3. Udowodnij, że dla niepustych zbiorów S, T oraz dowolnej rodziny podwójnie indeksowanej $\langle A_{t,s} : t \in T, s \in S \rangle$ zachodzi

$$\bigcup_{s\in S}\bigcap_{t\in T} A_{t,s} = \bigcap_{f\in T^S}\bigcup_{s\in S} A_{f(s),s}.$$

Wskazówka: wydaje się, że najłatwiej poszczególne dowody w tym zadaniu przeprowadzać nie wprost.

$\langle A_{t,s} : t \in T, s \in S \rangle$

$\bigcup_{s\in S}\bigcap_{t\in T} A_{t,s} = \bigcap_{f\in T^S}\bigcup_{s\in S} A_{f(s),s}$

Nie wprost: $A_1 \land A_2 \land \dots \land A_m \Rightarrow T$

$\neg T \Rightarrow \neg(A_1 \land A_2 \land A_3 \land \dots \land A_m)$

$\neg T \Rightarrow \neg Z$

1 $\subseteq$)

$\underbrace{x \notin \bigcap_{f\in T^S}\bigcup_{s\in S} A_{f(s),s}}_{\text{poprzednik}} \Rightarrow \underbrace{x \notin \bigcup_{s\in S}\bigcap_{t\in T} A_{t,s}}_{\text{następnik}}$

$x \in \bigcap_{t\in T} A_t \Leftrightarrow \forall_{t\in T}\, x \in A_t$

$x \in \bigcup_{t\in T} A_t \Leftrightarrow \exists_{t\in T}\, x \in A_t$

$\neg(x \in \bigcap_{f\in T^S}\bigcup_{s\in S} A_{f(s),s}) \Rightarrow \neg(\forall_{f:S\to T}\, x \in \bigcup_{s\in S} A_{f(s),s})$

$x \in \bigcap_{f\in T^S}$

$\Rightarrow \neg(\forall_{f:S\to T}\exists_{s\in S}\, x \in A_{f(s),s})$

$\Rightarrow \underbrace{\exists_{f:S\to T}\forall_{s\in S}\, x \notin A_{f(s),s}}_{\text{poprzednik}} \Rightarrow \forall_{s\in S}\exists_{\substack{f:S\to T\\ s\mapsto t}}\, x \notin A_{f(s),s}$

• Przeniesienie kwantyfikatora egzystencjalnego za ogólny (nie odwrotnie!)
$\exists x\forall y\phi(x,y) \Rightarrow \forall y\exists x\phi(x,y)$

To znamy, że jak weźmiemy $s_0 \in S$
$\exists_{f:S\to T}\, x \notin A_{\underbrace{f(s_0)}_{=t_0\in T},s_0}$

$\Rightarrow \exists_{f:S\to T}\exists_{t_0\in T}(t_0 = f(s_0) \land x \notin A_{t_0,s_0})$

$\Downarrow$

$\exists_{f:S\to T}\exists_{t_0\in T}\, x \notin A_{t_0,s_0}$

$\Downarrow$

$\exists_{t_0\in T}\, x \notin A_{t_0,s_0}$ wobec dowolności $s_0 \in S$

$\Downarrow$

Rozpisujemy następnik:

$x \notin \bigcup_{s\in S}\bigcap_{t\in T} A_{t,s}$

$\underbrace{\neg(x \in \bigcup_{s\in S}\bigcap_{t\in T} A_{t,s})}_{\text{następnik}} \Leftrightarrow \neg(\exists_{s\in S}\, x \in \bigcap_{t\in T} A_{t,s}) \Leftrightarrow \neg(\exists_{s\in S}\forall_{t\in T}\, x \in A_{t,s}) \Leftrightarrow \underbrace{\forall_{s\in S}\exists_{t\in T}\, x \notin A_{t,s}}$

$\Leftrightarrow$ następnik

Niniejszym pokazaliśmy, (nie wprost) że

$x \in \bigcup_{s\in S}\bigcap_{t\in T} A_{t,s} \Rightarrow x \in \bigcap_{f\in T^S}\bigcup_{s\in S} A_{f(s),s}$

$$\bigcup_{s\in S}\bigcap_{t\in T} A_{t,s} = \bigcap_{f\in T^S}\bigcup_{s\in S} A_{f(s),s}.$$

2) $\supseteq$)

$\bigcap_{f\in T^S}\bigcup_{s\in S} A_{f(s),s} \subseteq \bigcup_{s\in S}\bigcap_{t\in T} A_{t,s}$

z transpozycji: $p \Rightarrow q$

: $\neg q \Rightarrow \neg p$

$x \in \bigcap_{f\in T^S}\bigcup_{s\in S} A_{f(s),s} \Rightarrow x \in \bigcup_{s\in S}\bigcap_{t\in T} A_{t,s}$

z transpozycji:

$\neg(x \in \bigcup_{s\in S}\bigcap_{t\in T} A_{t,s}) \Rightarrow \neg(x \in \bigcap_{f\in T^S}\bigcup_{s\in S} A_{f(s),s})$

Rozpisujemy poprzednik:

$\neg(x \in \bigcup_{s\in S}\bigcap_{t\in T} A_{t,s}) \Leftrightarrow \neg(\exists_{s\in S}\, x \in \bigcap_{t\in T} A_{t,s}) \Leftrightarrow \neg(\exists_{s\in S}\forall_{t\in T}\, x \in A_{t,s}) \Leftrightarrow \forall_{s\in S}\exists_{t\in T}\, x \notin A_{t,s} \Rightarrow \exists_{f:S\to T}\forall_{s\in S}\exists_{t\in T}\, x \notin A_{t,s} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \exists_{f:S\to T}\forall_{s\in S}\exists_{t\in T}(f(s) = t \land x \notin A_{t,s}) \Leftrightarrow \exists_{f:S\to T}\forall_{s\in S}\exists_{t\in T}(f(s) = t \land x \notin A_{f(s),s})$

prawo symplifikacji $\frac{p \land q}{q}$

$\Rightarrow \exists_{f:S\to T}\forall_{s\in S}\exists_{t\in T}(x \notin A_{f(s),s})$

$\Leftrightarrow \exists_{f:S\to T}\forall_{s\in S}\, x \notin A_{f(s),s}$

$\Leftrightarrow \exists_{f\in T^S}\forall_{s\in S}\, x \notin A_{f(s),s}$

$\Leftrightarrow \underbrace{\exists_{f\in T^S}\forall_{s\in S}\, x \notin A_{f(s),s}}_{\text{to samo na koniec}}$

Następnik

$\neg(x \in \bigcap_{f\in T^S}\bigcup_{s\in S} A_{f(s),s}) \Leftrightarrow \neg(\forall_{f\in T^S}\, x \in \bigcup_{s\in S} A_{f(s),s}) \Leftrightarrow \neg(\forall_{f\in T^S}\exists_{s\in S}\, x \in A_{f(s),s}) \Leftrightarrow \exists_{f\in T^S}\forall_{s\in S}\, x \notin A_{f(s),s}$

Niniejszym pokazaliśmy, (nie wprost) że

$x \in \bigcup_{s\in S}\bigcap_{t\in T} A_{t,s} \Leftarrow x \in \bigcap_{f\in T^S}\bigcup_{s\in S} A_{f(s),s}$

wobec czego

$x \in \bigcup_{s\in S}\bigcap_{t\in T} A_{t,s} \Leftrightarrow x \in \bigcap_{f\in T^S}\bigcup_{s\in S} A_{f(s),s}$