Introdução à teoria de reticulados

Gustavo Zambonin

Universidade Federal de Santa Catarina
Departamento de Informática e Estatística
INE5601 — Fundamentos Matemáticos da Informática

gustavo.zambonin@posgrad.ufsc.br

Contexto

- Conjuntos parcialmente ordenados (*posets*)
  - Par ordenado de conjunto qualquer com relação reflexiva, antissimétrica e transitiva

Contexto

- Conjuntos parcialmente ordenados (*posets*)
  - Par ordenado de conjunto qualquer com relação reflexiva, antissimétrica e transitiva
- Diagramas de Hasse
  - Representação gráfica intuitiva de *posets*

Contexto

- Conjuntos parcialmente ordenados (*posets*)
  - Par ordenado de conjunto qualquer com relação reflexiva, antissimétrica e transitiva
- Diagramas de Hasse
  - Representação gráfica intuitiva de *posets*
- Cota superior, inferior, elementos extremos
  - Supremo e ínfimo

Exemplos práticos

- Ontologias (representação de entidades e evento de acordo com categorias)
- Fluxo de informação entre dois processos estocásticos
- Descrição de herança múltipla em linguagens de programação orientadas a objetos

Exemplos práticos

- Ontologias (representação de entidades e evento de acordo com categorias)
- Fluxo de informação entre dois processos estocásticos
- Descrição de herança múltipla em linguagens de programação orientadas a objetos
- Ideia geral: estruturas abstratas que permitem a operacionalização de vários elementos em um conjunto

O termo “reticulado”

- Não são relacionados exclusivamente à teoria de ordem
- Existem reticulados geométricos (malha de pontos no plano Euclidiano)
  - Utilizados em ciência dos materiais e criptografia

O termo “reticulado”

- Não são relacionados exclusivamente à teoria de ordem
- Existem reticulados geométricos (malha de pontos no plano Euclidiano)
  - Utilizados em ciência dos materiais e criptografia
- Todo reticulado geométrico pode ser “convertido” para uma descrição utilizando um *poset*
  - O contrário não se aplica

Notação

- O supremo de um subconjunto K de um *poset*, $\sup(K)$, é também chamado de junção ou *join*, e denotado $\vee K$
- O ínfimo de um subconjunto K de um *poset*, $\inf(K)$, é também chamado de encontro ou *meet*, e denotado $\wedge K$
- Um reticulado também pode ser chamado de *lattice*

Semirreticulados

- Um *poset* onde todos os pares de elementos possuem supremo, ou todos possuem ínfimo

Semirreticulados

- Um *poset* onde todos os pares de elementos possuem supremo, ou todos possuem ínfimo
- Se todos possuem supremo, é chamado de **semirreticulado de junção**, ou *join-semilattice*

Semirreticulados

- Um *poset* onde todos os pares de elementos possuem supremo, ou todos possuem ínfimo
- Se todos possuem supremo, é chamado de **semirreticulado de junção**, ou *join-semilattice*
- Se todos possuem ínfimo, é chamado de **semirreticulado de encontro**, ou *meet-semilattice*

Semirreticulados

- Um *poset* onde todos os pares de elementos possuem supremo, ou todos possuem ínfimo
- Se todos possuem supremo, é chamado de **semirreticulado de junção**, ou *join-semilattice*
- Se todos possuem ínfimo, é chamado de **semirreticulado de encontro**, ou *meet-semilattice*
- Junção e encontro são, portanto, operações binárias sobre os elementos do semirreticulado

Semirreticulados

- Formalmente, dado um *poset* $(S, \preccurlyeq)$ e, $\forall s_1, s_2 \in S$
  - O *poset* é *join-semilattice* se $\sup(\{s_1, s_2\})$, também denotado $s_1 \vee s_2$
  - O *poset* é *meet-semilattice* se $\inf(\{s_1, s_2\})$, também denotado $s_1 \wedge s_2$

Semirreticulados

- Formalmente, dado um *poset* $(S, \preccurlyeq)$ e, $\forall s_1, s_2 \in S$
  - O *poset* é *join-semilattice* se $\sup(\{s_1, s_2\})$, também denotado $s_1 \vee s_2$
  - O *poset* é *meet-semilattice* se $\inf(\{s_1, s_2\})$, também denotado $s_1 \wedge s_2$

