Università degli Studi di Verona

Dipartimento di Informatica
CdLM in Ingegneria e scienze informatiche

Guida agli esercizi per il corso di Quantum Computing

Creato da:
Davide Zampieri

Anno Accademico 2021-2022

Indice

Capitolo 1

Algebra lineare

1.1 Qubit

ESERCIZIO 1:

Mostra che lo stato di un qubit può essere espresso nella forma

$$|\psi\rangle = e^{i\gamma}\left(\cos(\theta/2)|0\rangle + e^{i\phi}\sin(\theta/2)|1\rangle\right)$$

dove γ, θ e ϕ sono numeri reali. Il fattore di fase $e^{i\gamma}$ non ha effetti sulla misurazione degli osservabili e può essere eliminato.

Soluzione. In un qubit $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$, i valori α e β sono numeri complessi tali che $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$. Usando la descrizione di α e β in coordinate polari possiamo scrivere

$$|\psi\rangle = r_0 e^{i\phi_0}|0\rangle + r_1 e^{i\phi_1}|1\rangle$$

Possiamo quindi rappresentare i moduli di α e β ponendo $r_0 = \cos(\theta/2)$ e $r_1 = \sin(\theta/2)$, con $r_0^2 + r_1^2 = 1$. Inoltre, $0 \leq \theta \leq \pi$ in quanto in un numero complesso $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = re^{i\varphi}$ l'argomento è inteso nell'intervallo $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. Equivalentemente, raccogliendo e^{ϕ_0} possiamo scrivere

$$|\psi\rangle = e^{i\gamma}\left(\cos(\theta/2)|0\rangle + e^{i\phi}\sin(\theta/2)|1\rangle\right)$$

con $\phi = \phi_1 - \phi_0$, $\gamma = \phi_0$ e $0 \leq \phi \leq 2\pi$.

ESERCIZIO 2:

Mostra che esiste una corrispondenza biunivoca tra i qubit

$$|\psi\rangle = \cos(\theta/2)|0\rangle + e^{i\phi}\sin(\theta/2)|1\rangle$$

e i punti sulla sfera unitaria in $\mathbb{R}^3$, chiamata sfera di Bloch, con θ e ϕ coordinate sferiche di un punto su tale sfera.

Soluzione. L'angolo sferico θ che un punto sulla sfera unitaria in $\mathbb{R}^3$ forma con l'asse z soddisfa esattamente la stessa condizione $0 \leq \theta \leq \pi$ dell'angolo θ nella rappresentazione del qubit $|\psi\rangle$. Inoltre, anche l'angolo ϕ nella suddetta rappresentazione varia nello stesso intervallo $0 \leq \phi \leq 2\pi$ dell'angolo che la proiezione di un vettore unitario nella sfera di Bloch sul piano (x, y) forma con l'asse x.

ESERCIZIO 3:

Dato un qubit nello stato $\frac{3}{5}|0\rangle + \frac{4}{5}|1\rangle$ e un qubit nello stato $\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}}|1\rangle$, qual è lo stato del sistema composto?

Soluzione. Lo stato del sistema composto è il prodotto tensore tra i due stati:

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{i}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5\sqrt{2}} \\ \frac{3i}{5\sqrt{2}} \\ \frac{4}{5\sqrt{2}} \\ \frac{4i}{5\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Analogamente:

$$\left(\frac{3}{5}|0\rangle + \frac{4}{5}|1\rangle\right) \otimes \left(\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}}|1\rangle\right) = \frac{3}{5\sqrt{2}}|00\rangle + \frac{3i}{5\sqrt{2}}|01\rangle + \frac{4}{5\sqrt{2}}|10\rangle + \frac{4i}{5\sqrt{2}}|11\rangle$$

ESERCIZIO 4:

Quale dei seguenti stati è entangled?

a) $|++\rangle$

b) $\frac{4}{5}|01\rangle - \frac{3}{5}|11\rangle$

c) $\frac{1}{\sqrt{3}}|01\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}|10\rangle - \frac{1}{\sqrt{3}}|11\rangle$

d) $\frac{1+i}{2\sqrt{2}}|++\rangle - \frac{1+i}{2\sqrt{2}}|+-\rangle + \frac{1-i}{2\sqrt{2}}|-+\rangle - \frac{1-i}{2\sqrt{2}}|--\rangle$

Soluzione. Uno stato $|\psi\rangle$ si dice entangled se non può essere fattorizzato nel prodotto tensore di due qubits indipendenti, cioè non esistono a_1, a_2, b_1, b_2 tali che

$$|\psi\rangle = (a_1|0\rangle + b_1|1\rangle) \otimes (a_2|0\rangle + b_2|1\rangle)$$

a) $|++\rangle = (1|+\rangle + 0|-\rangle) \otimes (1|+\rangle + 0|-\rangle)$

b) $\frac{4}{5}|01\rangle - \frac{3}{5}|11\rangle = \left(\frac{4}{5}|0\rangle - \frac{3}{5}|1\rangle\right) \otimes (0|0\rangle + 1|1\rangle)$

c) $\frac{1}{\sqrt{3}}|01\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}|10\rangle - \frac{1}{\sqrt{3}}|11\rangle \neq \left(\frac{1}{\sqrt{3}}|0\rangle - \frac{1}{\sqrt{3}}|1\rangle\right) \otimes (-1|0\rangle + 1|1\rangle) = -\frac{1}{\sqrt{3}}|00\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}|01\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}|10\rangle - \frac{1}{\sqrt{3}}|11\rangle$

d) $\frac{1+i}{2\sqrt{2}}|++\rangle - \frac{1+i}{2\sqrt{2}}|+-\rangle + \frac{1-i}{2\sqrt{2}}|-+\rangle - \frac{1-i}{2\sqrt{2}}|--\rangle = \left(\frac{1+i}{2\sqrt{2}}|+\rangle + \frac{1-i}{2\sqrt{2}}|-\rangle\right) \otimes (1|+\rangle - 1|-\rangle)$

L'unico stato entangled è c).

