

Introdução à teoria da ordem

Gustavo Zambonin



Universidade Federal de Santa Catarina
Departamento de Informática e Estatística
INE5601 — Fundamentos Matemáticos da Informática

`gustavo.zambonin@posgrad.ufsc.br`

Contexto

- ▶ Relação: subconjunto do produto Cartesiano de dois (ou mais) conjuntos quaisquer
 - ▶ \equiv_n , a congruência módulo n em \mathbb{Z} , ou seja, $x \equiv y \pmod{n}$

Contexto

- ▶ Relação: subconjunto do produto Cartesiano de dois (ou mais) conjuntos quaisquer
 - ▶ \equiv_n , a congruência módulo n em \mathbb{Z} , ou seja, $x \equiv y \pmod{n}$
- ▶ Propriedades de relações: reflexividade, irreflexividade, simetria, assimetria, antissimetria, transitividade
 - ▶ \equiv_n é uma relação de equivalência

Contexto

- ▶ Relação: subconjunto do produto Cartesiano de dois (ou mais) conjuntos quaisquer
 - ▶ \equiv_n , a congruência módulo n em \mathbb{Z} , ou seja, $x \equiv y \pmod{n}$
- ▶ Propriedades de relações: reflexividade, irreflexividade, simetria, assimetria, antissimetria, transitividade
 - ▶ \equiv_n é uma relação de equivalência
- ▶ É intuitivo pensar que relações são utilizadas para construir ordenamentos

Exemplos práticos

- ▶ Organização de verbetes em um dicionário
 - ▶ Letras no alfabeto e tamanho do verbete
- ▶ Descrição de um grafo curricular
 - ▶ Matérias como pré-requisitos
- ▶ Parentesco entre pessoas, escalonamento temporal de tarefas etc.

Exemplos práticos

- ▶ Organização de verbetes em um dicionário
 - ▶ Letras no alfabeto e tamanho do verbete
- ▶ Descrição de um grafo curricular
 - ▶ Matérias como pré-requisitos
- ▶ Parentesco entre pessoas, escalonamento temporal de tarefas etc.
- ▶ Ideia geral: comparação de (alguns) elementos entre conjuntos quaisquer

Propriedades de relações

- ▶ Considere um conjunto S e uma relação R , construída a partir de $S \times S$
- ▶ R é considerada uma relação *parcial* se é reflexiva, antissimétrica e transitiva
- ▶ Ou seja, $\forall a, b, c \in S$,

Propriedades de relações

- ▶ Considere um conjunto S e uma relação R , construída a partir de $S \times S$
- ▶ R é considerada uma relação *parcial* se é reflexiva, antissimétrica e transitiva
- ▶ Ou seja, $\forall a, b, c \in S$,
 - ▶ $(a, a) \in R$ (reflexividade)

Propriedades de relações

- ▶ Considere um conjunto S e uma relação R , construída a partir de $S \times S$
- ▶ R é considerada uma relação *parcial* se é reflexiva, antissimétrica e transitiva
- ▶ Ou seja, $\forall a, b, c \in S$,
 - ▶ $(a, a) \in R$ (reflexividade)
 - ▶ $(a, b), (b, a) \in R \Rightarrow a = b$ (antissimetria)

Propriedades de relações

- ▶ Considere um conjunto S e uma relação R , construída a partir de $S \times S$
- ▶ R é considerada uma relação *parcial* se é reflexiva, antissimétrica e transitiva
- ▶ Ou seja, $\forall a, b, c \in S$,
 - ▶ $(a, a) \in R$ (reflexividade)
 - ▶ $(a, b), (b, a) \in R \Rightarrow a = b$ (antissimetria)
 - ▶ $(a, b), (b, c) \in R \Rightarrow (a, c) \in R$ (transitividade)

Conjuntos parcialmente ordenados

- ▶ Quando parcial, R é geralmente denotada com o símbolo da relação, ou \leq , \preceq
- ▶ O par ordenado (S, \preceq) é então chamado de conjunto parcialmente ordenado, ou **poset** (*partially ordered set*)
- ▶ a, b são **comparáveis** se $a \preceq b$ ou $b \preceq a$, e incomparáveis caso contrário
 - ▶ se $a \neq b$, a notação $a \prec b$ é utilizada

Exemplo

Conjuntos parcialmente ordenados

- Considere o conjunto dos inteiros \mathbb{Z} e a relação de “menor ou igual” \leq . (\mathbb{Z}, \leq) é um *poset*?

Exemplo

Conjuntos parcialmente ordenados

- ▶ Considere o conjunto dos inteiros \mathbb{Z} e a relação de “menor ou igual” \leq . (\mathbb{Z}, \leq) é um *poset*?
- ▶ Tome inteiros quaisquer $a, b, c \in \mathbb{Z}$

Exemplo

Conjuntos parcialmente ordenados

- ▶ Considere o conjunto dos inteiros \mathbb{Z} e a relação de “menor ou igual” \leq . (\mathbb{Z}, \leq) é um *poset*?
- ▶ Tome inteiros quaisquer $a, b, c \in \mathbb{Z}$
 - ▶ $a \leq a$ para todo inteiro, portanto \leq é reflexiva

