Universidade Federal de Santa Catarina - UFSC
Centro Tecnológico - CTC
Departamento de Informática e Estatística - INE

Lista de Exercícios 1 - INE5202/INE5232/INE5409
Prof. Sérgio Peters (`sergio.peters@ufsc.br`)

1) Classifique as possíveis soluções dos seguintes sistemas de equações lineares, através do método de Gauss com pivotamento total:

(a)
$$\begin{cases} 3x_1 + 1.5x_2 + 4.75x_3 = 8 \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 7 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = -12 \end{cases}$$

(b)
$$\begin{cases} x_1 + 0.5x_2 - 1.75x_3 = -1 \\ 3x_1 + 1.5x_2 + 4.75x_3 = 8 \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 7 \end{cases}$$

(c)
$$\begin{cases} x_1 + 0.5x_2 - 1.75x_3 = 0 \\ 3x_1 + 1.5x_2 + 4.75x_3 = 8 \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 7 \end{cases}$$

2) Resolva o sistema de equações lineares abaixo pelo método de Gauss utilizando pivotação parcial e pivotação total.

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 + 2x_3 = -1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 10 \\ x_1 + 0.1x_2 - x_3 = -3 \end{cases}$$

3) Calcule o determinante da matriz de coeficientes utilizando o processo de eliminação adotado pelo método de Gauss.

4) Monte um algoritmo que calcule o determinante da matriz de coeficientes escalonada, utilizando o processo de eliminação adotado pelo método de Gauss.

5) (opcional) Elabore um algoritmo para resolver um sistema de equações lineares pelo método de Gauss-Jordan utilizando pivotação parcial. (Sugestão: estenda as eliminações do algoritmo de Gauss para as linhas acima e abaixo da diagonal principal).

6) Dado o sistema de equações lineares:

$$\begin{cases} 3x_1 + 15x_2 + 4.75x_3 = 8 \\ 4.01x_1 + x_2 + 3x_3 = 7 \\ x_1 + 0.5x_2 - 0.05x_3 = -1 \end{cases}$$

(a) Resolva-o pelo método de eliminação de Gauss sem pivotamento;
(b) Resolva-o pelo método de eliminação de Gauss com pivotamento parcial;
(c) Resolva-o pelo método de eliminação de Gauss com pivotamento total;
(d) (opcional) Resolva-o pelo método de eliminação de Gauss-Jordan com pivotamento parcial;
(e) (opcional) Resolva-o pelo método de Inversão de matriz com pivotamento parcial.

7) (opcional) Monte um algoritmo para determinar a matriz inversa de A, recorrendo ao método de eliminação de Gauss-Jordan com pivotamento parcial.

8) Resolva o seguinte sistema de equações lineares pelo método de Crout:

$$\begin{cases} 4x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ -x_1 + 4.25x_2 + 2.75x_3 = 1 \\ x_1 + 2.75x_2 + 3.5x_3 = -1 \end{cases}$$

9) (opcional) Resolva o sistema de equações lineares acima pelo método de Cholesky.

10) Para resolver um sistema de equações lineares da ordem de $n = 10$ (10 equações com 10 incógnitas) em computador, utilizando o método de Eliminação de Gauss sem pivotamento, a solução foi encontrada em 0.1 segundos de CPU, por exemplo. Estime o tempo que este mesmo computador levaria para resolver um sistema da ordem de $n = 1000$ equações, utilizando o mesmo método.

11) Avalie o condicionamento do sistema abaixo pelos dois critérios estabelecidos:

$$\begin{cases} x_1 + 0.5x_2 - 0.05x_3 = -1 \\ 3x_1 + 1.5x_2 + 4.75x_3 = 8 \\ 4.01x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 7 \end{cases}$$

12) Monte um algoritmo genérico `x = fsubstituicoes(n, LU, b)`, que determine e retorne a solução x do sistema linear $A \cdot x = b$, a partir da matriz LU decomposta de A, onde LU contém L e U concatenadas na mesma matriz, e do vetor b, fazendo as duas substituições $L \cdot c = b$ e $U \cdot x = c$.

$$LU = \begin{bmatrix} L_{11} & U_{12} & U_{13} \\ L_{21} & L_{22} & U_{23} \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{bmatrix}$$

Determine o número de operações `x = fsubstituicoes(n, LU, b)`, em função de n.