1.2 Trasformazioni lineari

ESERCIZIO 1:

Mostra che ogni matrice unitaria U può essere espressa come

$$U = \begin{bmatrix} e^{i(\alpha-\beta/2-\delta/2)}\cos(\gamma/2) & -e^{i(\alpha-\beta/2+\delta/2)}\sin(\gamma/2) \\ e^{i(\alpha+\beta/2-\delta/2)}\sin(\gamma/2) & e^{i(\alpha+\beta/2+\delta/2)}\cos(\gamma/2) \end{bmatrix}$$

dove α, β, γ e δ sono numeri reali.

Soluzione. Una matrice unitaria è una matrice quadrata complessa U che soddisfa la condizione

$$U^\dagger U = UU^\dagger = I$$

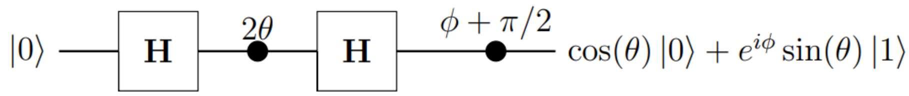
dove I è la matrice identità e $U^\dagger$ è la matrice trasposta coniugata di U in cui ciascun numero complesso $z = re^{i\varphi}$ viene trasformato nel suo complesso coniugato $\overline{z} = re^{-i\varphi}$. Quindi, nel caso in questione

$$U^\dagger U = \begin{bmatrix} e^{-i(\alpha-\beta/2-\delta/2)}\cos(\gamma/2) & -e^{-i(\alpha-\beta/2+\delta/2)}\sin(\gamma/2) \\ e^{-i(\alpha+\beta/2-\delta/2)}\sin(\gamma/2) & e^{-i(\alpha+\beta/2+\delta/2)}\cos(\gamma/2) \end{bmatrix} U =$$

$$= \begin{bmatrix} \cos^2(\gamma/2)+\sin^2(\gamma/2) & (-e^{i\delta}+e^{i\delta})\cos(\gamma/2)\sin(\gamma/2) \\ (-e^{-i\delta}+e^{-i\delta})\sin(\gamma/2)\cos(\gamma/2) & \sin^2(\gamma/2)+\cos^2(\gamma/2) \end{bmatrix} = I$$

ESERCIZIO 2:

Verifica l'output, a meno di una fase globale, del seguente circuito quantistico



Soluzione. Applico Hadamard a $|0\rangle$:

$$\frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Applico la rotazione per 2θ:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i2\theta} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ e^{i2\theta} \end{pmatrix} = |0\rangle + e^{i2\theta}|1\rangle$$

Applico Hadamard a $|0\rangle + e^{i2\theta}|1\rangle$:

$$\frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} + e^{i2\theta}\frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 + e^{i2\theta} \\ 1 - e^{i2\theta} \end{pmatrix} = e^{i\theta}\begin{pmatrix} e^{-i\theta} + e^{i\theta} \\ e^{-i\theta} - e^{i\theta} \end{pmatrix}$$

dove, siccome $e^{-i\theta} + e^{i\theta} = 2\cos\theta$ e $e^{-i\theta} - e^{i\theta} = -2i\sin\theta$, semplifico la fase globale ottenendo

$$\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$$

Applico la rotazione per $\phi + \pi/2$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i(\phi+\pi/2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ e^{i(\phi+\pi/2)}\sin\theta \end{pmatrix}$$

dove, siccome $e^{i(\phi+\pi/2)} = \cos(\phi+\pi/2) + i\sin(\phi+\pi/2) = -\sin\phi + i\cos\phi = ie^{i\phi}$, semplifico la fase globale ottenendo

$$\begin{pmatrix} \cos\theta \\ e^{i\phi}\sin\theta \end{pmatrix} = \cos\theta|0\rangle + e^{i\phi}\sin\theta|1\rangle$$

ESERCIZIO 3:

Mostra che la matrice di rappresentazione del NOT nella base computazionale $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ è $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Qual è invece la sua rappresentazione nella base computazionale $B = \{|+\rangle, |-\rangle\}$?

Soluzione.

- $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ovvero $X|0\rangle = |1\rangle$
- $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ovvero $X|1\rangle = |0\rangle$
- Siccome $X|+\rangle = \frac{|1\rangle+|0\rangle}{\sqrt{2}} = |+\rangle$ e $X|-\rangle = \frac{|1\rangle-|0\rangle}{\sqrt{2}} = -|-\rangle$ allora

$$X' = \begin{pmatrix} \frac{|0\rangle+|1\rangle}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & -\frac{|0\rangle-|1\rangle}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \to X_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

dove $X_B|+\rangle = |-\rangle$ e $X_B|-\rangle = |+\rangle$.

