

Introdução à teoria de reticulados

Gustavo Zambonin



Universidade Federal de Santa Catarina
Departamento de Informática e Estatística
INE5601 — Fundamentos Matemáticos da Informática

`gustavo.zambonin@posgrad.ufsc.br`

Contexto

- ▶ Conjuntos parcialmente ordenados (*posets*)
 - ▶ Par ordenado de conjunto qualquer com relação reflexiva, antissimétrica e transitiva

Contexto

- ▶ Conjuntos parcialmente ordenados (*posets*)
 - ▶ Par ordenado de conjunto qualquer com relação reflexiva, antissimétrica e transitiva
- ▶ Diagramas de Hasse
 - ▶ Representação gráfica intuitiva de *posets*

Contexto

- ▶ Conjuntos parcialmente ordenados (*posets*)
 - ▶ Par ordenado de conjunto qualquer com relação reflexiva, antissimétrica e transitiva
- ▶ Diagramas de Hasse
 - ▶ Representação gráfica intuitiva de *posets*
- ▶ Cota superior, inferior, elementos extremos
 - ▶ Supremo e ínfimo

Exemplos práticos

- ▶ Ontologias (representação de entidades e evento de acordo com categorias)
- ▶ Fluxo de informação entre dois processos estocásticos
- ▶ Descrição de herança múltipla em linguagens de programação orientadas a objetos

Exemplos práticos

- ▶ Ontologias (representação de entidades e evento de acordo com categorias)
- ▶ Fluxo de informação entre dois processos estocásticos
- ▶ Descrição de herança múltipla em linguagens de programação orientadas a objetos
- ▶ Ideia geral: estruturas abstratas que permitem a operacionalização de vários elementos em um conjunto

O termo “reticulado”

- ▶ Não são relacionados exclusivamente à teoria de ordem
- ▶ Existem reticulados geométricos (malha de pontos no plano Euclidiano)
 - ▶ Utilizados em ciência dos materiais e criptografia

O termo “reticulado”

- ▶ Não são relacionados exclusivamente à teoria de ordem
- ▶ Existem reticulados geométricos (malha de pontos no plano Euclidiano)
 - ▶ Utilizados em ciência dos materiais e criptografia
- ▶ Todo reticulado geométrico pode ser “convertido” para uma descrição utilizando um *poset*
 - ▶ O contrário não se aplica

Notação

- ▶ O supremo de um subconjunto K de um *poset*, $\sup(K)$, é também chamado de junção ou *join*, e denotado $\vee K$
- ▶ O ínfimo de um subconjunto K de um *poset*, $\inf(K)$, é também chamado de encontro ou *meet*, e denotado $\wedge K$
- ▶ Um reticulado também pode ser chamado de *lattice*

Semirreticulados

- ▶ Um *poset* onde todos os pares de elementos possuem supremo, ou todos possuem ínfimo

Semirreticulados

- ▶ Um *poset* onde todos os pares de elementos possuem supremo, ou todos possuem ínfimo
- ▶ Se todos possuem supremo, é chamado de **semirreticulado de junção**, ou *join-semilattice*

Semirreticulados

- ▶ Um *poset* onde todos os pares de elementos possuem supremo, ou todos possuem ínfimo
- ▶ Se todos possuem supremo, é chamado de **semirreticulado de junção**, ou *join-semilattice*
- ▶ Se todos possuem ínfimo, é chamado de **semirreticulado de encontro**, ou *meet-semilattice*

Semirreticulados

- ▶ Um *poset* onde todos os pares de elementos possuem supremo, ou todos possuem ínfimo
- ▶ Se todos possuem supremo, é chamado de **semirreticulado de junção**, ou *join-semilattice*
- ▶ Se todos possuem ínfimo, é chamado de **semirreticulado de encontro**, ou *meet-semilattice*
- ▶ Junção e encontro são, portanto, operações binárias sobre os elementos do semirreticulado

Semirreticulados

- ▶ Formalmente, dado um *poset* (S, \preceq) e, $\forall s_1, s_2 \in S$
 - ▶ O *poset* é *join-semilattice* se $\sup(\{s_1, s_2\})$, também denotado $s_1 \vee s_2$
 - ▶ O *poset* é *meet-semilattice* se $\inf(\{s_1, s_2\})$, também denotado $s_1 \wedge s_2$

