Praca Domowa 6
Bartłomiej Żamojtel

1. Niech $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ będzie zadana wzorem $f(x) = \langle x\cos x, x\sin x\rangle$. Naszkicuj $f[[2\pi, 6\pi]]$ oraz znajdź $f^{-1}[[0,+\infty)\times[0,+\infty)]$.

$f(2\pi) = \langle 2\pi\cos(2\pi), 2\pi\sin(2\pi)\rangle = \langle 2\pi, 0\rangle$

$\cos(2\pi+\frac{\pi}{2}) = \cos(\frac{\pi}{2}) = 0$
$\sin(2\pi+\frac{\pi}{2}) = \sin(\frac{\pi}{2}) = 1$

$f(2\pi+\frac{\pi}{2}) = \langle \frac{5}{2}\pi\cdot(0), \frac{5}{2}\pi\cdot 1\rangle = \langle 0, \frac{5}{2}\pi\rangle$

$f(3\pi) = \langle 3\pi\cos(3\pi), 3\pi\sin(3\pi)\rangle = \langle 3\pi(-1), 3\pi(0)\rangle = \langle -3\pi, 0\rangle$

$\cos(2\pi+\pi) = \cos(\pi) = -1$
$\sin(2\pi+\pi) = \sin(\pi) = 0$

$f(3\frac{1}{2}\pi) = \langle 3\frac{1}{2}\pi\cos(2\pi+\frac{3}{2}\pi), 3\frac{1}{2}\pi\sin(2\pi+\frac{3}{2}\pi)\rangle = \langle 3\frac{1}{2}\pi(0), 3\frac{1}{2}\pi(-1)\rangle = \langle 0, -3\frac{1}{2}\pi\rangle$

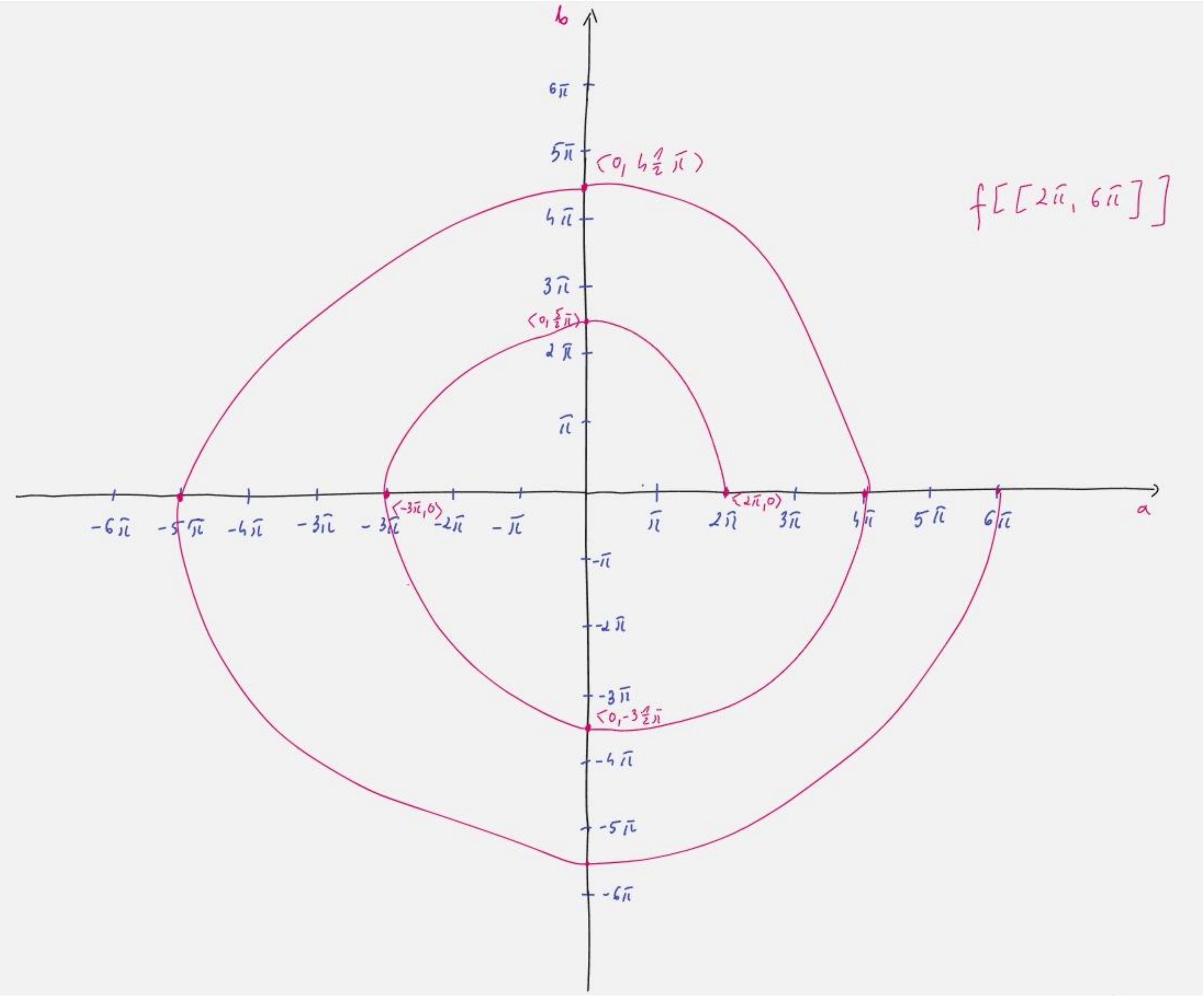
$\cos(2\pi+\frac{3}{2}\pi) = \cos(\frac{3}{2}\pi) = \cos(\pi+\frac{\pi}{2}) = 0$
$\sin(2\pi+\frac{3}{2}\pi) = \sin(\frac{3}{2}\pi) = -1$