ESERCIZIO 4:

Considera un circuito quantistico che trasforma l'input $|0\rangle$ in $|+\rangle$ e l'input $|1\rangle$ in $-|-\rangle$. Qual è l'output di questo circuito sul seguente input?

$$\frac{i\sqrt{2}}{\sqrt{3}}|+\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}|-\rangle$$

Soluzione.

- $A|0\rangle = |+\rangle \to \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$
- $A|1\rangle = -|-\rangle \to \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

Riscrivo l'input in termini di $|0\rangle$ e $|1\rangle$:

$$\frac{i\sqrt{2}}{\sqrt{3}}|+\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}|-\rangle = \frac{i\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\frac{|0\rangle+|1\rangle}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{|0\rangle-|1\rangle}{\sqrt{2}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\left(i|0\rangle + i|1\rangle + \frac{|0\rangle-|1\rangle}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{\sqrt{2}i+1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{\sqrt{2}i-1}{\sqrt{2}}|1\rangle\right)$$

- $A\left(\frac{i\sqrt{2}}{\sqrt{3}}|+\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}|-\rangle\right) = ? \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{2}i+1 \\ \sqrt{2}i-1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} =$
$= \begin{pmatrix} i+\frac{1}{\sqrt{2}} - i + \frac{1}{\sqrt{2}} \\ i+\frac{1}{\sqrt{2}} + i - \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 2i \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}|0\rangle + \frac{i\sqrt{2}}{\sqrt{3}}|1\rangle$

ESERCIZIO 5:

Verifica che

$$A = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1-i & 1+i \\ 1+i & 1-i \end{bmatrix}$$

è unitaria. Calcola l'azione di A e A^2 su un generico qubit $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$.

Soluzione.

$$A^\dagger A = \begin{bmatrix} \frac{1+i}{2} & \frac{1-i}{2} \\ \frac{1-i}{2} & \frac{1+i}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1-i}{2} & \frac{1+i}{2} \\ \frac{1+i}{2} & \frac{1-i}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{4}+\frac{2}{4} & -\frac{2i}{4}+\frac{2i}{4} \\ -\frac{2i}{4}+\frac{2i}{4} & \frac{2}{4}+\frac{2}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A|\psi\rangle = \begin{bmatrix} \frac{1-i}{2} & \frac{1+i}{2} \\ \frac{1+i}{2} & \frac{1-i}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1-i}{2}\alpha + \frac{1+i}{2}\beta \\ \frac{1+i}{2}\alpha + \frac{1-i}{2}\beta \end{bmatrix}$$

$$A^2|\psi\rangle = \begin{bmatrix} \frac{1-2i-1}{2} & \frac{1+2i-1}{2} \\ \frac{1+2i-1}{2} & \frac{1-2i-1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{i}{2} & \frac{i}{2} \\ \frac{i}{2} & -\frac{i}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{i}{2}\alpha + \frac{i}{2}\beta \\ \frac{i}{2}\alpha - \frac{i}{2}\beta \end{bmatrix}$$

Capitolo 2

Parallelismo quantistico

ESERCIZIO 1:

Qual è la sovrapposizione che risulta dopo aver applicato la trasformata di Walsh-Hadamard $H^{\otimes n}$ al seguente stato?

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle^{\otimes n} + |1\rangle^{\otimes n})$$

Soluzione.

$$H^{\otimes n}|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{1}{\sqrt{2^n}}\sum_{x\in\{0,1\}^n}(-1)^{x\cdot 00\ldots 0}|x\rangle + \frac{1}{\sqrt{2^n}}\sum_{x\in\{0,1\}^n}(-1)^{x\cdot 11\ldots 1}|x\rangle\right] =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{1}{\sqrt{2^n}}\sum_{x\in\{0,1\}^n}|x\rangle + \frac{1}{\sqrt{2^n}}\sum_{x\in\{0,1\}^n}|x\rangle\right] = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{2}{\sqrt{2^n}}\sum_{x\in\{0,1\}^n}|x\rangle =$$

$$= 2^{-\frac{1}{2}}\cdot 2\cdot 2^{-\frac{n}{2}}\sum_{x\in\{0,1\}^n}|x\rangle = 2^{-\frac{n-1}{2}}\sum_{x\in\{0,1\}^n}|x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^{n-1}}}\sum_{x\in\{0,1\}^n}|x\rangle$$

ricordando che

$$H^{\otimes n}|k\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^n}}\sum_{x\in\{0,1\}^n}(-1)^{x\cdot k}|x\rangle$$

dove $k \in \{0,1\}^n$ e $x \cdot k = \sum_{i=1}^{n} x_i k_i \mod 2$.

ESERCIZIO 2:

Si consideri lo stato

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle + \frac{e^{i\phi}}{\sqrt{2}}|11\rangle$$

Possiamo stimare l'angolo ϕ applicando il Fourier sampling (cioè Hadamard su ciascun qubit seguito da una misurazione nella base standard). Supponiamo che dopo un numero sufficiente di test, il risultato 01 non venga mai ottenuto. Qual è il valore di $\phi \in [0, 2\pi]$?

