1. Wykaż, że rodzina

$$\{X \subseteq \mathbb{N} : (\exists_{m\in\mathbb{N}} \forall_{n\geq m} 3n \notin X) \wedge (\exists_{k\in\mathbb{N}} \forall_{n>k} \{3n+1, 3n+2\} \subseteq X)\}$$

jest równoliczna ze zbiorem liczb naturalnych.

$$\{X \subseteq N : (\exists_{m\in N} \forall_{n\geq m} 3n \in X) \wedge (\exists_{k\in N} \forall_{n>k} \{3n+1, 3n+2\} \subseteq X)\}$$

$\exists_{m\in N} \forall_{n\geq m} 3n \notin X$ istnieje element powyżej którego nie ma wielokrotności 3

$\exists_{k\in N} \forall_{n>k} \{3n+1, 3n+2\}$ istnieje element powyżej którego znajdują się liczby dające przy dzieleniu przez 3 resztę 1 i resztę 2

$\max\{m,k\}$ $\quad \forall_{n>\max\{m,k\}}$ ogon jest zdeterminowany

$0, 1, 2, \dots, \max\{m,k\}$

$\downarrow 3$

$0, 1, 2, \dots, 3\max\{m,k\}$ – te liczby naturalne potencjalnie mogą się znaleźć w zbiorze $X_{m,k}$ (w jednym ze zbiorów) a powyżej $3\max\{m,k\}$ już wiemy które są dalej

ten zapis jest potoczny $X_{m,k}$

$\{1, 2, 3, \underline{90}, \underline{\underline{124}}, 125, 127, 128, 130, 131, \dots\}$

$\underline{m = 31}$

$\underline{\underline{k = 40}}$

jest to jeden z przykładów zbiorów

Ile jest zbiorów o ustalonych m i k, gdzie m i k są najmniejsze możliwe?

$$|\{X_{m,k}\}| \leq 2^{3\max\{m,k\}} < \infty$$

Zamiast $X_{m,k}$ piszemy $X_{3\max\{m,k\}}$

indeksujemy tymi wartościami

Zamiast $\{X_{m,k}\}$ piszemy $\{X_{3\max\{m,k\}}\}$

$$\mathcal{X} = \{X_{3\max\{m,k\}=0}\} \cup \{X_{3\max\{m,k\}=3}\} \cup \{X_{3\max\{m,k\}=6}\} \cup \dots$$

moc tego jest skończona $\qquad < \infty \qquad < \infty$

One są parami rozłączne

$\{X_{3\max\{m,k\}=0}\} \ni \{1, 2, 4, 5, 7, 8, \dots\}$

$\{X_{3\max\{m,k\}=3}\} \ni \{0, 2, 4, 5, 7, 8, \dots\}$

$$|\mathcal{X}| = |\underbrace{\{X_{3\max\{m,k\}=0}\}}_{<\aleph_0}| + |\underbrace{\{X_{3\max\{m,k\}=3}\}}_{<\aleph_0}| + \dots = \aleph_0 = |N|$$

Suma przeliczalnie wielu parami rozłącznych zbiorów skończonych

$$\mathcal{X} = \bigcup_{\max\{m,k\}\in N} \{X_{3\max\{m,k\}}\}$$