2. Jaka jest moc zbioru $Y = \{\langle a,b\rangle \in \mathbb{R}^2 : (a+b)^2 \notin \mathbb{Q} \land (a-b)^2 \notin \mathbb{Q}\}$?

$|X| = \aleph_0$

$Y = \{\langle a,b\rangle \in \mathbb{R}^2 : (a+b)^2 \notin \mathbb{Q} \land (a-b)^2 \notin \mathbb{Q}\}$?

Niech $V \overset{def}{:=} \underbrace{\mathbb{R} \setminus X}_{X'} \sim$ z zadania ①

$Y_1 = \{\langle a,b\rangle \in \mathbb{R}^2 : a = 0,\ b \in V\}$

Definiujemy zbiór par taki, że
$Y_1 = \{\langle a,b\rangle \in \mathbb{R}^2 : a = 0,\ b \in V\}$

$\longrightarrow |\mathbb{R}| = |\mathbb{R} \setminus X| = \mathfrak{C}$

$\mathfrak{C} - \aleph_0 = \mathfrak{C}$

to jest inaczej $\mathbb{R} \cap X' \sim$

dopełnienie musi być mocy Continuum

$X \cup X' = \mathbb{R}$

Teza:

(1) $Y_1 \subseteq Y$

(2) $|Y_1| = \mathfrak{C}$

dowód $|Y_1| = |V| = |X'| = |\mathfrak{C}|$

$X \subset \mathbb{R}$ $\quad \mathbb{R} \cap X'$

$|X| \leq |\mathbb{R}|$ $\quad |X \cup X'| = |\mathbb{R}|$

wobec tego skoro moc $|X| = |\mathbb{N}| = \aleph_0$

to moc $|X'| = \mathfrak{C}$

bo gdyby nie była to zbiór X i X' jako jego dopełnienie są rozłączne, a skoro sumujemy zbiory rozłączne to moc ich sumy jest równa sumie mocy tych zbiorów co w rezultacie dałoby nam $\aleph_0$ ↯ sprzeczność

Jeśli tak będzie to $|Y|$ to również będzie $\mathfrak{C}$ skoro jest on podzbiorem $\mathbb{R}^2$!

Ad (1)

$\langle a,b\rangle \in Y_1 \Rightarrow \langle a,b\rangle \in Y$

$(0+b)^2 \notin \mathbb{Q} \land (0-b)^2 \notin \mathbb{Q}$

Niech $\langle a,b\rangle \in Y_1$

Wówczas $a = 0,\ b \in V \Rightarrow b \notin X \Rightarrow b^2 \notin \mathbb{Q}$

$$\left.\begin{aligned}(a+b)^2 &= b^2 \notin \mathbb{Q}\\ (a-b)^2 &= b^2 \notin \mathbb{Q}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \langle a,b\rangle \in Y$$

Zatem: $Y_1 \subseteq Y$ ✓ $\quad |Y_1| = |X'| = |\mathbb{R}|$

$\mathfrak{C} = |Y_1| \leq |Y| \leq |\mathbb{R}^2| = \mathfrak{C}^2 = \mathfrak{C}$

$\Downarrow$

Odpowiedź: $|Y| = \mathfrak{C}$