Università degli Studi di Verona
A.A. 2017-2018

APPUNTI DI ALGEBRA LINEARE

Creato da: Davide Zampieri

DEFINIZIONI, TEOREMI E DIMOSTRAZIONI IMPORTANTI

Def. *Rango*: la dimensione dello spazio delle colonne di una matrice **A** si chiama *rango* di **A** e si denota con **rk(A) = dim C(A)**.
Teorema *nullità + rango*: se **f: V → W** è lineare e **V** è finitamente generato, allora **Im(f)** è finitamente generato e **dim V = dim N(f) + dim Im(f)**.
Teorema: Per una matrice **A m×n**, le seguenti proprietà sono equivalenti:

- **A** ammette inversa destra;
- il sistema **Ax = b** ammette almeno una soluzione per ogni scelta del vettore **b**;
- **A** ha rango **m**.

Teorema: Per una matrice **A m×n**, le seguenti proprietà sono equivalenti:

- **A** ammette inversa sinistra;
- il sistema **Ax = 0** ammette solo la soluzione nulla;
- **A** ha rango **n**;
- la matrice A^HA è invertibile.

Def. *Insieme di generatori*: un insieme finito di vettori ***A*** nello spazio vettoriale **V** si dice un *insieme di generatori* di **V** se **<*A*> = V**, cioè ogni vettore di **V** si può scrivere come combinazione lineare dei vettori dell'insieme ***A***.
Def. *Insieme linearmente indipendente*: l'insieme $A = \{v_1; v_2; \dots; v_n\}$ è *linearmente indipendente* se e solo se, per $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in C$, da $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n = 0$ segue che $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0, \dots, \alpha_n = 0$.

Def. *H-trasposta*: data una matrice **A**, si chiama *H-trasposta* di **A**, e la si indica con A^H, la matrice che si ottiene da **A** scambiandone le righe con le colonne e coniugandone tutti i coefficienti.
Def. *Prodotto interno standard*: il *prodotto interno standard* su C^n è $(v \mid w) = v^H w$.
Def. *Ortogonalità*: se **V** è uno spazio vettoriale euclideo, si dice che il vettore **w** di **V** è *ortogonale* al vettore **u** di **V**, e si scrive $w \perp u$, se almeno uno tra **w** e **u** è il vettore nullo, cioè se $(w \mid u) = 0$.
Def. *Complemento ortogonale*: l'insieme di tutti i vettori di **V** ortogonali a **U** si chiama il *complemento ortogonale* di **U** in **V** e si indica con il simbolo $U^\perp$.

Def. *Autovalore*: uno scalare **λ** t.c. esista $v \neq 0$ per cui $Av = \lambda v$ si dice un *autovalore* della matrice **A**.
Def. *Autovettore*: se **λ** è un autovalore di **A**, ogni vettore $v \neq 0$ per cui si ha $Av = \lambda v$ si dice un *autovettore* di **A** relativo a **λ**.
Def. *Autospazio*: $E_A(\lambda) = \{ v \in C^n \mid Av = \lambda v \} = N(A - \lambda I_n)$.

Dim. Se **λ** è autovalore di **A** e **B** è simile ad **A**, allora **λ** è autovalore di **B** e gli autospazi hanno la stessa dimensione:

- $A = SBS^{-1} \rightarrow p_A(X) = \det(A - XI) = \det(SBS^{-1} - XI) = \det(S\,(B - XI)\,S^{-1}) = \det S \det(B-XI)\,(\det S)^{-1} = \det(B-XI) = p_B(X)$ → **A** e **B** hanno lo stesso polinomio caratteristico, e quindi anche gli stessi autovalori
- $Av = \lambda v = Bv,\ v \in E_B(\lambda)$: $Bv = \lambda v$
  $S^{-1}ASv = \lambda v \rightarrow A(Sv) = \lambda(Sv) \rightarrow Sv \in E_A(\lambda)$
  abbiamo definito $f: E_B(\lambda) \rightarrow E_A(\lambda)$ lineare t.c. $f(v) = Sv$ e $g: E_A(\lambda) \rightarrow E_B(\lambda)$ t.c. $g(w) = S^{-1}w$
  siccome $f \circ g = id(E_A(\lambda))$ e $g \circ f = id(E_B(\lambda))$, f è iniettiva e suriettiva e quindi $\dim(E_A(\lambda)) = \dim(E_B(\lambda))$

