3. Niech $A_{n,m} = \{x \in \mathbb{R} : n-2 \le x < m+n+1\}$ dla $n, m \in \mathbb{N}$. Znajdź $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{m\in\mathbb{N}} A_{n,m}$ oraz $\bigcup_{m\in\mathbb{N}} \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_{n,m}$. Przeprowadź odpowiednie dowody przedstawionych wyników.

$A_{n,m} = \{x \in \mathbb{R} : n-2 \le x < m+n+1\}$

$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{m\in\mathbb{N}} A_{n,m}$ Badam zachowanie:

$n=0$, $m=0$: $\bigcap_{m\in\mathbb{N}} A_{0,m}$: $A_{0,0} = \langle -2, 1)$; $m=1$: $A_{0,1} = \langle -2, 2)$; $m=2$: $A_{0,2} = \langle -2, 3)$; $m=3$: $A_{0,3} = \langle -2, 4)$

$\bigcap_{m\in\mathbb{N}} A_{0,m} = \langle -2, 1)$

$n=1$, $m=0$: $\bigcap_{m\in\mathbb{N}} A_{1,m}$: $A_{1,0} = \langle -1, 2)$, $A_{1,1} = \langle -1, 3)$, $A_{1,2} = \langle -1, 4)$, $A_{1,3} = \langle -1, 5)$, $A_{1,4} = \langle -1, 6)$

$\bigcap_{m\in\mathbb{N}} A_{1,m} = \langle -1, 2)$

$n=2$, $m=0$: $\bigcap_{m\in\mathbb{N}} A_{2,m}$: $A_{2,0} = \langle 0, 3)$, $A_{2,1} = \langle 0, 4)$, $A_{2,2} = \langle 0, 5)$, $A_{2,3} = \langle 0, 6)$, $A_{2,4} = \langle 0, 7)$

$\bigcap_{m\in\mathbb{N}} A_{2,m} = \langle 0, 3)$

$A_{n,m} = \{x \in \mathbb{R} : n-2 \le x < m+n+1\}$

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{m\in\mathbb{N}} A_{n,m} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{m\in\mathbb{N}} \{x \in \mathbb{R} : n-2 \le x < m+n+1\} =$$
$$= \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{m\in\mathbb{N}} \langle n-2, m+n+1)$$

wypada pokazać $n-2 < m+n+1 \quad /-n$

$-2 < \underbrace{m+1}_{\geq 0}$ ✓

Ustalamy $n_0 \in \mathbb{N}$:

$$\bigcap_{m\in\mathbb{N}} \langle \underbrace{n_0-2}_{\text{stała}}, m+\underbrace{n_0+1}_{\text{stała}}) = \langle n_0-2, n_0+1)$$

$m \to +\infty$, $\to +\infty$

$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \langle n-2, n+1) = \langle -2, \infty)$

min? dla $n=0$: $n-2=-2$; max? $n \to +\infty$: $\infty$

1° Pokażemy, że $\forall_{x \in \langle -2, \infty)} \exists_{n_0} \; x \in \langle n_0-2, n_0+1)$

$x \geq n_0 - 2 \wedge x < n_0+1$

$n_0 \le x+2 \wedge n_0 > x-1$

$n_0 \in (x-1, x+2\rangle$

Pytanie: czy w tym przedziale da się znaleźć liczbę naturalną? $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{m\in\mathbb{N}} A_{n,m} = \langle -2, +\infty)$

TAK! bo $\forall_{x\in\langle -2, +\infty)}$ należą dokładnie 3 liczby całkowite i zarazem gdy $x < -2$ to $0 \in (-3, 0\rangle$

(najbardziej pesymistyczny przypadek)

2°. Pokażemy, że:

$\forall_{x \notin \langle -2, \infty)} \neg \exists_{n_0} \; x \in \langle n_0-2, n_0+1)$

$x \in (-\infty, -2)$

$x > n_0 - 2 \quad \wedge \quad x < n_0+1$

$n_0 < x+2 \quad \quad x-1 < n_0$

$n_0 < \underbrace{x+2}_{<0} \quad \emptyset$ spełnione dla każdego

nie ma takiego $n_0$

jednak koniunkcja nie jest spełniona

$\bigcup_{m\in\mathbb{N}} \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_{n,m}$. $A_{n,m} = \{x \in \mathbb{R} : n-2 \le x < m+n+1\}$

Ustalamy $m \in N$

Badam zachowanie:

$m=0$, $n=0$

$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_{n,0}$: $A_{0,0} = \langle -2, 1)$, $A_{1,0} = \langle -1, 2)$, $A_{2,0} = \langle 0, 3)$, $A_{3,0} = \langle 1, 4)$, $A_{4,0} = \langle 2, 5)$

$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_{n,0} = \emptyset$

Załóżmy, że $x \in \bigcup_{m\in\mathbb{N}} \bigcap_{n\in N} A_{n,m} \iff \exists_{m\in N} \forall_{n\in N} x \in A_{n,m} \iff \exists_{m\in N} \forall_{n\in N} n-2 \le x < m+n+1$

Niech takim $m$ będzie ustalone $m_0$

wówczas $\forall_{n\in\mathbb{N}} x \in \langle n-2, m_0+n+1\rangle$

wystarczy rozpatrywać $x \geq -2$

Chcemy pokazać, że $\exists_{n\in\mathbb{N}} x \notin \langle n-2, m_0+n+1\rangle$

Może to być np. $n_0 = \lfloor x+3 \rfloor$

$x \in \langle \lfloor x+3 \rfloor - 2, m_0 + 1 + \lfloor x+3 \rfloor)$

Czyli $x \notin \ldots$ $\geq \lfloor x+1 \rfloor$ sprzeczność