Exemplo

Conjuntos parcialmente ordenados

- ▶ Considere o conjunto dos inteiros \mathbb{Z} e a relação de “menor ou igual” \leq . (\mathbb{Z}, \leq) é um *poset*?
- ▶ Tome inteiros quaisquer $a, b, c \in \mathbb{Z}$
 - ▶ $a \leq a$ para todo inteiro, portanto \leq é reflexiva
 - ▶ $a \leq b, b \leq a \Rightarrow a = b$, portanto \leq é antissimétrica

Exemplo

Conjuntos parcialmente ordenados

- ▶ Considere o conjunto dos inteiros \mathbb{Z} e a relação de “menor ou igual” \leq . (\mathbb{Z}, \leq) é um *poset*?
- ▶ Tome inteiros quaisquer $a, b, c \in \mathbb{Z}$
 - ▶ $a \leq a$ para todo inteiro, portanto \leq é reflexiva
 - ▶ $a \leq b, b \leq a \Rightarrow a = b$, portanto \leq é antissimétrica
 - ▶ $a \leq b, b \leq c \Rightarrow a \leq c$, portanto \leq é transitiva

Exemplo

Conjuntos parcialmente ordenados

- ▶ Considere o conjunto dos inteiros \mathbb{Z} e a relação de “menor ou igual” \leq . (\mathbb{Z}, \leq) é um *poset*?
- ▶ Tome inteiros quaisquer $a, b, c \in \mathbb{Z}$
 - ▶ $a \leq a$ para todo inteiro, portanto \leq é reflexiva
 - ▶ $a \leq b, b \leq a \Rightarrow a = b$, portanto \leq é antissimétrica
 - ▶ $a \leq b, b \leq c \Rightarrow a \leq c$, portanto \leq é transitiva
- ▶ Logo, (\mathbb{Z}, \leq) é um *poset*

Exemplo

Conjuntos parcialmente ordenados

- Considere um conjunto T e seu conjunto potência, $\mathcal{P}(T)$, e a relação de “subconjunto” \subseteq . $(\mathcal{P}(T), \subseteq)$ é um *poset*?

Exemplo

Conjuntos parcialmente ordenados

- ▶ Considere um conjunto T e seu conjunto potência, $\mathcal{P}(T)$, e a relação de “subconjunto” \subseteq . $(\mathcal{P}(T), \subseteq)$ é um *poset*?
- ▶ Tome conjuntos quaisquer $t_1, t_2, t_3 \in \mathcal{P}(T)$

Exemplo

Conjuntos parcialmente ordenados

- ▶ Considere um conjunto T e seu conjunto potência, $\mathcal{P}(T)$, e a relação de “subconjunto” \subseteq . $(\mathcal{P}(T), \subseteq)$ é um *poset*?
- ▶ Tome conjuntos quaisquer $t_1, t_2, t_3 \in \mathcal{P}(T)$
 - ▶ $t_1 \subseteq t_1$ para todo conjunto, portanto \subseteq é reflexiva

Exemplo

Conjuntos parcialmente ordenados

- ▶ Considere um conjunto T e seu conjunto potência, $\mathcal{P}(T)$, e a relação de “subconjunto” \subseteq . $(\mathcal{P}(T), \subseteq)$ é um *poset*?
- ▶ Tome conjuntos quaisquer $t_1, t_2, t_3 \in \mathcal{P}(T)$
 - ▶ $t_1 \subseteq t_1$ para todo conjunto, portanto \subseteq é reflexiva
 - ▶ $t_1 \subseteq t_2, t_2 \subseteq t_1 \Rightarrow t_1 = t_2$, portanto \subseteq é antissimétrica

Exemplo

Conjuntos parcialmente ordenados

- ▶ Considere um conjunto T e seu conjunto potência, $\mathcal{P}(T)$, e a relação de “subconjunto” \subseteq . $(\mathcal{P}(T), \subseteq)$ é um *poset*?
- ▶ Tome conjuntos quaisquer $t_1, t_2, t_3 \in \mathcal{P}(T)$
 - ▶ $t_1 \subseteq t_1$ para todo conjunto, portanto \subseteq é reflexiva
 - ▶ $t_1 \subseteq t_2, t_2 \subseteq t_1 \Rightarrow t_1 = t_2$, portanto \subseteq é antissimétrica
 - ▶ $t_1 \subseteq t_2, t_2 \subseteq t_3 \Rightarrow t_1 \subseteq t_3$, portanto \subseteq é transitiva

Exemplo

Conjuntos parcialmente ordenados

- ▶ Considere um conjunto T e seu conjunto potência, $\mathcal{P}(T)$, e a relação de “subconjunto” \subseteq . $(\mathcal{P}(T), \subseteq)$ é um *poset*?
- ▶ Tome conjuntos quaisquer $t_1, t_2, t_3 \in \mathcal{P}(T)$
 - ▶ $t_1 \subseteq t_1$ para todo conjunto, portanto \subseteq é reflexiva
 - ▶ $t_1 \subseteq t_2, t_2 \subseteq t_1 \Rightarrow t_1 = t_2$, portanto \subseteq é antissimétrica
 - ▶ $t_1 \subseteq t_2, t_2 \subseteq t_3 \Rightarrow t_1 \subseteq t_3$, portanto \subseteq é transitiva
- ▶ Logo, $(\mathcal{P}(T), \subseteq)$ é um *poset*

Exemplo

Conjuntos parcialmente ordenados

- Considere o conjunto de seres humanos H , e a relação de “é mais velho que” \preceq . (H, \preceq) é um *poset*?