Dim. Se **λ** è un autovalore della matrice **A n×n**, allora λ^2+1 è un autovalore di A^2+I_n:
Esiste $v \neq 0$ *per cui* $Av = \lambda v$ → $(A^2+I_n)v = A^2 v + I_n v = A(Av) + v = A(\lambda v) + v = \lambda(Av) + v = \lambda(\lambda v) + v = \lambda^2 v + v = (\lambda^2+1)v$

Dim. Se **A** è una matrice **m×n** e **F** una matrice invertibile **m×m**, allora **rk(A) = rk(FA)**:
$f_A: C^n \rightarrow C^m$, $f_F: C^m \rightarrow C^m$ *bi-iettiva* → **rk(f_A) = rk($f_F \circ f_A$) = rk(f_{FA})**

Dim. Date le applicazioni lineari **f: U → V** e **g: V → W**, si ha **dim Im(g ∘ f) ≤ dim Im(f)** e **dim Im(g ∘ f) ≤ dim Im(g)**:
g ∘ f: U → W** e **dim U = dim N(f) + Im(f) = dim N(g ∘ f) + dim Im(g ∘ f)
Se **f(y) = 0** anche **g(f(y)) = g(0) = 0**, cioè **g ∘ f(y) = 0:**

- **N(f) ⊆ N(g ∘ f)**, quindi **dim N(f) ≤ dim N(g ∘ f)** → **dim Im(f) = dim N(g ∘ f) – dim N(f) + dim Im(g ∘ f)** → **dim Im(g ∘ f) ≤ dim Im(f)**
- **Im(g ∘ f) ⊆ Im(g)**, quindi **dim Im(g ∘ f) ≤ dim Im(g)**

Dim. Data la matrice **A** di forma **m×n**, allora **rk(A) = rk(A^H)**
Sia **U** una forma ridotta di **A**, allora **rk(A) = dim C(A) = dim C(U) = dim C(U^H) = dim C(A^H) = rk(A^H)** dove **dim C(U) = dim C(U^H)** dipende dal fatto che il numero di colonne dominanti di **U** coincide con il numero delle sue righe non nulle.

PROCEDIMENTI PER RISOLVERE GLI ESERCIZI

(E1)

- *Trovare la decomposizione* **P^TLU** *per ogni* **α ∈ C** *della matrice* **A_α m×n**
  Si esegue l'eliminazione in avanti sulla matrice **A_α** ottenendo la matrice **U_α**.
  La matrice **L_α** si ottiene riscrivendo le operazioni elementari effettuate (dalla prima all'ultima) in questo modo:
  - moltiplicazione di una riga per uno scalare non nullo **$E_i(c)$ → $E_i(1/c)$**
  - somma del multiplo di una riga ad un'altra riga **$E_{ij}(d)$ → $E_{ij}(-d)$**

  La matrice **L_α** si disegna riempiendo una matrice **m×m** con i coefficienti delle operazioni elementari riscritte ai posti **ii** o **ij** (a seconda dell'operazione elementare); se rimangono posti liberi sulla diagonale si riempiono con **1**; se rimangono posti liberi fuori dalla diagonale si riempiono con **0**.
  La matrice **P^T** si ottiene elencando gli scambi di riga **E_{ij}** dal primo all'ultimo.
  Per controllare il risultato basta moltiplicare **L_α** per **U_α** e vedere se si ottiene **A_α** (ricordarsi gli eventuali scambi di righe descritti dalla matrice **P^T**).
  Se durante l'eliminazione abbiamo escluso degli **α**, bisognerà trattarli a parte rifacendo l'eliminazione sulla matrice iniziale sostituendo a **α** il valore critico.
- *Trovare una base ortogonale di* **C(A_α)** *e di* **N(A_α)**
  Una base di **C(A_α)** si ottiene con i vettori corrispondenti alle colonne dominanti (quelle che hanno il pivot) ottenute dopo l'eliminazione in avanti. I vettori avranno dimensione **m×1**.
  Una base di **N(A_α)** si ottiene scrivendo le equazioni del sistema che si ottiene dopo l'eliminazione all'indietro; i vettori si costruiscono sostituendo alle variabili libere l'identità (a seconda del numero di vettori) e ricavando il valore delle altre variabili dalle equazioni. I vettori avranno dimensione **n×1**.
  Una base ortogonale si ottiene applicando GS ai vettori **v_i** della base:
  - GS1 → **u_1** = **v_1**; (**u_1** | **u_1**) = **u_1^H u_1**
  - GS2 → **α_{12}** = (**u_1** | **v_2**) / (**u_1** | **u_1**) se **$u_1 \neq 0$**; **α_{12} = 0** se **$u_1 = 0$**; **u_2** = **v_2** - **α_{12} u_1**; (**u_2** | **u_2**) = **u_2^H u_2**
- *Trovare per quali valori di* **α** *il sistema lineare rappresentato dalla matrice* **A_α** *ha soluzione*
  Se tutte le colonne hanno un pivot, allora il sistema ha una soluzione.
  Se compare una riga del tipo **0 … 0 | n** con **n ≠ 0**, allora il sistema non ha soluzioni.
  Se ci sono colonne senza pivot (e conseguenti righe nulle), allora il sistema ha infinite soluzioni, perché ci sarà una variabile libera che può assumere tutti i valori (attraverso il parametro **t**).