- Note que $s_1 \vee s_2 = s_2$ e $s_1 \wedge s_2 = s_1$, para $s_1 \preccurlyeq s_2$

Semirreticulados

- Formalmente, dado um *poset* $(S, \preccurlyeq)$ e, $\forall s_1, s_2 \in S$
  - O *poset* é *join-semilattice* se $\sup(\{s_1, s_2\})$, também denotado $s_1 \vee s_2$
  - O *poset* é *meet-semilattice* se $\inf(\{s_1, s_2\})$, também denotado $s_1 \wedge s_2$
- Note que $s_1 \vee s_2 = s_2$ e $s_1 \wedge s_2 = s_1$, para $s_1 \preccurlyeq s_2$
- Exemplo clássico: tome um conjunto qualquer T
  - O *poset* $(\mathcal{P}(T) \setminus \emptyset, \subseteq)$ é um *join-semilattice*
  - O *poset* $(\mathcal{P}(T) \setminus T, \subseteq)$ é um *meet-semilattice*

Reticulados

- Um *poset* onde qualquer par do conjunto possui um ínfimo e um supremo
- Formalmente, um *poset* $(S, \preccurlyeq)$ é um **reticulado** ou *lattice* quando, $\forall s_1, s_2 \in S$, $\inf(\{s_1, s_2\})$ e $\sup(\{s_1, s_2\})$ existem
- De maneira equivalente, um reticulado é um *poset* que, ao mesmo tempo, é um *join-semilattice* e *meet-semilattice*

Exemplo
Reticulados

- Considere o *poset* $(\mathbb{Z}^+, |)$. Este *poset* é um reticulado?

Exemplo

Reticulados

- Considere o *poset* $(\mathbb{Z}^+, |)$. Este *poset* é um reticulado?
  - Observe que, para quaisquer $a, b \in \mathbb{Z}^+$, $\inf(\{a, b\}) = \text{mmc}(a, b)$ e $\sup(\{a, b\}) = \text{mdc}(a, b)$
  - Portanto, $(\mathbb{Z}^+, |)$ é um reticulado

Exemplo

Reticulados

- Considere o *poset* $(\mathbb{Z}^+, |)$. Este *poset* é um reticulado?
  - Observe que, para quaisquer $a, b \in \mathbb{Z}^+$, $\inf(\{a, b\}) = \mathrm{mmc}(a, b)$ e $\sup(\{a, b\}) = \mathrm{mdc}(a, b)$
  - Portanto, $(\mathbb{Z}^+, |)$ é um reticulado
- Considere o *poset* $(\mathcal{P}(T), \subseteq)$. Este *poset* é um reticulado?

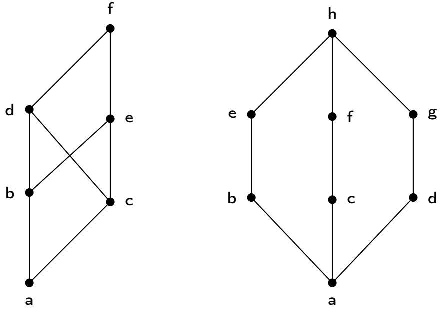
Exemplo

Reticulados

- Considere o *poset* $(\mathbb{Z}^+, |)$. Este *poset* é um reticulado?
  - Observe que, para quaisquer $a, b \in \mathbb{Z}^+$, $\inf(\{a, b\}) = \text{mmc}(a, b)$ e $\sup(\{a, b\}) = \text{mdc}(a, b)$
  - Portanto, $(\mathbb{Z}^+, |)$ é um reticulado

- Considere o *poset* $(\mathcal{P}(T), \subseteq)$. Este *poset* é um reticulado?
  - Observe que, para quaisquer $t_1, t_2 \in \mathcal{P}(T)$, $\inf(\{t_1, t_2\}) = t_1 \cap t_2$ e $\sup(\{t_1, t_2\}) = t_1 \cup t_2$
  - Portanto, $(\mathcal{P}(T), \subseteq)$ é um reticulado