Semirreticulados

- ▶ Formalmente, dado um *poset* (S, \preceq) e, $\forall s_1, s_2 \in S$
 - ▶ O *poset* é *join-semilattice* se $\sup(\{s_1, s_2\})$, também denotado $s_1 \vee s_2$
 - ▶ O *poset* é *meet-semilattice* se $\inf(\{s_1, s_2\})$, também denotado $s_1 \wedge s_2$
- ▶ Note que $s_1 \vee s_2 = s_2$ e $s_1 \wedge s_2 = s_1$, para $s_1 \preceq s_2$

Semirreticulados

- ▶ Formalmente, dado um *poset* (S, \preceq) e, $\forall s_1, s_2 \in S$
 - ▶ O *poset* é *join-semilattice* se $\sup(\{s_1, s_2\})$, também denotado $s_1 \vee s_2$
 - ▶ O *poset* é *meet-semilattice* se $\inf(\{s_1, s_2\})$, também denotado $s_1 \wedge s_2$
- ▶ Note que $s_1 \vee s_2 = s_2$ e $s_1 \wedge s_2 = s_1$, para $s_1 \preceq s_2$
- ▶ Exemplo clássico: tome um conjunto qualquer T
 - ▶ O *poset* $(\mathcal{P}(T) \setminus \emptyset, \subseteq)$ é um *join-semilattice*
 - ▶ O *poset* $(\mathcal{P}(T) \setminus T, \subseteq)$ é um *meet-semilattice*

Reticulados

- ▶ Um *poset* onde qualquer par do conjunto possui um ínfimo e um supremo
- ▶ Formalmente, um *poset* (S, \preceq) é um **reticulado** ou *lattice* quando, $\forall s_1, s_2 \in S$, $\inf(\{s_1, s_2\})$ e $\sup(\{s_1, s_2\})$ existem
- ▶ De maneira equivalente, um reticulado é um *poset* que, ao mesmo tempo, é um *join-semilattice* e *meet-semilattice*

Exemplo

Reticulados

- Considere o *poset* $(\mathbb{Z}^+, |)$. Este *poset* é um reticulado?

Exemplo

Reticulados

- ▶ Considere o *poset* $(\mathbb{Z}^+, |)$. Este *poset* é um reticulado?
 - ▶ Observe que, para quaisquer $a, b \in \mathbb{Z}^+$,
 $\inf(\{a, b\}) = \text{mmc}(a, b)$ e $\sup(\{a, b\}) = \text{mdc}(a, b)$
 - ▶ Portanto, $(\mathbb{Z}^+, |)$ é um reticulado

Exemplo

Reticulados

- ▶ Considere o *poset* $(\mathbb{Z}^+, |)$. Este *poset* é um reticulado?
 - ▶ Observe que, para quaisquer $a, b \in \mathbb{Z}^+$,
 $\inf(\{a, b\}) = \text{mmc}(a, b)$ e $\sup(\{a, b\}) = \text{mdc}(a, b)$
 - ▶ Portanto, $(\mathbb{Z}^+, |)$ é um reticulado
- ▶ Considere o *poset* $(\mathcal{P}(T), \subseteq)$. Este *poset* é um reticulado?

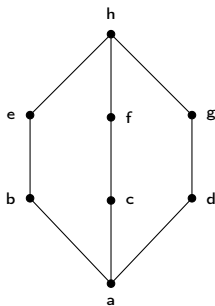
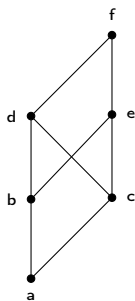
Exemplo

Reticulados

- ▶ Considere o *poset* $(\mathbb{Z}^+, |)$. Este *poset* é um reticulado?
 - ▶ Observe que, para quaisquer $a, b \in \mathbb{Z}^+$,
 $\inf(\{a, b\}) = \text{mmc}(a, b)$ e $\sup(\{a, b\}) = \text{mdc}(a, b)$
 - ▶ Portanto, $(\mathbb{Z}^+, |)$ é um reticulado
- ▶ Considere o *poset* $(\mathcal{P}(T), \subseteq)$. Este *poset* é um reticulado?
 - ▶ Observe que, para quaisquer $t_1, t_2 \in \mathcal{P}(T)$,
 $\inf(\{t_1, t_2\}) = t_1 \cap t_2$ e $\sup(\{t_1, t_2\}) = t_1 \cup t_2$
 - ▶ Portanto, $(\mathcal{P}(T), \subseteq)$ é um reticulado

