1. Udowodnij, że

$$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C).$$

Niech $(x,y) \in A \times (B \cup C) \Leftrightarrow x \in A \wedge y \in (B \cup C)$

$\Leftrightarrow x \in A \wedge (y \in B \vee y \in C) \overset{1)}{\Leftrightarrow} (x \in A \wedge y \in B) \vee (x \in A \wedge y \in C)$

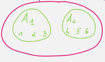
$\Leftrightarrow (x,y) \in (A \times B) \vee (x,y) \in (A \times C) \Leftrightarrow (x,y) \in (A \times B) \cup (A \times C)$

1) Rozdzielność koniunkcji względem alternatywy

Wobec dowolności pary (x,y) zbiory są sobie równe

2. Rozstrzygnij, czy istnieje rodzina $\mathcal{A}$ taka, że $\mathcal{P}(\bigcup \mathcal{A}) \subseteq \mathcal{A}$. Czy istnieje rodzina, która nie ma tej własności? Odpowiedź uzasadnij.

Przykład rodziny zbiorów nie posiadającej tej własności:

$\mathcal{A} =$ 

$\bigcup \mathcal{A} = \{1,2,3,4,5,6\}$

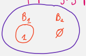
$P(\bigcup \mathcal{A}) = P(\{1,2,3,4,5,6\}) =$

$\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \dots \{6\}, \dots, \underbrace{\{1,2,3\}}_{A_1}, \dots \underbrace{\{4,5,6\}}_{A_2}, \dots, \{1,2,3,4,5,6\}\}$

Wśród podzbiorów występują zbiory których nie znajdziemy w rodzinie zbiorów $\mathcal{A}$

$\{1\} \notin \mathcal{A}$

Przykład Rodziny posiadającej powyższą własność

$\mathcal{B} =$ 

$\bigcup \mathcal{B} = \{1\}$

$\bigcup \mathcal{B} = \{1\} \cup \emptyset = \{1\}$

$P(\bigcup \mathcal{B}) = \{\emptyset, \{1\}\}$

$\mathcal{B} = \{B_1, B_2\} = \{\{1\}, \emptyset\}$

$P(\bigcup \mathcal{B}) = \{\emptyset, \{1\}\} \overset{?}{\subseteq} \mathcal{B}$ TAK

Każdy podzbiór zawiera się w rodzinie zbiorów.

Moje Wnioski i obserwacje warunkiem koniecznym na to aby rodzina zbiorów posiadała powyższą właściwość jest:

1. Jeżeli $P(\bigcup \mathcal{A}) \subseteq \mathcal{A}$ to $|P(\bigcup \mathcal{A})| \leq |\mathcal{A}|$
2. Typ rodziny zbiorów która na pewno posiada powyższą własność to rodzina złożona ze zbioru pustego i zbioru zawierającego dowolną wartość "c"

   $\mathcal{A} = \{\emptyset, \{c\}\}$
3. Rozważmy rodzinę zbiorów postaci:

   $\mathcal{A} = \{\underbrace{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}}_{P(B)}\}$

   $\bigcup \mathcal{A} = \emptyset \cup \{1\} \cup \{2\} \cup \{3\} \cup \dots \cup \{1,2,3\} = \{1,2,3\}$

   $P(\bigcup \mathcal{A}) = \mathcal{A}$

   Jeżeli $\mathcal{A} = P(B)$ to $\bigcup \mathcal{A} = B$

   $P(\bigcup \mathcal{A}) = P(B) = \mathcal{A}$

   $P(\bigcup \mathcal{A}) \subseteq \mathcal{A} \wedge \mathcal{A} \subseteq P(\bigcup \mathcal{A})$

Drugi typ rodziny zbiorów spełniającej własność z zadania

3. Niech $\mathcal{A} = \{(x, x+7) : x \in \mathbb{R}\}$. Wyznaczyć $\bigcap \mathcal{A}$ oraz $\bigcup \mathcal{A}$.

Niektóre zbiory zawarte w rodzinie $\mathcal{A} = \{(1,7), (2,8), (9,16), \dots\}$

Łatwo zauważyć, że jesteśmy w stanie wskazać 2 zbiory które nie będą posiadać części wspólnej np:

$(1,7) \cap (9,16) = \emptyset$

$\bigcap \mathcal{A} = \{a : \forall_{x \in \mathbb{R}}\ a \in (x, x+7)\}$

Niech $a_0 \in \bigcap \mathcal{A} \Rightarrow \forall_{x \in \mathbb{R}}\ a_0 \in (x, x+7) \Rightarrow a_0 \in (a_0, a_0+7)$

sprzeczność

stąd $\bigcap \mathcal{A} = \emptyset$

$\bigcup \mathcal{A} = \{a : \exists_{x \in \mathbb{R}}\ a \in (x, x+7)\}$

Dla dowolnego $a \in \mathbb{R}$ $a \in (a-1, a+6) \Rightarrow \forall_{a \in \mathbb{R}}\ a \in \bigcup \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup \mathcal{A} = \mathbb{R}$