

# Introdução à teoria da ordem

Gustavo Zambonin



Universidade Federal de Santa Catarina  
Departamento de Informática e Estatística  
INE5601 — Fundamentos Matemáticos da Informática

`gustavo.zambonin@posgrad.ufsc.br`

# Contexto

- ▶ Relação: subconjunto do produto Cartesiano de dois (ou mais) conjuntos quaisquer
  - ▶  $\equiv_n$ , a congruência módulo  $n$  em  $\mathbb{Z}$ , ou seja,  $x \equiv y \pmod{n}$

# Contexto

- ▶ Relação: subconjunto do produto Cartesiano de dois (ou mais) conjuntos quaisquer
  - ▶  $\equiv_n$ , a congruência módulo  $n$  em  $\mathbb{Z}$ , ou seja,  $x \equiv y \pmod{n}$
- ▶ Propriedades de relações: reflexividade, irreflexividade, simetria, assimetria, antissimetria, transitividade
  - ▶  $\equiv_n$  é uma relação de equivalência

# Contexto

- ▶ Relação: subconjunto do produto Cartesiano de dois (ou mais) conjuntos quaisquer
  - ▶  $\equiv_n$ , a congruência módulo  $n$  em  $\mathbb{Z}$ , ou seja,  $x \equiv y \pmod{n}$
- ▶ Propriedades de relações: reflexividade, irreflexividade, simetria, assimetria, antissimetria, transitividade
  - ▶  $\equiv_n$  é uma relação de equivalência
- ▶ É intuitivo pensar que relações são utilizadas para construir ordenamentos

# Exemplos práticos

- ▶ Organização de verbetes em um dicionário
  - ▶ Letras no alfabeto e tamanho do verbete
- ▶ Descrição de um grafo curricular
  - ▶ Matérias como pré-requisitos
- ▶ Parentesco entre pessoas, escalonamento temporal de tarefas etc.

# Exemplos práticos

- ▶ Organização de verbetes em um dicionário
  - ▶ Letras no alfabeto e tamanho do verbete
- ▶ Descrição de um grafo curricular
  - ▶ Matérias como pré-requisitos
- ▶ Parentesco entre pessoas, escalonamento temporal de tarefas etc.
- ▶ Ideia geral: comparação de (alguns) elementos entre conjuntos quaisquer

# Propriedades de relações

- ▶ Considere um conjunto  $S$  e uma relação  $R$ , construída a partir de  $S \times S$
- ▶  $R$  é considerada uma relação *parcial* se é reflexiva, antissimétrica e transitiva
- ▶ Ou seja,  $\forall a, b, c \in S$ ,

# Propriedades de relações

- ▶ Considere um conjunto  $S$  e uma relação  $R$ , construída a partir de  $S \times S$
- ▶  $R$  é considerada uma relação *parcial* se é reflexiva, antissimétrica e transitiva
- ▶ Ou seja,  $\forall a, b, c \in S$ ,
  - ▶  $(a, a) \in R$  (reflexividade)



# Propriedades de relações

- ▶ Considere um conjunto  $S$  e uma relação  $R$ , construída a partir de  $S \times S$
- ▶  $R$  é considerada uma relação *parcial* se é reflexiva, antissimétrica e transitiva
- ▶ Ou seja,  $\forall a, b, c \in S$ ,
  - ▶  $(a, a) \in R$  (reflexividade)
  - ▶  $(a, b), (b, a) \in R \Rightarrow a = b$  (antissimetria)

# Propriedades de relações

- ▶ Considere um conjunto  $S$  e uma relação  $R$ , construída a partir de  $S \times S$
- ▶  $R$  é considerada uma relação *parcial* se é reflexiva, antissimétrica e transitiva
- ▶ Ou seja,  $\forall a, b, c \in S$ ,
  - ▶  $(a, a) \in R$  (reflexividade)
  - ▶  $(a, b), (b, a) \in R \Rightarrow a = b$  (antissimetria)
  - ▶  $(a, b), (b, c) \in R \Rightarrow (a, c) \in R$  (transitividade)

# Conjuntos parcialmente ordenados

- ▶ Quando parcial,  $R$  é geralmente denotada com o símbolo da relação, ou  $\leq$ ,  $\preceq$
- ▶ O par ordenado  $(S, \preceq)$  é então chamado de conjunto parcialmente ordenado, ou **poset** (*partially ordered set*)
- ▶  $a, b$  são **comparáveis** se  $a \preceq b$  ou  $b \preceq a$ , e incomparáveis caso contrário
  - ▶ se  $a \neq b$ , a notação  $a \prec b$  é utilizada

# Exemplo

## Conjuntos parcialmente ordenados

- Considere o conjunto dos inteiros  $\mathbb{Z}$  e a relação de “menor ou igual”  $\leq$ .  $(\mathbb{Z}, \leq)$  é um *poset*?

# Exemplo

## Conjuntos parcialmente ordenados

- ▶ Considere o conjunto dos inteiros  $\mathbb{Z}$  e a relação de “menor ou igual”  $\leq$ .  $(\mathbb{Z}, \leq)$  é um *poset*?
- ▶ Tome inteiros quaisquer  $a, b, c \in \mathbb{Z}$

# Exemplo

## Conjuntos parcialmente ordenados

- ▶ Considere o conjunto dos inteiros  $\mathbb{Z}$  e a relação de “menor ou igual”  $\leq$ .  $(\mathbb{Z}, \leq)$  é um *poset*?
- ▶ Tome inteiros quaisquer  $a, b, c \in \mathbb{Z}$ 
  - ▶  $a \leq a$  para todo inteiro, portanto  $\leq$  é reflexiva

