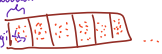
2. Znajdź moc zbioru ilorazowego relacji ~ zdefiniowanej w poprzednim zadaniu.

$Y \subset \mathbb{Z}^N \times \mathbb{Z}^N$ $\qquad \sim \subseteq (\mathbb{Z}^N)^2$

$\mathbb{Z}^N/_\sim$ – oznaczenie zbioru ilorazowego

Ile jest klas abstrakcji

w ramach jednej klasy abstrakcji tworzy się graf pełny



Niech $\sim \subseteq (\mathbb{Z}^N)^2$ będzie zdefiniowane następująco $f \sim g \Leftrightarrow \forall_n |f(n)| = |g(n)|$ (pionowe kreski oznaczają tu moduły). Udowodnij, że ~ jest relacją równoważności.

$\mathbb{Z}^N \qquad f: N \to \mathbb{Z}$

Ile mamy takich funkcji

$|\mathbb{Z}|\,|\mathbb{Z}|\,|\mathbb{Z}|\,|\mathbb{Z}|\,|\mathbb{Z}|\,|\mathbb{Z}|\,|\mathbb{Z}|\,|\mathbb{Z}| \ldots$

$\uparrow\ \uparrow\ \uparrow\ \uparrow\ \uparrow\ \uparrow\ \uparrow\ \uparrow$

$0\ 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7$

$\underbrace{\aleph_0^{\aleph_0} = \mathfrak{c}}$

Przykładowe klasy abstrakcji: $\qquad \{0,1\}^N$

Przykładowo weźmy ciąg stały

$f: \langle 1,1,1,1,1,\ldots \rangle$ $\qquad |[f]_\sim| = \mathfrak{c}$

$g: \langle -1,-1,-1,-1,-1,\ldots \rangle \quad \langle 1,-1,-1,-1,\ldots \rangle \quad \langle -1,1,-1,-1,\ldots \rangle$

Inny przykład ciągu

$f: \langle 0,0,0,\ldots \rangle$ $\qquad |[f]_\sim| = 1$

$g: \langle 0,0,0,\ldots \rangle$ $\qquad f \sim g$

Inny przykład: tworzymy ciągi przez dodawanie 1 jedynki do ciągu 0

$f: \langle 1,0,0,0,0,\ldots \rangle$

$g: \langle 1,0,0,0,0,\ldots \rangle \qquad g: \langle -1,0,0,0,0,\ldots \rangle$ $\Rightarrow$ to jest jedna klasa

co gdy zmienimy miejsce 1

$f: \langle 0,1,0,0,0,\ldots \rangle$

$g: \langle 0,1,0,0,0,\ldots \rangle \qquad \langle 0,-1,0,0,0,\ldots \rangle$ $\Rightarrow$ mamy kolejną klasę abstrakcji

i tak dalej:

co gdy użyjemy 2 jedynek:

$f: \langle 1,1,0,0,0,\ldots \rangle$ $\qquad$ możemy utworzyć wszystkie ciągi binarne

$g: \langle 1,1,0,0,0,0,\ldots \rangle \quad \langle -1,1,0,0,0,0,\ldots \rangle$ $\Rightarrow$ jest to kolejna klasa abstrakcji

$\langle 1,-1,0,0,0,0,\ldots \rangle \quad \langle -1,-1,0,0,0,0,\ldots \rangle$

Zauważamy, że $\mathbb{Z}^N/_\sim$

Klas abstrakcji jest conajmniej tyle ile ciągów binarnych ze zbioru $\{0,1\}^N$

a przecież $|\{0,1\}^N| = \mathfrak{c}$

Wypadałoby pokazać, że rzeczywiście każdy taki ciąg binarny generuje inną klasę abstrakcji.

czyli dla dwóch $f,g \in \{0,1\}^N$, $f \neq g$

Mamy $[f]_\sim \neq [g]_\sim$.

Chcemy pokazać, że żaden inny ciąg binarny nie wpada do klasy abstrakcji generatora czyli tego ciągu

(czyli dla 2 osobnych ciągów binarnych mamy różne klasy abstrakcji)

3) Możliwości dowodu $\quad$ 2 kontrapozycji

I) $f \neq g \Rightarrow [f]_\sim \neq [g]_\sim$

II) $[f]_\sim = [g]_\sim \Rightarrow f = g \quad (f,g) \in \{0,1\}^N$

III) $f \neq g \wedge [f]_\sim = [g]_\sim \Rightarrow \perp$

2) Korzystamy z 2) (przy zał. $f,g \in \{0,1\}^N$) $\qquad$ zakładamy f,g są binarne

$[f]_\sim = [g]_\sim \Rightarrow f = g$

$[f]_\sim = \{f, g, b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n\} = [g]_\sim$

tak oznaczam ciągi binarne $\qquad f(n) \in \{0,1\}$ $\qquad$ pokazaliśmy że ciągi są równe

$\Downarrow$

$f \sim g \Leftrightarrow \forall_n |f(n)| = |g(n)|$

$f \sim g$ są w relacji $\Leftrightarrow \forall_{n \in N} |\underbrace{f(n)}_{\geq 0}| = |\underbrace{g(n)}_{\geq 0}| \Leftrightarrow \forall_{n \in N} f(n) = g(n) \Leftrightarrow f = g$

Pokazaliśmy, że: $|\mathbb{Z}^N/_\sim| = \mathfrak{c}$.

Ograniczenie górne $\qquad \mathbb{Z}^N \qquad f: N \to \mathbb{Z} \qquad |\mathbb{Z}^N| = |\mathbb{Z}|^{|N|} = \aleph_0^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$

Ile mamy takich funkcji

$|\mathbb{Z}|\,|\mathbb{Z}|\,|\mathbb{Z}|\,|\mathbb{Z}|\,|\mathbb{Z}|\,|\mathbb{Z}|\,|\mathbb{Z}|\,|\mathbb{Z}| \ldots$

$\uparrow\ \uparrow\ \uparrow\ \uparrow\ \uparrow\ \uparrow\ \uparrow\ \uparrow$

$0\ 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7$

$\underbrace{\aleph_0^{\aleph_0} = \mathfrak{c}}$