Dada a função: `[LU b] = fLU(n, A, b)` - que retorna a matriz LU decomposta (LU de Crout), com as matrizes L e U armazenadas juntas, com pivotação parcial interna, através da função `[A b] = fpivotacao(k, n, A, b)` - que troca linhas da matriz A e do vetor b e retorna do lado esquerdo da função `fpivotacao.m`, uma nova matriz A com a linha k contendo o maior coeficiente em módulo na coluna k.

13) Dado o sistema linear abaixo para $n = 10000$ equações:

$$\begin{cases} x_i + x_{i+1} = 150 & i = 1 \\ x_{i-1} + 9x_i + x_{i+1} + x_{i+100} = 100 & i = 2, \ldots, \frac{n}{2} \\ x_{i-100} + x_{i-1} + 9x_i + x_{i+1} = 200 & i = \frac{n}{2} + 1, \ldots, n-1 \\ x_{i-1} + x_i = 300 & i = n \end{cases}$$

(a) Se o sistema for resolvido por métodos iterativos, como Jacobi ou Gauss–Seidel, a sua convergência para a solução é garantida? Justifique;

(b) É recomendo testar a utilização de fatores de sub-relaxação? Justifique;

(c) Monte um algoritmo otimizado, que calcule e imprima a solução x do sistema linear acima com 10 dígitos significativos exatos, para $n = 10000$ incógnitas, pelo método que efetue o menor número de operações aritméticas em ponto flutuante. Justifique a escolha do método adotado.

14) (a) Que cuidados devem ser tomados ao se resolver sistemas mal-condicionados por métodos diretos. Seria indicado resolver sistemas mal-condicionados por métodos iterativos? Justifique;

(b) Monte um algoritmo otimizado `A = fescalona(n, A)`, que determine e retorne a matriz escalonada triangular superior, expandida com b, em $A = \begin{bmatrix} A & b \end{bmatrix}$, do lado esquerdo da function, a partir das entradas (n, A), onde n é o nº de equações e $A = \begin{bmatrix} A_0 & b \end{bmatrix}$ é a matriz expandida original de um sistema genérico $A_0 \cdot x = b$.

15) Dado o sistema linear com 4 tipos de equações:

$$\begin{cases} x_i - x_{i+1} = 0.1 & i = 1 \\ -x_{i-1} + 2x_i - x_{i+1} = 0.1 & i = 2, \ldots, n_1 - 1 \\ -x_{i-2} - x_{i-1} + 3x_i - x_{i+1} = 0.2 & i = n_1, \ldots, n_2 - 1 \\ -x_{i-1} + 2x_i = 0.3 & i = n_2 \end{cases}$$

(a) Considerando $n_1 = 300$ e $n_2 = 400$, se o sistema for resolvido por métodos iterativos, a sua convergência será garantida? Justifique sua resposta.

(b) Se o sistema acima convergir ‘’lentamente‘’ para a solução por métodos iterativos, como a sua convergência pode ser acelerada? Justifique sua resposta.

(c) Se o sistema acima convergir ‘’oscilando‘’ para a solução por métodos iterativos, como a sua convergência pode ser acelerada? Justifique sua resposta.

(d) Determine a solução x e o resíduo máximo das equações, do sistema acima, para $n_1 = 3$ e $n_2 = 4$, pelo método de Gauss (sem pivotação);

(e) Determine a solução do sistema acima, para $n_1 = 3$ e $n_2 = 4$, com erro máximo estimado por $max(|x(i) - x_i(i)|)$ de sua escolha, pelo método de Gauss–Seidel (sem fator de sub-relaxação).

16) Dado o sistema linear com 4 tipos de equações:

$$\begin{cases} x_i - x_{i+1} = 0.1 & i = 1 \\ -x_{i-1} + 4x_i - x_{i+1} = 0.1 & i = 2, \ldots, n_1 - 1 \\ -x_{i-2} - x_{i-1} + 2x_i = 0.2 & i = n_1, \ldots, n_2 - 1 \\ -x_{i-1} + 2x_i = 0.3 & i = n_2 \end{cases}$$

(a) Considerando $n_1 = 300$ e $n_2 = 400$, se o sistema for resolvido por métodos iterativos, a sua convergência será garantida? Justifique sua resposta.

