Métodos diretos e iterativos para sistemas esparsos de equações lineares

Gustavo Zambonin*
Cálculo Numérico para Computação (UFSC – INE5409)

1) (a) A solução para o sistema de equações lineares fornecido, a partir de um método direto, é apresentada abaixo. O método escolhido, em virtude das características do sistema linear, é a eliminação Gaussiana simples.

```
[-2.8561706131735374, 4.356170613173537, -4.113756834522826, 4.038439287217356,
-3.373920443943568, 3.1855001854512595, -2.4906755620531884, 2.2941348942505835,
-1.5971344137356092, 1.4000107267756854, -0.7028540267483352, 0.5056884808962286,
0.19147943518747773, -0.3886479863728271, 1.0858167077331484, -1.282985474691716,
1.9801542538682972, -2.1773230363186853, 2.8744918196462863, -3.071660603208936,
3.7688293868345686, -3.9659981704770764, 4.663166954124104, -4.860335737772341,
5.557504521420897, -5.754673305069517, 6.4518420887180685, -6.649010872366281,
7.346179656013208, -7.543348439655333, 8.24051722327953, -8.43768600683683,
9.134854790144445, -9.332023572520237, 10.02919235141841, -10.226361117337895,
10.923529834820279, -11.120698371532933, 11.817866233603752, -12.015031577876963,
12.712187525601552, -12.909308404929252, 13.606298407217995, -13.802799969747818,
14.49747865028091, -14.685354242585968, 15.347840363975656, -15.415571689931879,
15.629673305069653, -14.024010872367091, 7.992921959121624, -5.098584391824248,
4.946660603177585, -3.6276405831856757, 3.897821859162089, -2.6919045503570223,
2.9923916064577214, -1.7945947069629535, 2.097257620180558, -0.9000437398431117,
1.2028628725730912, -0.005690851127828677, 0.3085211999141652, 0.888647816197855,
-0.5858166621349022, 1.7829854624737023, -1.4801542505944907, 2.677323035441472,
-2.3744918194112374, 3.571660603145953, -3.2688293868176923, 4.465998170472556,
-4.163166954122894, 5.360335737772022, -5.057504521420833, 6.254673305069585,
-5.951842088718408, 7.149010872367566, -6.846179656018012, 8.04334843967326,
-7.740517223346434, 8.937686007086507, -8.63485479107627, 9.832023575997864,
-9.52919236439709, 10.726361165774996, -10.42353001559001, 11.620699046174765,
-11.31786875140136, 12.515040974425588, -12.212222593998442, 13.409439281968202,
-13.106786846976911, 14.304622851744554, -14.00428173850894, 15.210743713501344,
-14.94259515940912, 16.26920140075033, -16.449437352909992, 19.449437352909996]
```

(b) Considera-se n o número de equações do sistema, e c uma unidade de computação.

- Para somas, tem-se

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i+1}^{n} c = c \cdot n \cdot \left(\frac{1}{2}(n-1) \right)$$

- Para subtrações, tem-se

$$c \cdot n + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i+1}^{n} c + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i+1}^{n} \sum_{k=i+1}^{n} c = c \cdot n \cdot \left(\frac{1}{6}(2n^2 - 3n + 1) + \frac{1}{2}(n-1) + 1 \right)$$

  Note que é possível remover a primeira iteração da retro-substituição e calcular a solução manualmente, já que o somatório de coeficientes à direita será igual a 0. Isto elimina uma subtração desnecessária.

- Para multiplicações, tem-se

$$2 \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i+1}^{n} c \right) + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i+1}^{n} \sum_{k=i+1}^{n} c = c \cdot n \cdot \left((n-1) + \frac{1}{6}(2n^2 - 3n + 1) \right)$$

- Para divisões, tem-se

$$c \cdot n + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i+1}^{n} c = c \cdot n \cdot \left(\frac{1}{2}(n-1) + 1 \right)$$

*gustavo.zambonin@grad.ufsc.br — todos os algoritmos utilizados podem ser encontrados também neste repositório.

Então, o número final de operações é de

$$c \cdot n \cdot \Big(\frac{5}{2}(n-1) + \frac{1}{3}(2n^2 - 3n + 1) + 2\Big).$$

2) (a) A análise de convergência de um sistema deste tipo é realizada pela verificação da dominância diagonal da matriz, ou seja, uma matriz A é diagonalmente dominante se

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}| \ \forall \ i = 1, \ldots, n$$

onde a_{ij} denota o elemento da linha i e coluna j. O método `check_diagonal_dominance` pode ser executado para verificar isto. Neste caso, como seu resultado é `False`, nada se pode afirmar sobre a convergência desse sistema linear, e assim, fatores de relaxação devem ser testados.