$f(4\pi) = \langle 4\pi\cos(4\pi), 4\pi\sin(4\pi)\rangle = \langle 4\pi(1), 4\pi(0)\rangle = \langle 4\pi, 0\rangle$

$\cos(4\pi) = \cos(0) = 1$
$\sin(4\pi) = \sin(0) = 0$

$f(4\frac{1}{2}\pi) = \langle 4\frac{1}{2}\pi\cos(4\pi+\frac{\pi}{2}), 4\frac{1}{2}\pi\cdot\sin(4\pi+\frac{\pi}{2})\rangle = \langle 4\frac{1}{2}\pi\cdot 0, 4\frac{1}{2}\pi\cdot 1\rangle = \langle 0, 4\frac{1}{2}\pi\rangle$

$\cos(4\pi+\frac{\pi}{2}) = \cos(\frac{\pi}{2}) = 0$
$\sin(4\pi+\frac{\pi}{2}) = \sin(\frac{\pi}{2}) = 1$



Przeciwobraz:

$R \to R^2$ $\quad f^{-1}[[0,+\infty) \times [0,+\infty)]$

$f(x) = \langle x\cos x, x\sin(x) \rangle$

$f^{-1}[B] = \{ x \in X : f(x) \in B \}$ - $f^{-1}[[0,+\infty) \times [0+\infty)] = \{ x \in R : \langle a, b \rangle \in [0,+\infty) \times [0,+\infty) \}$

$a \in [0,+\infty) \wedge b \in [0,+\infty)$

$a \geq 0 \qquad b \geq 0$

$0, \frac{\pi}{2}$

$[0+2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi]$

$= [0, \frac{\pi}{2}] \cup [2\pi, 2\frac{1}{2}\pi] \cup [4\pi, 4\frac{1}{2}\pi] \cup \dots$

$= \underbrace{\{ x \in R : \exists_{k \in N} x \in [0+2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi] \}}$

$I \in N$

$A_i{}_{i \in I} = [0+2i\pi, \frac{\pi}{2} + 2i\pi]$

$= \{ x \in R : \exists_{i \in I} x \in A_i \}$

$\bigcup_{i \in I} A_i = [0, \frac{\pi}{2}] \cup [2\pi, 2\frac{1}{2}\pi] \cup [4\pi, 4\frac{1}{2}\pi] \cup \dots$

$\bigcup_{i \in I} A_i = [0+2i\pi, \frac{\pi}{2} + 2i\pi]$

$\bigcup_{k \in N} [2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi]$

2. Podaj przykład funkcji f oraz takich zbiorów A, B, C, D, żeby $f^{-1}[f[A]] \neq A$, $f[f^{-1}[B]] \neq B$, $f[C \cap D] \neq f[C] \cap f[D]$.

