Introdução à teoria da ordem

Gustavo Zambonin

Universidade Federal de Santa Catarina
Departamento de Informática e Estatística
INE5601 — Fundamentos Matemáticos da Informática

gustavo.zambonin@posgrad.ufsc.br

Contexto

- Relação: subconjunto do produto cartesiano de dois (ou mais) conjuntos quaisquer
  - $\equiv_n$, a congruência módulo n em $\mathbb{Z}$, ou seja, $x \equiv y \pmod{n}$
- Propriedades de relações: reflexividade, irreflexividade, simetria, assimetria, antissimetria, transitividade
  - $\equiv_n$ é uma relação de equivalência
- É intuitivo pensar que relações são utilizadas para construir ordenamentos

Exemplos práticos

- Organização de verbetes em um dicionário
  - Letras no alfabeto e tamanho do verbete
- Descrição de um grafo curricular
  - Matérias como pré-requisitos
- Parentesco entre pessoas, escalonamento temporal de tarefas etc.
- Ideia geral: comparação de (alguns) elementos entre conjuntos quaisquer

Propriedades de relações

- Considere um conjunto S e uma relação R, construída a partir de $S \times S$
- R é considerada uma relação *parcial* se é reflexiva, antissimétrica e transitiva
- Ou seja, $\forall a, b, c \in S$,
  - $(a, a) \in R$ (reflexividade)
  - $(a, b), (b, a) \in R \Rightarrow a = b$ (antissimetria)
  - $(a, b), (b, c) \in R \Rightarrow (a, c) \in R$ (transitividade)

Conjuntos parcialmente ordenados

- Quando parcial, R é geralmente denotada com o símbolo da relação, ou $\leq$, $\preccurlyeq$
- O par ordenado $(S, \preccurlyeq)$ é então chamado de conjunto parcialmente ordenado, ou **poset** (*partially ordered set*)
- a, b são **comparáveis** se $a \preccurlyeq b$ ou $b \preccurlyeq a$, e incomparáveis caso contrário
  - se $a \neq b$, a notação $a \prec b$ é utilizada

Exemplo

Conjuntos parcialmente ordenados

- Considere o conjunto dos inteiros $\mathbb{Z}$ e a relação de "menor ou igual" $\leq$. $(\mathbb{Z}, \leq)$ é um *poset*?
- Tome inteiros quaisquer $a, b, c \in \mathbb{Z}$
  - $a \leq a$ para todo inteiro, portanto $\leq$ é reflexiva
  - $a \leq b, b \leq a \Rightarrow a = b$, portanto $\leq$ é antissimétrica
  - $a \leq b, b \leq c \Rightarrow a \leq c$, portanto $\leq$ é transitiva
- Logo, $(\mathbb{Z}, \leq)$ é um *poset*

Exemplo

Conjuntos parcialmente ordenados

- Considere um conjunto T e seu conjunto potência, $\mathcal{P}(T)$, e a relação de "subconjunto" $\subseteq$. $(\mathcal{P}(T), \subseteq)$ é um *poset*?
- Tome conjuntos quaisquer $t_1, t_2, t_3 \in \mathcal{P}(T)$
  - $t_1 \subseteq t_1$ para todo conjunto, portanto $\subseteq$ é reflexiva
  - $t_1 \subseteq t_2, t_2 \subseteq t_1 \Rightarrow t_1 = t_2$, portanto $\subseteq$ é antissimétrica
  - $t_1 \subseteq t_2, t_2 \subseteq t_3 \Rightarrow t_1 \subseteq t_3$, portanto $\subseteq$ é transitiva
- Logo, $(\mathcal{P}(T), \subseteq)$ é um *poset*

Exemplo

Conjuntos parcialmente ordenados

- Considere o conjunto de seres humanos H, e a relação de "é mais velho que" $\preccurlyeq$. $(H, \preccurlyeq)$ é um *poset*?

- Tome pessoas quaisquer $h_1, h_2, h_3 \in H$
  - $h_1 \preccurlyeq h_2 \Rightarrow h_2 \not\preccurlyeq h_1$ (antissimetria: se h_1 é mais velha que h_2, o oposto não pode ser verdade)
  - $h_1 \preccurlyeq h_2, h_2 \preccurlyeq h_3 \Rightarrow h_1 \preccurlyeq h_3$ (transitividade: se h_1 é mais velha que h_2, e h_2 é mais velha que h_3, então h_1 é mais velha que h_3)
  - $h_1 \not\preccurlyeq h_1$ (reflexividade: uma pessoa não pode ser mais velha do que si mesma)

