1. Czy istnieje taka rodzina podwójnie indeksowana $\langle A_{i,j} : i, j \in I\rangle$, że wszystkie zbiory: $\bigcup_i \bigcup_j A_{i,j}$, $\bigcup_i \bigcap_j A_{i,j}$, $\bigcap_i \bigcup_j A_{i,j}$, $\bigcap_i \bigcap_j A_{i,j}$, $\bigcup_j \bigcap_i A_{i,j}$, $\bigcap_j \bigcup_i A_{i,j}$ były parami różne? Odpowiedź uzasadnić.

Znaleziona Rodzina :

$I = \{0, 1, 2\}$

$A_{i,j} =$

$A_{0,0} = \emptyset$ $\quad A_{1,0} = \{2\}$ $\quad A_{2,0} = \{1, 2\}$

$A_{0,1} = \{0\}$ $\quad A_{1,1} = \{0, 1\}$ $\quad A_{2,1} = \{0, 2\}$

$A_{0,2} = \{1\}$ $\quad A_{1,2} = \{0, 2\}$ $\quad A_{2,2} = \{0, 1, 2\}$

miro

1) $\bigcup_j \bigcap_i A_{i,j}$

Ustalamy j:

	$i=0$	$i=1$	$i=2$	
$j=0$	$A_{0,0} = \emptyset$	$A_{1,0} = \{2\}$	$A_{2,0} = \{1, 2\}$	$\bigcap = \emptyset$
$j=1$	$A_{0,1} = \{0\}$	$A_{1,1} = \{0, 1\}$	$A_{2,1} = \{0, 2\}$	$\bigcap = \{0\}$
$j=2$	$A_{0,2} = \{1\}$	$A_{1,2} = \{0, 2\}$	$A_{2,2} = \{0, 1, 2\}$	$\bigcap = \emptyset$

$\bigcup \bigcap = \{0\}$

miro

2) $\bigcap_i \bigcup_j A_{i,j}$

Ustalamy j:

	$i=0$	$i=1$	$i=2$
$j=0$	$A_{0,0}=\emptyset$	$A_{1,0}=\{2\}$	$A_{2,0}=\{1,2\}$
$j=1$	$A_{0,1}=\{0\}$	$A_{1,1}=\{0,1\}$	$A_{2,1}=\{0,2\}$
$j=2$	$A_{0,2}=\{1\}$	$A_{1,2}=\{0,2\}$	$A_{2,2}=\{0,1,2\}$
	$\bigcup=\{0,1\}$	$\bigcup=\{0,1,2\}$	$\bigcup=\{0,1,2\}$

$\bigcap\bigcup=\{0,1\}$

miro

3) $\bigcup_i \bigcap_j A_{ij}$

Ustalamy j:

	$i=0$	$i=1$	$i=2$
$j=0$	$A_{0,0}=\emptyset$	$A_{1,0}=\{2\}$	$A_{2,0}=\{1,2\}$
$j=1$	$A_{0,1}=\{0\}$	$A_{1,1}=\{0,1\}$	$A_{2,1}=\{0,2\}$
$j=2$	$A_{0,2}=\{1\}$	$A_{1,2}=\{0,2\}$	$A_{2,2}=\{0,1,2\}$
	$\bigcap=\emptyset$	$\bigcap=\emptyset$	$\bigcap=\{2\}$

$\bigcup\bigcap=\{2\}$

miro

4) $\bigcap_{j} \bigcup_{i} A_{i,j}$

Ustalamy j:

	$i=0$	$i=1$	$i=2$	
$j=0$	$A_{0,0}=\emptyset$	$A_{1,0}=\{2\}$	$A_{2,0}=\{1,2\}$	$\bigcup=\{1,2\}$
$j=1$	$A_{0,1}=\{0\}$	$A_{1,1}=\{0,1\}$	$A_{2,1}=\{0,2\}$	$\bigcup=\{0,1,2\}$
$j=2$	$A_{0,2}=\{1\}$	$A_{1,2}=\{0,2\}$	$A_{2,2}=\{0,1,2\}$	$\bigcup=\{0,1,2\}$

$\bigcap \bigcup = \{1,2\}$

5) $\bigcup_{i} \bigcup_{j} A_{i,j}$

Ustalamy j:

	$i=0$	$i=1$	$i=2$
$j=0$	$A_{0,0}=\emptyset$	$A_{1,0}=\{2\}$	$A_{2,0}=\{1,2\}$
$j=1$	$A_{0,1}=\{0\}$	$A_{1,1}=\{0,1\}$	$A_{2,1}=\{0,2\}$
$j=2$	$A_{0,2}=\{1\}$	$A_{1,2}=\{0,2\}$	$A_{2,2}=\{0,1,2\}$
	$\bigcup=\{0,1\}$	$\bigcup=\{0,1,2\}$	$\bigcup=\{0,1,2\}$

$\bigcup \bigcup = \{0,1,2\}$

6) $\bigcap_i \bigcap_j A_{i,j}$

Ustalamy j:

	$i=0$	$i=1$	$i=2$
$j=0$	$A_{0,0}=\emptyset$	$A_{1,0}=\{2\}$	$A_{2,0}=\{1,2\}$
$j=1$	$A_{0,1}=\{0\}$	$A_{1,1}=\{0,1\}$	$A_{2,1}=\{0,2\}$
$j=2$	$A_{0,2}=\{1\}$	$A_{1,2}=\{0,2\}$	$A_{2,2}=\{0,1,2\}$
	$\bigcap=\emptyset$	$\bigcap=\emptyset$	$\bigcap=\{2\}$

$\bigcap\bigcap=\emptyset$

3. Niech $f, g\colon A \to A$. Czy jeśli dla każdego $x \in A$, $f(g(x)) = g(f(x))$, to f i g są wzajemnie swoimi funkcjami odwrotnymi? Odpowiedź uzasadnij!

