: $\bigcap_{m\in\mathbb{N}} \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_{n,m}$.

$A_{n,m} = \{x \in R:\ n-2 \leq x < m+n+1\}$

2) $\bigcap_{m\in N} \bigcup_{n\in N} A_{n,m}$

Ustalamy m-a:

$m = 0$

$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_{n,0} = ?$

$n=0$

$A_{0,0} = \{x\in R;\ 0-2 \leq x < 0+0+1\}$
$= \langle -2, 1)$

$n=1$

$A_{1,0} = \{x\in R:\ 1-2 \leq x < 0+1+1\}$
$= \langle -1, 2)$

$n=2$

$A_{2,0} = \{x\in R:\ 2-2 \leq x < 0+2+1\}$
$= \langle 0, 3)$

$\bigcup_{n\in N} A_{n,0} = \langle -2, +\infty)$

$m = 1$

$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_{n,1} = ?$

$n=0$

$A_{0,1} = \{x\in R: 0-2 \leq x < 1+0+1\}$
$= \langle -2, 2)$

$n=1$

$A_{1,1} = \{x\in R;\ 1-2 \leq x < 1+1+1\}$
$= \langle -1, 3)$

$n=2$

$A_{2,1} = \{x\in R:\ 2-2 \leq x < 1+2+1\}$
$= \langle 0, 4)$

$\bigcup_{n\in N} A_{n,1} = \langle -2, +\infty)$

$m = 2$

$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_{n,2}$

$n=0$

$A_{0,2} = \{x\in R:\ 0-2 \leq x < 2+0+1\}$
$= \langle -2, 3)$

$n=1$

$A_{1,2} = \{x\in R:\ 1-2 \leq x < 2+1+1\}$
$= \langle -1, 4)$

$n=2$

$A_{2,2} = \{x\in R:\ 2-2 \leq x < 2+2+1\}$
$= \langle 0, 5)$

$\bigcup_{n\in N} A_{n,2} = \langle -2, +\infty)$

Przypuszczamy

$\bigcap_{m\in N} \bigcup_{n\in N} A_{n,m} = \langle -2, +\infty)$

$x \in \bigcap_{t\in T} A_t \Leftrightarrow \forall_{t\in T}\ x\in A_t$

$x \in \bigcup_{t\in T} A_t \Leftrightarrow \exists_{t\in T}\ x\in A_t$

Niech $x_0 \in \bigcap_{m\in N} \bigcup_{n\in N} A_{n,m} \Leftrightarrow \forall_{m\in N}\ x_0 \in \bigcup_{n\in N} A_{n,m} \Leftrightarrow \forall_{m\in N} \exists_{n\in N}\ x_0 \in A_{n,m} \Leftrightarrow$

$A_{n,m} = \{x\in R;\ n-2 \leq x < m+n+1\} \Leftrightarrow \forall_{m\in N} \exists_{n\in N} (x_0 \geq n-2 \wedge x_0 < m+n+1)$

$\bigcap \bigcup \ldots = \langle -2, +\infty)$

$\forall_{x_0}.\ x_0 \in \bigcap\bigcup \ldots \Leftrightarrow x_0 \in \langle -2, +\infty)$

(1) $x_0 \in \bigcap\bigcup \ldots \Rightarrow x_0 \in \langle -2, +\infty$ $\overset{\text{transpozycja}}{\rightsquigarrow}$ $x_0 \notin \langle -2, +\infty) \Rightarrow x_0 \notin \bigcap\bigcup \ldots$

(2) $x_0 \in \langle -2, +\infty) \Rightarrow x_0 \in \bigcap\bigcup \ldots$

transpozycja (1) jeżeli $x_0 < -2$ to

$x_0 \notin \bigcap\bigcup A_{n,m}$

bo nie jest spełnione

$x_0 \geq \underbrace{n-2}_{-2}$ bo dla $n=0$

(2) Jeśli $x_0 \geq -2$

$\forall_{m\in N} \exists_{n\in N} (x_0 \geq n-2 \wedge x_0 < m+n+1)$

$\Updownarrow$

$\exists_{n\in N} (x_0 \geq n-2) \wedge \forall_{m\in N} \exists_{n\in N} (x_0 < m+n+1)$

tym n jest $n=0$

Ustalamy dowolny $m_0 \in N$

$\exists_{n\in N}\ x_0 < m+n+1$

$\underbrace{x_0 - m_0 - 1}_{\text{stała}} < n$

każdy $n > x_0 - m_0 - 1$

to zachodzi wobec czego istnieje taki n

np: $n = \lfloor x_0 - m_0 - 1 \rfloor + 1$

Zatem:

$\bigcap_{m\in N} \bigcup_{n\in N} A_{n,m} = \langle -2, +\infty)$