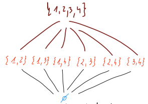
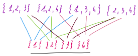
3. Czy porządek $\subseteq$ na $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ rozpatrywany w poprzednim zadaniu jest liniowy? Czy jest gęsty? Czy jest dobrze ufundowany? Czy jest kratą zupełną (każdy podzbiór ma kres dolny)? Czy jest porządkiem zupełnym (każdy niepusty ograniczony z dołu podzbiór ma kres dolny)?





Czy porządek jest liniowy? Rozważamy na $\mathcal{P}(N)$ rozszerza to naszą powyższą strukturę!

Nie jest to porządek liniowy bo niewszystkie elementy są ze sobą porównywalne $\forall$

np. $\{1,3\}$, $\{1,4\}$

- gęsty $\forall_{x,y \in X} \; (x < y \Rightarrow \exists_{z \in X} \; x < z < y)$

np. $x = \emptyset$, $y = \{1,2\}$ (kontrprzykład)

poprzednik zachodzi, następnik nie zachodzi

Nie jest gęsty

- dobrze ufundowany $\Leftrightarrow$ nie istnieje nieskończony ciąg zstępujący $a_0 > a_1 > a_2 > a_3 > \ldots$

$a_0 \supsetneq a_1 \supsetneq a_2 \supsetneq a_3 \supsetneq \ldots$

Jeżeli a_0 ma parzystą liczbę elementów, to ograniczeniem dolnym dowolnego takiego ciągu jest $\emptyset$

Jeżeli a_0 ma nieparzystą liczbę elementów, to ograniczeniem dolnym dowolnego takiego ciągu jest pewien singleton.

A zatem każdy ciąg zstępujący ma ograniczenie, dolne czyli musi być skończony.

Ta relacja jest dobrze ufundowana

$A = \{\emptyset, \{1\}\}$

Czy istnieje $\inf A$? Nie

Nie są niczym wspólnym ograniczone od dołu.

Dlatego $\langle \mathcal{P}(N), \subseteq \rangle$ nie jest kratą zupełną

Czy jest porządkiem zupełnym (każdy niepusty ograniczony z dołu podzbiór ma kres dolny)

jeżeli ma ograniczenie dolne to ma kres dolny

Niech $(X, \leqslant)$ będzie porządkiem częściowym.

- Niepusty podzbiór $Y \subseteq X$ jest **skierowany** jeśli każde dwa elementy zbioru Y mają wspólne ograniczenie górne w tym zbiorze.
- Powiemy, że porządek $(X, \leqslant)$ jest **zupełny** jeśli ma on element najmniejszy oraz każdy podzbiór skierowany ma kres górny.

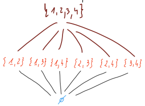
Niech A będzie dowolnym ograniczonym z dołu podzbiorem $\langle \mathcal{P}(N), \subseteq \rangle$

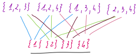
Hipoteza:

$\bigcap A = \inf A$ to zachodzi dla dowolnej kraty z $\wedge, \vee$ / $\cap$, $\cup$

Każde z 2 składowych naszej kraty, jest kratą z $\wedge, \vee$. Trzeba by pokazać, że wszystkie ograniczone z dołu podzbiory muszą być w całości albo w jednej albo w drugiej składowej.

Istotnie tak musi być, bo gdyby w zbiorze A znajdowały się elementy z dwóch różnych składowych to nie istniałoby ograniczenie dolne zbioru A. $\square$





Relacja jest porządkiem zupełnym