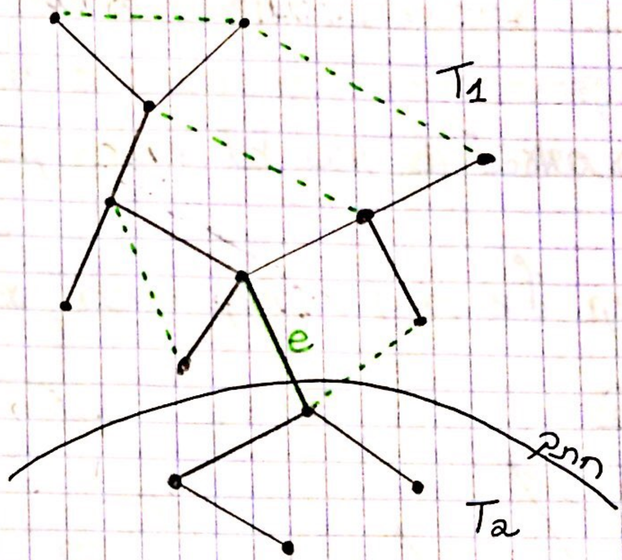
תרגול 7
11.4.16

עצים פורשים מינימליים

גרפים לא מכוונים ממושקלים אי שליליות.

עץ = גרף לא מכוון קשיר ללא מעגלים.



$G=(V,E,\omega)$ גרף ממושקל.

$(E' \subseteq E)$ עץ פורש $T=(V,E')$ של הגרף $- G$

$V(T)=V(G)$

עץ פורש מינימלי = עץ פורש שסכום משקלי הקשתות שלו מינימלי.

עובדת שייך:

T עץ פורש של G ו- $e \in T$.

בהסרתה מתקבלים 2 עצים T_1 ו- T_2!

שני העצים הללו מהווים (חלוקה/חתך) של V.
(של G)

חתך של G:

V_1, V_2 $\quad V_1 \cup V_2 = V$

$V_1 \cap V_2 = \emptyset$

קשת $e' \in E$ נקראת חוצת חתך אם ורק אם
$e'=(x,y)$

$x \in T_1$

$y \in T_2$

... e' קשת חוצת חתך.

מתקבל T' עץ פורש.

שאלה - נתון גרף G

יהי T' הגרף המתקבל מהורדת קשת מהעץ T

והוספת קשת אחרת במקומה.

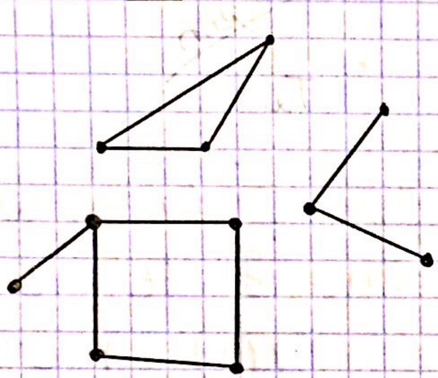
על כל אחד מהסעיפים:

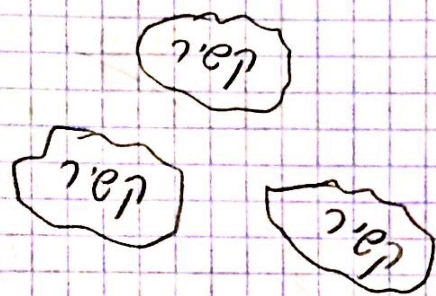
האם תמיד נכון, תמיד לא נכון או לפעמים.

א. T' הוא עץ.

ב. ב-T' יש שני רכיבי קשירות (תת גרף קשיר מקסימלי)

G





ג. ל-T' אין אף עלה

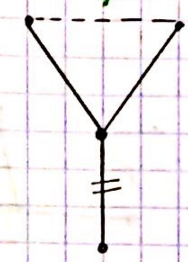
פתרון

א. <u>לפעמים</u> - אם הוספנו קשת חוצת חתך יד על אחרת, לא!

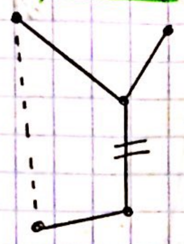
ב. <u>לפעמים</u> - אם הקשת שהוחזרה חוצת חתך - יתקבל רכיב קשירות יחיד. אחרת - 2 רכיבי קשירות.