Exemplo

Conjuntos parcialmente ordenados

- ▶ Considere o conjunto de seres humanos H , e a relação de “é mais velho que” \preceq . (H, \preceq) é um *poset*?
- ▶ Tome pessoas quaisquer $h_1, h_2, h_3 \in H$

Exemplo

Conjuntos parcialmente ordenados

- ▶ Considere o conjunto de seres humanos H , e a relação de “é mais velho que” \preceq . (H, \preceq) é um *poset*?
- ▶ Tome pessoas quaisquer $h_1, h_2, h_3 \in H$
 - ▶ $h_1 \preceq h_2 \Rightarrow h_2 \not\preceq h_1$ (antissimetria: se h_1 é mais velha que h_2 , o oposto não pode ser verdade)

Exemplo

Conjuntos parcialmente ordenados

- ▶ Considere o conjunto de seres humanos H , e a relação de “é mais velho que” \preceq . (H, \preceq) é um *poset*?
- ▶ Tome pessoas quaisquer $h_1, h_2, h_3 \in H$
 - ▶ $h_1 \preceq h_2 \Rightarrow h_2 \not\preceq h_1$ (antissimetria: se h_1 é mais velha que h_2 , o oposto não pode ser verdade)
 - ▶ $h_1 \preceq h_2, h_2 \preceq h_3 \Rightarrow h_1 \preceq h_3$ (transitividade: se h_1 é mais velha que h_2 , e h_2 é mais velha que h_3 , então h_1 é mais velha que h_3)

Exemplo

Conjuntos parcialmente ordenados

- ▶ Considere o conjunto de seres humanos H , e a relação de “é mais velho que” \preceq . (H, \preceq) é um *poset*?
- ▶ Tome pessoas quaisquer $h_1, h_2, h_3 \in H$
 - ▶ $h_1 \preceq h_2 \Rightarrow h_2 \not\preceq h_1$ (antissimetria: se h_1 é mais velha que h_2 , o oposto não pode ser verdade)
 - ▶ $h_1 \preceq h_2, h_2 \preceq h_3 \Rightarrow h_1 \preceq h_3$ (transitividade: se h_1 é mais velha que h_2 , e h_2 é mais velha que h_3 , então h_1 é mais velha que h_3)
 - ▶ $h_1 \not\preceq h_1$ (reflexividade: uma pessoa não pode ser mais velha do que si mesma)

Exemplo

Conjuntos parcialmente ordenados

- ▶ Considere o conjunto de seres humanos H , e a relação de “é mais velho que” \preccurlyeq . (H, \preccurlyeq) é um *poset*?
- ▶ Tome pessoas quaisquer $h_1, h_2, h_3 \in H$
 - ▶ $h_1 \preccurlyeq h_2 \Rightarrow h_2 \not\preccurlyeq h_1$ (antissimetria: se h_1 é mais velha que h_2 , o oposto não pode ser verdade)
 - ▶ $h_1 \preccurlyeq h_2, h_2 \preccurlyeq h_3 \Rightarrow h_1 \preccurlyeq h_3$ (transitividade: se h_1 é mais velha que h_2 , e h_2 é mais velha que h_3 , então h_1 é mais velha que h_3)
 - ▶ $h_1 \not\preccurlyeq h_1$ (reflexividade: uma pessoa não pode ser mais velha do que si mesma)
- ▶ Portanto, (H, \preccurlyeq) não é um *poset*

Conjuntos parcialmente ordenados estritos

- ▶ Em alguns contextos, a definição de *poset* apresentada é chamada de “conjunto parcialmente ordenado não-estrito”
- ▶ O par ordenado (S, R) é um conjunto parcialmente ordenado estrito se, $\forall a, b, c \in S$,
- ▶ Para transformar um *poset* em um *poset* estrito, remova todos os pares $(a, a) \in R$
- ▶ A notação para relações parciais estritas arbitrárias é similar, utilizando os símbolos $<$, \prec

Conjuntos parcialmente ordenados estritos

- ▶ Em alguns contextos, a definição de *poset* apresentada é chamada de “conjunto parcialmente ordenado não-estrito”
- ▶ O par ordenado (S, R) é um conjunto parcialmente ordenado estrito se, $\forall a, b, c \in S$,
 - ▶ $(a, a) \notin R$ (irreflexividade)
- ▶ Para transformar um *poset* em um *poset* estrito, remova todos os pares $(a, a) \in R$
- ▶ A notação para relações parciais estritas arbitrárias é similar, utilizando os símbolos $<$, \prec

Conjuntos parcialmente ordenados estritos

- ▶ Em alguns contextos, a definição de *poset* apresentada é chamada de “conjunto parcialmente ordenado não-estrito”
- ▶ O par ordenado (S, R) é um conjunto parcialmente ordenado estrito se, $\forall a, b, c \in S$,
 - ▶ $(a, a) \notin R$ (irreflexividade)
 - ▶ $(a, b), (b, c) \in R \Rightarrow (a, c) \in R$ (transitividade)
- ▶ Para transformar um *poset* em um *poset* estrito, remova todos os pares $(a, a) \in R$
- ▶ A notação para relações parciais estritas arbitrárias é similar, utilizando os símbolos $<$, \prec

Exemplo

Conjuntos parcialmente ordenados estritos

- Considere o conjunto de matérias em um currículo C , e a relação de “é pré-requisito de” \prec . (C, \prec) é um *poset* estrito?

