Dowód: $\mathcal{G}(N) = g_N$ Chcemy pokazać, że $g_N = g$

$$g_M(n) = \begin{cases} f(n) & \text{jeśli } n \in M \cup \mathcal{M}' \\ -f(n) & \text{jeśli } n \in \mathcal{M} \setminus M \end{cases}$$

Przykład jak to działało

$f = \langle 2, 3, 1, 0, 0, 0, \dots \rangle$

$\mathcal{M} = \{0, 1, 2\}$

$M = \{1, 2\}$

$\mathcal{G}(M) = \langle -2, 3, 1, 0, 0, 0, \dots \rangle$

$$g_M(n) = \begin{cases} f(n) & \text{jeśli } n \in M \cup \mathcal{M}' \\ -f(n) & \text{jeśli } n \in \mathcal{M} \setminus M \end{cases}$$

$N \subseteq \mathcal{M}$

$$g_N(n) = \begin{cases} f(n) & \text{jeśli } n \in N \cup \mathcal{M}' \\ -f(n) & \text{jeśli } n \in \mathcal{M} \setminus N \end{cases}$$

$\Downarrow$ def N

$N = \{n : f(n) = g(n) \neq 0\}$

to są te z definicji

$\Downarrow$

jeśli $i \in \mathcal{M} \setminus N$

$f(i) \neq g(i)$

Ale $g \in [f]$,

więc $f(i) = -g(i)$

$$g_N(n) = \begin{cases} g(n) & \text{jeśli } n \in N \cup \mathcal{M}' \\ g(n) & \text{jeśli } n \in \mathcal{M} \setminus N \end{cases}$$

$\mathcal{M}'$ i tu i tak wyrazy są równe 0

$f(n) = 0$

$g(n) = 0$

$n \in \mathcal{M}'$

$\Downarrow$ Słowo tak to znaczy, że one są wszędzie takie same

$\forall_{n \in N} \; g_N(n) = g(n)$

$\Downarrow$

$g_N = g$, więc $\mathcal{G}(N) = g$. $\square$

$\mathcal{G}(N)$

Ostatecznie więc $\mathcal{G}$ jest bijekcją.

Wzięliśmy dowolną klasę abstrakcji $[f]$ i pokazaliśmy, że w relacji z f jest 2^m ciągów, gdzie $0 \leq m < \infty$ było liczbą indeksów wyrazów niezerowych ciągu f.

dowodzi tego bijekcja bo tyle jest podzbiorów zbioru $\mathcal{M}$

$m = |\mathcal{M}|$

Zwróćmy uwagę, że nigdzie nie skorzystaliśmy z faktu, iż $m < \infty$. Wobec tego możemy rozszerzyć nasze rozważania na przypadek, w którym $|\mathcal{M}| = \aleph_0$ (większa już nie może być bo ciąg f ma $\aleph_0$ wyrazów) i wówczas $[f] = 2^{|\mathcal{M}|} = 2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$

Zatem wszystkie możliwe klasy abstrakcji względem rozważanej relacji są mocy wyrażonej liczbą ze zbioru:

$$\{1, 2, 4, 8, 16, \dots, \mathfrak{c}\} = \{2^m : m \in \mathbb{N} \cup \{\aleph_0\}\}$$