1. Udowodnij, że funkcja $f:\mathcal{P}(A)^B \to \mathcal{P}(A\times B)$ taka, że dla każdego $\varphi: B\to\mathcal{P}(A)$,

$$f(\varphi) = \{(a,b)\in A\times B : a\in\varphi(b)\}$$

jest bijekcją.

Własności funkcji $f: A\to B$

powiemy, że funkcja jest **1-1** (różnowartościowa, injekcją, mono), jeśli

$$\forall_{a,a'\in A}\forall_{b\in B}(f(a)=b\wedge f(a')=b\Rightarrow a=a')$$

$$\forall_{\varphi(x),\psi(x)\in\mathcal{P}(A)^B} f(\varphi)=f(\psi) \Rightarrow \varphi=\psi$$

$$f(\varphi) = \underline{\{\langle a,b\rangle\in A\times B : a\in\varphi(b)\}}$$

$$f(\psi) = \underline{\{\langle a,b\rangle\in A\times B : a\in\psi(b)\}}$$

$$\{\langle a,b\rangle\in A\times B . a\in\varphi(b)\} = \{\langle a,b\rangle\in A\times B : a\in\psi(b)\}$$

Dowód 1-1: Załóżmy, że $f(\varphi)=f(\psi)$.
Chcemy pokazać, że $\varphi=\psi$, czyli w zasadzie, że $\forall_{b\in B}\ \varphi(b)=\psi(b)$

z tego zbioru bierzemy wszystkie takie pary

Ustalamy dowolne $b_0\in B$

Rozpatrujemy $A_\varphi(b_0)=\{a\in A : \langle a,b_0\rangle\in f(\varphi)\}$

tak nazywamy zbiory wybranych ⓐ które są w relacji z b_0

$$A_\psi(b_0)=\{a\in A : \langle a,b_0\rangle\in f(\psi)\}$$
$$a\in\psi(b_0)$$

$\{\langle a_1,b_0\rangle,\langle a_2,b_0\rangle\ldots\}$

Ponieważ założyliśmy, że $f(\varphi)=f(\psi)$ (żeby udowodnić 1-1)
Dla ustalonego b_0:

$$\{\langle a,b\rangle\in f(\varphi) : b=b_0\} = \{\langle a,b\rangle\in f(\psi) : b=b_0\}$$

to $\quad A_\varphi(b_0)=A_\psi(b_0)$

$$\forall_{a\in A}\ \langle a,b_0\rangle\in f(\varphi) \Leftrightarrow \langle a,b_0\rangle\in f(\psi)$$

Na mocy definicji funkcji f

$$\forall_{a\in A}\ a\in\varphi(b_0)\Leftrightarrow a\in\psi(b_0)$$

$$\varphi(b_0)=\psi(b_0)$$

Wobec dowolności $b_0\in B$ możemy stwierdzić, że

$$\forall_{b\in B}\ \varphi(b)=\psi(b), \text{ czyli } \varphi=\psi \quad \square_{1-1}$$

Dowód „na":
Mamy dane zbiory A, B. Weźmy dowolny element $\mathcal{U}\in\mathcal{P}(A\times B)$, $\mathcal{U}\neq\emptyset$.
Jak skonstruować funkcję $\varphi: B\to\mathcal{P}(A)$, żeby $f(\varphi)=\mathcal{U}$?

$\mathcal{U}=\{\langle a,b\rangle\}_{i\in I}=\{\langle a_i,b_i\rangle\}_{i\in I}$ – indeksowanie okazało się nie być potrzebne

$$f(\varphi)=\{\langle a,b\rangle : a\in\varphi(b)\}, \quad \varphi: B\to\mathcal{P}(A)$$

Chcemy zrobić tak, żeby $a_i\in\varphi(b_i)$

Propozycja:

$$\varphi_u(b)=\{a\in A : \langle a,b\rangle\in\mathcal{U}\}\underset{\in\mathcal{P}(A)}{\subseteq} A \ \checkmark$$

sprawdzone że A jest dobrze zdefiniowane

$\varphi_u: B\to\mathcal{P}(A)$
$b\mapsto A_{\varphi_u}(b)$

zbiór wszystkich a które są w relacji z b

$$f(\varphi)=\{\langle a,b\rangle : a\in\varphi(b)\}$$

Chcemy pokazać, że $\quad \mathcal{U}=f(\varphi_u)$

$$\forall_{\langle a,b\rangle\in A\times B}\ \langle a,b\rangle\in\mathcal{U}\Leftrightarrow\langle a,b\rangle\in f(\varphi_u)$$
$$a_0\in A_{\varphi_u}(b)$$

$\Leftarrow$) Niech dowolna $\langle a_0,b_0\rangle\in f(\varphi_u)\Rightarrow a_0\in\varphi(b_0)\Rightarrow a_0\in\{a\in A : \langle a,b_0\rangle\in\mathcal{U}\}\Rightarrow\langle a_0,b_0\rangle\in\mathcal{U}$

$\Rightarrow$) Powyższe implikacje możemy zamienić na równoważności, więc $\langle a_0,b_0\rangle\in f(\varphi)\Leftrightarrow\langle a_0,b_0\rangle\in\mathcal{U}$

zatem wobec dowolności pary $\langle a_0,b_0\rangle$

$$f(\varphi_u)=\mathcal{U}$$

Zauważamy, że wszystko jest równoważne oraz dobrze zdefiniowane,
gdyby $\mathcal{U}=\emptyset$, to wówczas $\forall_{b\in B}\ \varphi_u(b)\overset{\in\mathcal{P}(A)}{=}\emptyset$ i w konsekwencji $f(\varphi_u)=\emptyset$

$$\mathcal{U}=\emptyset=f(\varphi_u)$$

Ostatecznie pokazaliśmy, więc wprost (poprzez skonstruowanie), że funkcja φ_u:

$$\forall_{\mathcal{U}\in\mathcal{P}(A\times B)}\ \exists_{\varphi_u: B\to\mathcal{P}(A)}\ f(\varphi_u)=\mathcal{U}$$

$\varphi_u: B\to\mathcal{P}(A) \Updownarrow \varphi_u\in\mathcal{P}(A)^B \Updownarrow \varphi_u\in D_f$

czyli f jest surjekcją $\square$ „na"

Zatem f jest bijekcją