist es, c und r_c zu bestimmmen. Wir betrachten dazu die Projektion in eine Ebene, die s und t enthält. Die Länge des Vektors u von s nach t unterteilen wir in zwei Strecken mit den Längen u_s und u_t, sodaß $|u| = u_l = u_s + u_t$. Beide Strecken treffen sich im Kreismittelpunkt c, wobei die Kreisebene rechtwinkelig auf u stehen muss.

$$
\begin{aligned}
{u_s}^2 + {r_c}^2 &= {r_s}^2 && (1) \\
{u_t}^2 + {r_c}^2 &= {r_t}^2 && (2)
\end{aligned}
$$

Aus Gleichungen 1 und 2 können wir jetzt den Kreismittelpunkt c und den Radius r_c berechnen. Wir setzen die beiden Terme für r_c gleich. In Kombination mit der Bedingung, dass die Summe der Längen u_s und u_t gleich u_l sein muss erhalten wir das folgende Gleichungssystem:

$$
\begin{aligned}
{r_s}^2 - {u_s}^2 &= {r_t}^2 - {u_t}^2 && (3) \\
u_s + u_t &= u_l && (4)
\end{aligned}
$$

Aus der zweiten Gleichung oben drücken wir u_t aus als: $u_t = u_l - u_s$. Durch Einsetzen in die erste Gleichung können wir u_s ausdrücken als:



$$
\begin{aligned}
{u_s}^2 &= {r_s}^2 - {r_t}^2 + (u_l - u_s)^2 && (5)\\
{u_s}^2 &= {r_s}^2 - {r_t}^2 + {u_l}^2 - 2u_l u_s + {u_s}^2 && (6)\\
0 &= {r_s}^2 - {r_t}^2 + {u_l}^2 - 2u_l u_s && (7)\\
2u_l u_s &= {r_s}^2 - {r_t}^2 + {u_l}^2 && (8)\\
u_s &= ({r_s}^2 - {r_t}^2 + {u_l}^2)/2u_l && (9)\\
& && (10)
\end{aligned}
$$

Analog dazu kann auch u_t abgeleitet werden als:

$$u_t = ({r_t}^2 - {r_s}^2 + {u_l}^2)/2u_l \tag{11}$$

und es ergeben sich für r_c:

$$r_c = \sqrt{{r_s}^2 - {u_s}^2} \tag{12}$$

und für c:

$$c = s + u_s * u/|u| \tag{13}$$

Ergebnis:

- c … Mittelpunkt des Kreises auf dem der Ellenbogen liegen muss.
- r_c … Radius des Kreises auf dem der Ellenbogen liegen muss.

3 Bestimmung des Ellenbogen

Wir bestimmen als nächstes die genaue Position des Ellenbogen-Punktes $e = (e_x, e_y, e_z)$. Dazu betrachten wir zunächst den normalisierten Normalvektor u^* der Ebene, die den Ellenbogen-Kreis enthält:

$$u^* = u/|u| \tag{14}$$

Die Wahl des Ellenbogen-Punktes auf dem Kreis hat direkten Einfluss auf die Orientierung der Hand am Greifpunkt t. Wir verwenden hier die Nebenbedingung, dass die Z-Koordinate des Ellenbogens e_z gleich der Z-Koordinate des Greifpunktes t_z ist, also:

$$e_z = t_z \tag{15}$$

Mit dieser Annahme erreicht man, dass die Orientierung von Peppers Hand so liegt, dass der Unterarm parallel zur X/Y-Ebene des Weltkoordinatensystems liegt. Prinzipiell könnte man hier auch eine andere Annahme verwenden, um die Orientierung von Peppers Hand in eine andere Lage zu bringen.

$$u_x^* \cdot e_x + u_y^* \cdot e_y + u_z^* \cdot e_z = d_e \quad (Ebenengleichung) \tag{16}$$

$$(e_x - c_x)^2 + (e_y - c_y)^2 + (e_z - c_z)^2 = {r_c}^2 \quad (Kugelgleichung) \tag{17}$$