Przykład funkcji f

$f : R \to R$

$f(x) = x^2$

a) $A = [0,1] \quad f(x) = x^2$

$f[A] = f[[0,1]] = [0,1]$

$f^{-1}[f[A]] = [-1,1]$

$f^{-1}[f[A]] \neq [0,1]$

b) Chcemy coś takiego:

$$f[f^{-1}[B]] \underset{\supseteq}{\overset{\neq}{\neq}} B$$

$B=[-1,1]$ $\qquad$ $[0,1]$

$$f^{-1}[[-1,1]] = [-1,1]$$

$$f[[-1,1]] = [0,1]$$

Inny przykład: $B=\{-7\}$

$$f^{-1}[\{-7\}] = \emptyset$$

$$f[\emptyset] = \emptyset \neq \{-7\}$$

Próbujemy znowu

$$f(x) = x^2$$

źle
$$\left\{\begin{array}{l} B = [0,1] \\ f^{-1}[[0,1]] = [-1,1] \\ f[-1,1] = [0,1] \end{array}\right.$$

$f[C \cap D] \neq f[C] \cap f[D].$

$f(x) = x^2$ $\quad C = [-2,-1]$ $\quad D = [1,2]$

$C \cap D = \emptyset$ $\quad \underline{f(x) = x^2}$

$f: X \to B$

$A \subset X$

$f[A] = \{ f(x) : f(x) \in B \}$

$f[C \cap D] = f[\emptyset] = \emptyset$

Obraz zbioru | edytuj | edytuj kod |

Obrazem zbioru $A \subseteq X$ w funkcji f nazywa się podzbiór $f[A] \subseteq Y$ wszystkich obrazów elementów tego zbioru, tzn. zbiór

$$\{y \in Y : f(x) = y \text{ dla pewnego } x \in A\} = \{f(x) \in Y : x \in A\}.$$

Jeżeli nie istnieje ryzyko pomyłki, to zamiast $f[A]$ pisze się $f(A)$. Zapis ten pozwala na interpretację obrazu poprzez f jako funkcji, której dziedziną jest zbiór potęgowy (wszystkie podzbiory) zbioru X, a przeciwdziedziną zbiór potęgowy zbioru Y.

$f[C] = [1,4]$

$f[D] = [1,4]$ $\Rightarrow f[C] \cap f[D] = [1,4] \neq \emptyset$

$\{y \in Y : f(x) = y \text{ dla pewnego } x \in A\} = \{f(x) \in Y : x \in A\}$

$C = [-2,1]$ $\quad D = [0,3]$

$C \cap D = [0,1]$

$f[C \cap D] = [0,1]$

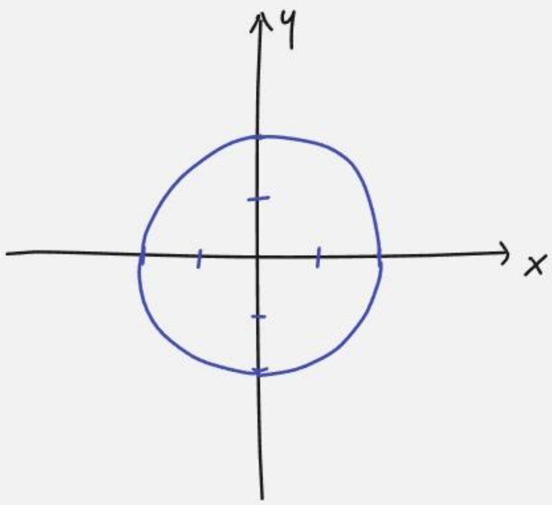
$f[C] = [0,4]$

$f[D] = [0,9]$ $\Rightarrow f[C] \cap f[D] = [0,4] \cap [0,9] \Rightarrow f[C] \cap f[D] = [0,4]$