(b) Se o sistema acima convergir de forma ‘’oscilatória‘’ ao longo de um processo iterativo, como a sua convergência pode ser acelerada? Justifique sua resposta.

(c) Determine as matrizes L e U decompostas de A, tal que $L \cdot U = A$, referente ao sistema acima para $n_1 = 3$ e $n_2 = 4$, pelo método de Crout (sem pivotação);

(d) Determine a solução do sistema acima, para $n_1 = 3$ e $n_2 = 4$, com erro máximo estimado por $max(|x(i) - x_i(i)|) < 2 \cdot 10^{-2}$, pelo método de Gauss–Seidel (sem fator de sub-relaxação), a partir da solução inicial NULA.

17) Dado o seguinte sistema linear:

(a) Se este sistema for resolvido por métodos DIRETOS, verifique se é um sistema mal-condicionado. Justifique;

(b) Que cuidados devemos tomar adicionalmente para resolver sistemas mal- condicionados?

(c) Determine a solução x do sistema acima pelo método de Gauss;

(d) Determine o resíduo máximo do sistema acima com a solução x obtida acima e avalie se este resíduo é satisfatório (de acordo com o número de dígitos significativos que usar);

(e) Monte um algoritmo genérico, tipo `Ab = fescalonamento(n, Ab)`, que determine e retorne a matriz Ab triangularizada à esquerda, a partir das entradas n e Ab originais, $Ab = \begin{bmatrix} A & b \end{bmatrix}$ concatenadas em n linhas e $n+1$ colunas, onde $A \cdot x = b$.

(f) Monte um algoritmo genérico `x = fretrosubtituicao(n, Ab)`, que determine e retorne a solução x a partir das entradas n e Ab, onde $Ab = \begin{bmatrix} A & b \end{bmatrix}$ contém a matriz triangularizada;

(g) Determine a solução x do sistema acima pelo método de Crout (sem pivotação);

(h) Determine o resíduo máximo do sistema acima com a solução x obtida e avalie se este resíduo é satisfatório (de acordo com o número de dígitos significativos que usar);

(i) Monte um algoritmo `x = fsubstituicoesf(n, A)`, que determine e retorne a solução x do sistema $A_0 \cdot x = b$, a partir das entradas n e A ($L \cdot U = A_0$ e $A = \begin{bmatrix} L \backslash U & b \end{bmatrix}$, matriz expandida que contém L e U (sobrepostas) e concatenadas com b em n linhas e $n+1$ colunas), resolvendo as duas substituições $L \cdot c = b$ e $U \cdot x = c$;

(j) Monte um algoritmo `LU = fLU(n, A)`, que determine e retorne a matriz expandida decomposta LU, com as matrizes L e U (sobrepostas) e concatenadas com b, $LU = \begin{bmatrix} L \backslash U & b \end{bmatrix}$, com pivotação parcial interna, através da função `A = fpivotacao(n, A, k)` - que determina a matriz expandida A com linha k com o maior coeficiente em módulo na coluna k, onde $A = \begin{bmatrix} A_0 & b \end{bmatrix}$ e $A_0 \cdot x = b$.

18) Dado o seguinte sistema linear:

(a) Considerando $n_1 = 3000$ e $n_2 = 4000$ com n_2 equações, se o sistema for resolvido por métodos iterativos, a sua convergência será garantida? Justifique sua resposta.

(b) Considerando o sistema acima, é recomendado testar o uso de fatores de sub ou sobre relaxação na sua resolução por métodos iterativos? Justifique sua resposta.

(c) Monte um algoritmo que determine a solução do sistema acima, para $n_1 = 3000$ e $n_2 = 4000$ equações, com erro máximo estimado por $max(|x(i) - x_a(i)|) < 1 \cdot 10^{-6}$, pelo método de Gauss–Seidel com fator de sub-relaxação 0.5, a partir da solução inicial UNITÁRIA.

