3. Znajdź moce poszczególnych klas abstrakcji relacji ~ zdefiniowanej w pierwszym zadaniu.

$[f] =$

$|[\langle 0,0,0,0,\dots\rangle]| = 1$

$|[\langle 1,0,0,0,\dots\rangle]| = 2^1$

bo z nim w relacji są $\langle 1,0,0,0,\dots\rangle$ i $\langle -1,0,0,0,\dots\rangle$

ogólna obserwacja
wraz ze wzrostem
występowania
jedynek w ciągu
wzrasta liczba elementów
klasy abstrakcji otrzymywanej
dla tego ciągu

w zasadzie
dopuszczamy dowolne wartości
ale zasada pozostaje
ta sama!

Niech $\langle f\rangle$ będzie ciągiem z $\mathbb{Z}^N$ takim że tylko skończona liczba jego wyrazów jest różna od zera. Oznaczamy ją przez $0 \le m \le \infty$

Hipoteza: $|[\langle f\rangle]| = 2^m$

Niech $\mathcal{M} = \{n_1, n_2, \dots, n_m\}$ będzie zbiorem indeksów ciągu $\langle f\rangle$, dla których $f(n) \neq 0$

Jak zakodować wszystkie inne ciągi z klasy abstrakcji: $[\langle f\rangle]$?

Używając zbioru potęgowego $\mathcal{P}(\mathcal{M})$

np.
$f = \langle 1, \dots, 7, \dots, -4, \dots\rangle$
$n_1 = 0$, $n_2 = 2$, $n_3 = 4$

Weźmy dowolny $M \in \mathcal{P}(\mathcal{M})$

// np. $M = \{n_1, n_2\}$

Przyporządkowujemy

$$G : (*)\ M \mapsto g_M \in [\langle f\rangle]$$

przyporządkowujemy element z klasy abstrakcji

to są te indeksy w których nie zmieniamy znaku

$\mathcal{M}$

$\mathcal{M}'$

to są indeksy zerowych wyrazów

w następujący sposób

ciągi kodowane przez zbiór M

$$g_M(n) = \begin{cases} f(n) & \text{jeśli } n \in M \cup \mathcal{M}' \\ -f(n) & \text{jeśli } n \in \mathcal{M} \setminus M \end{cases}$$

(sprawdzone „w głowie", że na pewno $g_M \sim f$, czyli $g_M \in [\langle f\rangle]$)

Teza: Przyporządkowanie (*) jest bijektywne.

1) Różnowartościowość:

$$\forall_{x_1, x_2 \in X}\ f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

$$G : M \mapsto g_M \in [\langle f\rangle]$$

$$\forall_{M_1, M_2 \in \mathcal{P}(\mathcal{M})}\ G(M_1) = G(M_2) \overset{?}{\Rightarrow} M_1 = M_2$$

gdzie $\mathcal{M}$ to zbiór indeksów dla których wyrazy są niezerowe

$G(M_1) = G(M_2)$

$g_{M_1} = g_{M_2}$

skoro są równe to są równe w każdym punkcie

$$g_M(n) = \begin{cases} f(n) & \text{jeśli } n \in M \cup \mathcal{M}' \\ -f(n) & \text{jeśli } n \in \mathcal{M} \setminus M \end{cases}$$

$$\forall_{n \in N}\ g_{M_1}(n) = g_{M_2}(n)$$

$f(n) = f(n)$

zbiór indeksów wyrazów zerowych

$$g_{M_1}(n) = \begin{cases} f(n) & \text{jeśli } n \in M_1 \cup \mathcal{M}' \\ -f(n) & \text{jeśli } n \in \mathcal{M} \setminus M_1 \end{cases}$$

$$g_{M_2}(n) = \begin{cases} f(n) & \text{jeśli } n \in M_2 \cup \mathcal{M}' \\ -f(n) & \text{jeśli } n \in \mathcal{M} \setminus M_2 \end{cases}$$

Niech $n_0 \in N$ będzie dowolne ustalone

1° załóżmy, że $g_{M_1}(n_0) = f(n_0)$ i $f(n_0) \neq 0$

$\Updownarrow$

$g_{M_2}(n_0) = f(n_0)$, a zatem $n_0 \in M_1 \cup \mathcal{M}' \Leftrightarrow n_0 \in M_2 \cup \mathcal{M}'$ $\Rightarrow$ $M_1 \cup \mathcal{M}' = M_2 \cup \mathcal{M}' \ / \setminus \mathcal{M}'$

zauważamy że $M_1 \cap \mathcal{M}' = \emptyset$ $\quad M_2 \cap \mathcal{M}' = \emptyset$

$\Downarrow$

zatem $M_1 = M_2$

2° załóżmy, że $g_{M_1}(n_0) = -f(n_0)$ i $f(n_0) \neq 0$

$\Updownarrow$

$g_{M_2}(n_0) = -f(n_0)$, a zatem $n_0 \in \mathcal{M} \setminus M_1 \Leftrightarrow n_0 \in \mathcal{M} \setminus M_2$ $\Rightarrow$ $\mathcal{M} \setminus M_1 = \mathcal{M} \setminus M_2$

$\Updownarrow$

$M_1' = M_2'$

$\Updownarrow$

$M_1 = M_2$

$\mathcal{M}$

wiemy że

$\mathcal{M} \cap M_1 = M_1$

$M \in \mathcal{P}(\mathcal{M})$

$M_1 \cup M_1' = \mathcal{M}$

$M_2 \cup M_2' = \mathcal{M}$

3° Załóżmy, że $f(n_0) = 0$

$n_0 \in \mathcal{M}' \Rightarrow n_0 \in M_1 \cup \mathcal{M}'$

$n_0 \in M_2 \cup \mathcal{M}'$

$\Downarrow$

skoro zachodzi $\begin{cases} n_0 \notin M_1 \\ \wedge\ n_0 \notin M_2 \end{cases}$ $\Rightarrow$ $n_0 \notin M_2 \overset{?}{\Leftrightarrow} n_0 \notin M_1$

(1) (1)

to jest prawda

$(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (\neg p \Leftrightarrow \neg q)$

jeżeli zdania są sobie równoważne to ich negacja też jest sobie równoważna

$n_0 \notin M_1 \wedge n_0 \notin M_2$

koniunkcja między nimi to mamy też równoważność

$\neg(n_0 \in M_1 \vee n_0 \in M_2)$

$\neg n_0 \in (M_1 \cup M_2)$

$n_0 \in (M_1 \cup M_2)'$

$\boxed{n_0 \in M_2 \Leftrightarrow n_0 \in M_1}$

no a z tego wynika że $M_1 = M_2$

definicja równości zbiorów

Pokazaliśmy Różnowartościowość

Surjektywność $G : M \mapsto g_M \in [\langle f\rangle]$

$$\forall_{y \in Y}\ \exists_{x \in X}\ y = f(x)$$

Wybieramy $g \in [\langle f\rangle]$

$$\exists_{M \in \mathcal{P}(\mathcal{M})}\ G(M) = g$$

$G(M) = g_M$

$$g_M(n) = \begin{cases} f(n) & \text{jeśli } n \in \check{M} \cup \mathcal{M}' \\ -f(n) & \text{jeśli } n \in \mathcal{M} \setminus M \end{cases}$$

Przez N duże oznaczamy zbiór tych indeksów dla których

$f(n) = g(n) \neq 0$

$N = \{n : f(n) = g(n) \neq 0\}$

Hipoteza: $G(N) = g$

Dowód: $G(N) = g_N$ Chcemy pokazać, że $g_N = g$