# Exemplo

## Conjuntos parcialmente ordenados

- ▶ Considere o conjunto dos inteiros  $\mathbb{Z}$  e a relação de “menor ou igual”  $\leq$ .  $(\mathbb{Z}, \leq)$  é um *poset*?
- ▶ Tome inteiros quaisquer  $a, b, c \in \mathbb{Z}$ 
  - ▶  $a \leq a$  para todo inteiro, portanto  $\leq$  é reflexiva
  - ▶  $a \leq b, b \leq a \Rightarrow a = b$ , portanto  $\leq$  é antissimétrica

# Exemplo

## Conjuntos parcialmente ordenados

- ▶ Considere o conjunto dos inteiros  $\mathbb{Z}$  e a relação de “menor ou igual”  $\leq$ .  $(\mathbb{Z}, \leq)$  é um *poset*?
- ▶ Tome inteiros quaisquer  $a, b, c \in \mathbb{Z}$ 
  - ▶  $a \leq a$  para todo inteiro, portanto  $\leq$  é reflexiva
  - ▶  $a \leq b, b \leq a \Rightarrow a = b$ , portanto  $\leq$  é antissimétrica
  - ▶  $a \leq b, b \leq c \Rightarrow a \leq c$ , portanto  $\leq$  é transitiva



# Exemplo

## Conjuntos parcialmente ordenados

- ▶ Considere o conjunto dos inteiros  $\mathbb{Z}$  e a relação de “menor ou igual”  $\leq$ .  $(\mathbb{Z}, \leq)$  é um *poset*?
- ▶ Tome inteiros quaisquer  $a, b, c \in \mathbb{Z}$ 
  - ▶  $a \leq a$  para todo inteiro, portanto  $\leq$  é reflexiva
  - ▶  $a \leq b, b \leq a \Rightarrow a = b$ , portanto  $\leq$  é antissimétrica
  - ▶  $a \leq b, b \leq c \Rightarrow a \leq c$ , portanto  $\leq$  é transitiva
- ▶ Logo,  $(\mathbb{Z}, \leq)$  é um *poset*

# Exemplo

## Conjuntos parcialmente ordenados

- Considere um conjunto  $T$  e seu conjunto potência,  $\mathcal{P}(T)$ , e a relação de “subconjunto”  $\subseteq$ .  $(\mathcal{P}(T), \subseteq)$  é um *poset*?

# Exemplo

## Conjuntos parcialmente ordenados

- ▶ Considere um conjunto  $T$  e seu conjunto potência,  $\mathcal{P}(T)$ , e a relação de “subconjunto”  $\subseteq$ .  $(\mathcal{P}(T), \subseteq)$  é um *poset*?
- ▶ Tome conjuntos quaisquer  $t_1, t_2, t_3 \in \mathcal{P}(T)$

# Exemplo

## Conjuntos parcialmente ordenados

- ▶ Considere um conjunto  $T$  e seu conjunto potência,  $\mathcal{P}(T)$ , e a relação de “subconjunto”  $\subseteq$ .  $(\mathcal{P}(T), \subseteq)$  é um *poset*?
- ▶ Tome conjuntos quaisquer  $t_1, t_2, t_3 \in \mathcal{P}(T)$ 
  - ▶  $t_1 \subseteq t_1$  para todo conjunto, portanto  $\subseteq$  é reflexiva

# Exemplo

## Conjuntos parcialmente ordenados

- ▶ Considere um conjunto  $T$  e seu conjunto potência,  $\mathcal{P}(T)$ , e a relação de “subconjunto”  $\subseteq$ .  $(\mathcal{P}(T), \subseteq)$  é um *poset*?
- ▶ Tome conjuntos quaisquer  $t_1, t_2, t_3 \in \mathcal{P}(T)$ 
  - ▶  $t_1 \subseteq t_1$  para todo conjunto, portanto  $\subseteq$  é reflexiva
  - ▶  $t_1 \subseteq t_2, t_2 \subseteq t_1 \Rightarrow t_1 = t_2$ , portanto  $\subseteq$  é antissimétrica

# Exemplo

## Conjuntos parcialmente ordenados

- ▶ Considere um conjunto  $T$  e seu conjunto potência,  $\mathcal{P}(T)$ , e a relação de “subconjunto”  $\subseteq$ .  $(\mathcal{P}(T), \subseteq)$  é um *poset*?
- ▶ Tome conjuntos quaisquer  $t_1, t_2, t_3 \in \mathcal{P}(T)$ 
  - ▶  $t_1 \subseteq t_1$  para todo conjunto, portanto  $\subseteq$  é reflexiva
  - ▶  $t_1 \subseteq t_2, t_2 \subseteq t_1 \Rightarrow t_1 = t_2$ , portanto  $\subseteq$  é antissimétrica
  - ▶  $t_1 \subseteq t_2, t_2 \subseteq t_3 \Rightarrow t_1 \subseteq t_3$ , portanto  $\subseteq$  é transitiva

# Exemplo

## Conjuntos parcialmente ordenados

- ▶ Considere um conjunto  $T$  e seu conjunto potência,  $\mathcal{P}(T)$ , e a relação de “subconjunto”  $\subseteq$ .  $(\mathcal{P}(T), \subseteq)$  é um *poset*?
- ▶ Tome conjuntos quaisquer  $t_1, t_2, t_3 \in \mathcal{P}(T)$ 
  - ▶  $t_1 \subseteq t_1$  para todo conjunto, portanto  $\subseteq$  é reflexiva
  - ▶  $t_1 \subseteq t_2, t_2 \subseteq t_1 \Rightarrow t_1 = t_2$ , portanto  $\subseteq$  é antissimétrica
  - ▶  $t_1 \subseteq t_2, t_2 \subseteq t_3 \Rightarrow t_1 \subseteq t_3$ , portanto  $\subseteq$  é transitiva
- ▶ Logo,  $(\mathcal{P}(T), \subseteq)$  é um *poset*

# Exemplo

## Conjuntos parcialmente ordenados

- Considere o conjunto de seres humanos  $H$ , e a relação de “é mais velho que”  $\preceq$ .  $(H, \preceq)$  é um *poset*?