(d) Monte um algoritmo que determine o erro de truncamento exato da solução x do sistema acima, para $n_1 = 3000$ e $n_2 = 4000$ equações, com critério de parada $max(|x(i) - x_a(i)|) < 1 \cdot 10^{-6}$, pelo método de Gauss–Seidel com fator de sub-relaxação 0.5, a partir da solução inicial UNITÁRIA.

(e) Determine a solução do sistema acima, para $n_1 = 3$ e $n_2 = 4$ equações, com erro máximo estimado por $max(|x(i) - x_a(i)|)$ de sua escolha, pelo método de Gauss–Seidel (sem fator de sub-relaxação), a partir da solução inicial UNITÁRIA.

19) Elabore algoritmos que:

(a) Forneça a matriz pivotada $\begin{bmatrix} A & b \end{bmatrix}$ através da Pivotação Parcial de uma matriz expandida $\begin{bmatrix} A & b \end{bmatrix}$ para uma linha genérica k;

(b) Forneça a matriz $\begin{bmatrix} A & b \end{bmatrix}$ triangularizada pelo método de Gauss de uma matriz expandida $\begin{bmatrix} A & b \end{bmatrix}$ genérica;

(c) Forneça a solução $S = \{x_i\}$ de um sistema escrito em forma de matriz expandida já triangularizada $\begin{bmatrix} A & b \end{bmatrix}$, pelo método da Retrosubstituição de Gauss;

(d) Forneça a matriz $\begin{bmatrix} A & b \end{bmatrix}$, decomposta em L e U, pelo método de Crout a partir de uma matriz expandida $\begin{bmatrix} A & b \end{bmatrix}$;

(e) Forneça a solução $S = \{x_i\}$, a partir de um sistema cuja matriz de coeficientes já está decomposta em L e U pelo método de Crout, onde L e U estão armazenadas sobrepostas em A na mesma matriz expandida $\begin{bmatrix} A & b \end{bmatrix}$;

(f) Calcule o resíduo máximo das equações de um sistema $\begin{bmatrix} A_0 & b \end{bmatrix}$ original para uma solução $S = \{x_i\}$.

20) Determine a solução x do seguinte sistema composto por uma matriz tridiagonal pelo método de Gauss otimizado pelo algoritmo de Thomas:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 5 \\ 3x_2 - x_3 = 4 \\ x_2 - 2x_3 + x_4 = 10 \\ x_3 - x_4 + x_5 = 3 \\ x_4 + x_5 = -3 \end{cases}$$

21) Monte um algoritmo que determine a solução do sistema acima pelo método de Gauss otimizado pelo algoritmo de Thomas.

22) Dado o sistema linear:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 150 & \\ x_{i-1} - 3x_i + x_{i+1} - x_{i+10000} = 100 & i = 2, \ldots, 2999 \\ x_{i-1000} - 2.1x_i + x_{i+1} & i = 3000, \ldots, 4999 \\ x_{4999} - x_{5000} = 300 & \end{cases}$$

(a) Analise o sistema anterior de 5000 equações e escolha um método adequado para sua resolução. Justifique sua resposta.

(b) Se o sistema for resolvido por métodos iterativos, a sua convergência é garantida?

(c) Elabore um algoritmo otimizado para obter sua solução com $max(|x_i^{k+1} - x_i^k|) \leq \epsilon$ ($\epsilon = 1 \cdot 10^{-5}$) pelo método de Gauss–Seidel com sub-relaxação de $\lambda = 0.8$, a partir da solução inicial $(0, 0, 0, \ldots, 0)$.

23) Dado o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 + 0.1x_2 + x_3 = -3 \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 = -1 \end{cases}$$

(a) Verifique se este sistema possui diagonal dominante;

(b) Efetue uma pivotação parcial em todos as linhas;

(c) Verifique novamente se o sistema pivotado apresenta diagonal dominante;

(d) Resolva o sistema pivotado pelo método de Gauss-Seidel, com critério $max(|x_i^{k+1} - x_i^k|) \leq \epsilon$ ($\epsilon = 1 \cdot 10^{-2}$) partindo da solução inicial $(0, 0, 0)$.

24) Responda:

(a) O que é pivotação parcial e para que serve?

(b) A pivotação parcial ajuda a minimizar o acúmulo de erros de arredonamento ao longo do processo de escalonamento? Justifique.