Exemplo

Conjuntos parcialmente ordenados estritos

- ▶ Considere o conjunto de matérias em um currículo C , e a relação de “é pré-requisito de” \prec . (C, \prec) é um *poset* estrito?
- ▶ Tome matérias quaisquer $c_1, c_2, c_3 \in C$

Exemplo

Conjuntos parcialmente ordenados estritos

- ▶ Considere o conjunto de matérias em um currículo C , e a relação de “é pré-requisito de” \prec . (C, \prec) é um *poset* estrito?
- ▶ Tome matérias quaisquer $c_1, c_2, c_3 \in C$
 - ▶ $c_1 \not\prec c_1$ (irreflexividade: c_1 não pode ser pré-requisito dela mesma)

Exemplo

Conjuntos parcialmente ordenados estritos

- ▶ Considere o conjunto de matérias em um currículo C , e a relação de “é pré-requisito de” \prec . (C, \prec) é um *poset* estrito?
- ▶ Tome matérias quaisquer $c_1, c_2, c_3 \in C$
 - ▶ $c_1 \not\prec c_1$ (irreflexividade: c_1 não pode ser pré-requisito dela mesma)
 - ▶ $c_1 \prec c_2, c_2 \prec c_3 \Rightarrow c_1 \prec c_3$ (transitividade: se c_1 é pré-requisito de c_2 , e c_2 é pré-requisito de c_3 , então c_1 é pré-requisito de c_3)

Exemplo

Conjuntos parcialmente ordenados estritos

- ▶ Considere o conjunto de matérias em um currículo C , e a relação de “é pré-requisito de” \prec . (C, \prec) é um *poset* estrito?
- ▶ Tome matérias quaisquer $c_1, c_2, c_3 \in C$
 - ▶ $c_1 \not\prec c_1$ (irreflexividade: c_1 não pode ser pré-requisito dela mesma)
 - ▶ $c_1 \prec c_2, c_2 \prec c_3 \Rightarrow c_1 \prec c_3$ (transitividade: se c_1 é pré-requisito de c_2 , e c_2 é pré-requisito de c_3 , então c_1 é pré-requisito de c_3)
- ▶ Portanto, (C, \prec) é um *poset* estrito

Dualidade de *posets*

- ▶ Para qualquer relação binária R , uma relação inversa R^{-1} pode ser construída trocando a ordem dos elementos de todos os pares ordenados em R
 - ▶ As propriedades usuais de relações mantêm-se em R^{-1}
- ▶ Formalmente, para dois conjuntos quaisquer S, T ,
$$R^{-1} = \{(t, s) \in T \times S \mid (s, t) \in R\}$$
- ▶ No caso de relações parciais, os símbolos $\succcurlyeq, \geq, \succ, >$ podem ser utilizados para denotar a inversa, neste caso chamada de **dual**

Exemplo

Conjuntos parcialmente ordenados duais

- ▶ Considere o conjunto dos inteiros \mathbb{Z} e a relação de “maior ou igual” \geq

Exemplo

Conjuntos parcialmente ordenados duais

- ▶ Considere o conjunto dos inteiros \mathbb{Z} e a relação de “maior ou igual” \geq
 - ▶ (\mathbb{Z}, \geq) é um *poset*

Exemplo

Conjuntos parcialmente ordenados duais

- ▶ Considere o conjunto dos inteiros \mathbb{Z} e a relação de “maior ou igual” \geq
 - ▶ (\mathbb{Z}, \geq) é um *poset*
- ▶ Considere um conjunto T e seu conjunto potência, $\mathcal{P}(T)$, e a relação de “superconjunto” \supseteq

Exemplo

Conjuntos parcialmente ordenados duais

- ▶ Considere o conjunto dos inteiros \mathbb{Z} e a relação de “maior ou igual” \geq
 - ▶ (\mathbb{Z}, \geq) é um *poset*
- ▶ Considere um conjunto T e seu conjunto potência, $\mathcal{P}(T)$, e a relação de “superconjunto” \supseteq
 - ▶ $(\mathcal{P}(T), \supseteq)$ é um *poset*

Exemplo

Conjuntos parcialmente ordenados duais

- ▶ Considere o conjunto dos inteiros \mathbb{Z} e a relação de “maior ou igual” \geq
 - ▶ (\mathbb{Z}, \geq) é um *poset*
- ▶ Considere um conjunto T e seu conjunto potência, $\mathcal{P}(T)$, e a relação de “superconjunto” \supseteq
 - ▶ $(\mathcal{P}(T), \supseteq)$ é um *poset*
- ▶ Considere o conjunto de matérias em um currículo C , e a relação de “é pós-requisito de” \succ

Exemplo

Conjuntos parcialmente ordenados duais

- ▶ Considere o conjunto dos inteiros \mathbb{Z} e a relação de “maior ou igual” \geq
 - ▶ (\mathbb{Z}, \geq) é um *poset*
- ▶ Considere um conjunto T e seu conjunto potência, $\mathcal{P}(T)$, e a relação de “superconjunto” \supseteq
 - ▶ $(\mathcal{P}(T), \supseteq)$ é um *poset*
- ▶ Considere o conjunto de matérias em um currículo C , e a relação de “é pós-requisito de” \succ
 - ▶ (C, \succ) é um *poset* estrito