Exemplo

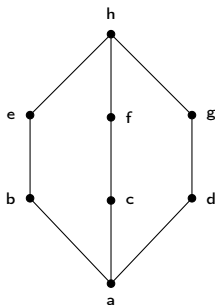
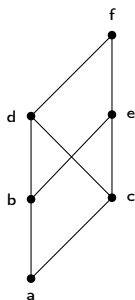
Reticulados



► Considere os *posets* acima. Estes são reticulados?

Exemplo

Reticulados



- Considere os *posets* acima. Estes são reticulados?
 - O primeiro *poset* não é um reticulado, pois não existe $\inf(\{b, c\})$, enquanto o segundo *poset* é

Reticulados limitados

- ▶ Um reticulado que possui elementos máximo e mínimo, ou seja, \top e \perp , é chamado de **limitado**
- ▶ Respectivamente, são os elementos identidade para as operações de encontro e junção

Reticulados limitados

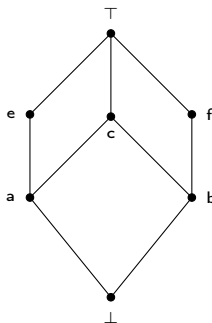
- ▶ Um reticulado que possui elementos máximo e mínimo, ou seja, \top e \perp , é chamado de **limitado**
- ▶ Respectivamente, são os elementos identidade para as operações de encontro e junção
- ▶ Portanto, dado um reticulado (S, \preceq) , e $\forall s \in S$,
 - ▶ $\perp \preceq s \preceq \top$
 - ▶ $s \vee \perp = s, \quad s \wedge \perp = \perp$
 - ▶ $s \wedge \top = s, \quad s \vee \top = \top$

Reticulados completos

- ▶ Um reticulado onde todos os seus subconjuntos têm supremo e ínfimo é chamado de **completo**
- ▶ Formalmente, para um reticulado (S, \preceq) , $\forall T \in \mathcal{P}(S)$, $\bigwedge T$ e $\bigvee T$ existem
- ▶ De maneira equivalente, um reticulado é completo se é um *join-semilattice* completo e um *meet-semilattice* completo ao mesmo tempo
- ▶ Todo reticulado completo é também limitado

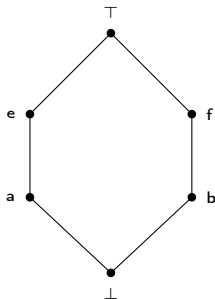
Sub-reticulados

- ▶ Dado um reticulado (S, \preceq) , um **sub-reticulado**, ou *sublattice*, é um subconjunto não-vazio finito de S com as operações de junção e encontro herdadas de \preceq
- ▶ Exemplo: tome o reticulado abaixo



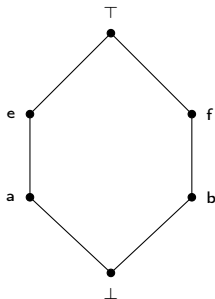
Sub-reticulados

- O subconjunto parcialmente ordenado abaixo é um sub-reticulado do reticulado apresentado anteriormente?



Sub-reticulados

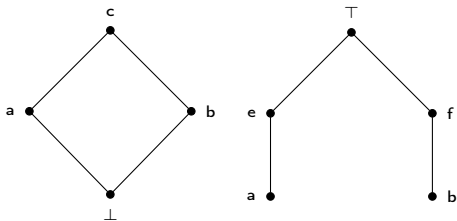
- ▶ O subconjunto parcialmente ordenado abaixo é um sub-reticulado do reticulado apresentado anteriormente?



- ▶ Não, pois $a \vee b = c$, que não está presente
 - ▶ Entretanto, é um reticulado por si só

Sub-reticulados

- Os subconjuntos parcialmente ordenados abaixo são sub-reticulados do reticulado apresentado anteriormente?