ג. <u>לפעמים</u> -

<u>נכון:</u>



<u>לא נכון:</u>

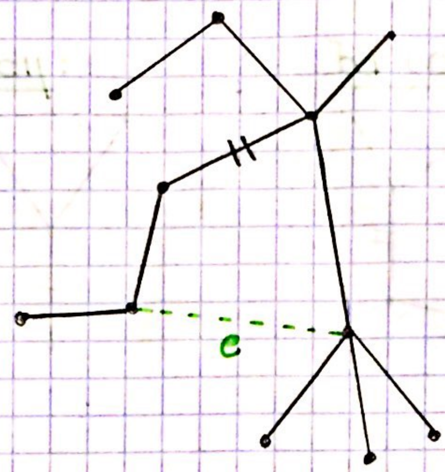


__עובדה לגבי שייך:__

T עץ פורש של G ו-$e \notin T$.

בהוספת e ל-T מתקבל מעגל יחיד c.

בהסרת קשת כלשהי מהמעגל c מתקבל חזרה ע"פ.



__שאלה__

יהי $G=(V,E,W)$ גרף לא מכוון פשוט וממושקל

יהי c מעגל פשוט G.

תהי e הקשת הכבדה ביותר ממש ב-C

(לכל $e' \in C$, $e' \neq e$ $w(e') < w(e)$)

__הוכח__: לא קיים עץ פורש מינימלי של G המכיל את e.

__הוכחה__

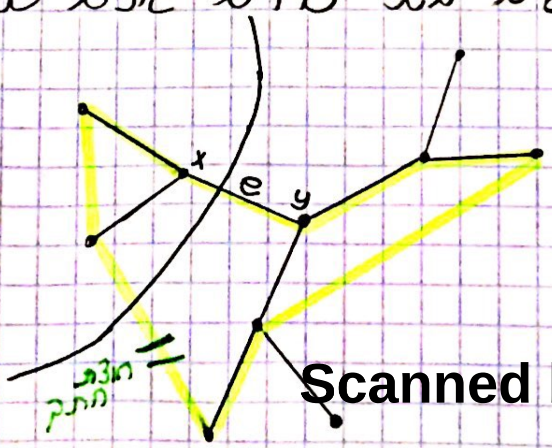
נניח בשלילה T עץ פורש מינימלי של G ו-$e \in T$.

$e \in T$ מגדירים חתך $e=(x,y)$. ניתן לעבור מ-x ל-y לאורך המעגל c.

x ו-y נמצאים בשני צדדים שונים של החתך.

__דוגמא:__

T



e נמצא במעגל, כאשר נוריד אותו ישאר מסלול מ-x ל-y. כלומר יש לפחות קשת אחת שהיא חוצה חתך!

לכן ב-C קיימים לפחות קשת אחת $e' \in C$ חוצת חתך.

נתון $w(e') < w(e)$.

<u>מעובדת שי"ק</u>: בהחלפת e ב-'e מתקבל עץ פורש 'T.

$w(T') < w(T)$ סתירה !

(לכך ש-T עץ פורש מינימלי)

מ.ש.ל

<u>שאלה</u>

יהי $G=(V,E,W)$ גרף לא מכוון ממושקל אי שליליות.

<u>נתון</u>: כל המשקלים שונים.

e_{min} קשת בעלת משקל מינימלי.

<u>הוכיחו</u>: בכל עץ פורש מינימלי T $e_{min} \in T$

<u>הוכחה</u>

נניח בשלילה T עץ פורש מינימלי. ומתקיים $e_{min} \notin T$

בהוספת e_{min} ל-T ע"ס עובדת לא שי"ק מתקבל מעגל C יחיד.

בהסרת $e' (\neq e_{min})$ כלשהי $e' \in C$ מתקבל

תצרה עץ פורש 'T $w(e') > w(e_{min})$

(כל המשקלים שונים).

$w(T') < w(T)$ סתירה לכך ש-T עץ פורש מינימלי.

מ.ש.ל

שאלה

e_{max} הקשת בעלת משקל גדול ביותר.

הוכח: כל עץ (פורש מינימלי) $e_{max} \in$ $\Leftrightarrow$ e_{max} לא שייכת למעגל

הוכחה

$\Rightarrow$: נתון- e_{max} לא שייכת למעגל

נ"ח בשלילה ∃ קיים עץ פורש מינימלי T $e_{max} \notin T$

ע"ס עובדת לא ש"ב.

בהוספת e_{max} ל-T מתקבל מעגל C

סתירה לנתון.

מ.ש.ל