Soluzione.

$$H^{\otimes 2}|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{1}{\sqrt{4}}(|00\rangle + |01\rangle + |10\rangle + |11\rangle) + \frac{e^{i\phi}}{\sqrt{4}}(|00\rangle + |01\rangle - |10\rangle - |11\rangle)\right] =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{8}}\left[(1+e^{i\phi})|00\rangle + (1+e^{i\phi})|01\rangle + (1-e^{i\phi})|10\rangle + (1-e^{i\phi})|11\rangle\right] =$$

$$= \frac{1+e^{i\phi}}{2\sqrt{2}}|00\rangle + \frac{1+e^{i\phi}}{2\sqrt{2}}|01\rangle + \frac{1-e^{i\phi}}{2\sqrt{2}}|10\rangle + \frac{1-e^{i\phi}}{2\sqrt{2}}|11\rangle =$$

Se il risultato 01 non viene mai ottenuto, allora

$$p(01) = 0 \to \left(\frac{1+e^{i\phi}}{2\sqrt{2}}\right)^2 = 0 \to \frac{1+e^{i\phi}}{2\sqrt{2}} = 0 \to 1 + e^{i\phi} = 0 \to e^{i\phi} = -1$$

da cui consegue che

$$\cos\phi + i\sin\phi = -1 \to \cos\phi = -1 \wedge \sin\phi = 0 \to \phi = \pi$$

Capitolo 3

Misurazione quantistica

ESERCIZIO 1:

Considera il registro di tre qubit

$$|\psi\rangle = \sum_{i,j,k\in\{0,1\}} c_{ijk}|ijk\rangle$$

(i) Calcola la probabilità di misurare 1 nel primo qubit e determina lo stato del registro dopo una misurazione con questo esito.

(ii) Dopo aver ottenuto 1 dalla misurazione del primo qubit, misura il secondo qubit. Calcola la probabilità di ottenere 0 e determina lo stato finale del registro.

Soluzione.

(i)

$$p(1) = \langle\psi|(P_1 \otimes I \otimes I)|\psi\rangle = \langle\psi|(|1\rangle\langle 1| \otimes I \otimes I)|\psi\rangle =$$

$$= (c_{100}\langle 100|+c_{101}\langle 101|+c_{110}\langle 110|+c_{111}\langle 111|)(c_{100}|100\rangle+c_{101}|101\rangle+c_{110}|110\rangle+c_{111}|111\rangle) =$$

$$= c_{100}^2 + c_{101}^2 + c_{110}^2 + c_{111}^2$$

Stato risultante:

$$|\psi'\rangle = \frac{(|1\rangle\langle 1| \otimes I \otimes I)|\psi\rangle}{\sqrt{p(1)}} =$$

$$= \frac{c_{100}|100\rangle + c_{101}|101\rangle + c_{110}|110\rangle + c_{111}|111\rangle}{\sqrt{c_{100}^2 + c_{101}^2 + c_{110}^2 + c_{111}^2}}$$

(ii)

$$p(0) = \langle\psi'|(I \otimes P_0 \otimes I)|\psi'\rangle = \langle\psi'|(I \otimes |0\rangle\langle 0| \otimes I)|\psi'\rangle =$$

$$= \left(\frac{c_{100}\langle 100| + c_{101}\langle 101|}{\sqrt{p(1)}}\right)\left(\frac{c_{100}|100\rangle + c_{101}|101\rangle}{\sqrt{p(1)}}\right) = \frac{c_{100}^2 + c_{101}^2}{\sqrt{p(1)}}$$

Stato finale:

$$|\psi''\rangle = \frac{(I \otimes |0\rangle\langle 0| \otimes I)|\psi'\rangle}{\sqrt{p(0)}} = \frac{c_{100}|100\rangle + c_{101}|101\rangle}{\sqrt{p(0)p(1)}}$$

ESERCIZIO 2:

Considera il registro di due qubit

$$|\psi\rangle = \frac{1}{3}|00\rangle + \frac{2}{3}|10\rangle + \frac{2}{3}|11\rangle$$

(i) Calcola la probabilità di ottenere 1 dalla misurazione del primo qubit e determina lo stato del registro dopo una misurazione con questo esito.

(ii) Dopo aver ottenuto 1 dalla misurazione del primo qubit, misura il secondo qubit. Calcola la probabilità di ottenere il risultato 0 e determina lo stato finale del registro.

Soluzione.

(i) Condizione di normalizzazione: $\sum_{i\in\{0,1\}^2} |\alpha_i|^2 = \frac{1}{9} + \frac{4}{9} + \frac{4}{9} = 1$

$$p(1) = \langle\psi|(P_1 \otimes I)|\psi\rangle = \langle\psi|(|1\rangle\langle 1| \otimes I)|\psi\rangle =$$

$$= \left(\frac{2}{3}\langle 10| + \frac{2}{3}\langle 11|\right)\left(\frac{2}{3}|10\rangle + \frac{2}{3}|11\rangle\right) = \frac{4}{9} + \frac{4}{9} = \frac{8}{9}$$

Stato risultante:

$$|\psi'\rangle = \frac{(|1\rangle\langle 1| \otimes I)|\psi\rangle}{\sqrt{p(1)}} = \frac{\frac{2}{3}|10\rangle + \frac{2}{3}|11\rangle}{\frac{2\sqrt{2}}{3}} = \frac{|10\rangle + |11\rangle}{\sqrt{2}}$$

(ii) Condizione di normalizzazione: $\sum_{i\in\{0,1\}^2} |\alpha_i|^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$

$$p(0) = \langle\psi'|(I \otimes P_0)|\psi'\rangle = \langle\psi'|(I \otimes |0\rangle\langle 0|)|\psi'\rangle =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\langle 10| \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}|10\rangle = \frac{1}{2}$$

Stato finale:

$$|\psi''\rangle = \frac{(I \otimes |0\rangle\langle 0|)|\psi'\rangle}{\sqrt{p(0)}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}|10\rangle}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = |10\rangle$$

ESERCIZIO 3:

Un registro di due qubit si trova nel seguente stato

$$|\psi\rangle = \frac{3|00\rangle + 4|11\rangle}{5}$$

Il primo qubit viene misurato. Qual è la probabilità che il secondo qubit si trovi nello stato $|0\rangle$ dopo la misurazione?