Ricordarsi di controllare i valori critici di **α**.

(E2)

- *Determinare la matrice* **B** *associata a f rispetto alle basi canoniche*
  f: C^n → C^n con *B* base di **C^n**
  Innanzitutto, si dimostra che *B* è una base di **C^n** scrivendo la matrice contenente i vettori che compongono la base *B* e calcolandone il rango: se il rango è uguale a **n**, allora *B* è una base di **C^n**.
  Poi si scrivono le seguenti relazioni:
  - **(0) C_E(f(v)) = B C_E(v)** → relazione che voglio dimostrare
  - **(1) C_B(f(v)) = A C_B(v)** → relazione che conosco
  - **(2) C_E(v) = $M_{E\leftarrow B}$ C_B(v)** → prima relazione del cambiamento di base
  - **(3) C_E(w) = $M_{E\leftarrow B}$ C_B(w)** → seconda relazione del cambiamento di base (solo se vogliamo cambiare base sia nel dominio che nel codominio)

  La matrice **A** contiene le coordinate rispetto alla base *B* di **f(v_i)** e si scrive trattando i **v_i** corrispondenti agli **f(v_i)** come **e_i**, ovvero i vettori della base canonica.
  Poi si applicano le relazioni in questo modo: **C_E(f(v)) = $M_{E\leftarrow B}$ C_B(f(v)) = $M_{E\leftarrow B}$ A C_B(v) = $M_{E\leftarrow B}$ A $M_{E\leftarrow B}^{-1}$ C_E(v)**; perciò la matrice **B** sarà **$M_{E\leftarrow B}$ A $M_{E\leftarrow B}^{-1}$**.
  A questo punto si calcola l'inversa di **$M_{E\leftarrow B}$** (che non è altro che la matrice contenente i vettori che compongono la base *B*) e si controlla che moltiplicando il risultato ottenuto con la matrice originale si ottenga l'identità.
- *Calcolare la dimensione dell'immagine di f*
  Bisogna calcolare il rango di **B**, in quanto **dim Im(f) = dim C(B) = rk(B)**.
- *Calcolare il rango di f*
  Bisogna calcolare il rango di **B**, in quanto **dim Im(f) = dim C(B) → rk(f) = rk(B)**.
- *Calcolare una base dello spazio nullo e dell'immagine dell'applicazione lineare f*
  Una base di **Im(f) = C(B)** si ottiene con i vettori corrispondenti alle colonne dominanti (quelle che hanno il pivot) ottenute dopo l'eliminazione in avanti.
  Una base di **N(f) = N(B)** si ottiene scrivendo le equazioni del sistema che si ottiene dopo l'eliminazione all'indietro sulla matrice **B**; i vettori si costruiscono sostituendo alle variabili libere l'identità (a seconda del numero di vettori) e ricavando il valore delle altre variabili dalle equazioni.
  Per controllare se i calcoli sono giusti: **dim C^n = dim N(f) + dim Im(f)**.
- *Dire se la matrice* **B** *è diagonalizzabile*
  Si calcola il polinomio caratteristico **p_B(X) = det(B – XI)**.
  La matrice **B n×n** è diagonalizzabile se: ha **n** autovalori distinti; oppure, per ogni autovalore, vale che la molteplicità algebrica **m** è uguale a quella geometrica **d**.
- *Dire se* **w ∈ Im(f)** *e, se sì, trovare* **v ∈ C^n** *tale che* **f(v) = w**
  Si risolve il sistema **Bv = w**:
  - se tutte le colonne hanno un pivot, allora il sistema ha una soluzione
  - se compare una riga del tipo **0 … 0 | n** con **n ≠ 0**, allora il sistema non ha soluzioni
  - se ci sono colonne senza pivot (e conseguenti righe nulle), allora il sistema ha infinite soluzioni, perché ci sarà una variabile libera che può assumere tutti i valori (attraverso il parametro **t**)