# Exemplo

## Conjuntos parcialmente ordenados

- ▶ Considere o conjunto de seres humanos  $H$ , e a relação de “é mais velho que”  $\preceq$ .  $(H, \preceq)$  é um *poset*?
- ▶ Tome pessoas quaisquer  $h_1, h_2, h_3 \in H$

# Exemplo

## Conjuntos parcialmente ordenados

- ▶ Considere o conjunto de seres humanos  $H$ , e a relação de “é mais velho que”  $\preceq$ .  $(H, \preceq)$  é um *poset*?
- ▶ Tome pessoas quaisquer  $h_1, h_2, h_3 \in H$ 
  - ▶  $h_1 \preceq h_2 \Rightarrow h_2 \not\preceq h_1$  (antissimetria: se  $h_1$  é mais velha que  $h_2$ , o oposto não pode ser verdade)

# Exemplo

## Conjuntos parcialmente ordenados

- ▶ Considere o conjunto de seres humanos  $H$ , e a relação de “é mais velho que”  $\preceq$ .  $(H, \preceq)$  é um *poset*?
- ▶ Tome pessoas quaisquer  $h_1, h_2, h_3 \in H$ 
  - ▶  $h_1 \preceq h_2 \Rightarrow h_2 \not\preceq h_1$  (antissimetria: se  $h_1$  é mais velha que  $h_2$ , o oposto não pode ser verdade)
  - ▶  $h_1 \preceq h_2, h_2 \preceq h_3 \Rightarrow h_1 \preceq h_3$  (transitividade: se  $h_1$  é mais velha que  $h_2$ , e  $h_2$  é mais velha que  $h_3$ , então  $h_1$  é mais velha que  $h_3$ )

# Exemplo

## Conjuntos parcialmente ordenados

- ▶ Considere o conjunto de seres humanos  $H$ , e a relação de “é mais velho que”  $\preceq$ .  $(H, \preceq)$  é um *poset*?
- ▶ Tome pessoas quaisquer  $h_1, h_2, h_3 \in H$ 
  - ▶  $h_1 \preceq h_2 \Rightarrow h_2 \not\preceq h_1$  (antissimetria: se  $h_1$  é mais velha que  $h_2$ , o oposto não pode ser verdade)
  - ▶  $h_1 \preceq h_2, h_2 \preceq h_3 \Rightarrow h_1 \preceq h_3$  (transitividade: se  $h_1$  é mais velha que  $h_2$ , e  $h_2$  é mais velha que  $h_3$ , então  $h_1$  é mais velha que  $h_3$ )
  - ▶  $h_1 \not\preceq h_1$  (reflexividade: uma pessoa não pode ser mais velha do que si mesma)

# Exemplo

## Conjuntos parcialmente ordenados

- ▶ Considere o conjunto de seres humanos  $H$ , e a relação de “é mais velho que”  $\preceq$ .  $(H, \preceq)$  é um *poset*?
- ▶ Tome pessoas quaisquer  $h_1, h_2, h_3 \in H$ 
  - ▶  $h_1 \preceq h_2 \Rightarrow h_2 \not\preceq h_1$  (antissimetria: se  $h_1$  é mais velha que  $h_2$ , o oposto não pode ser verdade)
  - ▶  $h_1 \preceq h_2, h_2 \preceq h_3 \Rightarrow h_1 \preceq h_3$  (transitividade: se  $h_1$  é mais velha que  $h_2$ , e  $h_2$  é mais velha que  $h_3$ , então  $h_1$  é mais velha que  $h_3$ )
  - ▶  $h_1 \not\preceq h_1$  (reflexividade: uma pessoa não pode ser mais velha do que si mesma)
- ▶ Portanto,  $(H, \preceq)$  não é um *poset*

# Conjuntos parcialmente ordenados estritos

- ▶ Em alguns contextos, a definição de *poset* apresentada é chamada de “conjunto parcialmente ordenado não-estrito”
- ▶ O par ordenado  $(S, R)$  é um conjunto parcialmente ordenado estrito se,  $\forall a, b, c \in S$ ,
- ▶ Para transformar um *poset* em um *poset* estrito, remova todos os pares  $(a, a) \in R$
- ▶ A notação para relações parciais estritas arbitrárias é similar, utilizando os símbolos  $<$ ,  $\prec$

# Conjuntos parcialmente ordenados estritos

- ▶ Em alguns contextos, a definição de *poset* apresentada é chamada de “conjunto parcialmente ordenado não-estrito”
- ▶ O par ordenado  $(S, R)$  é um conjunto parcialmente ordenado estrito se,  $\forall a, b, c \in S$ ,
  - ▶  $(a, a) \notin R$  (irreflexividade)
- ▶ Para transformar um *poset* em um *poset* estrito, remova todos os pares  $(a, a) \in R$
- ▶ A notação para relações parciais estritas arbitrárias é similar, utilizando os símbolos  $<$ ,  $\prec$

# Conjuntos parcialmente ordenados estritos

- ▶ Em alguns contextos, a definição de *poset* apresentada é chamada de “conjunto parcialmente ordenado não-estrito”
- ▶ O par ordenado  $(S, R)$  é um conjunto parcialmente ordenado estrito se,  $\forall a, b, c \in S$ ,
  - ▶  $(a, a) \notin R$  (irreflexividade)
  - ▶  $(a, b), (b, c) \in R \Rightarrow (a, c) \in R$  (transitividade)
- ▶ Para transformar um *poset* em um *poset* estrito, remova todos os pares  $(a, a) \in R$
- ▶ A notação para relações parciais estritas arbitrárias é similar, utilizando os símbolos  $<$ ,  $\prec$



# Exemplo

## Conjuntos parcialmente ordenados estritos

- Considere o conjunto de matérias em um currículo  $C$ , e a relação de “é pré-requisito de”  $\prec$ .  $(C, \prec)$  é um *poset* estrito?