- Respectivamente, sim, e não, pois $a \wedge b$ e $a \vee b$ não estão presentes

Isomorfismo entre reticulados

- ▶ Uma função bijetora que mapeia elementos de um reticulado para outro pode ser chamada de isomorfismo

Isomorfismo entre reticulados

- ▶ Uma função bijetora que mapeia elementos de um reticulado para outro pode ser chamada de isomorfismo
- ▶ Formalmente, tome dois reticulados (S_1, \preceq_1) , (S_2, \preceq_2) , uma função $f : S_1 \rightarrow S_2$, e elementos quaisquer $a, b \in S_1$

Isomorfismo entre reticulados

- ▶ Uma função bijetora que mapeia elementos de um reticulado para outro pode ser chamada de isomorfismo
- ▶ Formalmente, tome dois reticulados (S_1, \preceq_1) , (S_2, \preceq_2) , uma função $f : S_1 \rightarrow S_2$, e elementos quaisquer $a, b \in S_1$
- ▶ Para que exista um isomorfismo, f deve preservar as operações de junção e encontro

Isomorfismo entre reticulados

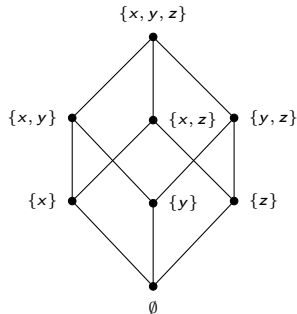
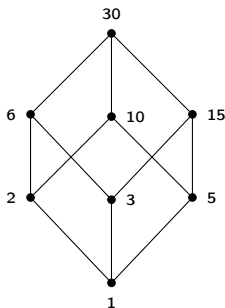
- ▶ Uma função bijetora que mapeia elementos de um reticulado para outro pode ser chamada de isomorfismo
- ▶ Formalmente, tome dois reticulados (S_1, \preceq_1) , (S_2, \preceq_2) , uma função $f : S_1 \rightarrow S_2$, e elementos quaisquer $a, b \in S_1$
- ▶ Para que exista um isomorfismo, f deve preservar as operações de junção e encontro
 - ▶ $f(a \vee b) = f(a) \vee f(b)$ (isomorfismo de junção)

Isomorfismo entre reticulados

- ▶ Uma função bijetora que mapeia elementos de um reticulado para outro pode ser chamada de isomorfismo
- ▶ Formalmente, tome dois reticulados $(S_1, \preceq_1), (S_2, \preceq_2)$, uma função $f : S_1 \rightarrow S_2$, e elementos quaisquer $a, b \in S_1$
- ▶ Para que exista um isomorfismo, f deve preservar as operações de junção e encontro
 - ▶ $f(a \vee b) = f(a) \vee f(b)$ (isomorfismo de junção)
 - ▶ $f(a \wedge b) = f(a) \wedge f(b)$ (isomorfismo de encontro)

Exemplo

Isomorfismo entre reticulados



- Os reticulados acima são isomórficos, pois, por exemplo,
 $f(2 \vee 5) = f(2) \vee f(5) \Rightarrow \{x, z\} = \{x\} \vee \{z\}$

Reticulados como estruturas algébricas

- ▶ Operações binárias através de supremos e ínfimos
- ▶ Identidades através da possível presença de elementos máximo e mínimo

Reticulados como estruturas algébricas

- ▶ Operações binárias através de supremos e ínfimos
- ▶ Identidades através da possível presença de elementos máximo e mínimo
- ▶ Uma álgebra é uma tupla composta de um conjunto e operações de aridade finita e relações
 - ▶ Reticulados admitem uma descrição algébrica
 - ▶ Notação equivalente: $(S, \preceq) \Leftrightarrow (S, \vee, \wedge)$

Reticulados como estruturas algébricas

- ▶ Consolidando as definições mostradas anteriormente
- ▶ Para um reticulado (S, \preceq) , existe um reticulado (S, \vee, \wedge) de tal modo que, $\forall s_1, s_2 \in S$

Reticulados como estruturas algébricas

- ▶ Consolidando as definições mostradas anteriormente
- ▶ Para um reticulado (S, \preceq) , existe um reticulado (S, \vee, \wedge) de tal modo que, $\forall s_1, s_2 \in S$
 - ▶ $\sup(\{s_1, s_2\}) \Leftrightarrow s_1 \vee s_2$

