

Wstęp do matematyki, 2023/2024  
ćwiczenia 9. – zadania domowe, seria 7.

13 grudnia 2023

1. Wykaż, że rodzina

$$\{X \subseteq \mathbb{N} : (\exists m \in \mathbb{N} \forall n \geq m \ 3n \notin X) \wedge (\exists k \in \mathbb{N} \forall n > k \ \{3n+1, 3n+2\} \subseteq X)\}$$

jest równoliczna ze zbiorem liczb naturalnych.

2. Udowodnij, że zbiór

$$A = \{f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : \exists k \in \mathbb{N} \forall n > k \ f(n+1) = f(n) \cdot 2023\}$$

jest przeliczalny.

3. Niech  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Udowodnij, że istnieje  $x \in \mathbb{R}$  takie, że w zbiorze  $f^{-1}[\{x\}]$  nie zawiera się żaden odcinek  $(a, b)$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a < b$ .

*Wskazówka:*  $|\mathbb{R}| > |\mathbb{N}| = |\mathbb{Q}|$ , więc nie istnieje funkcja różnowartościowa  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Q}$ .