# Exemplo

## Conjuntos parcialmente ordenados estritos

- ▶ Considere o conjunto de matérias em um currículo  $C$ , e a relação de “é pré-requisito de”  $\prec$ .  $(C, \prec)$  é um *poset* estrito?
- ▶ Tome matérias quaisquer  $c_1, c_2, c_3 \in C$

# Exemplo

## Conjuntos parcialmente ordenados estritos

- ▶ Considere o conjunto de matérias em um currículo  $C$ , e a relação de “é pré-requisito de”  $\prec$ .  $(C, \prec)$  é um *poset* estrito?
- ▶ Tome matérias quaisquer  $c_1, c_2, c_3 \in C$ 
  - ▶  $c_1 \not\prec c_1$  (irreflexividade:  $c_1$  não pode ser pré-requisito dela mesma)

# Exemplo

## Conjuntos parcialmente ordenados estritos

- ▶ Considere o conjunto de matérias em um currículo  $C$ , e a relação de “é pré-requisito de”  $\prec$ .  $(C, \prec)$  é um *poset* estrito?
- ▶ Tome matérias quaisquer  $c_1, c_2, c_3 \in C$ 
  - ▶  $c_1 \not\prec c_1$  (irreflexividade:  $c_1$  não pode ser pré-requisito dela mesma)
  - ▶  $c_1 \prec c_2, c_2 \prec c_3 \Rightarrow c_1 \prec c_3$  (transitividade: se  $c_1$  é pré-requisito de  $c_2$ , e  $c_2$  é pré-requisito de  $c_3$ , então  $c_1$  é pré-requisito de  $c_3$ )

# Exemplo

## Conjuntos parcialmente ordenados estritos

- ▶ Considere o conjunto de matérias em um currículo  $C$ , e a relação de “é pré-requisito de”  $\prec$ .  $(C, \prec)$  é um *poset* estrito?
- ▶ Tome matérias quaisquer  $c_1, c_2, c_3 \in C$ 
  - ▶  $c_1 \not\prec c_1$  (irreflexividade:  $c_1$  não pode ser pré-requisito dela mesma)
  - ▶  $c_1 \prec c_2, c_2 \prec c_3 \Rightarrow c_1 \prec c_3$  (transitividade: se  $c_1$  é pré-requisito de  $c_2$ , e  $c_2$  é pré-requisito de  $c_3$ , então  $c_1$  é pré-requisito de  $c_3$ )
- ▶ Portanto,  $(C, \prec)$  é um *poset* estrito

# Dualidade de *posets*

- ▶ Para qualquer relação binária  $R$ , uma relação inversa  $R^{-1}$  pode ser construída trocando a ordem dos elementos de todos os pares ordenados em  $R$ 
  - ▶ As propriedades usuais de relações mantêm-se em  $R^{-1}$
- ▶ Formalmente, para dois conjuntos quaisquer  $S, T$ ,  
$$R^{-1} = \{(t, s) \in T \times S \mid (s, t) \in R\}$$
- ▶ No caso de relações parciais, os símbolos  $\succcurlyeq, \geq, \succ, >$  podem ser utilizados para denotar a inversa, neste caso chamada de **dual**

# Exemplo

## Conjuntos parcialmente ordenados duais

- ▶ Considere o conjunto dos inteiros  $\mathbb{Z}$  e a relação de “maior ou igual”  $\geq$

# Exemplo

## Conjuntos parcialmente ordenados duais

- ▶ Considere o conjunto dos inteiros  $\mathbb{Z}$  e a relação de “maior ou igual”  $\geq$ 
  - ▶  $(\mathbb{Z}, \geq)$  é um *poset*



# Exemplo

## Conjuntos parcialmente ordenados duais

- ▶ Considere o conjunto dos inteiros  $\mathbb{Z}$  e a relação de “maior ou igual”  $\geq$ 
  - ▶  $(\mathbb{Z}, \geq)$  é um *poset*
- ▶ Considere um conjunto  $T$  e seu conjunto potência,  $\mathcal{P}(T)$ , e a relação de “superconjunto”  $\supseteq$

# Exemplo

## Conjuntos parcialmente ordenados duais

- ▶ Considere o conjunto dos inteiros  $\mathbb{Z}$  e a relação de “maior ou igual”  $\geq$ 
  - ▶  $(\mathbb{Z}, \geq)$  é um *poset*
- ▶ Considere um conjunto  $T$  e seu conjunto potência,  $\mathcal{P}(T)$ , e a relação de “superconjunto”  $\supseteq$ 
  - ▶  $(\mathcal{P}(T), \supseteq)$  é um *poset*

# Exemplo

## Conjuntos parcialmente ordenados duais

- ▶ Considere o conjunto dos inteiros  $\mathbb{Z}$  e a relação de “maior ou igual”  $\geq$ 
  - ▶  $(\mathbb{Z}, \geq)$  é um *poset*
- ▶ Considere um conjunto  $T$  e seu conjunto potência,  $\mathcal{P}(T)$ , e a relação de “superconjunto”  $\supseteq$ 
  - ▶  $(\mathcal{P}(T), \supseteq)$  é um *poset*
- ▶ Considere o conjunto de matérias em um currículo  $C$ , e a relação de “é pós-requisito de”  $\succ$

# Exemplo

## Conjuntos parcialmente ordenados duais

- ▶ Considere o conjunto dos inteiros  $\mathbb{Z}$  e a relação de “maior ou igual”  $\geq$ 
  - ▶  $(\mathbb{Z}, \geq)$  é um *poset*
- ▶ Considere um conjunto  $T$  e seu conjunto potência,  $\mathcal{P}(T)$ , e a relação de “superconjunto”  $\supseteq$ 
  - ▶  $(\mathcal{P}(T), \supseteq)$  é um *poset*
- ▶ Considere o conjunto de matérias em um currículo  $C$ , e a relação de “é pós-requisito de”  $\succ$ 
  - ▶  $(C, \succ)$  é um *poset* estrito

