**INE5409 - Cálculo Numérico para Computação (2016/1)**
**Gustavo Zambonin**
**Trabalho 1 - Métodos diretos e iterativos para sistemas esparsos de equações lineares**

**Nota**: todos os algoritmos utilizados podem ser encontrados também neste repositório.

**1)** (a) A solução para o sistema de equações lineares fornecido, a partir de um método direto, é apresentada abaixo. O método escolhido, em virtude das características do sistema linear, foi a eliminação Gaussiana simples. Por conta da diferença de comportamento do operador de divisão (`/`) entre versões da linguagem escolhida (Python), o ambiente virtual de programação gerará resultados diferentes, mas que também estarão corretos.

```
[-2.8561706131735374, 4.356170613173537, -4.113756834522826, 4.038439287217356,
-3.373920443943568, 3.1855001854512595, -2.4906755620531884, 2.2941348942505835,
-1.5971344137356092, 1.4000107267756854, -0.7028540267483352, 0.5056884808962286,
0.19147943518747773, -0.3886479863728271, 1.0858167077331484, -1.282985474691716,
1.9801542538682972, -2.1773230363186853, 2.8744918196462863, -3.071660603208936,
3.7688293868345686, -3.9659981704770764, 4.663166954124104, -4.860335737772341,
5.557504521420897, -5.754673305069517, 6.4518420887180685, -6.649010872366281,
7.346179656013208, -7.543348439655333, 8.24051722327953, -8.43768600683683,
9.134854790144445, -9.332023572520237, 10.02919235141841, -10.226361117337895,
10.923529834820279, -11.120698371532933, 11.817866233603752, -12.015031577876963,
12.712187525601552, -12.909308404929252, 13.606298407217995, -13.802799969747818,
14.49747865028091, -14.685354242585968, 15.347840363975656, -15.415571689931879,
15.629673305069653, -14.024010872367091, 7.992921959121624, -5.098584391824248,
4.946660603177585, -3.6276405831856757, 3.897821859162089, -2.6919045503570223,
2.9923916064577214, -1.7945947069629535, 2.097257620180558, -0.9000437398431117,
1.2028628725730912, -0.005690851127828677, 0.3085211999141652, 0.888647816197855,
-0.5858166621349022, 1.7829854624737023, -1.4801542505944907, 2.677323035441472,
-2.3744918194112374, 3.571660603145953, -3.2688293868176923, 4.465998170472556,
-4.163166954122894, 5.360335737772022, -5.057504521420833, 6.254673305069585,
-5.951842088718408, 7.149010872367566, -6.846179656018012, 8.04334843967326,
-7.740517223346434, 8.937686007086507, -8.63485479107627, 9.832023575997864,
-9.52919236439709, 10.726361165774996, -10.42353001559001, 11.620699046174765,
-11.31786875140136, 12.515040974425588, -12.212222593998442, 13.409439281968202,
-13.106786846976911, 14.304622851744554, -14.00428173850894, 15.210743713501344,
-14.94259515940912, 16.26920140075033, -16.449437352909992, 19.449437352909996]
```

(b) Considera-se $n = 100$ o número de equações do sistema, e $c$ uma unidade de computação.

- Para somas, tem-se

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n} c = \frac{c}{2}(n-1)n = \mathbf{4950}c$$

- Para subtrações, tem-se

$$c \cdot n + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n} c + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n}\sum_{k=i+1}^{n} c = c \cdot n \cdot \Big(\frac{1}{6}(2n^2 - 3n + 1) + \frac{1}{2}(n-1) + 1\Big) = \mathbf{333400}c$$

- Para multiplicações, tem-se

$$2 \cdot \Big(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n} c\Big) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n}\sum_{k=i+1}^{n} c = c \cdot n \cdot \Big((n-1) + \frac{1}{6}(2n^2 - 3n + 1)\Big) = \mathbf{338250}c$$

- Para divisões, tem-se

$$c \cdot n + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n} c = c \cdot n \cdot \Big(\frac{1}{2}(n-1) + 1\Big) = \mathbf{5050}c$$

Então, o número final de operações é de

$$c \cdot n \cdot \Big(\frac{5}{2}(n-1) + \frac{1}{3}(2n^2 - 3n + 1) + 2\Big) = \mathbf{681650}c.$$

**2)** (a) A análise de convergência de um sistema deste tipo é realizada pela verificação da dominância diagonal da matriz, ou seja, uma matriz $A$ é diagonalmente dominante se

$$|a_{ii}| \geq \sum_{j \neq i} |a_{ij}| \text{ para todo } i$$

onde $a_{ij}$ denota o elemento da linha $i$ e coluna $j$. O método `check_diagonal_dominance` pode ser executado para verificar isto. Neste caso, como seu resultado é `False`, nada se pode afirmar sobre a convergência desse sistema linear, e assim, fatores de relaxação devem ser testados.

