2. Niech $\sqsubseteq$ będzie relacją zadaną na $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, w taki sposób, że $A \sqsubseteq B$, jeśli $A \subseteq B$ oraz $B \setminus A$ jest skończonym zbiorem o parzystej liczbie elementów.

a) Udowodnij, że $\sqsubseteq$ jest porządkiem częściowym na $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.

b) Narysuj diagram Hassego porządku $\mathcal{P}(\{0,1,2,3\}), \sqsubseteq$. Znajdź elementy minimalne, maksymalne, największe i najmniejsze (o ile istnieją).

c) Znajdź (o ile istnieją) sup oraz inf zbioru $\{\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2,3\}\}$ w powyższym porządku.

a) Porządek częściowy a więc relacja musi być zwrotna, antysymetryczna przechodnia:

Czy zwrotna?

$\forall_{x \in X} \; (x,x) \in R$

$\forall_{A \in P(N)} (A,A) \in R$ jeśli $\Rightarrow A \subseteq A \wedge |A \setminus A| = 2n, \; n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow \underbrace{A \subseteq A \wedge 0 = 2n}_{\text{spełnione}}$

1 1

jest zwrotna

Czy jest antysymetryczna: $xRy \wedge yRx \Rightarrow x = y$

prawo symplifikacji

$\dfrac{p \wedge q}{p}$

$\forall_{A,B \in P(N)} (A,B) \in R \wedge (B,A) \in R \Rightarrow A = B$

$(A,B) \in R \Leftrightarrow \underline{A \subseteq B} \wedge \exists_{n \in N} |B \setminus A| = 2n$

$(B,A) \in R \Leftrightarrow \underline{B \subseteq A} \wedge \exists_{m \in N} |A \setminus B| = 2m$ $\Rightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A \Leftrightarrow A = B$

$(A,B) \in R \wedge (B,A) \in R \Leftrightarrow (\underline{A \subseteq B} \wedge \exists_{n \in N} |B \setminus A| = 2n) \wedge (\underline{B \subseteq A} \wedge \exists_{m \in N} |A \setminus B| = 2m)$

$\Leftrightarrow A \subseteq B \wedge \exists_{n \in N} |B \setminus A| = 2n \wedge B \subseteq A \wedge \exists_{m \in N} |A \setminus B| = 2m$

prawo symplifikacji:

$\Leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A \Leftrightarrow A = B$

jest antysymetryczna

Czy przechodnia:

$\forall_{A,B,C \in P(N)} (A,B) \in R \wedge (B,C) \in R \Rightarrow \underline{(A,C) \in R}$

$(A,B) \in R \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge \exists_{n \in N} |B \setminus A| = 2n$ $\quad (A,C) \in R \Leftrightarrow A \subseteq C \wedge \exists_{k} |C \setminus A| = 2k$

$(B,C) \in R \Leftrightarrow B \subseteq C \wedge \exists_{m \in N} |C \setminus B| = 2m$

$A \subseteq B \wedge \exists_{n \in N} |B \setminus A| = 2n \wedge B \subseteq C \wedge \exists_{m \in N} |C \setminus B| = 2m$

$A \subseteq B \subseteq C$ a więc $\underline{A \subseteq C}$

$\Rightarrow A \subseteq C \wedge \exists_{n \in N} |B \setminus A| = 2n \wedge \exists_{m \in N} |C \setminus B| = 2m \Rightarrow A \subseteq C \wedge \exists_{k \in N} |C \setminus A| = 2k$

$\exists_{k} |C \setminus A| = 2k$

Czyli przypadkiem

$(C \setminus A) = (C \setminus B) \cup (B \setminus A) = (C \cap B') \cup (B \cap A') = ((C \cap B') \cup B) \cap ((C \cap B') \cup A') =$

rozłączne?

$= ((C \cup B) \cap (B' \cup B) \cap (C \cup A') \cap (B' \cup A'))$

$= (C \cup B) \cap (C \cup A') \cap (B' \cup A')$

$A \subseteq B$
$B' \subseteq A'$

$B \subseteq C$

$(C \setminus B) \cap (B \setminus A) = (C \cap B') \cap (B \cap A')$

$= C \cap B' \cap B \cap A' = \emptyset$

są rozłączne

$= \underbrace{C \cap (C \cup A')}_{C \subseteq C \cup A'} \cap (B' \cup A') = C \cap \underbrace{(B' \cup A')}_{B' \subseteq A'} = C \cap A' = C \setminus A$ ✓

Pokazaliśmy, że suma dwóch rozłącznych zbiorów $C \setminus B$ i $B \setminus A$ daje zbiór $C \setminus A$

$(C \setminus B) \cup (B \setminus A) = C \setminus A$

$|(C \setminus B) \cup (B \setminus A)| = |C \setminus A|$

$|(C \setminus B)| + |(B \setminus A)| = |C \setminus A|$

$2m + 2n = |C \setminus A|$

$|C \setminus A| = \underbrace{2(m+n)}_{k \in N}$

$\exists_{k \in N} |C \setminus A| = 2k$

relacja jest zwrotna antysymetryczna i przechodnia, czyli jest relacją częściowego porządku