Für die Berechnung von d_e in der Ebenengleichung setzen wir zunächst den Mittelpunkt des Kreises ein - dieser Muss ja in der Ebene liegen:

$$d_e = u_x^* \cdot c_x + u_y^* \cdot c_y + u_z^* \cdot c_z \tag{18}$$

Als Nächstes formen wir die Ebenengleichung (Gleichung 16) so um, dass wir auf der linken Seite e_x erhalten:

$$e_x = (d_e - u_y^* \cdot e_y - u_z^* \cdot e_z)/n_x \tag{19}$$

$$e_x = d_e/u_x^* - u_y^* \cdot e_y/n_x - u_z^* \cdot e_z/u_x^* \tag{20}$$

$$e_x = d_e/u_x^* - u_z^* \cdot e_z/u_x^* + e_y \cdot (-u_y^*/u_x^*) = B \cdot e_y + A \tag{21}$$

wobei A und B folgende komplizierte Terme bezeichnen:

$$A = d_e/u_x^* - u_z^* * e_z/u_x^* \tag{22}$$

$$B = (-u_y^*/u_x^*) \tag{23}$$

$$\tag{24}$$

Durch Einsetzen von e_x aus Gleichung 21 in Gleichung 17 erhalten wir:

$$(B * e_y + A - c_x)^2 + (e_y - c_y)^2 + (e_z - c_z)^2 = {r_c}^2 \tag{25}$$

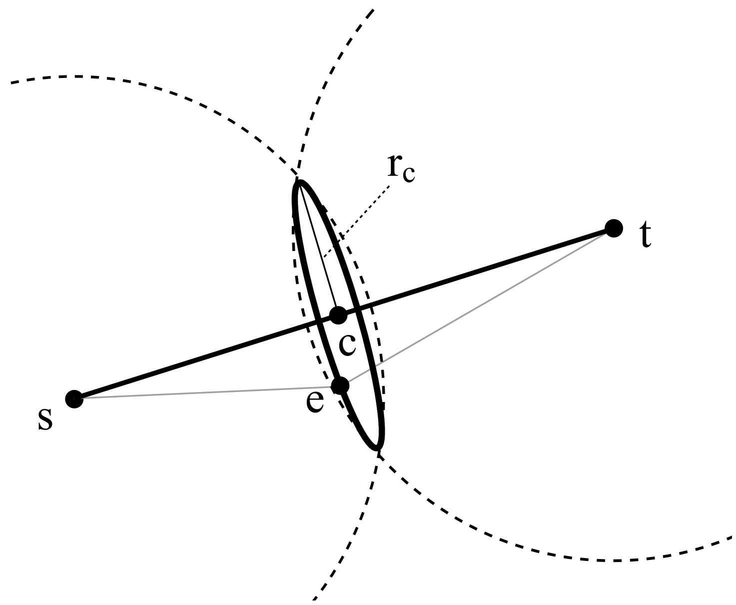
Zur Vereinfachung bezeihnen wir $A - c_x$ als D:

$$D = A - c_x \tag{26}$$

und erhalten damit aus Gleichung 25 folgendes:

$$B^2 \cdot e_y^2 + 2 \cdot D \cdot B \cdot e_y + D^2 + e_y^2 - 2 \cdot e_y \cdot c_y + c_y^2 + (e_z - c_z)^2 = {r_c}^2 \tag{27}$$

$$e_y^2 \cdot (B^2 + 1) + e_y \cdot (2 \cdot D \cdot B - 2 \cdot c_y) + (D^2 + c_y^2 + (e_z - c_z)^2 - {r_c}^2) = 0 \tag{28}$$



Durch Lösen dieser quadratischen Gleichung erhalten wir direkt e_y. Damit können wir aus Gleichung 21 auch e_x bestimmen:

$$e_x = B * e_y + A \tag{29}$$

Ergebnis:

- $e = (e_x, e_y, e_z)$ ... Punkt des Ellenbogens

4 Berechung der Gelenkwinkel der Schulter

Nachdem jetzt der Ellenbogen e bekannt ist, können wir die ersten beiden Gelenkwinkel α_0 und α_1 der Schulter berechnen. Wir bezeichnen den Ortsvektor von s nach e als v, also $v = e - s$. Die Projektion von v in die X/Z-Ebene bezeichnen wir mit w, wobei:

$$w = (e_x, 0, e_z) \tag{30}$$

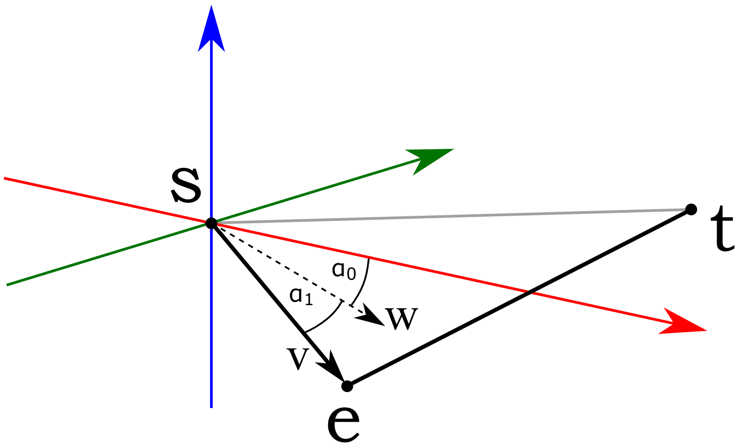
bzw. der entsprechende normalisierte Vektor:

$$w^* = w/|w| \tag{31}$$

Der erste Gelenkswinkel α_0 ergibt sich damit als:

$$\alpha_0 = arctan2(-w_z^*, w_x^*) \tag{32}$$

Der zweite Gelenkswinkel α_1 ist der Winkel zwischen den Vektoren v und w. Durch Projektion in den 2-dimensionalen Raum bzw. in die Ebene, die von v und w aufgespannt wird, kann man die



$arctan2$ Funktion verwenden, wobei der erste Parameter (Y-Koordinate) gleich der Y-Koordinate von v^* ist und die X-Koordinate die Projektion von w^* auf v^* ist - also das Skalarprodukt von v^* und w^*:

$$\alpha_1 = arctan2(v_y^*, v^* \cdot w^*) \tag{33}$$

5 Berechnung der letzten drei Gelenkwinkel

Für die Berechnung der weiteren Gelenkwinkel betrachten wir zunächst die Rotationsachse des Oberarms (Rotation um Winkel α_2). Die geometrischen Zusammenhänge sind in Abbildung 1 visualisiert. Der Winkel α_2 muss so gewählt werden, dass das Abbiegen des Unterarms um den Winkel α_3 in einer Ebene mit s, e und dem Zielpunkt t liegt. Die Rotationsachse des Ellenbogengelenks (Rotation α_3) muss also zunächst durch α_2 in die richtige Lage gebracht werden.

Wir gehen von einer Ebene ϵ_l aus, deren Normalvektor (grauer Pfeil in der Abbildung) im rechten Winkel zur Verbindungslinien von s und e steht. Tatsächliche Achse des Ellenbogengelenks (also der Normalvektor der tatsächlichen Ebene ϵ_k in der sich der Unterarm bewegt) ist allerdings um 9° dazu geneigt. Die Ebene ϵ_k bezeichnet also die Ebene, in der sich der Unterarm bewegt, wenn sich der Winkel α_3 ändert wenn sich der Winkel α_2 in Nullage befindet, also wenn $\alpha_2 = 0$. Den richtigen Winkel α_2 bestimmen wir als den Winkel, der die Ebene ϵ_k um die Achse v in die Ebene ϵ_t rotiert.

Die beiden Ebenen ϵ_k und ϵ_t enthalten den Ellenbogen ϵ und sind tangential auf den Kreis mit Mittelpunkt h und Radius a. Wir bestimmen den Punkt h und die Ebene ϵ_h. Diese Ebene enthält den Punkt t und steht normal auf v. Der Abstand d_{eh} von h zu e lässt sich über die Projektion der Strecke von s nach e und der Strecke von s nach t berechnen. Die Projektion selbst berechnet man über das Skalarprodukt. Der Abstand ergibt sich also als:

$$d_{eh} = t \cdot v^* - e \cdot v^*. \tag{34}$$

Der Radius a des Kreises mit Mittelpunkt h ist dann der Tangens von 9° multipliziert mit d_{eh}:

$$a = d_{eh} \cdot tan(9)^{\circ} \tag{35}$$

Die Länge von c ist gleich dem Abstand der Punkte h und t, womit auch die Länge b über den Satz von Pythagoras berechnet werden kann:

$$b = \sqrt{c^2 - a^2} \tag{36}$$

Der Winkel α_2 kann jetzt also berechnet werden als der Winkel zwischen c in der Nulllage (blaues c) und in der Ziellage (grünes c). Die Koordinaten in der Ebene ϵ_h von q in der Nulllage sind a und b: $q = (b, a)$. Die 2d Koordinaten von t in der Ebene ϵ_h können ebenfalls bestimmt werden.