(c) Quais são os requisitos para que um sistema de equações convirja garantidamente?

(d) Quais são os requisitos para que um sistema de equações convirja rapidamente e sem oscilações?

25) Sabendo que um computador X opera 10^6 operações em ponto flutuante por segundo, e que o número total de operações aritméticas envolvidas no método de Gauss é da ordem de $O(\frac{2}{3}n^3)$ operações:

(a) Quanto tempo de CPU será necessário para resolver um sistema de $n = 1000$ equações neste mesmo computador?

(b) Quantos MB (megabytes) são necessários para armazenar um sistema de $n = 1000$ equações utilizando variáveis double (64 bits = 8 B) na forma de matriz expandida?

26) Dado o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = -1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - 0.1x_2 - x_3 = 3 \end{cases}$$

(a) Verifique se o sistema acima é mal condicionado. Justifique;

(b) Determine as matrizes L e U e a solução $S = \{x1, x2, x3\}$ do sistema $A \cdot x = b$ acima pelo método de decomposição L e U de CROUT;

(c) Calcule o resíduo máximo da solução S obtida acima.

27) Dado o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 1 \\ x_{i-1} + 2x_i + x_{i+1} = 3 \quad i = 2, \dots, n-1 \\ x_{n-1} + 2x_n = 3 \end{cases}$$

(a) Considerando $n = 1000$ equações, se o sistema for resolvido por métodos iterativos, a sua convergência será garantida? Justifique sua resposta.

(b) Considerando $n = 4$ equações, determine a solução do sistema, com erro máximo estimado por $max(|x_i - x_i^a|) \leq \epsilon$, pelo método de Gauss–Seidel, com fator de sub-relaxação $\lambda = 0.8$ a partir da solução inicial unitária (ϵ de sua escolha). Defina o erro encontrado.

(c) Monte um algoritmo que determine a solução do sistema acima, para $n = 1000$ equações, com critério de parada $max(|x_i - x_i^a|) \leq 0.000001$, pelo método de Gauss–Seidel, com fator de sub-relaxação $\lambda = 0.8$ a partir da solução inicial unitária. Calcule os erros exatos de cada $x(i)$ da solução.

28) Dado o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 1.5x_3 = 4 \\ 2x_1 + 0.5x_3 = -3 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 1 \end{cases}$$

(a) Verifique se o sistema acima é mal-condicionado. Justifique;

(b) Determine uma solução do sistema acima pelo método de GAUSS (triangularização e retrosubstituição), com pivotação parcial;

(c) Avalie os resíduos finais das equações e verifique se a solução obtida tem uma exatidão satisfatória (de acordo com o número de dígitos adotado).

29) Dado o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 1.5x_3 = 4 \\ 2x_1 + 0.01x_2 + 0.5x_3 = -3 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 1 \end{cases}$$

(a) Verifique se o sistema acima é mal-condicionado. Que cuidados são necessários para se resolver um sistema mal condicionado com exatidão? Justifique;

(b) Determine a solução do sistema acima pelo método de Crout (decomposição LU);

(c) Avalie os resíduos finais das equações e verifique se a solução obtida tem uma exatidão satisfatória (de acordo com o número de dígitos adotado).

30) Dado o sistema linear para $n = 1000$ equações:

$$\begin{cases} x_i + x_{i+1} = 150 & i = 1 \\ x_{i-1} + 9x_i + x_{i+1} + x_{i+100} = 100 & i = 2, \dots, \frac{n}{2} \\ x_{i-100} + x_{i-1} + 9x_i + x_{i+1} = 200 & i = \frac{n}{2} + 1, \dots, n-1 \\ x_{i-1} + x_i = 300 & i = n \end{cases}$$

(a) Esse sistema pode ser resolvido pelo método de Gauss otimizado, para matriz banda tridiagonal? Justifique;

(b) Monte um algoritmo otimizado, que calcule e imprima uma solução satisfatória (escolha um erro adequado) para as $n = 1000$ incógnitas, pelo método que você presuma efetuar o menor número de operações artiméticas em ponto flutuante. Justifique a escolha do método adotado. Escolha.