- Portanto, $(H, \preccurlyeq)$ não é um *poset*

Conjuntos parcialmente ordenados estritos

- Em alguns contextos, a definição de *poset* apresentada é chamada de "conjunto parcialmente ordenado não-estrito"
- O par ordenado (S, R) é um conjunto parcialmente ordenado estrito se, $\forall a, b, c \in S$,
  - $(a, a) \notin R$ (irreflexividade)
  - $(a, b), (b, c) \in R \Rightarrow (a, c) \in R$ (transitividade)
- Para transformar um *poset* em um *poset* estrito, remova todos os pares $(a, a) \in R$
- A notação para relações parciais estritas arbitrárias é similar, utilizando os símbolos $<, \prec$

Exemplo

Conjuntos parcialmente ordenados estritos

- Considere o conjunto de matérias em um currículo C, e a relação de "é pré-requisito de" $\prec$. $(C, \prec)$ é um *poset* estrito?

- Tome matérias quaisquer $c_1, c_2, c_3 \in C$
  - $c_1 \not\prec c_1$ (irreflexividade: c_1 não pode ser pré-requisito dela mesma)
  - $c_1 \prec c_2, c_2 \prec c_3 \Rightarrow c_1 \prec c_3$ (transitividade: se c_1 é pré-requisito de c_2, e c_2 é pré-requisito de c_3, então c_1 é pré-requisito de c_3)

- Portanto, $(C, \prec)$ é um *poset* estrito

Dualidade de *posets*

- Para qualquer relação binária R, uma relação inversa R^{-1} pode ser construída trocando a ordem dos elementos de todos os pares ordenados em R
  - As propriedades usuais de relações mantêm-se em R^{-1}
- Formalmente, para dois conjuntos quaisquer S, T, $R^{-1} = \{(t, s) \in T \times S \mid (s, t) \in R\}$
- No caso de relações parciais, os símbolos $\succcurlyeq, \geq, \succ, >$ podem ser utilizados para denotar a inversa, neste caso chamada de **dual**

Exemplo

Conjuntos parcialmente ordenados

- Considere o conjunto dos inteiros $\mathbb{Z}$ e a relação de "maior ou igual" $\geq$. $(\mathbb{Z}, \geq)$ é um *poset*
- Considere um conjunto T e seu conjunto potência, $\mathcal{P}(T)$, e a relação de "superconjunto" $\supseteq$. $(\mathcal{P}(T), \supseteq)$ é um *poset*
- Considere o conjunto de matérias em um currículo C, e a relação de "é pós-requisito de" $\succ$. $(C, \succ)$ é um *poset* estrito

Conjuntos totalmente ordenados

- Quando todos os elementos de uma relação parcial são comparáveis, esta é chamada de **ordem total**
- O par ordenado (S, R) é chamado de conjunto totalmente ordenado, ou **toset** (*totally ordered set*) se, $\forall a, b \in S$,
  - R é uma relação parcial
  - Ou $(a, b) \in R$, ou $(b, a) \in R$, ou $a = b$ (tricotomia)
- São um caso particular de *posets*, e portanto, a dualidade mantém-se
- Também podem ser chamados de **cadeias** e ordens lineares, e seus duais, de anticadeias

Exemplo

Conjuntos totalmente ordenados

- Considere o conjunto dos inteiros positivos $\mathbb{Z}^+$ e a relação de divisibilidade $|$. $(\mathbb{Z}^+, |)$ é um *poset*? Se sim, é também um *toset*?
- Para quaisquer inteiros $a, b, c \in \mathbb{Z}^+$, e quaisquer dois primos $p_1, p_2 \in \mathbb{Z}^+$
  - $a \mid a$ (reflexividade)
  - $a \mid b, b \mid a \Rightarrow a = b$ (antissimetria)
  - $a \mid b, b \mid c \Rightarrow a \mid c$ (transitividade)
  - $p_1 \nmid p_2, p_2 \nmid p_1$ (existem elementos incomparáveis)
- Então, $(\mathbb{Z}^+, |)$ é um *poset*, mas não um *toset*

Exemplo

Conjuntos totalmente ordenados

- O *poset* $(\mathbb{Z}, \leq)$ é também um *toset*, pois quaisquer inteiros podem ser comparados com $\leq$
- O *poset* $(\mathcal{P}(T), \subseteq)$ não é um *toset*
  - Considere $T = \{x, y\}, \{x\}, \{y\} \in \mathcal{P}(T)$ e veja que $\{x\} \not\subseteq \{y\}, \{y\} \not\subseteq \{x\}$
- O produto cartesiano de qualquer número de *tosets*, utilizando ordenação lexicográfica, é um *toset*
  - Dados dois *tosets* $(P, \preccurlyeq_1), (Q, \preccurlyeq_2)$, e elementos quaisquer $p_1, p_2 \in P$, $q_1, q_2 \in Q$
  - Para $(P_1 \times P_2, \preccurlyeq)$, a relação $(p_1, q_1) \preccurlyeq (p_2, q_2) \Rightarrow p_1 \prec_1 p_2$ ou $(p_1 = p_2$ e $q_1 \preccurlyeq_2 q_2)$