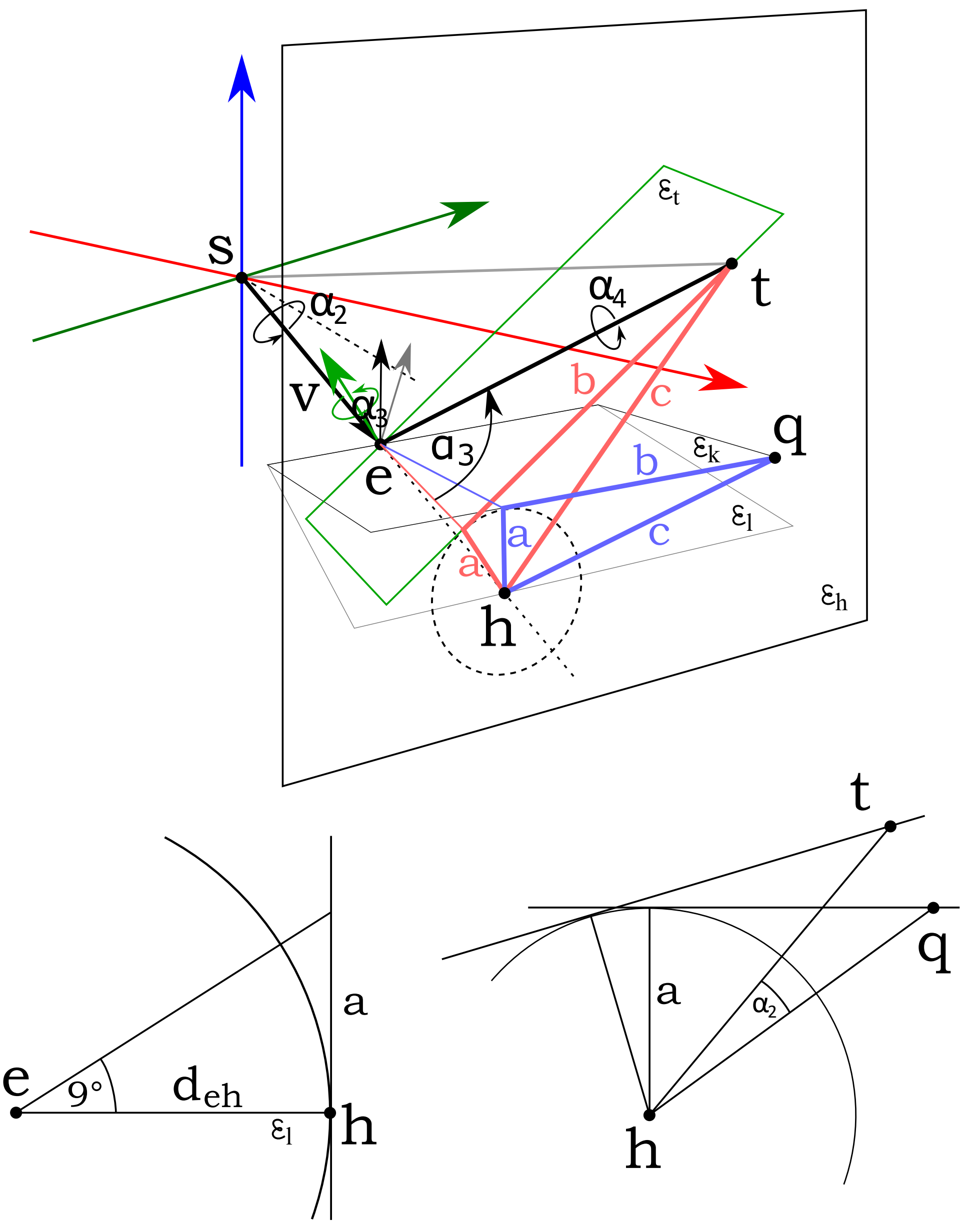


Abbildung 1: Visualisierung der geometrischen Zusammenhänge zur Berechnung der letzten drei Gelenkswinkel.