(b) Em virtude da escolha do épsilon de máquina de precisão dupla ($\epsilon \approx 2.22 \cdot 10^{-16}$) como tolerância padrão para a parada de iterações no método SOR (*sucessive over-relaxation*), é possível efetuar um grande número de iterações e visualizar um fator de relaxação (ω) que gere melhores resultados. Primeiramente, foi-se testado o intervalo total de fatores válidos ($0 < \omega < 2$) com um número de iterações baixo (100), e percebeu- se um grande número de decimais exatos após à virgula perto do número **1.80**. Diminuindo o intervalo e aumentando o número de iterações para 1000, concluiu-se que $\omega = \mathbf{1.879}$ é um bom valor, com precisão de 13 casas após à vírgula com tolerância máxima e um grande número de iterações s (na casa dos milhares) na primeira equação do sistema linear.

(c) O resultado abaixo é calculado com $\omega = 1.879$, $\epsilon = 1 \cdot 10^{-4}$ e $s = 500$.

```
[-2.856174712480373, 4.356175656586068, -4.113767927141613, 4.0384578415033525,
-3.373946832412452, 3.1855342893658825, -2.490717332327044, 2.2941842583431327,
-1.5971912946745552, 1.4000750775189341, -0.7029256009703317, 0.5057671741869292,
0.19139395829268932, -0.3885558984779885, 1.0857183334162417, -1.282881121935825,
1.9800441982996733, -2.1772077402425247, 2.8743715188488084, -3.071535846551343,
3.7687004453832307, -3.96586556908092, 4.663031099116311, -4.860197038404439,
5.557363563375291, -5.7545303749205035, 6.451697891208179, -6.648865672014814,
7.346034127013814, -7.543202974714648, 8.240372313905338, -8.437542274642249,
9.134712498148414, -9.33188351828323, 10.029054676235443, -10.226226607358544,
10.923398745795158, -11.120571231680495, 11.817743560650708, -12.01491352184236,
12.712074931391198, -12.90920119764235, 13.606197403951445, -13.802705040272082,
14.497390396055382, -14.685273175562498, 15.34776658154788, -15.415505927929194,
15.629616127017108, -14.023968294604092, 7.992910746001128, -5.0985869651569935,
4.946672187404567, -3.627660085780336, 3.8978491802368667, -2.6919396064705703,
2.9924343670396847, -1.7946449397852384, 2.0973152507581747, -0.900108589648829,
1.2029348102632038, -0.005769726850836549, 0.30860672543611967, 0.8885557928525473,
-0.5857185369961594, 1.7828814221301357, -1.4800447090327213, 2.6772082953537426,
-2.3743722409018617, 3.5715366519587306, -3.2687013455809155, 4.4658666306216075,
-4.163032179716995, 5.360198336515029, -5.057364852259886, 6.254531866503875,
-5.951699421351235, 7.14886730835849, -6.8460359041518055, 8.043204730700085,
-7.740374297511884, 8.9375441536703, -8.634714597883152, 9.831885550924712,
-9.529056820661879, 10.726228844410288, -10.423401009035116, 11.620574196964796,
-11.3177481556616, 12.514925259208868, -12.212112072922006, 13.40933422214768,
-13.106687999503325, 14.304530053474275, -14.0041957421782, 15.210664199370601,
-14.942522976379943, 16.269136433854502, -16.449378206596013, 19.44937955528533]
```

(d) Considera-se n o número de equações do sistema, s o número de iterações, e c uma unidade de computação.

- Para somas, tem-se

$$2 \cdot c \cdot s + \sum_{i=1}^{s} \Big(6 \cdot \sum_{j=2}^{n/2}\Big) c = c \cdot s \cdot (3n - 4)$$

- Para subtrações, tem-se

$$2 \cdot \sum_{i=1}^{s} \sum_{i}^{n} c = 2 \cdot c \cdot n \cdot s$$

- Para multiplicações, tem-se

$$\sum_{i=1}^{s} \sum_{i}^{n} c = c \cdot n \cdot s$$

- Para divisões, tem-se

$$\sum_{i=1}^{s}\sum_{i}^{n} c = c \cdot n \cdot s$$

Então, o número final de operações é de

$$c \cdot s \cdot (7n - 4).$$

(e) O maior erro de truncamento relativo foi calculado a partir da diferença ($\left|\frac{VA-VE}{VE}\right|$ onde VA é o resultado do método SOR, e VE é o resultado da eliminação Gaussiana) entre as soluções obtidas acima: $0.0138600924952 \approx \mathbf{1.386 \cdot 10^{-2}}$.