Representação gráfica de *posets*

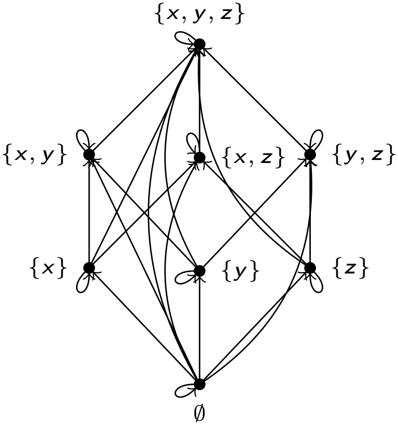
- *Posets* podem ser caracterizados de maneira amigável, considerando os elementos de S como "pontos em um plano"
- As conexões entre elementos são análogas à descrição das relações, e utilizam-se "vetores" para simbolizá-las
- De maneira formal, um *poset* pode ser representado como um grafo dirigido, cujos vértices são os elementos de S, e arestas os elementos de $\preccurlyeq$

Diagrama de Hasse

- Deseja-se desenhar o *poset* com o menor número de conexões possível (através da redução transitiva do grafo correspondente)
- Esta técnica gera um esquema chamado de **diagrama de Hasse**, que representa o *poset* de maneira sucinta
- Entretanto, existem várias formas de desenhá-los, tornando-se difícil criar diagramas ordenados
- O diagrama de Hasse de *tosets* dá origem ao nome de "cadeia"

Exemplo

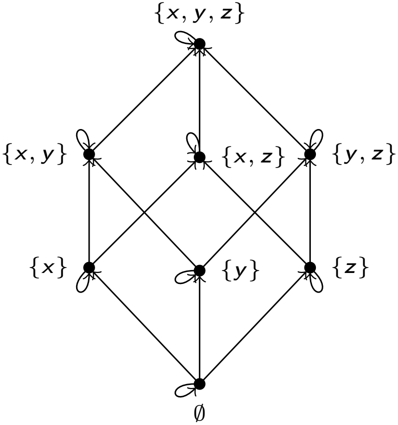
Diagrama de Hasse



- $(\mathcal{P}(\{x, y, z\}), \subseteq)$ com todas as arestas relativas às relações entre elementos

Exemplo

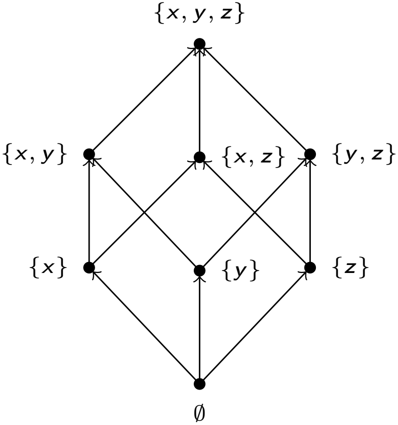
Diagrama de Hasse



- As arestas relativas à transitividade da relação são omitidas

Exemplo

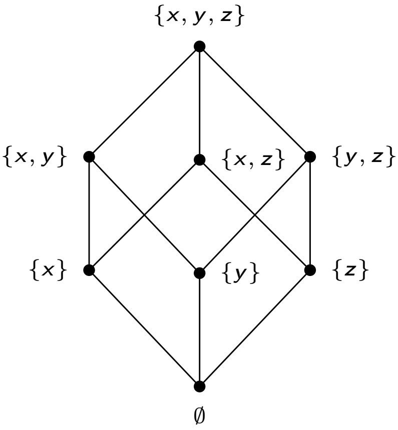
Diagrama de Hasse



- As arestas relativas à reflexividade da relação também são omitidas

Exemplo

Diagrama de Hasse



- O direcionamento é omitido, visto que todas as arestas apontam "para cima"

