1. Udowodnij, że relacja $F \subseteq (\mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathcal{P}(\mathbb{N})) \times \mathcal{P}(\mathbb{N})$, taka że

$$\langle\langle A, B\rangle, C\rangle \in F \Leftrightarrow (\forall_x (x \in C \Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B) \wedge \neg(x \in A \wedge x \in B))),$$

jest funkcją $(\mathcal{P}(\mathbb{N}))^2 \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$.

Przyjmuję, że możemy wykorzystywać definicję działań na zbiorach

Zauważyć warto, że opisany zbiór C odpowiada

$$\langle A, B\rangle F C \Leftrightarrow C = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$

będę się odwoływał do tej postaci:

Funkcja ze zbioru A w zbiór B to relacja $F \subseteq A \times B$ spełniająca warunki:

ozn. $F\colon A \to B$

argument, wartość

1. $\forall_{a \in A} \forall_{b, b' \in B} (\langle a, b\rangle \in F \wedge \langle a, b'\rangle \in F \Rightarrow b = b')$
2. $\forall_{a \in A} \exists_{b \in B} \langle a, b\rangle \in F$

czyli w skrócie: $\forall_{a \in A} \exists!_{b \in B} \langle a, b\rangle \in F$

Najpierw pokażę:

2) $\forall_{a \in A} \exists_{b \in B} \langle a, b\rangle \in F$

$$\forall_{A, B \in P(N) \times P(N)} \exists_{C \in P(N)} \langle\langle A, B\rangle, C\rangle \in F$$

$$\left.\begin{array}{l} A \cup B \in P(\mathbb{N}) \\ A \cap B \in P(\mathbb{N}) \end{array}\right\} \Rightarrow (A \cup B) \setminus (A \cap B) \in P(N)$$

dowód: zał: $A, B \in P(N)$

wobec tego

$$A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\} \Rightarrow \forall_{x \in A \cup B} x \in \mathbb{N} \Rightarrow A \cup B \subset N \Leftrightarrow A \cup B \in P(N)$$

($A \subset N$, $B \subset N$)

argument, wartość $\quad F\colon A \to B$

1. $\forall_{a \in A} \forall_{b, b' \in B} (\langle a, b\rangle \in F \wedge \langle a, b'\rangle \in F \Rightarrow b = b')$

1) $\forall_{A, B \in P(N)} \forall_{C, C' \in P(N)} (\langle\langle A, B\rangle, C\rangle \in F \wedge \langle\langle A, B\rangle, C\rangle \in F \wedge \langle\langle A, B\rangle, C'\rangle \in F \Rightarrow C = C')$

Mamy $A, B \in P(\mathbb{N})$

Zakładamy że: $A \mathbin{\dot{-}} B = C \wedge A \mathbin{\dot{-}} B = C' \Rightarrow C = A \mathbin{\dot{-}} B = C' \Rightarrow C = C'$

Korzystamy z przechodniości i założeń

$$C = A \mathbin{\dot{-}} B = C'$$
$$C = C'$$

wszystko wyszło prosto ponieważ dałem radę wyznaczyć wartości w postaci równości

Sprawdzona została określoność dla każdego elementu dziedziny

(zawsze dostaniemy element przeciwdziedziny)

oraz udowodniliśmy jednoznaczność

2. Sprawdź, czy funkcja F zdefiniowana w poprzednim zadaniu jest różnowartościowa i czy jest „na”. Jeśli nie jest różnowartościowa, podaj przykład dwóch argumentów, które przyjmują te same wartości. Jeśli nie jest „na”, to znajdź R_f.

Czy funkcja jest „na”

$$\forall_{C \in P(N)} \exists_{A, B} \quad A \mathbin{\dot{-}} B = C$$

$A(C)$

$B(C)$

$A = \emptyset \quad B = C$

$$A \mathbin{\dot{-}} B = (A \cup B) \setminus (A \cap B) =$$
$$= (\emptyset \cup C) \setminus (\emptyset \cap C) =$$
$$= C \setminus \emptyset = C \in P(\mathbb{N})$$

Dla dowolnie wybranego C będącego podzbiorem liczb naturalnych, istnieją 2 takie zbiory których różnica symetryczna wygeneruje zbiór C (są to $A = \emptyset$ i $B = C$)

Pokazaliśmy że jesteśmy w stanie uzyskać dowolny element przeciwdziedziny

Kontrprzykład na różnowartościowość:

$A = \{1\}, \quad B = \{2\} \longrightarrow C = \{1, 2\}$

$A = \{2\}, \quad B = \{1\} \longrightarrow C = \{1, 2\}$

dla różnych par argumentów, wygenerowaliśmy tą samą wartość funkcji