# Conjuntos totalmente ordenados

- ▶ Quando todos os elementos de uma relação parcial são comparáveis, esta é chamada de **ordem total**
- ▶ O par ordenado  $(S, R)$  é chamado de conjunto totalmente ordenado, ou **toset** (*totally ordered set*) se,  $\forall a, b \in S$ ,
- ▶ São um caso particular de *posets*, e portanto, a dualidade mantém-se
- ▶ Também podem ser chamados de **cadeias** e ordens lineares, e seus duais, de anticadeias

# Conjuntos totalmente ordenados

- ▶ Quando todos os elementos de uma relação parcial são comparáveis, esta é chamada de **ordem total**
- ▶ O par ordenado  $(S, R)$  é chamado de conjunto totalmente ordenado, ou **toset** (*totally ordered set*) se,  $\forall a, b \in S$ ,
  - ▶  $R$  é uma relação parcial
- ▶ São um caso particular de *posets*, e portanto, a dualidade mantém-se
- ▶ Também podem ser chamados de **cadeias** e ordens lineares, e seus duais, de anticadeias

# Conjuntos totalmente ordenados

- ▶ Quando todos os elementos de uma relação parcial são comparáveis, esta é chamada de **ordem total**
- ▶ O par ordenado  $(S, R)$  é chamado de conjunto totalmente ordenado, ou **toset** (*totally ordered set*) se,  $\forall a, b \in S$ ,
  - ▶  $R$  é uma relação parcial
  - ▶ Ou  $(a, b) \in R$ , ou  $(b, a) \in R$ , ou  $a = b$  (tricotomia)
- ▶ São um caso particular de *posets*, e portanto, a dualidade mantém-se
- ▶ Também podem ser chamados de **cadeias** e ordens lineares, e seus duais, de anticadeias

# Exemplo

## Conjuntos totalmente ordenados

- Considere o conjunto dos inteiros positivos  $\mathbb{Z}^+$  e a relação de divisibilidade  $|$ .  $(\mathbb{Z}^+, |)$  é um *poset*? Se sim, é também um *toset*?



# Exemplo

## Conjuntos totalmente ordenados

- ▶ Considere o conjunto dos inteiros positivos  $\mathbb{Z}^+$  e a relação de divisibilidade  $|$ .  $(\mathbb{Z}^+, |)$  é um *poset*? Se sim, é também um *toset*?
- ▶ Para quaisquer inteiros  $a, b, c \in \mathbb{Z}^+$ , e quaisquer dois primos  $p_1, p_2 \in \mathbb{Z}^+$

# Exemplo

## Conjuntos totalmente ordenados

- ▶ Considere o conjunto dos inteiros positivos  $\mathbb{Z}^+$  e a relação de divisibilidade  $|$ .  $(\mathbb{Z}^+, |)$  é um *poset*? Se sim, é também um *toset*?
- ▶ Para quaisquer inteiros  $a, b, c \in \mathbb{Z}^+$ , e quaisquer dois primos  $p_1, p_2 \in \mathbb{Z}^+$ 
  - ▶  $a | a$  (reflexividade)

# Exemplo

## Conjuntos totalmente ordenados

- ▶ Considere o conjunto dos inteiros positivos  $\mathbb{Z}^+$  e a relação de divisibilidade  $|$ .  $(\mathbb{Z}^+, |)$  é um *poset*? Se sim, é também um *toset*?
- ▶ Para quaisquer inteiros  $a, b, c \in \mathbb{Z}^+$ , e quaisquer dois primos  $p_1, p_2 \in \mathbb{Z}^+$ 
  - ▶  $a | a$  (reflexividade)
  - ▶  $a | b, b | a \Rightarrow a = b$  (antissimetria)

# Exemplo

## Conjuntos totalmente ordenados

- ▶ Considere o conjunto dos inteiros positivos  $\mathbb{Z}^+$  e a relação de divisibilidade  $|$ .  $(\mathbb{Z}^+, |)$  é um *poset*? Se sim, é também um *toset*?
- ▶ Para quaisquer inteiros  $a, b, c \in \mathbb{Z}^+$ , e quaisquer dois primos  $p_1, p_2 \in \mathbb{Z}^+$ 
  - ▶  $a | a$  (reflexividade)
  - ▶  $a | b, b | a \Rightarrow a = b$  (antissimetria)
  - ▶  $a | b, b | c \Rightarrow a | c$  (transitividade)

# Exemplo

## Conjuntos totalmente ordenados

- ▶ Considere o conjunto dos inteiros positivos  $\mathbb{Z}^+$  e a relação de divisibilidade  $|$ .  $(\mathbb{Z}^+, |)$  é um *poset*? Se sim, é também um *toset*?
- ▶ Para quaisquer inteiros  $a, b, c \in \mathbb{Z}^+$ , e quaisquer dois primos  $p_1, p_2 \in \mathbb{Z}^+$ 
  - ▶  $a | a$  (reflexividade)
  - ▶  $a | b, b | a \Rightarrow a = b$  (antissimetria)
  - ▶  $a | b, b | c \Rightarrow a | c$  (transitividade)
  - ▶  $p_1 \nmid p_2, p_2 \nmid p_1$  (existem elementos incomparáveis)