$f[C \cap D] = [0,1] \neq [0,4] = f[C] \cap f[D]$

3. Udowodnić, że $|\{\langle x,y\rangle \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2=4\}| = |[-1,1]|$ znajdując bijekcję pomiędzy tymi zbiorami.

$$|\{\langle x, y\rangle \in R^2 : x^2+y^2=4\}| = |[-1,1]|$$



$x \in [-1,1]$

Propozycja:

$$f(x) = \langle 2\cdot\cos(\pi x), 2\sin(\pi x)\rangle$$

jednak w tym przypadku osiągamy punkt startowy nie raz a dwa.

Aby się tego pozbyć:

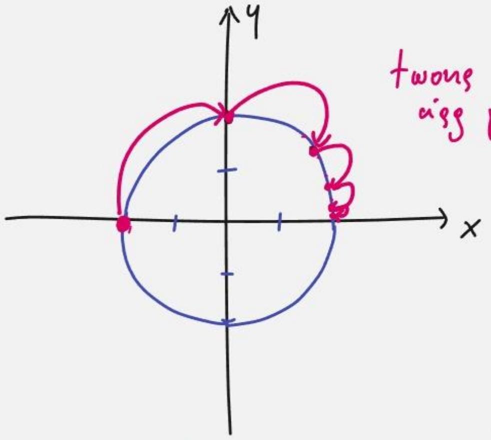
$\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots\}$

$\pi \quad \frac{\pi}{2} \quad \frac{\pi}{4}$

$x \in [-1,1] \setminus \{\frac{1}{2^k} : k \in N\}$

$f(x) =$

tworzy nieskończony ciąg przeskoków



$\langle 2\cos(\frac{\pi x}{2}), 2\sin(\frac{\pi x}{2}) \rangle$

$$f(x) = \begin{cases} \langle 2\cdot\cos(\pi x), 2\sin(\pi x)\rangle & x \in [-1,1] \setminus \{\frac{1}{2^k} : k \in N\} \\ \langle 2\cos(\frac{\pi x}{2}), 2\sin(\frac{\pi x}{2})\rangle & \underline{x \in \{\frac{1}{2^k} : k \in N\}} \end{cases}$$

1) "Na"

$$\forall_{y \in Y} \exists_{x \in X} \; y = f(x)$$

$$\forall_{\langle a,b\rangle \in \mathbb{R}^2} \exists_{x \in [-1,1]} \; \langle a,b\rangle = f(x)$$

Warunek: $a^2 + b^2 = 4$

Wyznaczamy:

$a^2 + b^2 = 4$

$b^2 = 4 - a^2 \; / \sqrt{\ }$

$b = \sqrt{4 - a^2} \quad \vee \quad b = -\sqrt{4 - a^2}$

I przypadek: $b = \sqrt{4-a^2}$

chcemy osiągnąć parę:

$\langle a, \sqrt{4-a^2} \rangle$

$x \in [0,1] \setminus \{\frac{1}{3^k} : k \in \mathbb{N}\}$

$f(x) = \langle a, \sqrt{4-a^2} \rangle$

$\langle 2\cdot\cos(\pi x), 2\sin(\pi x) \rangle = \langle a, \sqrt{4-a^2} \rangle$

$2\cos(\pi x) = a$

$\cos(\pi x) = \frac{a}{2}$

$\boxed{1}$ $2\sin(\pi x) = \sqrt{4-a^2} \quad /()^2$

$4\sin^2(\pi x) = 4 - a^2$

$4(1-\cos^2(\pi x)) = 4 - a^2$

$\cancel{4} - 4\cos^2(\pi x) = \cancel{4} - a^2$

$-4\cos^2(\pi x) = -a^2 \quad /\cdot(-1)$

$4\cos^2(\pi x) = a^2 \quad /:4$

$\cos^2(\pi x) = \frac{a^2}{4} \quad /\sqrt{\ }$

$\cos(\pi x) = \frac{a}{2} \quad \vee \quad \cos(\pi x) = -\frac{a}{2}$

cofając się po własnych śladach dla naszego $x = \frac{\arccos(\frac{a}{2})}{\pi}$

