Cálculo-λ

Gustavo Zambonin
Paradigmas de Programação (UFSC-INE5416)

Parte 1

- *An unsolvable problem of elementary number theory* pode ser obtido aqui, enquanto existem apenas excertos de *The Calculi of Lambda-Conversion* na internet.
- A principal diferença entre uma variável, em funções matemáticas, e um argumento, no cálculo-λ, é a limitação em relação ao domínio da função. Na sintaxe usual, tem-se uma função $f(x)$ qualquer onde apenas elementos que respeitam a x devem ser manipulados. De outro modo, argumentos podem ser usados livremente para modificar a expressão no cálculo-λ.
- Abaixo segue um pequeno resumo sobre os três tipos de reduções no cálculo-λ.
  - **conversão-α** (ou conversão alfa): responsável por renomear variáveis se assim for necessário para o escopo da expressão. Por exemplo: $\lambda x.x \overset{\alpha}{\rightarrow} \lambda y.y$.
  - **redução-β** (ou redução beta): a mais comum das operações de redução por uma grande margem, habilita o processo de calcular um resultado da aplicação de uma função a uma expressão. Por exemplo: $\lambda x.x{+}y\ (7) \overset{\beta}{\rightarrow} 7 + y$.
  - **conversão-η** (ou conversão eta): elimina redundâncias nas abstrações, no caso de uma função ser utilizada apenas para passar seu argumento a outras expressões. Por exemplo: $\lambda x.Mx \overset{\eta}{\rightarrow} M$, onde x não pode ser uma variável livre em M.

Parte 2

Utilizando o interpretador Haskell online ghc.io, as resoluções para os problemas apresentados seguem abaixo. O módulo `Data.List` precisou ser importado para utilização das funções sugeridas.

- Utilizando aritmética modular simples, deleta-se o primeiro elemento da lista sugerida que responde ao requerimento necessário (divisibilidade por três).

```
Prelude> deleteBy(\x y -> y `mod` x == 0) 3 [5..10]
[5,7,8,9,10]
```

- De modo semelhante à estratégia anterior, mas agora filtrando os elementos que respeitam à regra imposta, tem-se a segunda resolução.

```
Prelude> filter(\x -> x `mod` 4 == 0) [4..19]
[4,8,12,16]
```

- O resultado da expressão apresentada segue abaixo.

```
Prelude> [x | x <- [1..4], y <- [x..5], (x+y) `mod` 2 == 0]
[1,1,1,2,2,3,3,4]
```

Lista de exercícios 1

1. $y = \dfrac{x+1}{x^2}, \quad f(y) = \mathbf{?}$

$$\begin{aligned} yx^2 &= x + 1 \\ yx^2 - x - 1 &= 0 \\ x &= \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4y(-1)}}{2y} \\ x &= \frac{1 \pm \sqrt{4y+1}}{2y}, y \neq 0 \end{aligned}$$

2. $f(x-1) = x^2 - 1, \quad f(x) = \mathbf{?}$

$$\begin{aligned} f((x+1)-1) &= (x+1)^2 - 1 \\ f(x) &= x^2 + 2x + 1 - 1 \\ f(x) &= x^2 + 2x \end{aligned}$$

3. $f(x) = x + \frac{1}{x}, \quad (f(x))^3 \stackrel{?}{=} f(x^3) + 3f(\frac{1}{x})$

$$\begin{aligned} (f(x))^3 &= (x^3 + \frac{1}{x^3}) + 3(\frac{1}{x} + \frac{1}{\frac{1}{x}}) \\ (f(x))^3 &= (x^3 + \frac{1}{x^3}) + 3(\frac{1}{x} + x) \\ (x + \frac{1}{x})^3 &= x^3 + \frac{1}{x^3} + \frac{3}{x} + 3x \\ x^3 + \frac{3x^2}{x} + \frac{3x}{x^2} + \frac{1}{x^3} &= x^3 + \frac{1}{x^3} + \frac{3}{x} + 3x \\ x^3 + 3x + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^3} &= x^3 + \frac{1}{x^3} + \frac{3}{x} + 3x \end{aligned}$$

4. $f(x) = \frac{|x|}{x}, \ x \neq 0, \quad |f(a) - f(-a)| = \mathbf{?}$

$$\frac{|a|}{a} - \frac{|-a|}{-a} = \frac{|a|}{a} + \frac{|a|}{a} = 2\frac{|a|}{a} = \pm\mathbf{2}$$

5. $f(x) = x^4, \ g(x) = \sqrt{1+x^3}, \ h(x) = \frac{x^2+1}{2x+1}; \quad f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$

(a) $(f \circ g)(x) = (\sqrt{1+x^3})^4 = (x^3+1)^2; \quad f \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$

(b) $(f \circ g \circ h)(x) = \left(\sqrt{1 + (\frac{x^2+1}{2x+1})^3}\right)^4 = \left(1 + (\frac{x^2+1}{2x+1})^3\right)^2; \quad f \circ g \circ h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$

Lista de exercícios 2

1. (a) $f(x) = x^2 + 4$
   $\mathbf{\lambda x.x^2 + 4\ (x)}$
   (b) $f(x) = \sum_{x=1}^{x=10} x$
   $\mathbf{\lambda x.x1..10\ (x)}$
   (c) $f(a, b) = a + b$
   $\mathbf{\lambda a.\lambda b.(a + b)}$
   (d) $f(x) = x.x^{-1}$
   $\mathbf{\lambda x.1\ (x)}$

2. (a) $\lambda x.(\lambda y.y^2 - (\lambda z.(z + x)4)3)2$
   $\lambda x.(\lambda y.y^2 - (4 + x)3)2$
   $\lambda x.(3^2 - (4 + x))2$
   $9 - 4 - 2 = \mathbf{3}$
   (b) $\lambda x.x + (\lambda y.y^2(b))(a)$
   $\lambda x.x + b^2(a)$
   $\mathbf{a + b^2}$
   (c) $\lambda x.(\lambda y.(x + (\lambda x.8) - y)6)5$
   $\lambda x.(\lambda y.(x + 8 - y)6)5$
   $\lambda x.(x + 8 - 6)5$
   $5 + 8 - 6 = \mathbf{7}$
   (d) $\lambda xy.x + y\ (3)(7)$
   $3 + 7 = \mathbf{10}$

3. (a) $\lambda x.x(xy)(\lambda u.u)$
   $\lambda u.u(\lambda u.uy)$
   $\mathbf{\lambda u.uy}$
   (b) $\lambda y.(\lambda x.y \times y + x)(z)$
   $\mathbf{\lambda x.z^2 + x}$
   (c) $\lambda x.(\lambda y.(yx)\lambda i.i)\lambda p.\lambda q.p$
   $\lambda x.(\lambda i.ix)\lambda p.\lambda q.p$
   $\lambda i.i(\lambda p.\lambda q.p)$
   $\mathbf{\lambda p.\lambda q.p}$
   (d) $\lambda x.x(\lambda y.(\lambda x.xy)x)$
   $\lambda x.x(\lambda x.xx)$
   $\mathbf{\lambda x.xx}$
   (e) $(\lambda x.xx)(\lambda y.y)$
   $\lambda y.y(\lambda y.y)$
   $\mathbf{\lambda y.y}$