Reticulados como estruturas algébricas

- ▶ Consolidando as definições mostradas anteriormente
- ▶ Para um reticulado (S, \preceq) , existe um reticulado (S, \vee, \wedge) de tal modo que, $\forall s_1, s_2 \in S$
 - ▶ $\sup(\{s_1, s_2\}) \Leftrightarrow s_1 \vee s_2$
 - ▶ $\inf(\{s_1, s_2\}) \Leftrightarrow s_1 \wedge s_2$

Reticulados como estruturas algébricas

- ▶ Consolidando as definições mostradas anteriormente
- ▶ Para um reticulado (S, \preceq) , existe um reticulado (S, \vee, \wedge) de tal modo que, $\forall s_1, s_2 \in S$
 - ▶ $\sup(\{s_1, s_2\}) \Leftrightarrow s_1 \vee s_2$
 - ▶ $\inf(\{s_1, s_2\}) \Leftrightarrow s_1 \wedge s_2$
 - ▶ $s_1 \preceq s_2 \Leftrightarrow s_1 \vee s_2 = s_2, s_1 \wedge s_2 = s_1$

Reticulados como estruturas algébricas

- ▶ Consolidando as definições mostradas anteriormente
- ▶ Para um reticulado (S, \preceq) , existe um reticulado (S, \vee, \wedge) de tal modo que, $\forall s_1, s_2 \in S$
 - ▶ $\sup(\{s_1, s_2\}) \Leftrightarrow s_1 \vee s_2$
 - ▶ $\inf(\{s_1, s_2\}) \Leftrightarrow s_1 \wedge s_2$
 - ▶ $s_1 \preceq s_2 \Leftrightarrow s_1 \vee s_2 = s_2, s_1 \wedge s_2 = s_1$
- ▶ No caso de um reticulado limitado, existe um reticulado $(S, \vee, \wedge, \perp, \top)$ de tal modo que, adicionalmente,

Reticulados como estruturas algébricas

- ▶ Consolidando as definições mostradas anteriormente
- ▶ Para um reticulado (S, \preceq) , existe um reticulado (S, \vee, \wedge) de tal modo que, $\forall s_1, s_2 \in S$
 - ▶ $\sup(\{s_1, s_2\}) \Leftrightarrow s_1 \vee s_2$
 - ▶ $\inf(\{s_1, s_2\}) \Leftrightarrow s_1 \wedge s_2$
 - ▶ $s_1 \preceq s_2 \Leftrightarrow s_1 \vee s_2 = s_2, s_1 \wedge s_2 = s_1$
- ▶ No caso de um reticulado limitado, existe um reticulado $(S, \vee, \wedge, \perp, \top)$ de tal modo que, adicionalmente,
 - ▶ $\perp \preceq s_1 \preceq \top$

Reticulados como estruturas algébricas

- ▶ Consolidando as definições mostradas anteriormente
- ▶ Para um reticulado (S, \preceq) , existe um reticulado (S, \vee, \wedge) de tal modo que, $\forall s_1, s_2 \in S$
 - ▶ $\sup(\{s_1, s_2\}) \Leftrightarrow s_1 \vee s_2$
 - ▶ $\inf(\{s_1, s_2\}) \Leftrightarrow s_1 \wedge s_2$
 - ▶ $s_1 \preceq s_2 \Leftrightarrow s_1 \vee s_2 = s_2, s_1 \wedge s_2 = s_1$
- ▶ No caso de um reticulado limitado, existe um reticulado $(S, \vee, \wedge, \perp, \top)$ de tal modo que, adicionalmente,
 - ▶ $\perp \preceq s_1 \preceq \top$
 - ▶ $s_1 \vee \perp = s_1, s_1 \wedge \top = s_1$

Reticulados como estruturas algébricas

- ▶ Consolidando as definições mostradas anteriormente
- ▶ Para um reticulado (S, \preceq) , existe um reticulado (S, \vee, \wedge) de tal modo que, $\forall s_1, s_2 \in S$
 - ▶ $\sup(\{s_1, s_2\}) \Leftrightarrow s_1 \vee s_2$
 - ▶ $\inf(\{s_1, s_2\}) \Leftrightarrow s_1 \wedge s_2$
 - ▶ $s_1 \preceq s_2 \Leftrightarrow s_1 \vee s_2 = s_2, s_1 \wedge s_2 = s_1$
- ▶ No caso de um reticulado limitado, existe um reticulado $(S, \vee, \wedge, \perp, \top)$ de tal modo que, adicionalmente,
 - ▶ $\perp \preceq s_1 \preceq \top$
 - ▶ $s_1 \vee \perp = s_1, \quad s_1 \wedge \perp = \perp$
 - ▶ $s_1 \wedge \top = s_1, \quad s_1 \vee \top = \top$