$2\sin(\pi x) = \sqrt{4-a^2}$ wiemy że (1)

$\sqrt{\ }$ $|2\sin(\pi x)| = \sqrt{4-a^2}$

mamy że

$2\sin(\pi x) = \sqrt{4-a^2} = b$ czyli dla $x = \frac{\arccos(\frac{a}{2})}{\pi}$

Wybieramy wspólne rozwiązanie i wyznaczamy x

$\cos(\pi x) = \frac{a}{2} \quad / \arccos()$

$\pi x = \arccos(\frac{a}{2}) \quad /:\pi$

$x = \frac{\arccos(\frac{a}{2})}{\pi}$

jest to x generujący parę $\langle a, b \rangle$

$\underline{II}$ przypadek: $\underline{b = -\sqrt{4-a^2}}$

chcemy osiągnąć parę:

$\langle a, -\sqrt{4-a^2} \rangle$ $\qquad b = -\sqrt{4-a^2}$

$\langle 2\cdot\cos(\pi x), 2\sin(\pi x)\rangle = \langle a, -\sqrt{4-a^2}\rangle$

Nasze b

$2\cos(\pi x) = a$

$\underline{\cos(\pi x) = \frac{a}{2}}$

(!) $2\sin(\pi x) = -\sqrt{4-a^2} \quad /(\,)^2$

$4\sin^2(\pi x) = 4-a^2$

$4(1-\cos^2(\pi x)) = 4-a^2$

$\cancel{4} - 4\cos^2(\pi x) = \cancel{4} - a^2$

$-4\cos^2(\pi x) = -a^2 \; /\cdot(-1)$

$4\cos^2(\pi x) = a^2 \; /:4$

$\cos^2(\pi x) = \frac{a^2}{4} \; /\sqrt{\;}$

$|\cos(\pi x)| = \left|\frac{a}{2}\right|$

Po raz drugi cofamy się

wybieramy

$\underline{\cos(\pi x) = \frac{a}{2}} \quad \vee \quad \cos(\pi x) = -\frac{a}{2}$

$\cos(\pi x) = \frac{a}{2} \quad / \arccos(\,)$

$\pi x = \arccos\left(\frac{a}{2}\right) \quad /:\pi$

$x = \dfrac{\arccos\left(\frac{a}{2}\right)}{\pi}$

$2\sin(\pi x) = -\sqrt{4-a^2}$

$-2\sin(\pi x) = \sqrt{4-a^2} \quad /:(-1)$

$2|\sin(\pi x)| = \sqrt{4-a^2}$

jaki jest $\sin(\pi x)$ dla $x \in [-1, 0]$

teraz bierzemy

$4\sin^2(\pi x) = 4-a^2 \quad /\sqrt{\;}$

III przypadek

$\langle 2\cos(\frac{\pi x}{2}), 2\sin(\frac{\pi x}{2})\rangle$ $\quad x \in \{\frac{1}{2^k} : k \in N\}$

$\langle a, b\rangle \in \{\langle 2\cos y, 2\sin y\rangle : y \in \{\frac{\pi}{2^k} : k \in N\}\}$

$\langle a, b\rangle \in \{\langle 2\cos(\frac{\pi x}{2}), 2\sin(\frac{\pi x}{2})\rangle : x \in \{\frac{1}{2^k} : k \in N\}\}$

teraz bierzemy wszystkie punkty takiej postaci

$x = \frac{1}{2^k}$

Mamy ustalony a i b co wziąć za x aby dostać daną parę: $b = \sqrt{4-a^2}$ bierzemy punkty z górnego półkola

$\langle 2\cos(\frac{\pi x}{2}), 2\sin(\frac{\pi x}{2})\rangle = \langle a, \sqrt{4-a^2}\rangle$

