1. Niech $\sim \subseteq (\mathbb{Z}^{\mathbb{N}})^2$ będzie zdefiniowane następująco $f \sim g \Leftrightarrow \forall_n |f(n)| = |g(n)|$ (pionowe kreski oznaczają tu moduły). Udowodnij, że $\sim$ jest relacją równoważności.

$$f: \langle \overset{f(0)}{1}, \overset{f(1)}{-1}, \overset{f(2)}{2}, \overset{f(3)}{-2}, \ldots \rangle$$
$$g: \langle \overset{g(0)}{-1}, \overset{g(1)}{1}, \overset{g(2)}{-2}, \overset{g(3)}{-2}, \ldots \rangle \Rightarrow \forall_{n \in N} |f(n)| = |g(n)|$$
$$\Downarrow$$
$$\underbrace{f \sim g}$$

$\sim \subseteq (Z^N)^2$

$\underbrace{\sim \subseteq Z^N \times Z^N}_{\text{relacja binarna w zbiorze } f,g \in Z^N}$

1. Zwrotność:

$$\forall_{x \in X} (x,x) \in R$$

w naszym przypadku

$$\forall_{f \in Z^N} (f,f) \in \sim \Leftrightarrow \forall_{f \in Z^N} \underbrace{\forall_{n \in N} |f(n)| = |f(n)|}$$ spełnione!

2. Symetryczność

$$\forall_{x,y \in X} (x,y) \in R \Rightarrow (y,x) \in R$$

$$\forall_{f,g \in Z^N} (f,g) \in \sim \Rightarrow (g,f) \in \sim$$
$$\Downarrow \qquad \Downarrow$$
$$\forall_{f,g \in Z^N} \forall_{n \in N} |f(n)| = |g(n)| \Leftrightarrow \forall_{f,g \in Z^N} \forall_{n \in N} |g(n)| = |f(n)|$$ ✓

3. Przechodniość:

$$\forall_{x,y,z \in X} (x,y) \in R \wedge (y,z) \in R \Rightarrow (x,z) \in R$$

$x \to y \to z$

$$\forall_{f,g,h \in Z^N} \big(\underline{(f,g) \in \sim} \wedge (g,h) \in \sim \Rightarrow \underline{(f,h) \in \sim} \big)$$
$$\Updownarrow$$
przekształcamy równoważnie

$$\forall_{f,g,h \in Z^N} \Big[\underbrace{\forall_{n \in N} (|f(n)| = |g(n)|) \wedge \forall_{n \in N} (|g(n)| = |h(n)|)} \Rightarrow \forall_{n \in N} (|f(n)| = |h(n)|) \Big]$$
$$\Updownarrow$$
$$\forall_{f,g,h \in Z^N} \forall_{n \in N} \big(|f(n)| = |g(n)| \wedge |g(n)| = |h(n)| \Rightarrow |f(n)| = |h(n)| \big)$$

$\underbrace{\text{jest to prawda bo relacja "=" jest przechodnia}}$

Pokazaliśmy, że jest to relacja <u>równoważności</u>!

Inny Dowód:

Niech dane będą dowolne $f,g,h \in Z^N$ takie, że $(f,g) \in \sim$, $(g,h) \in \sim$

Pokażemy, że $(f,h) \in \sim$.

Założenie: $(f,g) \in \sim$, $(g,h) \in \sim$

$$\forall_{n \in N} |f(n)| = |g(n)|, \quad \forall_{n \in N} |g(n)| = |h(n)|$$

Teza:

$$\underbrace{\forall_{n \in N} |f(n)| = |h(n)|}$$

Weźmy dowolne ustalone $n_0 \in N$

Wówczas $|f(n_0)| = |g(n_0)|$ i $|g(n_0)| = |h(n_0)|$

Zatem z przechodniości relacji = mamy

$$\Downarrow$$
$$|f(n_0)| = |h(n_0)|$$

co wobec dowolności n_0 oznacza, że

$$\underbrace{\forall_{n \in N} |f(n)| = |h(n)|}$$

Co wobec dowolności f,g,h świadczy o <u>przechodniości relacji</u>!

Pokazaliśmy, że jest to relacja <u>równoważności</u>!