2. Udowodnij, że zbiór

$$A = \{f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : \exists_{k\in\mathbb{N}} \forall_{n>k} f(n+1) = f(n)\cdot 2023\}$$

jest przeliczalny.

$$A = \{ f \in N^N : \exists_{k\in N} \forall_{n>k} f(n+1) = f(n)\cdot 2023 \}$$

$$\langle 1, 2, 3, 100, 123, 146, 179, 200, \underset{\uparrow k}{1}, 1\cdot 2023, 2023^2, 2023^3, \dots \rangle$$

Definiujemy rodzinę zbiorów:

$$A_{k_0} = \{ f \in A : k_0 = \min\{ k : \exists_{k\in N} \forall_{n>k} f(n+1) = f(n)\cdot 2023 \} \}$$

Zauważamy, że:

$A = \bigcup_{k=0} A_k$, a ponadto, że zbiory z rodziny $\{A_k\}$ są parami rozłączne

$$\forall_{k\in N} \; |A_k| = |\underbrace{N \times N \times N \times \dots \times N}| = |N|^k = \aleph_0$$

produkt zbiorów przeliczalnych jest przeliczalny!

$$|A| = |\bigcup_{k=0}^{\infty} A_k| \overset{\text{parami rozłączne}}{\Rightarrow} |A| = \sum_{k=0}^{\infty} |A_k|$$

to jest przeliczalna suma (parami rozłącznych) zbiorów przeliczalnych a więc $|A| = \aleph_0$

nie musimy tego użyć

Są parami rozłączne bo minimum jest jednoznacznie wyznaczone!

Jeżeli jakiś ciąg podpada pod jeden schemat z A_1 to nie może być ciągiem z A_2