Wstęp do matematyki, 2023/2024
ćwiczenia 5. – zadania domowe – seria 4.

15 listopada 2023

1. Udowodnij, że funkcja $f\colon \mathcal{P}(A)^B \to \mathcal{P}(A \times B)$ taka, że dla każdego $\varphi\colon B \to \mathcal{P}(A)$,
$$f(\varphi) = \{\langle a, b\rangle \in A \times B\colon a \in \varphi(b)\}$$
jest bijekcją.

2. Niech $A_{n,m} = \{x \in \mathbb{R}\colon n - 2 \leq x < m + n + 1\}$ dla $n, m \in \mathbb{N}$.najdź $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{m\in\mathbb{N}} A_{n,m}$ oraz $\bigcap_{m\in\mathbb{N}} \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_{n,m}$. Przeprowadź odpowiednie dowody przedstawionych wyników.

3. Udowodnij, że dla niepustych zbiorów S, T oraz dowolnej rodziny podwójnie indeksowanej $\langle A_{t,s}\colon t \in T, s \in S\rangle$ zachodzi
$$\bigcup_{s\in S} \bigcap_{t\in T} A_{t,s} = \bigcap_{f\in T^S} \bigcup_{s\in S} A_{f(s),s}.$$
Wskazówka: wydaje się, że najłatwiej poszczególne dowody w tym zadaniu przeprowadzać nie wprost.