31) Dado o sistema linear com 4 tipos de equações:

$$\begin{cases} x_i - x_{i+1} = 0.1 & i = 1 \\ -x_{i-1} + 4x_i - x_{i+1} = 0.1 & i = 2, \dots, n_1 - 1 \\ -x_{i-1} + 2x_i - x_{i+1} = 0.2 & i = n_1, \dots, n_2 - 1 \\ -x_{i-1} + 2x_i = 0.3 & i = n_2 \end{cases}$$

(a) Considerando $n_1 = 300$ e $n_2 = 500$, se o sistema for resolvido por métodos iterativos, a sua convergência será garantida? Justifique sua resposta.

(b) Se o sistema acima convergir lentamente ao longo de um processo iterativo, como a sua convergência pode ser acelerada? Justifique sua resposta.

(c) Monte um algoritmo otimizado, que determine e imprima a solução x do sistema acima pelo método de Gauss otimizado para matrizes tridiagonais.

(d) Monte um algoritmo otimizado, que determine e imprima a solução x do sistema acima pelo método de Gauss–Seidel, sem fator de relaxação, com critério de parada $max(|x(i) - x_i(i)|) < 1 \cdot 10^{-4}$.

(e) Explique como você calcularia o erro de truncamento existente na solução S, aproximada pelo método de Gauss–Seidel em d, utilizando variáveis de 64 bits.

32) Dados os $m = 4$ sistemas $A \cdot x = b^m$ cada um de $n = 3$ equações abaixo, com a mesma matriz A e com $m = 4$ termos independentes b_i^m diferentes:

$$m = 1 \longrightarrow \begin{cases} 4_x 1 + x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 + 0.1x_2 - x_3 = -3 \end{cases} \qquad m = 2 \longrightarrow \begin{cases} 4_x 1 + x_2 + 2x_3 = -1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 10 \\ x_1 + 0.1x_2 - x_3 = -3 \end{cases}$$

$$m = 3 \longrightarrow \begin{cases} 4_x 1 + x_2 + 2x_3 = 7 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = -4 \\ x_1 + 0.1x_2 - x_3 = 3 \end{cases} \qquad m = 4 \longrightarrow \begin{cases} 4_x 1 + x_2 + 2x_3 = 5 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + 0.1x_2 - x_3 = 1 \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0.1 & -1 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 7 & 5 \\ 4 & 10 & -4 & 3 \\ -3 & -3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Monte um algoritmo genérico, que determine as m soluções $S_m = \{x_1^m, x_2^m, x_3^m\}$ dos m sistemas $A \cdot x = b^m$ acima, através das duas substituições $L \cdot c^m = b^m$ e $U \cdot x^m = c^m$ propostas por Crout.

Está disponível a função `[L U] = fLUCrout(n, A)`, que calcula e retorna as matrizes L_{nxn} e U_{nxn} (sem pivotação) sobrepostas na mesma matriz LU, por decomposição da matriz A_{nxn} pelo método de CROUT ($A = L\ cdotU$).

33) Dado o sistema linear com 4 tipos de equações:

$$\begin{cases} x_i - x_{i+1} = 0.1 & i = 1 \\ -x_{i-1} + 4x_i - x_{i+1} = 0.1 & i = 2, \ldots, n_1 - 1 \\ -x_{i-1} + 2x_i - x_{i+1} = 0.2 & i = n_1, \ldots, n_2 - 1 \\ -x_{i-1} + 2x_i = 0.3 & i = n_2 \end{cases}$$

onde $n_1 = 300$ e $n_2 = 500$.

(a) Se o sistema for resolvido por métodos iterativos, a sua convergência será garantida? Justifique sua resposta.

(b) Se o sistema acima convergir ''oscilando ou lentamente' ao longo de um processo iterativo, como a sua convergência pode ser acelerada? Justifique sua resposta.

(c) Monte um algoritmo otimizado, que determine e imprima a solução x do sistema acima pelo método de Gauss–Seidel, com fator de relaxação $f = 1.4$, com critério de parada $max(|x(i) - x_i(i)|) < 1 \cdot 10^{-4}$ e que determine e imprima o erro de truncamento máximo da solução x obtida (utilize variáveis de 64 bits para minimizar os efeitos dos arredondamentos).