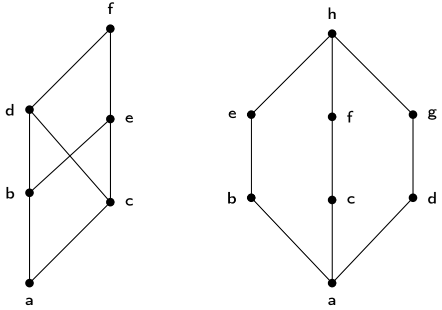
Exemplo
Reticulados



- Considere os *posets* acima. Estes são reticulados?

Exemplo

Reticulados



- Considere os *posets* acima. Estes são reticulados?
    - O primeiro *poset* não é um reticulado, pois não existe $\inf(\{b, c\})$, enquanto o segundo *poset* é

Reticulados limitados

- Um reticulado que possui elementos máximo e mínimo, ou seja, $\top$ e $\bot$, é chamado de **limitado**
- Respectivamente, são os elementos identidade para as operações de encontro e junção

Reticulados limitados

- Um reticulado que possui elementos máximo e mínimo, ou seja, $\top$ e $\bot$, é chamado de **limitado**
- Respectivamente, são os elementos identidade para as operações de encontro e junção
- Portanto, dado um reticulado $(S, \preccurlyeq)$, e $\forall s \in S$,
  - $\bot \preccurlyeq s \preccurlyeq \top$
  - $s \vee \bot = s, \quad s \wedge \bot = \bot$
  - $s \wedge \top = s, \quad s \vee \top = \top$

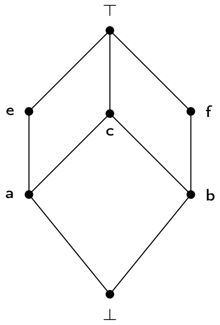
Reticulados completos

- Um reticulado onde todos os seus subconjuntos têm supremo e ínfimo é chamado de **completo**
- Formalmente, para um reticulado $(S, \preccurlyeq)$, $\forall T \in \mathcal{P}(S)$, $\wedge T$ e $\vee T$ existem
- De maneira equivalente, um reticulado é completo se é um *join-semilattice* completo e um *meet-semilattice* completo ao mesmo tempo
- Todo reticulado completo é também limitado

Sub-reticulados

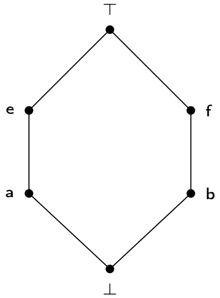
- Dado um reticulado $(S, \preccurlyeq)$, um **sub-reticulado**, ou *sublattice*, é um subconjunto não-vazio finito de S com as operações de junção e encontro herdadas de $\preccurlyeq$

- Exemplo: tome o reticulado abaixo



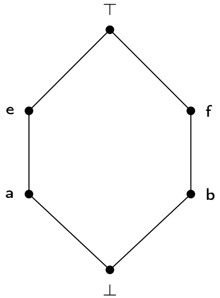
Sub-reticulados

- O subconjunto parcialmente ordenado abaixo é um sub-reticulado do reticulado apresentado anteriormente?



Sub-reticulados

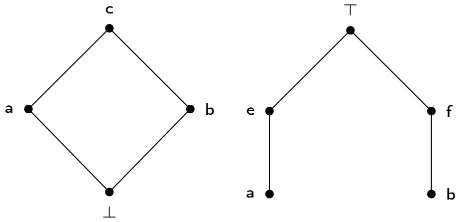
- O subconjunto parcialmente ordenado abaixo é um sub-reticulado do reticulado apresentado anteriormente?



- Não, pois $a \vee b = c$, que não está presente
  - Entretanto, é um reticulado por si só

Sub-reticulados

- Os subconjuntos parcialmente ordenados abaixo são sub-reticulados do reticulado apresentado anteriormente?