Soluzione. Condizione di normalizzazione: $\sum_{i\in\{0,1\}^2}|\alpha_i|^2 = \frac{9}{25}+\frac{16}{25} = 1$

- Se ho misurato 0 nel primo qubit:

$$p(0) = \langle\psi|(P_0\otimes I)|\psi\rangle = \langle\psi|(|0\rangle\langle 0|\otimes I)|\psi\rangle = \frac{3}{5}\langle 00|\cdot\frac{3}{5}|00\rangle = \frac{9}{25}$$

$$|\psi'\rangle = \frac{(|0\rangle\langle 0|\otimes I)|\psi\rangle}{\sqrt{p(0)}} = \frac{\frac{3}{5}|00\rangle}{\frac{3}{5}} = |00\rangle$$

$$p'(0) = \langle\psi'|(I\otimes P_0)|\psi\rangle = \langle\psi|(I\otimes|0\rangle\langle 0|)|\psi'\rangle = \langle 00|\cdot|00\rangle = 1$$

- Se ho misurato 1 nel primo qubit:

$$p(1) = \langle\psi|(P_1\otimes I)|\psi\rangle = \langle\psi|(|1\rangle\langle 1|\otimes I)|\psi\rangle = \frac{4}{5}\langle 11|\cdot\frac{4}{5}|11\rangle = \frac{16}{25}$$

$$|\psi'\rangle = \frac{(|1\rangle\langle 1|\otimes I)|\psi\rangle}{\sqrt{p(1)}} = \frac{\frac{4}{5}|11\rangle}{\frac{4}{5}} = |11\rangle$$

$$p'(0) = \langle\psi'|(I\otimes P_0)|\psi\rangle = \langle\psi|(I\otimes|0\rangle\langle 0|)|\psi'\rangle = 0$$

ESERCIZIO 4:

Si consideri un registro di due qubit nello stato

$$|\psi\rangle = \sqrt{\frac{1}{11}}|00\rangle + \sqrt{\frac{5}{11}}|01\rangle + \sqrt{\frac{2}{11}}|10\rangle + \sqrt{\frac{3}{11}}|11\rangle$$

Calcolare la probabilità di misurare 0 nel primo qubit e stabilire lo stato del secondo qubit dopo che la misurazione ha dato tale esito.

Soluzione. Condizione di normalizzazione: $\sum_{i\in\{0,1\}^2}|\alpha_i|^2 = \frac{1+5+2+3}{11} = 1$

$$p(0) = \langle\psi|(P_0\otimes I)|\psi\rangle = \langle\psi|(|0\rangle\langle 0|\otimes I)|\psi\rangle =$$

$$= \left(\sqrt{\frac{1}{11}}\langle 00| + \sqrt{\frac{5}{11}}\langle 01|\right)\left(\sqrt{\frac{1}{11}}|00\rangle + \sqrt{\frac{5}{11}}|01\rangle\right) = \frac{1}{11}+\frac{5}{11} = \frac{6}{11}$$

Stato risultante:

$$|\psi'\rangle = \frac{(|0\rangle\langle 0|\otimes I)|\psi\rangle}{\sqrt{p(0)}} = \frac{\sqrt{\frac{1}{11}}|00\rangle + \sqrt{\frac{5}{11}}|01\rangle}{\sqrt{\frac{6}{11}}} = \sqrt{\frac{1}{6}}|00\rangle + \sqrt{\frac{5}{6}}|01\rangle$$

ESERCIZIO 5:

Considera un registro di due qubit nello stato

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{12}}(3|00\rangle + |01\rangle + |10\rangle - |11\rangle)$$

Supponiamo che Alice e Bob possano operare rispettivamente sul primo e sul secondo qubit.

(i) Qual è la probabilità che sia Alice che Bob ottengano 1 come risultato della misurazione del proprio qubit?

(ii) Se Alice e Bob applicano Hadamard ciascuno al proprio qubit, prima di misurarlo, qual è la probabilità che entrambi ottengano come risultato 1?

(iii) Se solo Alice applica Hadamard al suo qubit, qual è la probabilità che dopo la misurazione Alice ottenga il valore 0 e Bob il valore 1?

(iv) Se solo Bob applica Hadamard al suo qubit, qual è la probabilità che dopo la misurazione Alice ottenga il valore 1 e Bob il valore 0?

(v) Ottenere gli stessi risultati dei due punti precedenti dimostrando che $|\psi\rangle$ si può anche scrivere come $\frac{1}{\sqrt{3}}(2|00\rangle - H^{\otimes 2}|11\rangle)$.

Soluzione.

