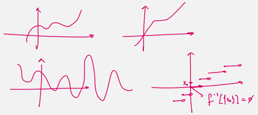
3. Niech $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Udowodnij, że istnieje $x \in \mathbb{R}$ takie, że w zbiorze $f^{-1}[\{x\}]$ nie zawiera się żaden odcinek (a,b), $a,b \in \mathbb{R}$, $a<b$.
Wskazówka: $|\mathbb{R}| > |\mathbb{N}| = |\mathbb{Q}|$, *więc nie istnieje funkcja różnowartościowa* $\mathbb{R} \to \mathbb{Q}$.

Musimy pokazać, że dla każdej funkcji $R \to R$, istnieje taka jej, że na jej wysokości funkcja nie jest stała na żadnym odcinku.



Teza: $\underset{y_0 \in R}{\exists} \ \underset{\substack{a,b \in R \\ a<b}}{\forall} \ (a,b) \notin f^{-1}[\{y_0\}]$

Dowód: Przez sprzeczność:

$(\sim T)$ $\neg \underset{y_0 \in R}{\exists} \ \underset{\substack{a,b \in R \\ a<b}}{\forall} \ (a,b) \notin f^{-1}[\{y_0\}]$

$\Leftrightarrow \underset{y_0 \in R}{\forall} \ \underset{\substack{a,b \in R \\ a<b}}{\exists} \ (a,b) \in f^{-1}[\{y_0\}]$

Na ile maksymalnie przedziałów możemy podzielić prostą R? → Naszą dziedzinę

Załóżmy, że mamy dany zbiór przedziałów z R
$\hookrightarrow \{(a,b)\} \Leftarrow$ parami rozłącznych bo tylko na takie możemy podzielić dziedzinę

Weźmy funkcję $F: \{(a,b)\} \to \mathbb{Q}$ — to nie jest poprawna funkcja na prawo → alternatywna funkcja

$F((a,b)) = rand\{q : q \in (a,b)\}$

Idea jest taka, że funkcja zwraca wartość wymierną z tego przedziału (pomiędzy 2 liczbami rzeczywistymi na pewno się wartość wymierna znajdzie)

0,17... — 0,23... / ·100 → q z tego przedziału

Ta funkcja jest różnowartościowa

$|\{(a,b)\}| \le |\mathbb{Q}|$

Parami rozłącznych przedziałów jest co najwyżej przeliczalnie wiele. Można je poindeksować liczbami naturalnymi

Niech zatem $F((a,b)_i) = q_i$, $i \in N$

Przedstawiam algorytm takiej funkcji:

$\acute{s}r = $ ⌴ , ⌴ — może być wymierne albo niewymierne

↓ koniec się nie kończy

$\acute{s}r = $ ⌴ , ⌴ | Ucinamy w pewnym momencie! w jakim?

W takim, że liczba $\acute{s}r \in (a,b)$, a gdybyśmy ucięli o jedno miejsce wcześniej to jeszcze by nie należała!

Niech te przedziały spełniają warunek $(\sim T)$ → to są przedziały na których jest stała $f: R \to R$

To znaczy, że $f[(a,b)_i] = \{y_i\}$, $y_i \in R$, $i \in N$

$\underset{y_0 \in R}{\forall} \ \underset{\substack{a,b \in R \\ a<b}}{\exists} \ (a,b) \in f^{-1}[\{y_0\}]$

$$f\Big[\bigcup_{i \in N} (a,b)_i\Big] = \underbrace{\bigcup_{i \in N} \{y_i\}}_{\text{przeliczalne}}$$

$\underset{i \in N}{\forall} \ f^{-1}[\{y_i\}] = (a,b)_i \cup \dots$ (być może coś jeszcze)

A co jeśli weźmiemy $y \in R$, taki że $y \notin \bigcup_{i \in N} \{y_i\}$?

Na mocy $(\sim T)$ istnieje jakiś przedział $(a,b)_j$ jest zawarty w $f^{-1}[\{y\}]$. Czyli $f^{-1}[\{y\}] = \underbrace{(a,b)_j \cup \dots}$

Ale $f[(a,b)_j \cup \dots] = y_i$ oraz $f[(a,b)_j \cup \dots] = y$

$y = y_j$ sprzeczność z założeniem, że $y \notin \bigcup_{i \in N} \{y_i\}$, bo $y_j \in \bigcup_{i \in N} \{y_j\}$