Identities axiomáticas para um reticulado

- ▶ Para um reticulado qualquer (S, \vee, \wedge) , e $\forall a, b, c \in S$

Identidades axiomáticas para um reticulado

- ▶ Para um reticulado qualquer (S, \vee, \wedge) , e $\forall a, b, c \in S$
 - ▶ $a \vee b = b \vee a$, $a \wedge b = b \wedge a$ (comutatividade)

Identidades axiomáticas para um reticulado

- ▶ Para um reticulado qualquer (S, \vee, \wedge) , e $\forall a, b, c \in S$
 - ▶ $a \vee b = b \vee a$, $a \wedge b = b \wedge a$ (comutatividade)
 - ▶ $a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$, $a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c$ (associatividade)

Identidades axiomáticas para um reticulado

- ▶ Para um reticulado qualquer (S, \vee, \wedge) , e $\forall a, b, c \in S$
 - ▶ $a \vee b = b \vee a$, $a \wedge b = b \wedge a$ (comutatividade)
 - ▶ $a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$, $a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c$ (associatividade)
 - ▶ $a \vee (a \wedge b) = a$, $a \wedge (a \vee b) = a$ (absorção)

Identidades axiomáticas para um reticulado

- ▶ Para um reticulado qualquer (S, \vee, \wedge) , e $\forall a, b, c \in S$
 - ▶ $a \vee b = b \vee a$, $a \wedge b = b \wedge a$ (comutatividade)
 - ▶ $a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$, $a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c$ (associatividade)
 - ▶ $a \vee (a \wedge b) = a$, $a \wedge (a \vee b) = a$ (absorção)
 - ▶ $a \vee a = a$, $a \wedge a = a$ (idempotência, derivada da absorção)

Identidades axiomáticas para um reticulado

- ▶ Para um reticulado qualquer (S, \vee, \wedge) , e $\forall a, b, c \in S$
 - ▶ $a \vee b = b \vee a$, $a \wedge b = b \wedge a$ (comutatividade)
 - ▶ $a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$, $a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c$ (associatividade)
 - ▶ $a \vee (a \wedge b) = a$, $a \wedge (a \vee b) = a$ (absorção)
 - ▶ $a \vee a = a$, $a \wedge a = a$ (idempotência, derivada da absorção)
- ▶ Para um reticulado limitado qualquer $(S, \vee, \wedge, \perp, \top)$

Identidades axiomáticas para um reticulado

- ▶ Para um reticulado qualquer (S, \vee, \wedge) , e $\forall a, b, c \in S$
 - ▶ $a \vee b = b \vee a$, $a \wedge b = b \wedge a$ (comutatividade)
 - ▶ $a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$, $a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c$ (associatividade)
 - ▶ $a \vee (a \wedge b) = a$, $a \wedge (a \vee b) = a$ (absorção)
 - ▶ $a \vee a = a$, $a \wedge a = a$ (idempotência, derivada da absorção)
- ▶ Para um reticulado limitado qualquer $(S, \vee, \wedge, \perp, \top)$
 - ▶ $a \vee \perp = a$, $a \wedge \top = a$ (identidade)

Reticulados complementados

- ▶ Um reticulado qualquer $(S, \vee, \wedge, \perp, \top)$ é **complementado** se, $\forall a, b \in S$, $a \vee b = \top$ e $a \wedge b = \perp$
- ▶ Então, a é complemento de b e vice-versa
 - ▶ Um complemento de a pode ser denotado por a^\perp
- ▶ Complementos não necessariamente são únicos
 - ▶ Dois elementos estão relacionados se têm um complemento em comum

Reticulados distributivos

- ▶ Um reticulado qualquer $(S, \vee, \wedge, \perp, \top)$ é **distributivo** se,
 $\forall a, b, c \in S$,
- ▶ Todo elemento de um reticulado distributivo terá até um complemento
- ▶ Todo reticulado distribuído é isomórfico a um reticulado $(\mathcal{P}(S), \cup, \cap, \emptyset, S)$, para qualquer S