(i) Condizione di normalizzazione: $\sum_{i\in\{0,1\}^2} |\alpha_i|^2 = \frac{9+1+1+1}{12} = 1$

$$p(1) = \langle\psi|(P_1 \otimes P_1)|\psi\rangle = \langle\psi|(|1\rangle\langle 1| \otimes |1\rangle\langle 1|)|\psi\rangle =$$
$$= \left(-\frac{1}{\sqrt{12}}\langle 11|\right)\left(-\frac{1}{\sqrt{12}}|11\rangle\right) = \frac{1}{12}$$

(ii) Alice e Bob applicano Hadamard ai propri qubit:

$$H^{\otimes n}|k\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{x\in\{0,1\}^n} (-1)^{x\cdot k}|x\rangle$$

$$|\psi'\rangle = H^{\otimes 2}|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{12}}(3H^{\otimes 2}|00\rangle + H^{\otimes 2}|01\rangle + H^{\otimes 2}|10\rangle - H^{\otimes 2}|11\rangle) =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{12}}\Bigg[3\cdot\frac{1}{\sqrt{4}}(|00\rangle + |01\rangle + |10\rangle + |11\rangle) + \frac{1}{\sqrt{4}}(|00\rangle - |01\rangle + |10\rangle - |11\rangle) +$$
$$+ \frac{1}{\sqrt{4}}(|00\rangle + |01\rangle - |10\rangle - |11\rangle) - \frac{1}{\sqrt{4}}(|00\rangle - |01\rangle - |10\rangle + |11\rangle)\Bigg] =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{12}}\cdot\frac{1}{2}(4|00\rangle + 4|01\rangle + 4|10\rangle + 0|11\rangle) = \frac{2}{\sqrt{12}}(|00\rangle + |01\rangle + |10\rangle)$$

Condizione di normalizzazione: $\sum_{i\in\{0,1\}^2} |\alpha_i|^2 = \frac{4+4+4}{12} = 1$

$$p(11) = \langle\psi|(P_1 \otimes P_1)|\psi\rangle = \langle\psi|(|1\rangle\langle 1| \otimes |1\rangle\langle 1|)|\psi\rangle = 0$$

(iii) Solo Alice applica Hadamard al proprio qubit:

$$|\psi'\rangle = (H\otimes I)|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{12}}\Big[3(H|0\rangle\otimes|0\rangle) + (H|0\rangle\otimes|1\rangle) + (H|1\rangle\otimes|0\rangle) - (H|1\rangle\otimes|1\rangle)\Big] =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{12}}\left[3\cdot\frac{|00\rangle + |10\rangle}{\sqrt{2}} + \frac{|01\rangle + |11\rangle}{\sqrt{2}} + \frac{|00\rangle - |10\rangle}{\sqrt{2}} - \frac{|01\rangle - |11\rangle}{\sqrt{2}}\right] =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{24}}(4|00\rangle + 2|10\rangle + 2|11\rangle) = \frac{1}{\sqrt{6}}(2|00\rangle + |10\rangle + |11\rangle)$$

Condizione di normalizzazione: $\sum_{i\in\{0,1\}^2} |\alpha_i|^2 = \frac{4+1+1}{6} = 1$

$$p(01) = \langle\psi|(P_0 \otimes P_1)|\psi\rangle = \langle\psi|(|0\rangle\langle 0| \otimes |1\rangle\langle 1|)|\psi\rangle = 0$$

(iv) Solo Bob applica Hadamard al proprio qubit:

$$|\psi'\rangle = (I\otimes H)|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{12}}\Big[3(|0\rangle\otimes H|0\rangle)+(|0\rangle\otimes H|1\rangle)+(|1\rangle\otimes H|0\rangle)-(|1\rangle\otimes H|1\rangle)\Big] =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{12}}\left[3\cdot\frac{|00\rangle+|01\rangle}{\sqrt{2}}+\frac{|00\rangle-|01\rangle}{\sqrt{2}}+\frac{|10\rangle+|11\rangle}{\sqrt{2}}-\frac{|10\rangle-|11\rangle}{\sqrt{2}}\right] =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{24}}(4|00\rangle+2|01\rangle+2|11\rangle) = \frac{1}{\sqrt{6}}(2|00\rangle+|01\rangle+|11\rangle)$$

Condizione di normalizzazione: $\sum_{i\in\{0,1\}^2}|\alpha_i|^2 = \frac{4+1+1}{6} = 1$

$$p(10) = \langle\psi|(P_1\otimes P_0)|\psi\rangle = \langle\psi|(|1\rangle\langle 1|\otimes|0\rangle\langle 0|)|\psi\rangle = 0$$

(v)

$$\frac{1}{\sqrt{3}}(2|00\rangle - H^{\otimes 2}|11\rangle) = \frac{1}{\sqrt{3}}\left[2|00\rangle-\frac{1}{\sqrt{4}}(|00\rangle-|01\rangle-|10\rangle+|11\rangle)\right] =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{3}{2}|00\rangle+\frac{1}{2}|01\rangle+\frac{1}{2}|10\rangle-\frac{1}{2}|11\rangle\right) = \frac{1}{2\sqrt{3}}(3|00\rangle+|01\rangle+|10\rangle-|11\rangle) = |\psi\rangle$$