- Respectivamente, sim, e não, pois $a \wedge b$ e $a \vee b$ não estão presentes

Isomorfismo entre reticulados

- Uma função bijetora que mapeia elementos de um reticulado para outro pode ser chamada de isomorfismo

Isomorfismo entre reticulados

- Uma função bijetora que mapeia elementos de um reticulado para outro pode ser chamada de isomorfismo
- Formalmente, tome dois reticulados $(S_1, \preccurlyeq), (S_2, \preccurlyeq)$, uma função $f : S_1 \to S_2$, e elementos quaisquer $a, b \in S_1$

Isomorfismo entre reticulados

- Uma função bijetora que mapeia elementos de um reticulado para outro pode ser chamada de isomorfismo
- Formalmente, tome dois reticulados $(S_1, \preccurlyeq), (S_2, \preccurlyeq)$, uma função $f : S_1 \to S_2$, e elementos quaisquer $a, b \in S_1$
- Para que exista um isomorfismo, f deve preservar as operações de junção e encontro

Isomorfismo entre reticulados

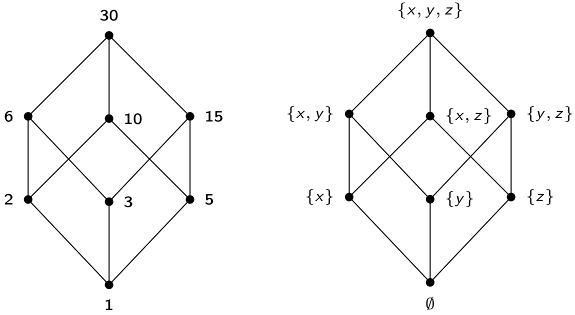
- Uma função bijetora que mapeia elementos de um reticulado para outro pode ser chamada de isomorfismo
- Formalmente, tome dois reticulados $(S_1, \preccurlyeq), (S_2, \preccurlyeq)$, uma função $f : S_1 \rightarrow S_2$, e elementos quaisquer $a, b \in S_1$
- Para que exista um isomorfismo, f deve preservar as operações de junção e encontro
  - $f(a \vee b) = f(a) \vee f(b)$ (isomorfismo de junção)

Isomorfismo entre reticulados

- Uma função bijetora que mapeia elementos de um reticulado para outro pode ser chamada de isomorfismo
- Formalmente, tome dois reticulados $(S_1, \preccurlyeq), (S_2, \preccurlyeq)$, uma função $f : S_1 \rightarrow S_2$, e elementos quaisquer $a, b \in S_1$
- Para que exista um isomorfismo, f deve preservar as operações de junção e encontro
  - $f(a \vee b) = f(a) \vee f(b)$ (isomorfismo de junção)
  - $f(a \wedge b) = f(a) \wedge f(b)$ (isomorfismo de encontro)

Exemplo

Isomorfismo entre reticulados



- Os reticulados acima são isomórficos, pois, por exemplo, $f(2 \vee 5) = f(2) \vee f(5) \Rightarrow \{x, z\} = \{x\} \vee \{z\}$

Reticulados como estruturas algébricas

- Operações binárias através de supremos e ínfimos
- Identidades através da possível presença de elementos máximo e mínimo

Reticulados como estruturas algébricas

- Operações binárias através de supremos e ínfimos
- Identidades através da possível presença de elementos máximo e mínimo
- Uma álgebra é uma tupla composta de um conjunto e operações de aridade finita e relações
  - Reticulados admitem uma descrição algébrica
  - Notação equivalente: $(S, \preccurlyeq) \Leftrightarrow (S, \vee, \wedge)$

Reticulados como estruturas algébricas

- Consolidando as definições mostradas anteriormente
- Para um reticulado $(S, \preccurlyeq)$, existe um reticulado $(S, \vee, \wedge)$ de tal modo que, $\forall s_1, s_2 \in S$

Reticulados como estruturas algébricas

- Consolidando as definições mostradas anteriormente
- Para um reticulado $(S, \preccurlyeq)$, existe um reticulado $(S, \vee, \wedge)$ de tal modo que, $\forall s_1, s_2 \in S$
  - $\sup(\{s_1, s_2\}) \Leftrightarrow s_1 \vee s_2$