Conjuntos totalmente ordenados

- ▶ Quando todos os elementos de uma relação parcial são comparáveis, esta é chamada de **ordem total**
- ▶ O par ordenado (S, R) é chamado de conjunto totalmente ordenado, ou **toset** (*totally ordered set*) se, $\forall a, b \in S$,
- ▶ São um caso particular de *posets*, e portanto, a dualidade mantém-se
- ▶ Também podem ser chamados de **cadeias** e ordens lineares, e seus duais, de anticadeias

Conjuntos totalmente ordenados

- ▶ Quando todos os elementos de uma relação parcial são comparáveis, esta é chamada de **ordem total**
- ▶ O par ordenado (S, R) é chamado de conjunto totalmente ordenado, ou **toset** (*totally ordered set*) se, $\forall a, b \in S$,
 - ▶ R é uma relação parcial
- ▶ São um caso particular de *posets*, e portanto, a dualidade mantém-se
- ▶ Também podem ser chamados de **cadeias** e ordens lineares, e seus duais, de anticadeias

Conjuntos totalmente ordenados

- ▶ Quando todos os elementos de uma relação parcial são comparáveis, esta é chamada de **ordem total**
- ▶ O par ordenado (S, R) é chamado de conjunto totalmente ordenado, ou **toset** (*totally ordered set*) se, $\forall a, b \in S$,
 - ▶ R é uma relação parcial
 - ▶ Ou $(a, b) \in R$, ou $(b, a) \in R$, ou $a = b$ (tricotomia)
- ▶ São um caso particular de *posets*, e portanto, a dualidade mantém-se
- ▶ Também podem ser chamados de **cadeias** e ordens lineares, e seus duais, de anticadeias

Exemplo

Conjuntos totalmente ordenados

- Considere o conjunto dos inteiros positivos \mathbb{Z}^+ e a relação de divisibilidade $|$. $(\mathbb{Z}^+, |)$ é um *poset*? Se sim, é também um *toset*?

Exemplo

Conjuntos totalmente ordenados

- ▶ Considere o conjunto dos inteiros positivos \mathbb{Z}^+ e a relação de divisibilidade $|$. $(\mathbb{Z}^+, |)$ é um *poset*? Se sim, é também um *toset*?
- ▶ Para quaisquer inteiros $a, b, c \in \mathbb{Z}^+$, e quaisquer dois primos $p_1, p_2 \in \mathbb{Z}^+$

Exemplo

Conjuntos totalmente ordenados

- ▶ Considere o conjunto dos inteiros positivos \mathbb{Z}^+ e a relação de divisibilidade $|$. $(\mathbb{Z}^+, |)$ é um *poset*? Se sim, é também um *toset*?
- ▶ Para quaisquer inteiros $a, b, c \in \mathbb{Z}^+$, e quaisquer dois primos $p_1, p_2 \in \mathbb{Z}^+$
 - ▶ $a | a$ (reflexividade)

Exemplo

Conjuntos totalmente ordenados

- ▶ Considere o conjunto dos inteiros positivos \mathbb{Z}^+ e a relação de divisibilidade $|$. $(\mathbb{Z}^+, |)$ é um *poset*? Se sim, é também um *toset*?
- ▶ Para quaisquer inteiros $a, b, c \in \mathbb{Z}^+$, e quaisquer dois primos $p_1, p_2 \in \mathbb{Z}^+$
 - ▶ $a | a$ (reflexividade)
 - ▶ $a | b, b | a \Rightarrow a = b$ (antissimetria)

Exemplo

Conjuntos totalmente ordenados

- ▶ Considere o conjunto dos inteiros positivos \mathbb{Z}^+ e a relação de divisibilidade $|$. $(\mathbb{Z}^+, |)$ é um *poset*? Se sim, é também um *toset*?
- ▶ Para quaisquer inteiros $a, b, c \in \mathbb{Z}^+$, e quaisquer dois primos $p_1, p_2 \in \mathbb{Z}^+$
 - ▶ $a | a$ (reflexividade)
 - ▶ $a | b, b | a \Rightarrow a = b$ (antissimetria)
 - ▶ $a | b, b | c \Rightarrow a | c$ (transitividade)

Exemplo

Conjuntos totalmente ordenados

- ▶ Considere o conjunto dos inteiros positivos \mathbb{Z}^+ e a relação de divisibilidade $|$. $(\mathbb{Z}^+, |)$ é um *poset*? Se sim, é também um *toset*?
- ▶ Para quaisquer inteiros $a, b, c \in \mathbb{Z}^+$, e quaisquer dois primos $p_1, p_2 \in \mathbb{Z}^+$
 - ▶ $a | a$ (reflexividade)
 - ▶ $a | b, b | a \Rightarrow a = b$ (antissimetria)
 - ▶ $a | b, b | c \Rightarrow a | c$ (transitividade)
 - ▶ $p_1 \nmid p_2, p_2 \nmid p_1$ (existem elementos incomparáveis)

Exemplo

Conjuntos totalmente ordenados

- ▶ Considere o conjunto dos inteiros positivos \mathbb{Z}^+ e a relação de divisibilidade $|$. $(\mathbb{Z}^+, |)$ é um *poset*? Se sim, é também um *toset*?
- ▶ Para quaisquer inteiros $a, b, c \in \mathbb{Z}^+$, e quaisquer dois primos $p_1, p_2 \in \mathbb{Z}^+$
 - ▶ $a | a$ (reflexividade)
 - ▶ $a | b, b | a \Rightarrow a = b$ (antissimetria)
 - ▶ $a | b, b | c \Rightarrow a | c$ (transitividade)
 - ▶ $p_1 \nmid p_2, p_2 \nmid p_1$ (existem elementos incomparáveis)
- ▶ Então, $(\mathbb{Z}^+, |)$ é um *poset*, mas não um *toset*