(b) Em virtude da escolha do épsilon de máquina de precisão dupla ($\epsilon \approx 2.22 \cdot 10^{-16}$) como tolerância padrão para a parada de iterações, é possível efetuar um grande número de iterações e visualizar um fator de relaxação ($\omega$) que gere melhores resultados. Primeiramente, foi-se testado o intervalo total de fatores válidos ($0 < \omega < 2$) com um número de iterações baixo (100), e percebeu-se um grande número de decimais exatos após à virgula perto do número **1.80**. Diminuindo o intervalo e aumentando o número de iterações para 1000, concluiu-se que $\omega = \mathbf{1.878}$ é um bom valor, com precisão de 13 casas após à vírgula com tolerância $= \epsilon$ na primeira equação do sistema linear.

(c) O resultado abaixo é calculado com $\omega = 1.878$ e $\epsilon = 1 \cdot 10^{-4}$.

```
Maximum tolerance exceeded at iteration 310.
[-2.853251748355784, 4.353297944089141, -4.110850693888152, 4.035486043454446,
-3.370924423948766, 3.1824737836481996, -2.487629628286154, 2.2910800962042974,
-1.59408102272795, 1.396967795131335, -0.6998334460019331, 0.5026990446137996,
0.19442566710570072, -0.391542346947283, 1.0886487463096102, -1.2857456065699253,
1.9828343068555485, -2.1799122759627085, 2.8769841726516505, -3.0740453980103237,
3.77110135318818, -3.968148581980649, 4.665189654771799, -4.8622254325847925,
5.559253450678749, -5.756279610488767, 6.4532974437566075, -6.650315037453679,
7.347326222216086, -7.544336174290529, 8.24134407333501, -8.438348022490775,
9.13535484341079, -9.332355875425623, 10.02936269622345, -10.226364968659265,
10.923371772494486, -11.120379076520408, 11.817386534651924, -12.01439914786595,
12.711398332665818, -12.908374202495835, 13.605216179853931, -13.801582555893958,
14.496127099177926, -14.683870565700358, 15.346233828151236, -15.41384005329251,
15.62781629739698, -14.021932566540576, 7.9903334021509735, -5.09581371310809,
4.943804189390155, -3.6247290257569396, 3.894867718130789, -2.6889195307384313,
2.9893859242958825, -1.7915815132133723, 2.0942468817601316, -0.8970465553452366,
1.1998890193728338, -0.0027496670578067398, 0.30562382141222044, 0.8914933214165963,
-0.5885987280483297, 1.7856967653589122, -1.482784389711428, 2.6798641016476066,
-2.3769358033407126, 3.573998277219781, -3.2710554843163733, 4.468102832143591,
-4.165146596120273, 5.362181729270814, -5.0592130021293285, 6.256238927216705,
-5.953259245360462, 7.150278330280135, -6.847290297093205, 8.044303891127917,
-7.741311130609901, 8.938320037946559, -8.635326337821088, 9.832331586125056,
-9.52933982463239, 10.72634404334204, -10.423355750269597, 11.620362793388969,
-11.317378410344569, 12.51439607219345, -12.211427821404676, 13.408500734741132,
-13.105702253720045, 14.303405672048342, -14.002930085527035, 15.209273755129649,
-14.941003835449457, 16.26750152361424, -16.447664759134533, 19.447682337305743]
```

(d) Considera-se $n = 100$ o número de equações do sistema, $s = 310$ o número de iterações e $c$ uma unidade de computação.

- Para somas, tem-se

$$\sum_{i=1}^{s} \sum_{i}^{n} c = c \cdot n \cdot s = \mathbf{31000}c$$

- Para subtrações, tem-se

$$2 \cdot \sum_{i=1}^{s} \sum_{i}^{n} c = 2 \cdot c \cdot n \cdot s = \mathbf{62000}c$$

- Para multiplicações, tem-se

$$\sum_{i=1}^{s} \left( \sum_{i}^{n} \right)^2 c = c \cdot n^2 \cdot s = \mathbf{3100000}c$$

- Para divisões, tem-se

$$\sum_{i=1}^{s} \sum_{i}^{n} c = c \cdot n \cdot s = \mathbf{31000}c$$

Então, o número final de operações é de

$$c \cdot n \cdot s \cdot (n + 4) = \mathbf{3224000}c.$$

(e) O maior erro de truncamento relativo foi calculado a partir da diferença entre as soluções obtidas com $s = 1000$ e $s = 2000$, $\omega = 1.878$ e $\epsilon \approx 2.22 \cdot 10^{-16}$: $\mathbf{1.2350565015140091 \cdot 10^{-11}}$.