2. Niech $A_{n,m} = \{x \in \mathbb{R} : n - 2 \le x < m + n + 1\}$ dla $n, m \in \mathbb{N}$. najdź $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{m\in\mathbb{N}} A_{n,m}$ oraz $\bigcap_{m\in\mathbb{N}} \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_{n,m}$. Przeprowadź odpowiednie dowody przedstawionych wyników.

1) $\bigcap_{n\in N} \bigcup_{m\in N} A_{n,m}$ 2) $\bigcap_{m\in N} \bigcup_{n\in N} A_{n,m}$

1) $\bigcap_{n\in N} \bigcup_{m\in N} A_{n,m}$ $A_{n,m} = \{x \in R : n-2 \le x < m+n+1\}$

$x \in \bigcap_{t\in T} A_t \Leftrightarrow \forall_{t\in T}\ x \in A_t$

$x \in \bigcup_{t\in T} A_t \Leftrightarrow \exists_{t\in T}\ x \in A_t$

$\bigcap_{n\in N} \left(\bigcup_{m\in N} A_{n,m}\right)$

Ustalamy n-a; $A_{n,m} = \{x \in R : n-2 \le x < m+n+1\}$

$\bigcup_{m\in N} A_{0,m}$ $n=0$ $n=1$

$m=0$

$A_{0,0} = \{x \in R : 0-2 \le x < 0+0+1\} = \langle -2, 1)$

$m=1$

$A_{0,1} = \{x \in R : -2 \le x < 0+1+1\} = \langle -2, 2)$

$m=1$

$A_{0,2} = \{x \in R : -2 \le x < 0+2+1\} = \langle -2, 3)$

$\vdots$

$\bigcup_{m\in N} A_{0,m} = \langle -2, +\infty)$

$m=0$

$A_{1,0} = \{x \in R : 1-2 \le x < 0+1+1\} = \langle -1, 2)$

$m=1$

$A_{1,1} = \{x \in R : 1-1 \le x < 1+1+1\} = \langle -1, 3)$

$m=2$

$A_{1,2} = \{x \in R : 1-2 \le x < 2+1+1\} = \langle -1, 4)$

$\bigcup_{m\in N} A_{1,m} = \langle -1, +\infty)$

Przypuszczamy, że

$\bigcap_{n\in N} \bigcup_{m\in N} A_{n,m} = \emptyset$

bo nie będziemy mieli żadnej części wspólnej dla każdej z tych sum!

$\rightarrow$

$\bigcap_{n\in N} \bigcup_{m\in N} A_{n,m}$

$x \in \bigcap_{t\in T} A_t \Leftrightarrow \forall_{t\in T}\ x \in A_t$

$x \in \bigcup_{t\in T} A_t \Leftrightarrow \exists_{t\in T}\ x \in A_t$

Prawo symplifikacji!

$\frac{p \wedge q}{p}$

$x_0 \in \bigcap_{n\in N} \bigcup_{m\in N} A_{n,m} \Leftrightarrow \forall_{n\in\mathbb{N}}\ x_0 \in \bigcup_{m\in N} A_{n,m} \Leftrightarrow \forall_{n\in N} \exists_{m\in N}\ x_0 \in A_{n,m} \Leftrightarrow \forall_{n\in N} \exists_{m\in\mathbb{N}} (x_0 \ge n-2 \wedge x_0 < m+n+1) \Rightarrow \forall_{n\in\mathbb{N}} \exists_{m\in\mathbb{N}} (x_0 \ge n-2) \Leftrightarrow \forall_{n\in\mathbb{N}}\ x_0 \ge n-2$

sprzeczność

$A_{n,m} = \{x \in R : n-2 \le x < m+n+1\}$

$\frac{\text{zał. } x_0 \in \bigcap\bigcup\ldots}{\perp} \Rightarrow$ żadne $x_0 \notin \bigcap\bigcup A_{n,m}$

Próbujemy wyznaczyć: $\bigcap\left(\bigcup A_{n,m}\right)$

n-a traktujemy jako coś ustalonego!

$\bigcup_{m\in\mathbb{N}} \{x \in R : n-2 \le x < m+n+1\} = \bigcup_{m\in N} \langle n-2, m+n+1) = \langle n-2, \infty)$

$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \langle n-2, \infty) = \emptyset$

Załóżmy, że $\underline{x_0 \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \langle n-2, \infty)} \Rightarrow \forall_{n\in\mathbb{N}}\ x_0 \ge n-2$ sprzeczność czyli jest na odwrót

$x \ge n-2$

Sprawdzamy negację:

$\exists_{n_0\in\mathbb{N}}\ x_0 < n_0 - 2$

Jak podać takie $n_0$?

$$n_0 = \begin{cases} \lfloor x_0 \rfloor + 3 & \text{jeśli } x_0 \ge -2 \\ 0 & \text{jeśli } x_0 < -2 \end{cases}$$

Czyli żadne $x_0$ nie należy do zbioru $\bigcap\bigcup A_{n,m}$

$\bigcap_{n\in N} \bigcup_{m\in N} A_{n,m} = \emptyset$