# Exemplo

## Conjuntos totalmente ordenados

- ▶ Considere o conjunto dos inteiros positivos  $\mathbb{Z}^+$  e a relação de divisibilidade  $|$ .  $(\mathbb{Z}^+, |)$  é um *poset*? Se sim, é também um *toset*?
- ▶ Para quaisquer inteiros  $a, b, c \in \mathbb{Z}^+$ , e quaisquer dois primos  $p_1, p_2 \in \mathbb{Z}^+$ 
  - ▶  $a | a$  (reflexividade)
  - ▶  $a | b, b | a \Rightarrow a = b$  (antissimetria)
  - ▶  $a | b, b | c \Rightarrow a | c$  (transitividade)
  - ▶  $p_1 \nmid p_2, p_2 \nmid p_1$  (existem elementos incomparáveis)
- ▶ Então,  $(\mathbb{Z}^+, |)$  é um *poset*, mas não um *toset*

# Exemplo

## Conjuntos totalmente ordenados

- ▶ O *poset*  $(\mathbb{Z}, \leq)$  é também um *toset*, pois quaisquer inteiros podem ser comparados com  $\leq$

# Exemplo

## Conjuntos totalmente ordenados

- ▶ O *poset*  $(\mathbb{Z}, \leq)$  é também um *toset*, pois quaisquer inteiros podem ser comparados com  $\leq$
- ▶ O *poset*  $(\mathcal{P}(T), \subseteq)$  não é um *toset*
  - ▶ Considere  $T = \{x, y\}$ ,  $\{x\}, \{y\} \in \mathcal{P}(T)$  e veja que  $\{x\} \not\subseteq \{y\}, \{y\} \not\subseteq \{x\}$



# Exemplo

## Conjuntos totalmente ordenados

- ▶ O *poset*  $(\mathbb{Z}, \leq)$  é também um *toset*, pois quaisquer inteiros podem ser comparados com  $\leq$
- ▶ O *poset*  $(\mathcal{P}(T), \subseteq)$  não é um *toset*
  - ▶ Considere  $T = \{x, y\}$ ,  $\{x\}, \{y\} \in \mathcal{P}(T)$  e veja que  $\{x\} \not\subseteq \{y\}, \{y\} \not\subseteq \{x\}$
- ▶ O produto Cartesiano de qualquer número de *tosets*, utilizando ordenação lexicográfica, é um *toset*
  - ▶ Dados dois *tosets*  $(P, \preccurlyeq_1), (Q, \preccurlyeq_2)$ , e elementos quaisquer  $p_1, p_2 \in P, q_1, q_2 \in Q$
  - ▶ Para  $(P_1 \times P_2, \preccurlyeq)$ , a relação  $(p_1, q_1) \preccurlyeq (p_2, q_2) \Rightarrow p_1 \preccurlyeq_1 p_2$  ou  $(p_1 = p_2 \text{ e } q_1 \preccurlyeq_2 q_2)$

# Representação gráfica de *posets*

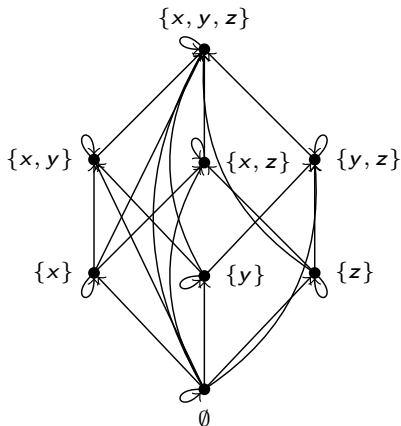
- ▶ *Posets* podem ser caracterizados de maneira amigável, considerando os elementos de  $S$  como “pontos em um plano”
- ▶ As conexões entre elementos são análogas à descrição das relações, e utilizam-se “vetores” para simbolizá-las
- ▶ De maneira formal, um *poset* pode ser representado como um grafo dirigido, cujos vértices são os elementos de  $S$ , e arestas os elementos de  $\preceq$

# Diagrama de Hasse

- ▶ Deseja-se desenhar o *poset* com o menor número de conexões possível (através da redução transitiva do grafo correspondente)
- ▶ Esta técnica gera um esquema chamado de **diagrama de Hasse**, que representa o *poset* de maneira sucinta
- ▶ Entretanto, existem várias formas de desenhá-los, tornando-se difícil criar diagramas ordenados
- ▶ O diagrama de Hasse de *tosets* dá origem ao nome de “cadeia”

# Exemplo

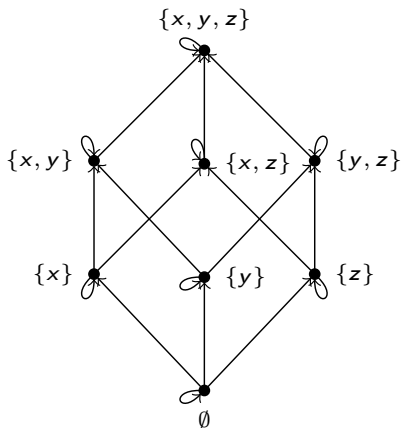
## Diagrama de Hasse



- $(\mathcal{P}(\{x, y, z\}), \subseteq)$  com todas as arestas relativas às relações entre elementos

# Exemplo

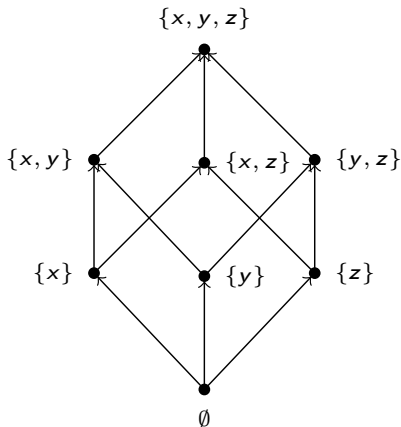
## Diagrama de Hasse



- As arestas relativas à transitividade da relação são omitidas

# Exemplo

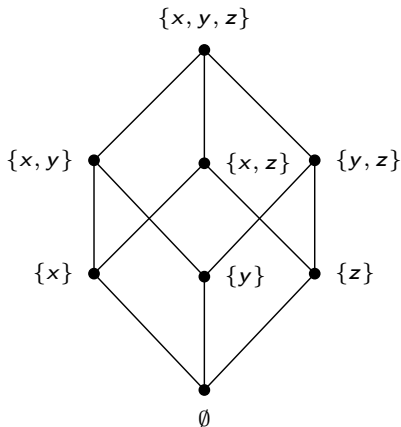
## Diagrama de Hasse



- As arestas relativas à reflexividade da relação também são omitidas

# Exemplo

## Diagrama de Hasse



- O direcionamento é omitido, visto que todas as arestas apontam “para cima”