Reticulados como estruturas algébricas

- Consolidando as definições mostradas anteriormente
- Para um reticulado $(S, \preccurlyeq)$, existe um reticulado $(S, \vee, \wedge)$ de tal modo que, $\forall s_1, s_2 \in S$
  - $\sup(\{s_1, s_2\}) \Leftrightarrow s_1 \vee s_2$
  - $\inf(\{s_1, s_2\}) \Leftrightarrow s_1 \wedge s_2$

Reticulados como estruturas algébricas

- Consolidando as definições mostradas anteriormente
- Para um reticulado $(S, \preccurlyeq)$, existe um reticulado $(S, \vee, \wedge)$ de tal modo que, $\forall s_1, s_2 \in S$
  - $\sup(\{s_1, s_2\}) \Leftrightarrow s_1 \vee s_2$
  - $\inf(\{s_1, s_2\}) \Leftrightarrow s_1 \wedge s_2$
  - $s_1 \preccurlyeq s_2 \Leftrightarrow \quad s_1 \vee s_2 = s_2, s_1 \wedge s_2 = s_1$

Reticulados como estruturas algébricas

- Consolidando as definições mostradas anteriormente
- Para um reticulado $(S, \preccurlyeq)$, existe um reticulado $(S, \vee, \wedge)$ de tal modo que, $\forall s_1, s_2 \in S$
  - $\sup(\{s_1, s_2\}) \Leftrightarrow s_1 \vee s_2$
  - $\inf(\{s_1, s_2\}) \Leftrightarrow s_1 \wedge s_2$
  - $s_1 \preccurlyeq s_2 \Leftrightarrow \quad s_1 \vee s_2 = s_2, s_1 \wedge s_2 = s_1$
- No caso de um reticulado limitado, existe um reticulado $(S, \vee, \wedge, \perp, \top)$ de tal modo que, adicionalmente,

Reticulados como estruturas algébricas

- Consolidando as definições mostradas anteriormente
- Para um reticulado $(S, \preccurlyeq)$, existe um reticulado $(S, \vee, \wedge)$ de tal modo que, $\forall s_1, s_2 \in S$
  - $\sup(\{s_1, s_2\}) \Leftrightarrow s_1 \vee s_2$
  - $\inf(\{s_1, s_2\}) \Leftrightarrow s_1 \wedge s_2$
  - $s_1 \preccurlyeq s_2 \Leftrightarrow \quad s_1 \vee s_2 = s_2, s_1 \wedge s_2 = s_1$
- No caso de um reticulado limitado, existe um reticulado $(S, \vee, \wedge, \perp, \top)$ de tal modo que, adicionalmente,
  - $\perp \preccurlyeq s_1 \preccurlyeq \top$

Reticulados como estruturas algébricas

- Consolidando as definições mostradas anteriormente
- Para um reticulado $(S, \preccurlyeq)$, existe um reticulado $(S, \vee, \wedge)$ de tal modo que, $\forall s_1, s_2 \in S$
  - $\sup(\{s_1, s_2\}) \Leftrightarrow s_1 \vee s_2$
  - $\inf(\{s_1, s_2\}) \Leftrightarrow s_1 \wedge s_2$
  - $s_1 \preccurlyeq s_2 \Leftrightarrow \quad s_1 \vee s_2 = s_2, s_1 \wedge s_2 = s_1$
- No caso de um reticulado limitado, existe um reticulado $(S, \vee, \wedge, \bot, \top)$ de tal modo que, adicionalmente,
  - $\bot \preccurlyeq s_1 \preccurlyeq \top$
  - $s_1 \vee \bot = s_1, \quad s_1 \wedge \bot = \bot$