Elementos extremos

- É razoável conhecer os elementos que denotam as fronteiras de um *poset* $(S, \preccurlyeq)$
- Considere um elemento qualquer $s' \in S$, e $\forall s \in S$
  - s' é **máximo** se é "maior que" todos os outros, ou seja, $s \prec s'$
  - s' é **mínimo** se é "menor que" todos os outros, ou seja, $s' \prec s$
  - s' é **maximal** se não existe outro "maior que" este, ou seja, $s' \not\preccurlyeq s$
  - s' é **minimal** se não existe outro "menor que" este, ou seja, $s \not\preccurlyeq s'$

Elementos extremos

- Portanto, devem existir até um elemento máximo e um elemento mínimo
- Se este for o caso, estes serão o único elemento maximal e minimal, e serão denotados por $\top, \bot$ respectivamente
- À ausência destes, não existem restrições no número de elementos minimais ou maximais, e estes conjuntos serão denotados por $S_{\min}, S_{\max}$ respectivamente
- Poderão existir elementos maximal e minimal únicos, mas não necessariamente serão o máximo e mínimo

Exemplo

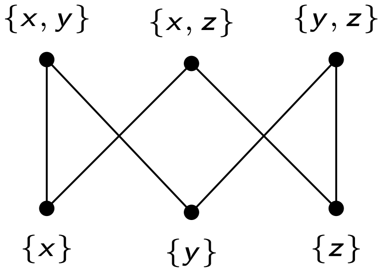
Elementos extremos

- Considere o *poset* $(\mathbb{Z}^+, |)$. É possível identificar elementos extremos?
  - Como o *poset* tende a $+\infty$, não existem elementos maximais e máximo
  - $\perp = 1$, pois $1 \mid n, \forall n \in \mathbb{Z}^+$

- Considere o *poset* $(\mathcal{P}(T), \subseteq)$. É possível identificar elementos extremos?
  - Tome um subconjunto qualquer $t \in \mathcal{P}(T)$
  - Observe que $\emptyset \subseteq t$, e portanto $\perp = \emptyset$
  - Da mesma maneira, $t \subseteq T$, e portanto $\top = T$

Exemplo

Elementos extremos



- Considere o diagrama de Hasse acima. É possível identificar elementos extremos?
- $S_{\text{min}} = \{\{x\}, \{y\}, \{z\}\}, S_{\text{max}} = \{\{x, y\}, \{x, z\}, \{y, z\}\}$

Subconjuntos de *posets*

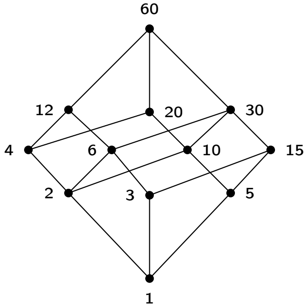
- Em um *poset* qualquer $(S, \preccurlyeq)$, a relação é preservada para todos os subconjuntos de S
- Elementos extremos para estes subconjuntos têm nomes especiais
  - Tome um subconjunto $K \subseteq S$ e elemento $x \in S$ quaisquer
  - x está na **cota superior** de K se $k \preccurlyeq x, \forall k \in K$, e na **cota inferior** de K se $x \preccurlyeq k, \forall k \in K$
  - Não existe notação definida para as cotas de K em relação à S

Elementos extremos em cotas

- Dentro da cota superior para um subconjunto de um *poset*, pode existir um elemento mínimo neste, e este é chamado de **menor cota superior**, ou ínfimo — $\inf(K)$
- Analogamente, pode existir um elemento máximo na cota inferior, chamado de **maior cota inferior**, ou supremo — $\sup(K)$
- Se $\inf(K)$ existe e pertence a K, então é um elemento minimal ou mínimo de K, e de maneira dual, $\sup(K)$ é um elemento maximal ou máximo de K

Exemplo

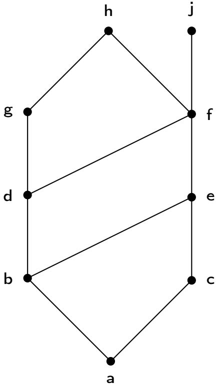
Elementos extremos em cotas



- Considere o *poset* de divisores de 60 e $K = \{6, 15\}$
  - A cota superior é $\{30, 60\}$, a cota inferior é $\{1, 3\}$, $\inf(K) = 30$ e $\sup(K) = 3$

Exemplo

Elementos extremos em cotas



- Considere o *poset* acima e $K = \{a, c, d, f\}$
  - A cota superior é $\{f, h, j\}$, a cota inferior é $\{a\}$, $\inf(K) = f$ e $\sup(K) = a$

Material de estudo

K. H. Rosen.
Discrete Mathematics and Its Applications.
7th edition, 2011.

- Leitura das páginas 618-626 e resolução dos exercícios 1-2, 5-6, 9-11, 13-16, 18, 20-25, 32-35