Solo Alice applica Hadamard al proprio qubit:

$$|\psi'\rangle = (H_A\otimes I)|\psi\rangle = (H_A\otimes I)\left[\frac{1}{\sqrt{3}}(2|00\rangle - H_AH_B|11\rangle)\right] =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\Big[2(H_A|0\rangle\otimes|0\rangle)-(H_A(H_A|1\rangle)\otimes H_A|1\rangle)\Big] = \frac{1}{\sqrt{3}}\left[2\cdot\frac{|00\rangle+|10\rangle}{\sqrt{2}}-|1\rangle\otimes\frac{|0\rangle-|1\rangle}{\sqrt{2}}\right] =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\left[2\cdot\frac{|00\rangle+|10\rangle}{\sqrt{2}}-\frac{|10\rangle-|11\rangle}{\sqrt{2}}\right] = \frac{1}{\sqrt{6}}(2|00\rangle+|10\rangle+|11\rangle)$$

Condizione di normalizzazione: $\sum_{i\in\{0,1\}^2}|\alpha_i|^2 = \frac{4+1+1}{6} = 1$

$$p(01) = \langle\psi|(P_0\otimes P_1)|\psi\rangle = \langle\psi|(|0\rangle\langle 0|\otimes|1\rangle\langle 1|)|\psi\rangle = 0$$

Solo Bob applica Hadamard al proprio qubit:

$$|\psi'\rangle = (I\otimes H_B)|\psi\rangle = (I\otimes H_B)\left[\frac{1}{\sqrt{3}}(2|00\rangle - H_AH_B|11\rangle)\right] =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\Big[2(|0\rangle\otimes H_B|0\rangle)-(H_B|1\rangle\otimes H_B(H_B|1\rangle))\Big] = \frac{1}{\sqrt{3}}\left[2\cdot\frac{|00\rangle+|01\rangle}{\sqrt{2}}-\frac{|0\rangle-|1\rangle}{\sqrt{2}}\otimes|1\rangle\right] =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\left[2\cdot\frac{|00\rangle+|01\rangle}{\sqrt{2}}-\frac{|01\rangle-|11\rangle}{\sqrt{2}}\right] = \frac{1}{\sqrt{6}}(2|00\rangle+|01\rangle+|11\rangle)$$

Condizione di normalizzazione: $\sum_{i\in\{0,1\}^2}|\alpha_i|^2 = \frac{4+1+1}{6} = 1$

$$p(10) = \langle\psi|(P_1\otimes P_0)|\psi\rangle = \langle\psi|(|1\rangle\langle 1|\otimes|0\rangle\langle 0|)|\psi\rangle = 0$$

ESERCIZIO 6:

Considera il registro di due qubit

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle + |11\rangle$$

(i) Calcola la probabilità di ottenere 1 dalla misurazione del primo qubit e determina lo stato del registro dopo una misurazione con questo esito.

(ii) Dopo aver ottenuto 1 dalla misurazione del primo qubit, misura il secondo qubit. Calcola le probabilità di ottenere il risultato 0 e il risultato 1 e determina lo stato finale del registro in entrambi i casi.

(iii) Calcola la probabilità che l'esito della misurazione del secondo qubit sia 0 nel caso in cui la misurazione del primo qubit sia risultata in 0 e determina lo stato finale del registro in questo caso.

(iv) È necessario misurare il secondo qubit del registro per conoscerne il suo valore dopo aver misurato il primo? Motivare la risposta.

Soluzione.

(i)

$$p(1) = \langle\psi|(P_1 \otimes I)|\psi\rangle = \langle\psi|(|1\rangle\langle 1| \otimes I)|\psi\rangle = \langle 11| \cdot |11\rangle = 1$$

Stato risultante:

$$|\psi'\rangle = \frac{(|1\rangle\langle 1| \otimes I)|\psi\rangle}{\sqrt{p(1)}} = |11\rangle$$

(ii)

$$p(0) = \langle\psi'|(I \otimes P_0)|\psi'\rangle = \langle\psi'|(I \otimes |0\rangle\langle 0|)|\psi'\rangle = 0$$

Nessuno stato finale.

$$p(1) = \langle\psi'|(I \otimes P_1)|\psi'\rangle = \langle\psi'|(I \otimes |1\rangle\langle 1|)|\psi'\rangle = 1$$

Stato finale:

$$|\psi''\rangle = \frac{(I \otimes |1\rangle\langle 1|)|\psi'\rangle}{\sqrt{p(1)}} = |11\rangle$$

(iii)

$$p(0) = \langle\psi|(P_0 \otimes I)|\psi\rangle = \langle\psi|(|0\rangle\langle 0| \otimes I)|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\langle 00| \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle = \frac{1}{2}$$

Stato risultante:

$$|\psi'\rangle = \frac{(|0\rangle\langle 0| \otimes I)|\psi\rangle}{\sqrt{p(0)}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle}{\sqrt{\frac{1}{2}}} = |00\rangle$$

$$p(0) = \langle\psi'|(I \otimes P_0)|\psi'\rangle = \langle\psi'|(I \otimes |0\rangle\langle 0|)|\psi'\rangle = \langle 00| \cdot |00\rangle = 1$$

Stato finale:

$$|\psi''\rangle = \frac{(I \otimes |0\rangle\langle 0|)|\psi'\rangle}{\sqrt{p(0)}} = |00\rangle$$

(iv) Dopo aver misurato il primo qubit, nel secondo qubit sarà possibile misurare un unico valore con probabilità 1 (in particolare, lo stesso valore misurato nel primo qubit).

ESERCIZIO 7:

Verifica che solo uno dei due insiemi

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + i|1\rangle), \frac{1}{\sqrt{2}}(i|0\rangle - |1\rangle)\right\}$$

$$\left\{\frac{1}{2}(|0\rangle + \sqrt{3}|1\rangle), \frac{1}{2}(\sqrt{3}|0\rangle - |1\rangle)\right\}$$

è una base computazionale. Calcola le probabilità di misurare $\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ in quella base computazionale.