# Elementos extremos

- ▶ É razoável conhecer os elementos que denotam as fronteiras de um *poset*  $(S, \preceq)$
- ▶ Considere um elemento qualquer  $s' \in S$ , e  $\forall s \in S$



# Elementos extremos

- ▶ É razoável conhecer os elementos que denotam as fronteiras de um *poset*  $(S, \preceq)$
- ▶ Considere um elemento qualquer  $s' \in S$ , e  $\forall s \in S$ 
  - ▶  $s'$  é **máximo** se é “maior que” todos os outros, ou seja,  $s \prec s'$

# Elementos extremos

- ▶ É razoável conhecer os elementos que denotam as fronteiras de um *poset*  $(S, \preceq)$
- ▶ Considere um elemento qualquer  $s' \in S$ , e  $\forall s \in S$ 
  - ▶  $s'$  é **máximo** se é “maior que” todos os outros, ou seja,  $s \prec s'$
  - ▶  $s'$  é **mínimo** se é “menor que” todos os outros, ou seja,  $s' \prec s$

# Elementos extremos

- ▶ É razoável conhecer os elementos que denotam as fronteiras de um *poset*  $(S, \preceq)$
- ▶ Considere um elemento qualquer  $s' \in S$ , e  $\forall s \in S$ 
  - ▶  $s'$  é **máximo** se é “maior que” todos os outros, ou seja,  $s \prec s'$
  - ▶  $s'$  é **mínimo** se é “menor que” todos os outros, ou seja,  $s' \prec s$
  - ▶  $s'$  é **maximal** se não existe outro “maior que” este, ou seja,  $s' \not\preceq s$

# Elementos extremos

- ▶ É razoável conhecer os elementos que denotam as fronteiras de um *poset*  $(S, \preceq)$
- ▶ Considere um elemento qualquer  $s' \in S$ , e  $\forall s \in S$ 
  - ▶  $s'$  é **máximo** se é “maior que” todos os outros, ou seja,  $s \prec s'$
  - ▶  $s'$  é **mínimo** se é “menor que” todos os outros, ou seja,  $s' \prec s$
  - ▶  $s'$  é **maximal** se não existe outro “maior que” este, ou seja,  $s' \preceq s$
  - ▶  $s'$  é **minimal** se não existe outro “menor que” este, ou seja,  $s \preceq s'$

# Elementos extremos

- ▶ Portanto, devem existir até um elemento máximo e um elemento mínimo
- ▶ Se este for o caso, estes serão o único elemento maximal e minimal, e serão denotados por  $\top, \perp$  respectivamente
- ▶ À ausência destes, não existem restrições no número de elementos minimais ou maximais, e estes conjuntos serão denotados por  $S_{\min}, S_{\max}$  respectivamente
- ▶ Poderão existir elementos maximal e minimal únicos, mas não necessariamente serão o máximo e mínimo

# Exemplo

## Elementos extremos

- ▶ Considere o *poset*  $(\mathbb{Z}^+, |)$ . É possível identificar elementos extremos?

# Exemplo

## Elementos extremos

- ▶ Considere o *poset*  $(\mathbb{Z}^+, |)$ . É possível identificar elementos extremos?
  - ▶ Como o *poset* tende a  $+\infty$ , não existem elementos maximais e máximo

# Exemplo

## Elementos extremos

- ▶ Considere o *poset*  $(\mathbb{Z}^+, |)$ . É possível identificar elementos extremos?
  - ▶ Como o *poset* tende a  $+\infty$ , não existem elementos maximais e máximo
  - ▶  $\perp = 1$ , pois  $1 \mid n, \forall n \in \mathbb{Z}^+$



# Exemplo

## Elementos extremos

- ▶ Considere o *poset*  $(\mathbb{Z}^+, |)$ . É possível identificar elementos extremos?
  - ▶ Como o *poset* tende a  $+\infty$ , não existem elementos maximais e máximo
  - ▶  $\perp = 1$ , pois  $1 \mid n, \forall n \in \mathbb{Z}^+$
- ▶ Considere o *poset*  $(\mathcal{P}(T), \subseteq)$ . É possível identificar elementos extremos?

# Exemplo

## Elementos extremos

- ▶ Considere o *poset*  $(\mathbb{Z}^+, |)$ . É possível identificar elementos extremos?
  - ▶ Como o *poset* tende a  $+\infty$ , não existem elementos maximais e máximo
  - ▶  $\perp = 1$ , pois  $1 \mid n, \forall n \in \mathbb{Z}^+$
- ▶ Considere o *poset*  $(\mathcal{P}(T), \subseteq)$ . É possível identificar elementos extremos?
  - ▶ Tome um subconjunto qualquer  $t \in \mathcal{P}(T)$

# Exemplo

## Elementos extremos

- ▶ Considere o *poset*  $(\mathbb{Z}^+, |)$ . É possível identificar elementos extremos?
  - ▶ Como o *poset* tende a  $+\infty$ , não existem elementos maximais e máximo
  - ▶  $\perp = 1$ , pois  $1 \mid n, \forall n \in \mathbb{Z}^+$
- ▶ Considere o *poset*  $(\mathcal{P}(T), \subseteq)$ . É possível identificar elementos extremos?
  - ▶ Tome um subconjunto qualquer  $t \in \mathcal{P}(T)$
  - ▶ Observe que  $\emptyset \subseteq t$ , e portanto  $\perp = \emptyset$