Wskażę kontrprzykład:

$f, g: N \to N$

$f(n) = n+1$

$g(n) = n$

$\forall_{n \in N}\ f(g(n)) = g(f(n))$

$f(n) = g(n+1)$

$n+1 = n+1$

Założenie jest spełnione jednak f nie jest surjekcją, 0 nie jest osiągane

Ogólna klasa funkcji

$f, g: A \to A$

$f: A \to A$ żeby nie było bijekcją

$g = id_A$

2. Niech $A_{i,j} = \{X \subseteq \mathbb{N} : i \in X \wedge j \notin X\}$ dla $i, j \in \mathbb{N}$. Znajdź $\bigcup_i \bigcup_j A_{i,j}$, $\bigcup_i \bigcap_j A_{i,j}$, $\bigcup_i \bigcap_{j>i} A_{i,j}$, $\bigcap_j \bigcup_i A_{i,j}$. Odpowiedzi wykaż.

Jak to działa

$A_{1,4} = \{ \{1\}, \{0,1\}, \{0,1,2\}, \{0,1,2,3\}, \{0,1,2,3,4,5\}, \{1,2\}, \dots \}$

1) $\bigcup_i \bigcup_j A_{i,j} = \mathcal{P}(N) \setminus \{N, \emptyset\}$

Nie jesteśmy w stanie uzyskać zbioru $\emptyset$
a także nie możemy uzyskać N

Jeżeli chcę dostać dowolny ale różny od $\emptyset$ i od całego N
podzbiór to go będzie on elementem takiego $A_{i,i}$

$\emptyset \neq X \neq N \Rightarrow \emptyset \neq J = X'$

$\exists_i \exists_j X \in A_{i,j}$

$\Downarrow$ tozmany że

$\boxed{A_{\min(X), \min(X')}}$ więc $\forall_{\substack{X \subset N \\ \emptyset \neq X \neq N}} X \in \bigcup_i \bigcup_j A_{i,j}$

bo należy do wskazanego przezemnie

N nie jesteśmy w stanie uzyskać bo zawsze usuwamy
1 element !

W żadnej rodzinie nie ma zbioru pustego bo

$A_{i,j} = \{ X \subseteq N : i \in X \wedge j \notin X \}$
$i \in \emptyset$ — F, $j \notin X$ — T

tak samo dzieje się z N

2) $\bigcup_i \bigcap_j A_{i,j}$

Ustalamy to i_0. $\bigcap_j A_{i_0,j}$. $\emptyset \in \{A_{i_0,j}\} \Rightarrow \bigcap_j A_{i_0,j} = \emptyset$

$$\bigcup_i \bigcap_j A_{i,j} = \bigcup_i \emptyset = \emptyset$$

miro

3) $\bigcup_i \bigcap_{j>i} A_{i,j} = \{X \subset N : |X| < \infty, X \neq \emptyset\}$

Ustalamy i_0 $\bigcap_{j>i_0} A_{i_0,j} = \bigcap_{j>i_0} \{\{i_0\}, \dots\} = \overbrace{\underbrace{\{X \subset N : i_0 \in X, \max(X) = i_0\}}_{\text{zbiory są skończone}}}^{\bigcap_{j>i_0} A_{i_0,j}}$

$$X \in \bigcup_i \bigcap_{j>i} A_{i,j} \Leftrightarrow \exists_i \forall_{j>i} X \in A_{i,j} \Rightarrow \forall_{j>i_0} X \in A_{i_0,j}$$

$$\Updownarrow$$

$$\underbrace{i_0 \in X \text{ i } \forall_{j>i_0} j \notin X}_{X \text{ jest ograniczony z góry (jest skończony)}}$$

Przypuśćmy, że $|X| = \aleph_0 \Rightarrow \forall_{n \in N} \exists_{x \in X} x > n$

Chcąc dostać dowolny $|X| < \infty$, $X \neq \emptyset$

bierzemy $X \in A_{\max X, \max(X)+1}$

$\in A_{\max(X), \max(X)+2}$

$$\forall_{j>\max(X)} X \in A_{\max(X),j}$$

$$X \in \bigcap_{j>\max(X)} A_{\max(X),j}$$

$$X \in \bigcup_i \bigcap_j A_{i,j}$$

miro

4) $\bigcap_j \bigcup_i A_{i,j}$

Ustalamy j_0 $\bigcup_i A_{i,j_0} = \{X \subseteq \mathbb{N} : i \in X \wedge j \notin X\}$

$$\bigcup_i A_{i,j_0} = \{ X \subseteq \mathbb{N} : j_0 \notin X \}$$

zauważmy, że $\emptyset \neq X \in \bigcap_j \bigcup_i A_{i,j} \Leftrightarrow \forall_j \exists_i X \in A_{i,j} \Leftrightarrow$

$\forall_j \exists_i X \in \{X \subset \mathbb{N} : i \in X, j \notin X\}$

$\forall_j \exists_i (i \in X \wedge j \notin X)$

$\exists_i i \in X \wedge \forall_j j \notin X$

$\Downarrow$

$X \neq \emptyset$ $\quad$ $\neg \exists_j j \in X$

sprzeczność

dowolny niepusty nie należy
a pusty nie może być