Exemplo

Conjuntos totalmente ordenados

- ▶ O *poset* (\mathbb{Z}, \leq) é também um *toset*, pois quaisquer inteiros podem ser comparados com \leq

Exemplo

Conjuntos totalmente ordenados

- ▶ O *poset* (\mathbb{Z}, \leq) é também um *toset*, pois quaisquer inteiros podem ser comparados com \leq
- ▶ O *poset* $(\mathcal{P}(T), \subseteq)$ não é um *toset*
 - ▶ Considere $T = \{x, y\}$, $\{x\}, \{y\} \in \mathcal{P}(T)$ e veja que $\{x\} \not\subseteq \{y\}$, $\{y\} \not\subseteq \{x\}$

Exemplo

Conjuntos totalmente ordenados

- ▶ O *poset* (\mathbb{Z}, \leq) é também um *toset*, pois quaisquer inteiros podem ser comparados com \leq
- ▶ O *poset* $(\mathcal{P}(T), \subseteq)$ não é um *toset*
 - ▶ Considere $T = \{x, y\}$, $\{x\}, \{y\} \in \mathcal{P}(T)$ e veja que $\{x\} \not\subseteq \{y\}, \{y\} \not\subseteq \{x\}$
- ▶ O produto cartesiano de qualquer número de *tosets*, utilizando ordenação lexicográfica, é um *toset*
 - ▶ Dados dois *tosets* $(P, \preccurlyeq_1), (Q, \preccurlyeq_2)$, e elementos quaisquer $p_1, p_2 \in P, q_1, q_2 \in Q$
 - ▶ Para $(P_1 \times P_2, \preccurlyeq)$, a relação $(p_1, q_1) \preccurlyeq (p_2, q_2) \Rightarrow p_1 \preccurlyeq_1 p_2$ ou $(p_1 = p_2 \text{ e } q_1 \preccurlyeq_2 q_2)$

Representação gráfica de *posets*

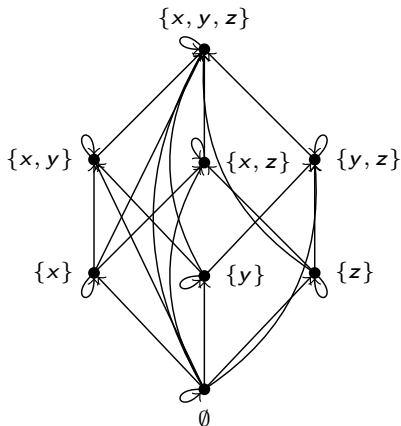
- ▶ *Posets* podem ser caracterizados de maneira amigável, considerando os elementos de S como “pontos em um plano”
- ▶ As conexões entre elementos são análogas à descrição das relações, e utilizam-se “vetores” para simbolizá-las
- ▶ De maneira formal, um *poset* pode ser representado como um grafo dirigido, cujos vértices são os elementos de S , e arestas os elementos de \preceq

Diagrama de Hasse

- ▶ Deseja-se desenhar o *poset* com o menor número de conexões possível (através da redução transitiva do grafo correspondente)
- ▶ Esta técnica gera um esquema chamado de **diagrama de Hasse**, que representa o *poset* de maneira sucinta
- ▶ Entretanto, existem várias formas de desenhá-los, tornando-se difícil criar diagramas ordenados
- ▶ O diagrama de Hasse de *tosets* dá origem ao nome de “cadeia”

Exemplo

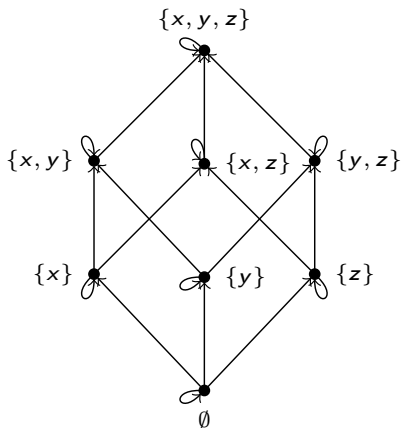
Diagrama de Hasse



- $(\mathcal{P}(\{x, y, z\}), \subseteq)$ com todas as arestas relativas às relações entre elementos

Exemplo

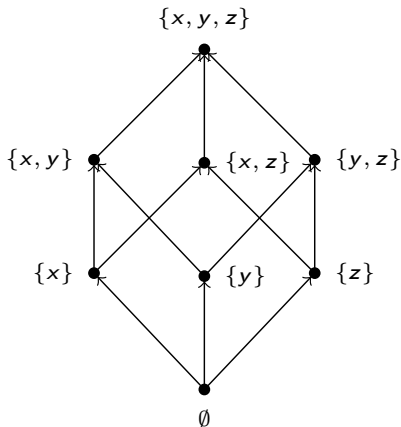
Diagrama de Hasse



- As arestas relativas à transitividade da relação são omitidas

Exemplo

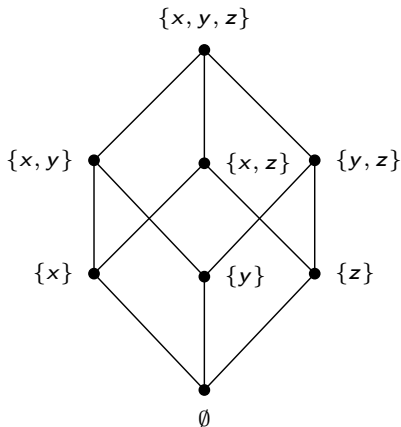
Diagrama de Hasse



- As arestas relativas à reflexividade da relação também são omitidas

Exemplo

Diagrama de Hasse



- O direcionamento é omitido, visto que todas as arestas apontam “para cima”