$2\sin(\frac{\pi x}{2}) = b$

$2\sin(\frac{\pi x}{2}) = \sqrt{4-a^2}$

$2|\sin(\frac{\pi x}{2})| = \sqrt{4-a^2}$

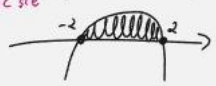
$4\sin^2(\frac{\pi x}{2}) = 4-a^2 \ /\sqrt{\ }$

wyznaczamy x w zależności

$2\cos(\frac{\pi x}{2}) = a \wedge 2\sin(\frac{\pi x}{2}) = \sqrt{4-a^2} \ /()^2$

$4-a^2 \geq 0$

$(2-a)(2+a) \geq 0$



$\cos(\frac{\pi x}{2}) = \frac{a}{2}$

$4\sin^2(\frac{\pi x}{2}) = 4-a^2$ uważając się

$4(1-\cos^2(\frac{\pi x}{2})) = 4-a^2$

$4-4\cos^2(\frac{\pi x}{2}) = 4-a^2$

$-4\cos^2(\frac{\pi x}{2}) = -a^2 \ /\cdot(-1)$

$4\cos^2(\frac{\pi x}{2}) = a^2 \ /:4$

$\cos^2(\frac{\pi x}{2}) = \frac{a^2}{4} \ /\sqrt{\ }$

$|\cos(\frac{\pi x}{2})| = |\frac{a}{2}|$

$\cos(\frac{\pi x}{2}) = \frac{a}{2} \vee \cos(\frac{\pi x}{2}) = -\frac{a}{2}$

musi być to

$\cos(\frac{\pi x}{2}) = \frac{a}{2} \ /\arccos()$

$\frac{\pi x}{2} = \arccos(\frac{a}{2}) \ /\cdot\frac{2}{\pi}$

$x = \frac{2\arccos(\frac{a}{2})}{\pi}$

Różnowartościowość

$$f(x) = \begin{cases} \langle 2\cdot\cos(\pi x), 2\sin(\pi x)\rangle & x\in[-1,1]\setminus\{\frac{1}{2^k} : k\in N\} \\ \langle 2\cos(\frac{\pi x}{2}), 2\sin(\frac{\pi x}{2})\rangle & x\in\{\frac{1}{2^k} : k\in N\} \end{cases}$$

$$\forall_{x_1, x_2 \in X} \quad f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

I $\quad x_1 \in [-1,1]\setminus\{\frac{1}{2^k} : k\in N\} \quad x_2 \in [-1,1]\setminus\{\frac{1}{2^k} ; k\in N\}$

$$f(x_1) = f(x_2)$$

$$\langle 2\cos(\pi x_1), 2\sin(\pi x_1)\rangle = \langle 2\cos(\pi x_2), 2\sin(\pi x_2)\rangle$$

$$2\cos(\pi x_1) = 2\cos(\pi x_2) \quad \wedge \quad 2\sin(\pi x_2) = 2\sin(\pi x_2)$$

argument równa się

$\cos(\pi x_1) = \cos(\pi x_2)$ / arccos() $\qquad \sin(\pi x_1) = \sin(\pi x_2)$

tak działa cosinus

$$\left| x_1 = x_2 \vee x_1 = -x_2 \right. \quad \wedge \quad \left| \pi x_1 = \pi x_2 \right.$$

(+2kπ)

$$\left| x_1 = x_2 \vee \left|\frac{\pi x_1 + \pi x_2}{2}\right| = \frac{\pi}{2} \right. \qquad \left|\frac{\pi x_1 + \pi x_2}{2}\right| = \frac{\pi}{2} \Rightarrow |x_1 + x_2| = 1$$

piszemy bez bo się zawieramy w obrębie jednego okresu

pokażemy, że nie może być $x_1 = -x_2$ bo drugie nie będzie spełnione

$$\left|\frac{x_1 + x_2}{2}\right| = \frac{\pi}{2}$$

$$\left|\frac{-x_2 + x_2}{2}\right| = \frac{\pi}{2}$$

$$\left|\frac{0}{2}\right| = \frac{\pi}{2}$$

$0 = \frac{\pi}{2}$ sprzeczność

a zakładamy że $\underline{x_1 = x_2}$ tak nie może być

II $x_1 \in \{\frac{1}{2^k} : k \in N\}$ $\qquad x_2 \in \{\frac{1}{2^k} : k \in N\}$