Reticulados distributivos

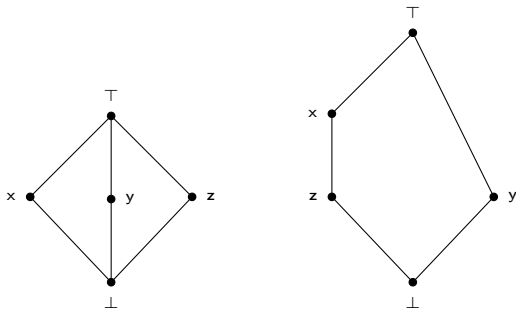
- ▶ Um reticulado qualquer $(S, \vee, \wedge, \perp, \top)$ é **distributivo** se,
 $\forall a, b, c \in S$,
 - ▶ $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$ (distribuição de \vee sobre \wedge)
- ▶ Todo elemento de um reticulado distributivo terá até um complemento
- ▶ Todo reticulado distribuído é isomórfico a um reticulado $(\mathcal{P}(S), \cup, \cap, \emptyset, S)$, para qualquer S

Reticulados distributivos

- ▶ Um reticulado qualquer $(S, \vee, \wedge, \perp, \top)$ é **distributivo** se, $\forall a, b, c \in S$,
 - ▶ $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$ (distribuição de \vee sobre \wedge)
 - ▶ $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$ (distribuição de \wedge sobre \vee)
- ▶ Todo elemento de um reticulado distributivo terá até um complemento
- ▶ Todo reticulado distribuído é isomórfico a um reticulado $(\mathcal{P}(S), \cup, \cap, \emptyset, S)$, para qualquer S

Exemplo

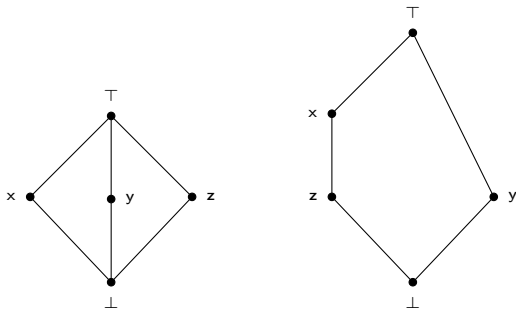
Reticulados distributivos



- Um reticulado é distributivo se e somente se não ter um sub-reticulado isomórfico a M_3 ou N_5

Exemplo

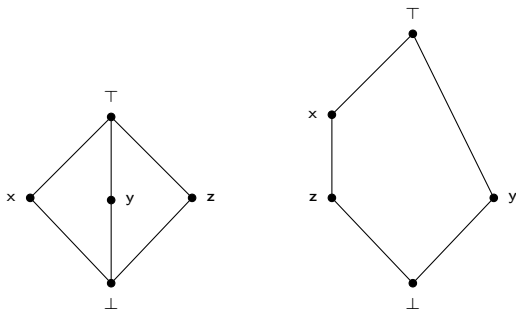
Reticulados distributivos



- ▶ Um reticulado é distributivo se e somente se não ter um sub-reticulado isomórfico a M_3 ou N_5
 - ▶ $M_3 : x \wedge (y \vee z) = x \wedge 1 \neq 0 \vee 0 = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$

Exemplo

Reticulados distributivos



- ▶ Um reticulado é distributivo se e somente se não ter um sub-reticulado isomórfico a M_3 ou N_5
 - ▶ $M_3 : x \wedge (y \vee z) = x \wedge 1 \neq 0 \vee 0 = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$
 - ▶ $N_5 : x \wedge (y \vee z) = x \wedge 1 \neq 0 \vee z = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$

Material de estudo



Kolman, B., Busby, R., and Ross, S. (1999).
Discrete Mathematical Structures.
4th edition.



Rosen, K. H. (2011).
Discrete Mathematics and Its Applications.
7th edition.

- ▶ Kolman: leitura das páginas 207-215 e resolução dos exercícios 1-7, 11, 13-16, 20, na página 216
- ▶ Rosen: leitura das páginas 626-627 e resolução dos exercícios 43-44, 46-48, 50-52, na página 632