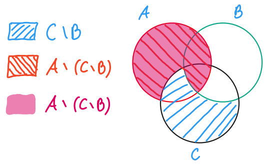
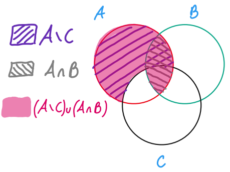
1. Sprawdź, czy prawdą jest, dla dowolnych zbiorów A, B, C, zachodzi: $A \setminus (C \setminus B) = (A \setminus C) \cup (A \cap B)$. Jeśli tak, udowodnij, jeśli nie – podaj kontrprzykład.

Zadanie 1.)

Diagramy Venna:





Dowód:

Niech $x \in A \setminus (C \setminus B) \iff x \in A \wedge x \notin (C \setminus B)$

$\overset{1)}{\iff} x \in A \wedge (x \notin C \vee x \in B)$

$\overset{2)}{\iff} (x \in A \wedge x \notin C) \vee (x \in A \wedge x \in B)$

$\iff x \in (A \setminus C) \vee x \in (A \cap B)$

$\iff x \in (A \setminus C) \cup (A \cap B)$ cnd.

1) $x \notin (C \setminus B) \iff \neg\, x \in (C \setminus B) \iff \neg\,(x \in C \wedge x \notin B)$

$\iff (x \notin C \vee x \in B)$

2) Rozdzielność koniunkcji względem alternatywy

2. Wypisz wszystkie elementy i podzbiory zbioru:

$$\{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset\} \cup \{\{\emptyset\}, \emptyset\}, \{\{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} \cap \{\emptyset, \{\{\emptyset\}\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}\}.$$

elementy zbioru: $\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\{\emptyset\}, \emptyset\}, \emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$

duplikat

duplikat

$\emptyset \cup \{\{\emptyset\}, \emptyset\} = \{\{\emptyset\}, \emptyset\}$

$\{\{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} \cap \{\emptyset, \{\{\emptyset\}\}\} = \emptyset$

elementy: $\{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

elementy: $\emptyset$, $\{\{\emptyset\}\}$

Ostatecznie zbiór $A = \{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}\}$

$|P(A)| = 2^3 = 8$

$P(A) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, \{\{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}\},$
$\{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}\},$
$\{\{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}\},$
$\{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}\}\}$

3. Niech $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ będą dowolnymi rodzinami zbiorów. Udowodnij, że $\bigcup(\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) = (\bigcup \mathcal{A}) \cup (\bigcup \mathcal{B})$. Czy równość $\bigcup(\mathcal{A} \cap \mathcal{B}) = (\bigcup \mathcal{A}) \cap (\bigcup \mathcal{B})$ zachodzi?

Niech $x \in \bigcup(\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) \iff \exists_{C \in \mathcal{A} \cup \mathcal{B}} (x \in C \wedge (\exists_{A \in \mathcal{A}} C = A \vee \exists_{B \in \mathcal{B}} C = B))$

$\iff \exists_{C \in \mathcal{A} \cup \mathcal{B}} (x \in C \wedge \exists_{A \in \mathcal{A}} C = A) \vee \exists_{C \in \mathcal{A} \cup \mathcal{B}} (x \in C \wedge \exists_{B \in \mathcal{B}} C = B)$

$\iff \exists_{C \in \mathcal{A} \cup \mathcal{B}} \exists_{A \in \mathcal{A}} (C = A \wedge x \in C) \vee \exists_{C \in \mathcal{A} \cup \mathcal{B}} \exists_{B \in \mathcal{B}} (C = B \wedge x \in C)$

$\overset{1)}{\iff} \exists_{C \in \mathcal{A} \cup \mathcal{B}} \exists_{A \in \mathcal{A}} (C = A \wedge x \in A) \vee \exists_{C \in \mathcal{A} \cup \mathcal{B}} \exists_{B \in \mathcal{B}} (C = B \wedge x \in B)$

$\overset{2}{\iff} \exists_{A \in \mathcal{A}} x \in A \vee \exists_{B \in \mathcal{B}} x \in B$

$\iff x \in \bigcup \mathcal{A} \vee x \in \bigcup \mathcal{B} \iff x \in \bigcup \mathcal{A} \cup \bigcup \mathcal{B}$ cnd

1 Reguła zastępowania

2. Uzasadnienie czemu mamy implikację w obie strony

a) $\Rightarrow$ oczywista

b) $\Leftarrow$

$\exists_{A \in \mathcal{A}} x \in A \Rightarrow \exists_{A \in \mathcal{A}} (x \in A \wedge A \in \mathcal{A}) \Rightarrow \exists_{A \in \mathcal{A}} (x \in A \wedge \exists_{C \in \mathcal{A} \cup \mathcal{B}} C = A)$

$\Rightarrow \exists_{C \in \mathcal{A} \cup \mathcal{B}} \exists_{A \in \mathcal{A}} (x \in A \wedge C = A)$

$\bigcup(\mathcal{A} \cap \mathcal{B}) = (\bigcup \mathcal{A}) \cap (\bigcup \mathcal{B})$ Czy zachodzi?

$\mathcal{A} = \{\underbrace{\{1, 2, 3\}}_{A_1}, \underbrace{\{2, 3, 4\}}_{A_2}\}$ $\mathcal{B} = \{\underbrace{\{0, 1, 2\}}_{B_1}, \underbrace{\{3, 4, 5\}}_{B_2}\}$

$\bigcup \mathcal{A} = \{1, 2, 3, 4\}$

$\bigcup \mathcal{B} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

$(\bigcup \mathcal{A}) \cap (\bigcup \mathcal{B}) = \{1, 2, 3, 4\}$

$\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \emptyset$

$\bigcup(\mathcal{A} \cap \mathcal{B}) = \bigcup(\emptyset) = \emptyset$

rodzina $\mathcal{A}$ nie ma wspólnych elementów z rodziną $\mathcal{B}$

Równość nie zachodzi!