Elementos extremos

- ▶ É razoável conhecer os elementos que denotam as fronteiras de um *poset* (S, \preceq)
- ▶ Considere um elemento qualquer $s' \in S$, e $\forall s \in S$

Elementos extremos

- ▶ É razoável conhecer os elementos que denotam as fronteiras de um *poset* (S, \preceq)
- ▶ Considere um elemento qualquer $s' \in S$, e $\forall s \in S$
 - ▶ s' é **máximo** se é “maior que” todos os outros, ou seja, $s \prec s'$

Elementos extremos

- ▶ É razoável conhecer os elementos que denotam as fronteiras de um *poset* (S, \preceq)
- ▶ Considere um elemento qualquer $s' \in S$, e $\forall s \in S$
 - ▶ s' é **máximo** se é “maior que” todos os outros, ou seja, $s \prec s'$
 - ▶ s' é **mínimo** se é “menor que” todos os outros, ou seja, $s' \prec s$

Elementos extremos

- ▶ É razoável conhecer os elementos que denotam as fronteiras de um *poset* (S, \preceq)
- ▶ Considere um elemento qualquer $s' \in S$, e $\forall s \in S$
 - ▶ s' é **máximo** se é “maior que” todos os outros, ou seja, $s \prec s'$
 - ▶ s' é **mínimo** se é “menor que” todos os outros, ou seja, $s' \prec s$
 - ▶ s' é **maximal** se não existe outro “maior que” este, ou seja, $s' \not\preceq s$

Elementos extremos

- ▶ É razoável conhecer os elementos que denotam as fronteiras de um *poset* (S, \preceq)
- ▶ Considere um elemento qualquer $s' \in S$, e $\forall s \in S$
 - ▶ s' é **máximo** se é “maior que” todos os outros, ou seja, $s \prec s'$
 - ▶ s' é **mínimo** se é “menor que” todos os outros, ou seja, $s' \prec s$
 - ▶ s' é **maximal** se não existe outro “maior que” este, ou seja, $s' \preceq s$
 - ▶ s' é **minimal** se não existe outro “menor que” este, ou seja, $s \preceq s'$

Elementos extremos

- ▶ Portanto, devem existir até um elemento máximo e um elemento mínimo
- ▶ Se este for o caso, estes serão o único elemento maximal e minimal, e serão denotados por \top, \perp respectivamente
- ▶ À ausência destes, não existem restrições no número de elementos minimais ou maximais, e estes conjuntos serão denotados por S_{\min}, S_{\max} respectivamente
- ▶ Poderão existir elementos maximal e minimal únicos, mas não necessariamente serão o máximo e mínimo

Exemplo

Elementos extremos

- ▶ Considere o *poset* $(\mathbb{Z}^+, |)$. É possível identificar elementos extremos?

Exemplo

Elementos extremos

- ▶ Considere o *poset* $(\mathbb{Z}^+, |)$. É possível identificar elementos extremos?
 - ▶ Como o *poset* tende a $+\infty$, não existem elementos maximais e máximo

Exemplo

Elementos extremos

- ▶ Considere o *poset* $(\mathbb{Z}^+, |)$. É possível identificar elementos extremos?
 - ▶ Como o *poset* tende a $+\infty$, não existem elementos maximais e máximo
 - ▶ $\perp = 1$, pois $1 \mid n, \forall n \in \mathbb{Z}^+$

Exemplo

Elementos extremos

- ▶ Considere o *poset* $(\mathbb{Z}^+, |)$. É possível identificar elementos extremos?
 - ▶ Como o *poset* tende a $+\infty$, não existem elementos maximais e máximo
 - ▶ $\perp = 1$, pois $1 \mid n, \forall n \in \mathbb{Z}^+$
- ▶ Considere o *poset* $(\mathcal{P}(T), \subseteq)$. É possível identificar elementos extremos?

Exemplo

Elementos extremos

- ▶ Considere o *poset* $(\mathbb{Z}^+, |)$. É possível identificar elementos extremos?
 - ▶ Como o *poset* tende a $+\infty$, não existem elementos maximais e máximo
 - ▶ $\perp = 1$, pois $1 \mid n, \forall n \in \mathbb{Z}^+$
- ▶ Considere o *poset* $(\mathcal{P}(T), \subseteq)$. É possível identificar elementos extremos?
 - ▶ Tome um subconjunto qualquer $t \in \mathcal{P}(T)$

Exemplo

Elementos extremos

- ▶ Considere o *poset* $(\mathbb{Z}^+, |)$. É possível identificar elementos extremos?
 - ▶ Como o *poset* tende a $+\infty$, não existem elementos maximais e máximo
 - ▶ $\perp = 1$, pois $1 \mid n, \forall n \in \mathbb{Z}^+$
- ▶ Considere o *poset* $(\mathcal{P}(T), \subseteq)$. É possível identificar elementos extremos?
 - ▶ Tome um subconjunto qualquer $t \in \mathcal{P}(T)$
 - ▶ Observe que $\emptyset \subseteq t$, e portanto $\perp = \emptyset$