$$f(x_1) = f(x_2)$$

$\{\frac{1}{2^k} : k \in N\}$

$$\langle 2\cos(\tfrac{\pi x_1}{2}), 2\sin(\tfrac{\pi x_1}{2})\rangle = \langle 2\cos(\tfrac{\pi x_2}{2}), 2\sin(\tfrac{\pi x_2}{2})\rangle$$

$$\Big(\underset{(+2k\pi)}{x_1 = x_2} \vee \underbrace{x_1 = -x_2}\Big) \wedge \Big(x_1 = x_2 \vee \underbrace{\left|\frac{x_1+x_2}{2}\right| = \frac{\pi}{2}}\Big) \qquad x_1 + x_2 = \pi$$

$$2\cos\left(\frac{\pi x_1}{2}\right) = 2\cos\left(\frac{\pi x_2}{2}\right) \wedge 2\sin\left(\frac{\pi x_1}{2}\right) = 2\sin\left(\frac{\pi x_2}{2}\right)$$

$$\cos\left(\frac{\pi x_1}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi x_2}{2}\right) \qquad \sin\left(\frac{\pi x_1}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi x_2}{2}\right)$$

$$\frac{\pi x_1}{2} = \frac{\pi x_2}{2} \qquad \frac{\pi x_1}{2} = \frac{\pi x_2}{2}$$

$\underline{x_1 = x_2}$ ok ✓ $\qquad \underline{x_2 = x_2}$

cosinus jest różnowartościowy dla argumentów z $\langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$
sinus jest różnowartościowy dla argumentów z $\langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$

III $x_1 \in \{\frac{1}{2^k} : k \in N\}$ $\qquad x_2 \in [-1,1] \setminus \{\frac{1}{2^k} : k \in N\}$

$f(x_1) = f(x_2)$ $\qquad \langle 2\cdot\cos(\pi x), 2\sin(\pi x)\rangle$

$\langle 2\cos(\frac{\pi x}{2}), 2\sin(\frac{\pi x}{2})\rangle$

$\langle 2\cos(\frac{\pi x_1}{2}), 2\sin(\frac{\pi x_1}{2})\rangle$

$$\langle 2\cos(\tfrac{\pi x_1}{2}), 2\sin(\tfrac{\pi x_1}{2})\rangle = \langle 2\cos(\pi x_2), 2\sin(\pi x_2)\rangle$$

$$2\cos\left(\frac{\pi x_1}{2}\right) = 2\cos(\pi x_2) \wedge 2\sin\left(\frac{\pi x_1}{2}\right) = 2\sin(\pi x_2)$$

$$\cos\left(\frac{\pi x_1}{2}\right) = \cos(\pi x_2) \qquad \sin\left(\frac{\pi}{2} x_1\right) = \sin(\pi x_2)$$

$$\Big(\underset{(+2k\pi)}{x_1 = x_2} \vee \underbrace{x_1 = -x_2}\Big) \wedge \Big(x_1 = x_2 \vee \underbrace{\left|\frac{x_1+x_2}{2}\right| = \frac{\pi}{2}}\Big) \qquad |x_1 + x_2| = \pi$$

$$\frac{\pi x_1}{2} = \pi x_2 \vee \frac{\pi x_1}{2} = -\pi x_2 \qquad \frac{\pi}{2} x_1 = \pi x_2 \vee \left|\frac{\frac{\pi}{2} x_1 + \pi x_2}{2}\right| = \frac{\pi}{2} \;/\cdot \frac{2}{\pi}$$

$$\frac{1}{2} x_1 = x_2 \vee \frac{1}{2} x_1 = -x_2 \qquad x_1 = 2x_2$$

$$x_1 = 2x_2 \qquad x_1 = -2x_2 \qquad \left|\frac{1}{2} x_1 + x_2\right| = 1$$

tak być nie może

sprzeczność z założeniem | będzie

tak też być nie może!

Wskazana funkcja jest bijekcją $\blacksquare$