Reticulados como estruturas algébricas

- Consolidando as definições mostradas anteriormente
- Para um reticulado $(S, \preccurlyeq)$, existe um reticulado $(S, \vee, \wedge)$ de tal modo que, $\forall s_1, s_2 \in S$
  - $\sup(\{s_1, s_2\}) \Leftrightarrow s_1 \vee s_2$
  - $\inf(\{s_1, s_2\}) \Leftrightarrow s_1 \wedge s_2$
  - $s_1 \preccurlyeq s_2 \Leftrightarrow \quad s_1 \vee s_2 = s_2, s_1 \wedge s_2 = s_1$
- No caso de um reticulado limitado, existe um reticulado $(S, \vee, \wedge, \perp, \top)$ de tal modo que, adicionalmente,
  - $\perp \preccurlyeq s_1 \preccurlyeq \top$
  - $s_1 \vee \perp = s_1, \quad s_1 \wedge \perp = \perp$
  - $s_1 \wedge \top = s_1, \quad s_1 \vee \top = \top$

Identidades axiomáticas para um reticulado

- Para um reticulado qualquer $(S, \vee, \wedge)$, e $\forall a, b, c \in S$

Identidades axiomáticas para um reticulado

- Para um reticulado qualquer $(S, \vee, \wedge)$, e $\forall a, b, c \in S$
  - $a \vee b = b \vee a, \; a \wedge b = b \wedge a$ (comutatividade)

Identidades axiomáticas para um reticulado

- Para um reticulado qualquer $(S, \vee, \wedge)$, e $\forall a, b, c \in S$
    - $a \vee b = b \vee a,\ a \wedge b = b \wedge a$ (comutatividade)
    - $a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c,\ a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c$ (associatividade)

Identidades axiomáticas para um reticulado

- Para um reticulado qualquer $(S, \vee, \wedge)$, e $\forall a, b, c \in S$
  - $a \vee b = b \vee a,\ a \wedge b = b \wedge a$ (comutatividade)
  - $a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c,\ a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c$ (associatividade)
  - $a \vee (a \wedge b) = a,\ a \wedge (a \vee b) = a$ (absorção)

Identidades axiomáticas para um reticulado

- Para um reticulado qualquer $(S, \vee, \wedge)$, e $\forall a, b, c \in S$
  - $a \vee b = b \vee a, \; a \wedge b = b \wedge a$ (comutatividade)
  - $a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c, \; a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c$ (associatividade)
  - $a \vee (a \wedge b) = a, \; a \wedge (a \vee b) = a$ (absorção)
  - $a \vee a = a, \; a \wedge a = a$ (idempotência, derivada da absorção)

Identidades axiomáticas para um reticulado

- Para um reticulado qualquer $(S, \vee, \wedge)$, e $\forall a, b, c \in S$
  - $a \vee b = b \vee a, \ a \wedge b = b \wedge a$ (comutatividade)
  - $a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c, \ a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c$ (associatividade)
  - $a \vee (a \wedge b) = a, \ a \wedge (a \vee b) = a$ (absorção)
  - $a \vee a = a, \ a \wedge a = a$ (idempotência, derivada da absorção)

- Para um reticulado limitado qualquer $(S, \vee, \wedge, \perp, \top)$

Identidades axiomáticas para um reticulado

- Para um reticulado qualquer $(S, \vee, \wedge)$, e $\forall a, b, c \in S$
  - $a \vee b = b \vee a, \ a \wedge b = b \wedge a$ (comutatividade)
  - $a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c, \ a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c$ (associatividade)
  - $a \vee (a \wedge b) = a, \ a \wedge (a \vee b) = a$ (absorção)
  - $a \vee a = a, \ a \wedge a = a$ (idempotência, derivada da absorção)
- Para um reticulado limitado qualquer $(S, \vee, \wedge, \perp, \top)$
  - $a \vee \perp = a, \ a \wedge \top = a$ (identidade)

Reticulados complementados

- Um reticulado qualquer $(S, \vee, \wedge, \bot, \top)$ é **complementado** se, $\forall a, b \in S$, $a \vee b = \top$ e $a \wedge b = \bot$
- Então, a é complemento de b e vice-versa
  - Um complemento de a pode ser denotado por $a^\bot$
- Complementos não necessariamente são únicos
  - Dois elementos estão relacionados se têm um complemento em comum

Reticulados distributivos

- Um reticulado qualquer $(S, \vee, \wedge, \perp, \top)$ é **distributivo** se, $\forall a, b, c \in S$,

