3. Znajdź moc zbioru

$$\mathcal{F} = \{f \in \mathcal{P}(\mathbb{N})^{\mathbb{N}} : \forall_{n\in\mathbb{N}} (|f(n)| = n \wedge f(n) \subseteq f(n+1)\}.$$

$$\mathcal{F} = \{ f \in P(N)^N : \forall_{n\in N} (|f(n)| = n \wedge f(n) \subseteq f(n+1) \}$$

$f: N \to P(N)$ ciągi postaci $\langle \emptyset, \{..\}, \{..,..\}, \{..,..,..\}, ... \rangle$

Jak to działa:

$$\langle \underset{f(0)}{\emptyset}, \underset{f(1)}{\{1\}}, \underset{f(2)}{\{1,3\}}, \underset{f(3)}{\{1,2,3\}}, \underset{f(4)}{\{1,2,3,6\}}, \underset{f(5)}{\{1,2,3,6,7\}}, ... \rangle$$

Ile jest takich ciągów?

Podejście kombinatoryczne

$$\begin{array}{cccccc} & & \aleph_0 & \aleph_0 & \aleph_0 & \\ & & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ & 1 & |N| & |N|-1 & |N|-2 & .... \\ \text{bo} & \emptyset & 1 & 2 & 3 & \end{array}$$

Wiemy, że $\mathfrak{C} = 2^{\aleph_0}$

$$\underbrace{\aleph_0 \cdot \aleph_0 \cdot \aleph_0 \cdot ...}_{\aleph_0} = \mathfrak{C}$$

$$\mathfrak{C} = 2^{\aleph_0} \leq \aleph_0^{\aleph_0} \leq \mathfrak{C}^{\aleph_0} = (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0^2} = \mathfrak{C}$$

ale gdy

$$|\underbrace{N \times N \times N \times ... \times N}_{k}| = \aleph_0^k = \aleph_0$$

Kładki począwszy od 2 oznaczają na ile sposobów dorzucamy nowy element do zbioru (albo bardziej ile mamy możliwych do wyboru elementów które możemy dorzucić)

Jak to możemy inaczej zapisać?

Jako ciąg kodujący dorzucane elementy (to co dorzucamy):

$$a_f = \langle \frac{1}{1.}, \frac{3}{2.}, \frac{2}{3.}, \frac{6}{4.}, \frac{7}{5.}, ... \rangle$$

$f \xrightarrow{1-1} a_f$

$f(1) = \{1\}$

$f(2) = \{1,3\}$

$f(3) = \{1,2,3\}$

są to ciągi różnowartościowe o wyrazach z N

więc gdyby stosować regułę mnożenia, dostajemy, że takich ciągów jest $\aleph_0^{\aleph_0} = \mathfrak{C}$

Załóżmy, że tych a_f jest $\aleph_0$, czyli można je ustawić w ciąg

$a_{f_0} = \langle ..., ..., ..., ... \rangle$

$a_{f_1} = \langle ..., ..., ..., ... \rangle$

$a_{f_2} = \langle ..., ..., ..., ... \rangle$

$\vdots$

argument przekątniowy

Konstruujemy wówczas $a_{\bar{f}}$ taki, że $a_{\bar{f}} = \langle a_{f_0}(0)+1, a_{f_1}(1)+1, a_{f_2}(2)+1, ... \rangle$, a więc $a_{\bar{f}}$ nie był wymieniony a więc nie można $\{a_f\}$ ustawić w ciąg.

Zatem $|\{a_f\}| > \aleph_0$

A z drugiej strony $|\{a_f\}| \leq |N|^{|N|}$

wszystkie ciągi o wyrazach z N których wyrazy się nie powtarzają!

wszystkie ciągi o wyrazach z N

Mamy na razie, że moc będzie się zgadzać

Pokażmy jeszcze, że kodowanie jest bijektywne!

Wystarczy więc pokazać, że

$\mathcal{F}: f \mapsto a_f$ ↙ zbiór tych kodów

$g: \mathcal{F} \to \{a_f\}$

$g(f) = a_f$