  Se il sistema ha soluzione, **v** sarà il vettore colonna che ha come righe i valori delle variabili.

(E3)

- *Trovare per quali valori di* **β** *la matrice* **B_β n×n** *è diagonalizzabile*
  Si calcola il polinomio caratteristico **$p_{B\beta}$(X) = det(B_β – XI)**.

Se un autovalore dipende da **β** bisogna dividere i casi:

- l'autovalore che dipende da **β** deve essere diverso dagli altri autovalori per fare in modo di avere **n** autovalori distinti → la matrice $\mathbf{B_\beta}$ è diagonalizzabile
- si fa assumere all'autovalore che dipende da **β** lo stesso valore di un altro autovalore e poi si va a guardare se tutte le molteplicità algebriche **m** sono uguali a quelle geometriche **d** → se sì, la matrice $\mathbf{B_\beta}$ è diagonalizzabile
- ricordarsi di ripetere il punto precedente per tutti gli autovalori

Se, invece, un'equazione di secondo grado dipende da **β** bisogna risolvere un sistema formato da:

- $\mathbf{b^2 - 4ac = 0}$ → riferita al fatto che l'equazione di secondo grado ha una sola radice
- $\mathbf{r^2\, a + r\, b + c = 0}$ → riferita al fatto che l'equazione di secondo grado ha come radice **r**

Si trovano i valori di **β** e si dice che per quei valori la matrice $\mathbf{B_\beta}$ è diagonalizzabile. Poi si guardano i vari casi sostituendo di volta in volta a **β** uno dei valori trovati e si va a guardare se tutte le molteplicità algebriche **m** sono uguali a quelle geometriche **d** → se sì, la matrice $\mathbf{B_\beta}$ è diagonalizzabile.

La molteplicità geometrica **d** è la $\mathbf{dim\ E_{B\beta}(\lambda_i) = dim\ N(B_\beta - \lambda_i\, I)}$ e per calcolarla occorre determinare il rango della matrice $\mathbf{B_\beta - \lambda_i\, I}$ e sottrarlo a **n** → $\mathbf{d_i = n - rk(B_\beta - \lambda_i\, I)}$.

- *Trovare una base di* $\mathbf{C^n}$ *formata da autovettori*

  Per costruire una base di autovettori occorre trovare le basi degli autospazi corrispondenti agli autovalori per i quali la matrice è diagonalizzabile e poi unirle. La base dell'autospazio $\mathbf{E_{B\beta}(\lambda_i)}$ è la base di $\mathbf{N(B_\beta - \lambda_i\, I)}$, che si ottiene scrivendo le equazioni del sistema che si ottiene dopo l'eliminazione all'indietro sulla matrice $\mathbf{B_\beta - \lambda_i\, I}$; i vettori si costruiscono sostituendo alle variabili libere l'identità (a seconda del numero di vettori) e ricavando il valore delle altre variabili dalle equazioni.

  Controllo che la base che ho costruito sia una base di $\mathbf{C^n}$ calcolando il rango della matrice formata dagli autovettori → se $\mathbf{rk = n}$, è una base di $\mathbf{C^n}$.

  Controllo la relazione $\mathbf{B_\beta\, v = \lambda\, v}$ per ogni autovettore **v** (dove **λ** è l'autovalore su cui è stata calcolata la base dell'autospazio da cui si è trovato l'autovettore **v**).