

2. Niech \sim będzie relacją zdefiniowaną na $\mathcal{P}(N)$, w taki sposób, że $A \sim B$, jeśli $A \subseteq B$ oraz $B \setminus A$ jest skończonym zbiorem o porządku liczbale elementów.

- Udowodnij, że \sim jest relacją częściowo uporządkowaną na $\mathcal{P}(N)$.
- Narysuj diagram Hassego porządku $\mathcal{P}(\{0, 1, 2, 3\})$, z. Znajdź elementy minimalne, maksymalne, największe i najmniejsze (o ile istnieją).
- Znajdź (o ile istnieją) sup oraz inf zbioru $\{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2, 3\}\}$ w porządku \sim .

a) Względnie relacyjny a więc relacja musi być zwrotna, antysymetryczna i przechodnia:

czy zwrotna:

$$\forall x \in X (x, x) \in R$$

$$\forall A \in \mathcal{P}(N) (A, A) \in R \text{ gdyż } A \subseteq A \text{ i } |A \setminus A| = 0 < \infty$$

$$\Rightarrow A \subseteq A \text{ i } 0 = 0$$

$$\textcircled{1} \quad \textcircled{2}$$

spełnione

jest zwrotna

$$\text{czy jest antysymetryczna: } x R y \text{ i } y R x \Rightarrow x = y$$

$$\forall A, B \in \mathcal{P}(N) (A, B) \in R \text{ i } (B, A) \in R \Rightarrow A = B$$

przeanalizujemy

$$\frac{p \wedge q}{p}$$

$$(A, B) \in R \Leftrightarrow A \subseteq B \text{ i } \nexists B \setminus A = \infty$$

$$(B, A) \in R \Leftrightarrow B \subseteq A \text{ i } \nexists A \setminus B = \infty \Rightarrow A \subseteq B \text{ i } B \subseteq A \Leftrightarrow A = B$$

$$(A, B) \in R \text{ i } (B, A) \in R \Leftrightarrow (A \subseteq B \text{ i } \nexists B \setminus A = \infty) \wedge (B \subseteq A \text{ i } \nexists A \setminus B = \infty)$$

$$\Leftrightarrow A \subseteq B \text{ i } \nexists B \setminus A = \infty \wedge B \subseteq A \text{ i } \nexists A \setminus B = \infty$$

przeanalizujemy:

$$\Leftrightarrow A \subseteq B \text{ i } B \subseteq A \Leftrightarrow A = B$$

jest antysymetryczna

czy przechodnia:

$$\forall (A, B) \in R \text{ i } (B, C) \in R \Rightarrow (A, C) \in R$$

$$(A, B) \in R \Leftrightarrow A \subseteq B \text{ i } \nexists B \setminus A = \infty$$

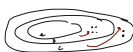
$$(B, C) \in R \Leftrightarrow B \subseteq C \text{ i } \nexists C \setminus B = \infty$$

$$(B, C) \in R \Leftrightarrow B \subseteq C \text{ i } \nexists C \setminus B = \infty$$

$$A \subseteq B \text{ i } \nexists B \setminus A = \infty \wedge B \subseteq C \text{ i } \nexists C \setminus B = \infty$$

$$A \subseteq B \subseteq C \text{ więc } A \subseteq C$$

$$\Rightarrow A \subseteq C \text{ i } \nexists C \setminus A = \infty \text{ i } \nexists C \setminus B = \infty \Rightarrow A \subseteq C \text{ i } \nexists C \setminus A = \infty$$



$$\nexists C \setminus A = \infty$$

czy jest przechodnia

$$(C \setminus A) = (C \setminus B) \cup (B \setminus A) = (C \setminus B) \cup (B \setminus A) = ((C \setminus B) \cup B) \cap ((C \setminus B) \cup A) =$$

$$= ((C \cup B) \cap (B \cup B)) \cap ((C \cup A) \cap (B \cup A)) =$$

$$= (C \cup B) \cap (C \cup A) \cap (B \cup A) =$$

$$(C \setminus B) \cap (B \setminus A) = (C \setminus B) \cap (B \setminus A) =$$

$$= C \cap B^c \cap B \cap A^c = \emptyset$$

są rozłączne

$$= C \cap (C \cup A) \cap (B \cup A) = C \cap (B \cup A) = C \cap A^c = C \setminus A \quad \checkmark$$

Pokazaliśmy, że suma dwóch nieskończonych zbiorów $C \setminus B$ i

$B \setminus A$ daje zbiór $C \setminus A$

$$(C \setminus B) \cup (B \setminus A) = C \setminus A$$

$$|(C \setminus B) \cup (B \setminus A)| = |C \setminus A|$$

$$2\infty + 2\infty = |C \setminus A|$$

$$|C \setminus A| = 2\infty$$

$$\nexists C \setminus A = 2\infty$$

relacja jest zwrotna

a antysymetryczna i przechodnia,

czyli jest relacją częściowo porządkowaną