Różnowartościowość:

$$\forall_{x_1, x_2 \in X} \; f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

W naszym przypadku:

$$\forall_{f_1, f_2 \in F} \; \underbrace{g(f_1)}_{a_{f_1}} = \underbrace{g(f_2)}_{a_{f_2}} \Rightarrow f_1 = f_2$$

Wiemy, że $a_{f_1} = a_{f_2}$

$$\langle \ldots, \ldots, \ldots, \ldots \rangle = \langle \ldots, \ldots, \ldots, \ldots \rangle$$

$$\forall_{i \in N \setminus \{0\}} \; a_{f_1}(i) = a_{f_2}(i)$$

$$\Downarrow$$

Dla f definiujemy a_f:

$a_f(i) = k$, takie że

$k \in f(i) \setminus f(i-1)$

k wyznaczone jednoznacznie

Cel: $f_1 = f_2$

Przypuśćmy że $f_1 \neq f_2 \Rightarrow \exists_{i_0 \geq 1} (f_1(i_0) \neq f_2(i_0) \wedge f_1(i_0 - 1) = f_2(i_0 - 1))$

$f_1 = \langle \emptyset, \underset{1.}{\ldots}, \ldots \rangle$

zawsze $f_1(0) = f_2(0)$

$f_2 = \langle \emptyset, \underset{1.}{\ldots}, \ldots \rangle$

teraz wyznaczamy $a_{f_1}(i_0) = k_{i_0}$, takiemu, że $k_{i_0} \in f_1(i_0) \setminus f_1(i_0 - 1)$

$a_{f_2}(i_0) = k_{i_0}$, takiemu, że $k_{i_0} \in f_2(i_0) \setminus f_2(i_0 - 1)$

Wiemy, że $\boxed{f_1(i_0 - 1)} = \boxed{f(i_0 - 1)}$

oraz, że $f_1(i_0) \neq f_2(i_0)$,

a zarazem $f_1(i_0 - 1) \subseteq f_1(i_0)$

$f_2(i_0 - 1) \subseteq f_2(i_0)$

$\Rightarrow k_{i_0, f_1} \neq k_{i_0, f_2}$

$\Downarrow$

$a_{f_1}(i_0) \neq a_{f_2}(i_0)$

$\Downarrow$

$a_{f_1} \neq a_{f_2}$

sprzeczność z założeniem, że $g(f_1) = g(f_2)$

$a_{f_1} = a_{f_2}$

$\rightarrow$ dostaliśmy, że g jest różnowartościowa!

Nie może tak być, że w obu przypadkach zostanie ten sam element po wyrzuceniu $f(i_0 - 1)$ bo to by znaczyło, że $f_1(i_0) = f_2(i_0)$ a założyliśmy że nie jest

$g: F \to \{a_f\}$ — zbiór wszystkich ciągów o wyrazach naturalnych różnowartościowych

Surjektywność:

$g(f) = a_f$ $\rightarrow \langle 1, 2, 3, 6, \ldots \rangle$

$\emptyset, \{1\}, \{1,2\}, \{1,2,3\}, \{1,2,3,6\},$

$g(f)(i) = k_i$ gdzie $k_i \in f_i \setminus f_{i-1}$

Niech dany będzie dowolny ciąg różnowartościowy o wyrazach naturalnych a_f

$$g(\;) = \langle a_f(i) \rangle_{i \in N}$$

Jaką funkcję $f \in F$ wziąć aby $g(f)(i) = a_f(i)$ $i \geq 1$

$g(f) = a_f$ $\rightarrow$ pomijamy w kodowaniu zbiór $\emptyset$ czyli $f(0)$ i nie mamy z tym problemu!

Zwyczajnie przyporządkowujemy ciągowi ciąg

Przykład:

$$\langle \emptyset, \{1\}, \{1,2\}, \{1,2,3\}, \{1,2,3,4\}, \{1,2,3,4,5\}, \ldots \rangle \to \langle 1, 2, 3, 4, 5, \ldots \rangle$$

f powinien być zdefiniowany następująco:

$$f(i) = \begin{cases} \emptyset \cup \{a_1\} \cup \{a_2\} \cup \ldots \cup \{a_i\} & i \in \{1, 2, 3, \ldots\} = N_+ \\ \emptyset & i = 0 \end{cases}$$

Można tak: $f(i) = \bigcup_{k=1}^{i} \{a_k\}$

Co jeśli $i = 0$? To suma zwraca $\emptyset$

$$\langle f(i) \rangle_{i \in N} = \langle \bigcup_{k=1}^{i} \{a_k\} \rangle_{i \in N}$$

$g(f)(i) = k_i$, takie, że $k_i \in f(i) \setminus f(i-1)$

$$k_i \in \bigcup_{k=1}^{i} \{a_f(k)\} \setminus \bigcup_{k=1}^{i-1} \{a_f(k)\}$$

$$\Leftrightarrow \left(\{a_f(i)\} \cup \bigcup_{k=1}^{i-1} \{a_f(k)\}\right) \setminus \left(\bigcup_{k=1}^{i-1} \{a_f(k)\}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\{a_f(i)\} \setminus \bigcup_{k=1}^{i-1} \{a_f(k)\}\right) \cup \underbrace{\left(\bigcup_{k=1}^{i-1} \{a_f(k)\} \setminus \bigcup_{k=1}^{i-1} \{a_f(k)\}\right)}_{\emptyset}$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\left(\{a_f(i)\} \setminus \bigcup_{k=1}^{i-1} \{a_f(k)\}\right)} \cup \emptyset$$

$$\Leftrightarrow \left(\{a_f(i)\} \setminus \bigcup_{k=1}^{i-1} \{a_f(k)\}\right) \Leftrightarrow \{a_f(i)\}$$

wyrazy ciągu $\langle a_f \rangle$ są parami różne, więc zbiory $\{a_f(i)\}$ i $\bigcup_{k=1}^{i-1} \{a_f(k)\}$ są rozłączne

Zatem $k_i \in \{a_f(i)\}$ czyli $k_i = a_f(i)$

Zatem $g(f)(i) = a_f(i)$ (dla dowolnego $\langle a_f \rangle$)

i ostatecznie g jest surjekcją

więc g jest bijekcją!

czyli $|F| = |\{a_f\}| = \mathfrak{C}$

Odpowiedź: $|F| = \mathfrak{C}$