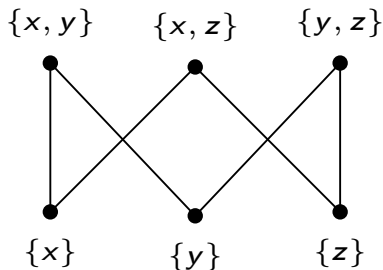
# Exemplo

## Elementos extremos

- ▶ Considere o *poset*  $(\mathbb{Z}^+, |)$ . É possível identificar elementos extremos?
  - ▶ Como o *poset* tende a  $+\infty$ , não existem elementos maximais e máximo
  - ▶  $\perp = 1$ , pois  $1 \mid n, \forall n \in \mathbb{Z}^+$
- ▶ Considere o *poset*  $(\mathcal{P}(T), \subseteq)$ . É possível identificar elementos extremos?
  - ▶ Tome um subconjunto qualquer  $t \in \mathcal{P}(T)$
  - ▶ Observe que  $\emptyset \subseteq t$ , e portanto  $\perp = \emptyset$
  - ▶ Da mesma maneira,  $t \subseteq T$ , e portanto  $\top = T$

# Exemplo

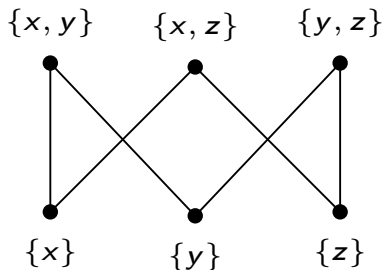
## Elementos extremos



- Considere o diagrama de Hasse acima. É possível identificar elementos extremos?

# Exemplo

## Elementos extremos



- Considere o diagrama de Hasse acima. É possível identificar elementos extremos?
- $S_{\min} = \{\{x\}, \{y\}, \{z\}\}$ ,  $S_{\max} = \{\{x, y\}, \{x, z\}, \{y, z\}\}$

# Subconjuntos de *posets*

- ▶ Em um *poset* qualquer  $(S, \preceq)$ , a relação é preservada para todos os subconjuntos de  $S$
- ▶ Elementos extremos para estes subconjuntos têm nomes especiais
  - ▶ Tome um subconjunto  $K \subseteq S$  e elemento  $x \in S$  quaisquer
  - ▶  $x$  está na **cota superior** de  $K$  se  $k \preceq x, \forall k \in K$ , e na **cota inferior** de  $K$  se  $x \preceq k, \forall k \in K$
  - ▶ Não existe notação definida para as cotas de  $K$  em relação à  $S$

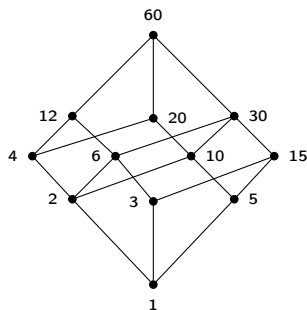
## Elementos extremos em cotas

- ▶ Dentro da cota superior para um subconjunto de um *poset*, pode existir um elemento mínimo neste, e este é chamado de **menor cota superior**, ou ínfimo —  $\inf(K)$
- ▶ Analogamente, pode existir um elemento máximo na cota inferior, chamado de **maior cota inferior**, ou supremo —  $\sup(K)$
- ▶ Se  $\inf(K)$  existe e pertence a  $K$ , então é um elemento minimal ou mínimo de  $K$ , e de maneira dual,  $\sup(K)$  é um elemento maximal ou máximo de  $K$



# Exemplo

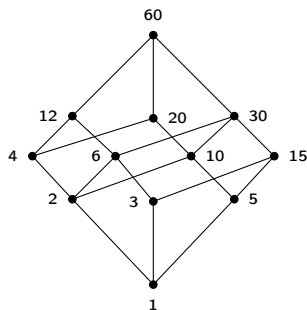
Elementos extremos em cotas



- Considere o *poset* de divisores de 60 e  $K = \{6, 15\}$

# Exemplo

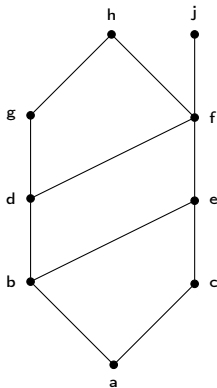
## Elementos extremos em cotas



- Considere o *poset* de divisores de 60 e  $K = \{6, 15\}$ 
  - A cota superior é  $\{30, 60\}$ , a cota inferior é  $\{1, 3\}$ ,  
 $\inf(K) = 3$  e  $\sup(K) = 30$

# Exemplo

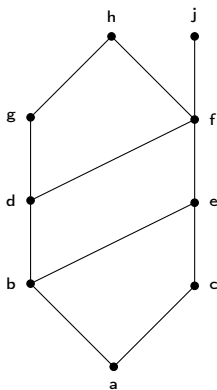
Elementos extremos em cotas



- Considere o *poset* acima e  $K = \{a, c, d, f\}$

# Exemplo

## Elementos extremos em cotas



- Considere o *poset* acima e  $K = \{a, c, d, f\}$ 
  - A cota superior é  $\{f, h, j\}$ , a cota inferior é  $\{a\}$ ,  
 $\inf(K) = f$  e  $\sup(K) = a$

# Material de estudo



Rosen, K. H. (2011).

*Discrete Mathematics and Its Applications.*

7th edition.

- ▶ Leitura das páginas 618-626 e resolução dos exercícios 1-2, 5-6, 9-11, 13-16, 18, 20-25, 32-35, nas páginas 630-631