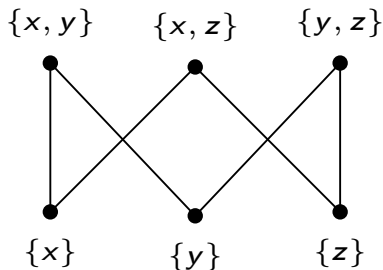
Exemplo

Elementos extremos

- ▶ Considere o *poset* $(\mathbb{Z}^+, |)$. É possível identificar elementos extremos?
 - ▶ Como o *poset* tende a $+\infty$, não existem elementos maximais e máximo
 - ▶ $\perp = 1$, pois $1 \mid n, \forall n \in \mathbb{Z}^+$
- ▶ Considere o *poset* $(\mathcal{P}(T), \subseteq)$. É possível identificar elementos extremos?
 - ▶ Tome um subconjunto qualquer $t \in \mathcal{P}(T)$
 - ▶ Observe que $\emptyset \subseteq t$, e portanto $\perp = \emptyset$
 - ▶ Da mesma maneira, $t \subseteq T$, e portanto $\top = T$

Exemplo

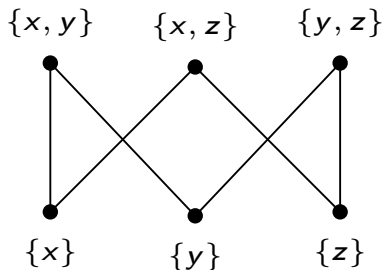
Elementos extremos



- Considere o diagrama de Hasse acima. É possível identificar elementos extremos?

Exemplo

Elementos extremos



- Considere o diagrama de Hasse acima. É possível identificar elementos extremos?
- $S_{\min} = \{\{x\}, \{y\}, \{z\}\}$, $S_{\max} = \{\{x, y\}, \{x, z\}, \{y, z\}\}$

Subconjuntos de *posets*

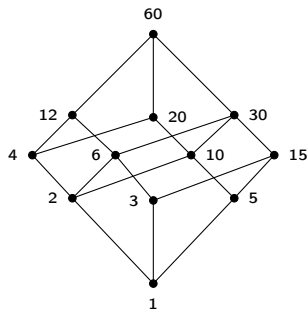
- ▶ Em um *poset* qualquer (S, \preceq) , a relação é preservada para todos os subconjuntos de S
- ▶ Elementos extremos para estes subconjuntos têm nomes especiais
 - ▶ Tome um subconjunto $K \subseteq S$ e elemento $x \in S$ quaisquer
 - ▶ x está na **cota superior** de K se $k \preceq x, \forall k \in K$, e na **cota inferior** de K se $x \preceq k, \forall k \in K$
 - ▶ Não existe notação definida para as cotas de K em relação à S

Elementos extremos em cotas

- ▶ Dentro da cota superior para um subconjunto de um *poset*, pode existir um elemento mínimo neste, e este é chamado de **menor cota superior**, ou ínfimo — $\inf(K)$
- ▶ Analogamente, pode existir um elemento máximo na cota inferior, chamado de **maior cota inferior**, ou supremo — $\sup(K)$
- ▶ Se $\inf(K)$ existe e pertence a K , então é um elemento minimal ou mínimo de K , e de maneira dual, $\sup(K)$ é um elemento maximal ou máximo de K

Exemplo

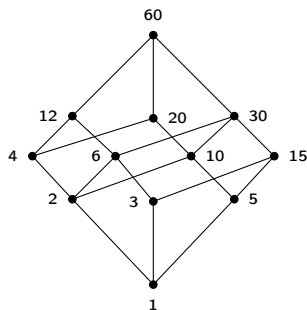
Elementos extremos em cotas



- Considere o *poset* de divisores de 60 e $K = \{6, 15\}$

Exemplo

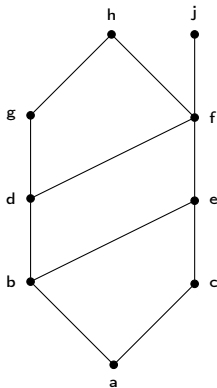
Elementos extremos em cotas



- Considere o *poset* de divisores de 60 e $K = \{6, 15\}$
 - A cota superior é $\{30, 60\}$, a cota inferior é $\{1, 3\}$,
 $\inf(K) = 3$ e $\sup(K) = 30$

Exemplo

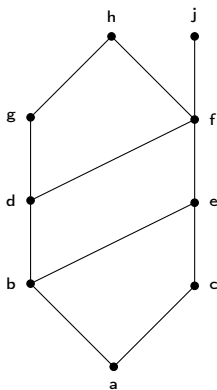
Elementos extremos em cotas



- Considere o *poset* acima e $K = \{a, c, d, f\}$

Exemplo

Elementos extremos em cotas



- Considere o *poset* acima e $K = \{a, c, d, f\}$
 - A cota superior é $\{f, h, j\}$, a cota inferior é $\{a\}$,
 $\inf(K) = f$ e $\sup(K) = a$

Material de estudo



K. H. Rosen.

Discrete Mathematics and Its Applications.

7th edition, 2011.

- ▶ Leitura das páginas 618-626 e resolução dos exercícios 1-2, 5-6, 9-11, 13-16, 18, 20-25, 32-35