- Todo elemento de um reticulado distributivo terá até um complemento

- Todo reticulado distribuído é isomórfico a um reticulado $(\mathcal{P}(S), \cup, \cap, \emptyset, S)$, para qualquer S

Reticulados distributivos

- Um reticulado qualquer $(S, \vee, \wedge, \perp, \top)$ é **distributivo** se, $\forall a, b, c \in S$,
  - $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$ (distribuição de $\vee$ sobre $\wedge$)

- Todo elemento de um reticulado distributivo terá até um complemento

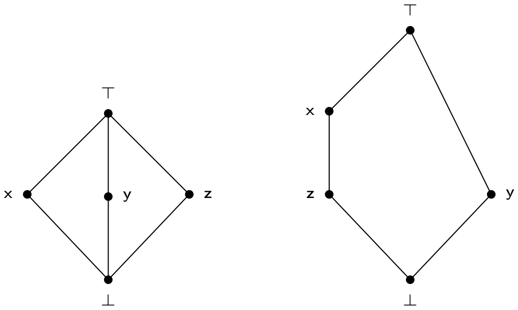
- Todo reticulado distribuído é isomórfico a um reticulado $(\mathcal{P}(S), \cup, \cap, \emptyset, S)$, para qualquer S

Reticulados distributivos

- Um reticulado qualquer $(S, \vee, \wedge, \perp, \top)$ é **distributivo** se, $\forall a, b, c \in S$,
  - $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$ (distribuição de $\vee$ sobre $\wedge$)
  - $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$ (distribuição de $\wedge$ sobre $\vee$)
- Todo elemento de um reticulado distributivo terá até um complemento
- Todo reticulado distribuído é isomórfico a um reticulado $(\mathcal{P}(S), \cup, \cap, \emptyset, S)$, para qualquer S

Exemplo

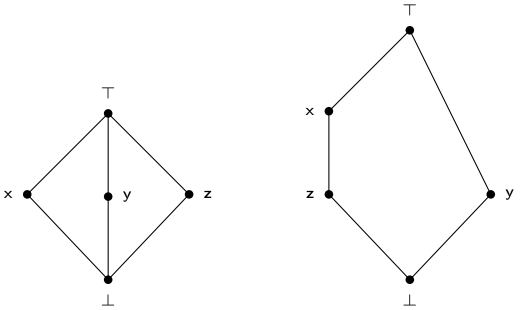
Reticulados distributivos



- Um reticulado é distributivo se e somente se não ter um sub-reticulado isomórfico a M_3 ou N_5

Exemplo

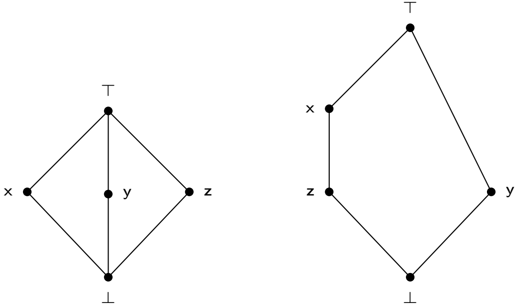
Reticulados distributivos



- Um reticulado é distributivo se e somente se não ter um sub-reticulado isomórfico a M_3 ou N_5
  - $M_3 : x \wedge (y \vee z) = x \wedge 1 \neq 0 \vee 0 = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$

Exemplo

Reticulados distributivos



- Um reticulado é distributivo se e somente se não ter um sub-reticulado isomórfico a M_3 ou N_5
  - $M_3 : x \wedge (y \vee z) = x \wedge 1 \neq 0 \vee 0 = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$
  - $N_5 : x \wedge (y \vee z) = x \wedge 1 \neq 0 \vee z = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$

Material de estudo

Kolman, B., Busby, R., and Ross, S. (1999).
Discrete Mathematical Structures.
4th edition.

Rosen, K. H. (2011).
Discrete Mathematics and Its Applications.
7th edition.

- Kolman: leitura das páginas 207–215 e resolução dos exercícios 1–7, 11, 13–16, 20, na página 216
- Rosen: leitura das páginas 626–627 e resolução dos exercícios 43–44, 46–48, 50–52, na página 632