Soluzione.

- $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}i \\ \frac{1}{\sqrt{2}}i & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}i \\ -\frac{1}{\sqrt{2}}i & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}+\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}i-\frac{1}{2}i \\ \frac{1}{2}i+\frac{1}{2}i & \frac{1}{2}+\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix}$
  L'insieme $\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + i|1\rangle), \frac{1}{\sqrt{2}}(i|0\rangle - |1\rangle)\right\}$ NON è una base computazionale in quanto i vettori che la formano NON sono ortonormali.
- $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}+\frac{3}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{\sqrt{3}}{4} \\ \frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{3}{4}+\frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
  L'insieme $\left\{\frac{1}{2}(|0\rangle + \sqrt{3}|1\rangle), \frac{1}{2}(\sqrt{3}|0\rangle - |1\rangle)\right\}$ è una base computazionale in quanto i vettori che la formano sono ortonormali.

Gli autovalori λ_1 e λ_2 della nuova base computazionale X sono:

$$det(X - I\lambda) = det\begin{pmatrix} \frac{1}{2}-\lambda & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}-\lambda \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\lambda + \frac{1}{2}\lambda + \lambda^2\right) - \frac{3}{4} = \lambda^2 - 1$$

$$\lambda^2 - 1 = 0 \rightarrow \lambda^2 = 1 \rightarrow \lambda_{1,2} = \pm 1$$

Gli autovettori v_1 e v_2 della nuova base computazionale X sono:

$$\begin{cases} -\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y = 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{3}{2}y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \sqrt{3}y \\ y = a \end{cases} \rightarrow \begin{pmatrix} \sqrt{3}a \\ a \end{pmatrix} \rightarrow v_1 = \frac{1}{||v_1||}\begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \frac{3}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y = 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = a \\ y = -\sqrt{3}x \end{cases} \rightarrow \begin{pmatrix} a \\ -\sqrt{3}a \end{pmatrix} \rightarrow v_2 = \frac{1}{||v_2||}\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

dove $||v_i|| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (\pm 1)^2} = 2$.

Converto $\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ nella nuova base computazionale X:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\alpha + \frac{\sqrt{3}}{2}\beta \\ \frac{\sqrt{3}}{2}\alpha - \frac{1}{2}\beta \end{pmatrix}$$

Eseguo le misurazioni nella base computazionale standard:

$$|\psi\rangle = \left(\frac{1}{2}\alpha + \frac{\sqrt{3}}{2}\beta\right)|0\rangle + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\alpha - \frac{1}{2}\beta\right)|1\rangle$$

Condizione di normalizzazione: $\frac{1}{4}(\alpha^2 + 3\alpha^2 + \beta^2 + 3\beta^2) = 1 \rightarrow \alpha^2 + \beta^2 = 1$

- $p(0) = (\frac{1}{2}\alpha + \frac{\sqrt{3}}{2}\beta)^2$
- $p(1) = (\frac{\sqrt{3}}{2}\alpha - \frac{1}{2}\beta)^2$

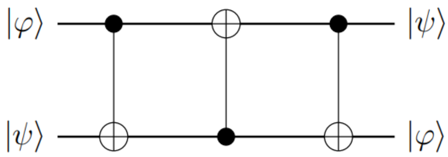
Capitolo 4

Circuiti quantistici

4.1 Porte logiche quantistiche

ESERCIZIO 1:

Mostrare che il circuito sottostante effettua lo scambio di due qubit. Scrivere la matrice di rappresentazione dell'operatore implementato da questo circuito nella base computazionale standard.



Soluzione. Lo stato iniziale è $|\varphi\rangle \otimes |\psi\rangle$ con:

$$|\varphi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$$

$$|\psi\rangle = \alpha'|0\rangle + \beta'|1\rangle$$

Applico il primo CNOT:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha\alpha' \\ \alpha\beta' \\ \alpha'\beta \\ \beta\beta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha\alpha' \\ \alpha\beta' \\ \beta\beta' \\ \alpha'\beta \end{pmatrix}$$

Applico il secondo CNOT:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha\alpha' \\ \alpha\beta' \\ \beta\beta' \\ \alpha'\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha\alpha' \\ \alpha'\beta \\ \beta\beta' \\ \alpha\beta' \end{pmatrix}$$

Applico il terzo CNOT:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha\alpha' \\ \alpha'\beta \\ \beta\beta' \\ \alpha\beta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha\alpha' \\ \alpha'\beta \\ \alpha\beta' \\ \beta\beta' \end{pmatrix}$$

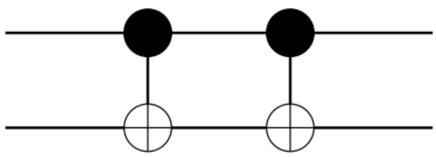
Lo stato finale è $|\psi\rangle \otimes |\varphi\rangle$.

La matrice di rappresentazione del circuito è:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow M \begin{pmatrix} \alpha\alpha' \\ \alpha\beta' \\ \alpha'\beta \\ \beta\beta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha\alpha' \\ \alpha'\beta \\ \alpha\beta' \\ \beta\beta' \end{pmatrix}$$

ESERCIZIO 2:

Determinare la matrice M corrispondente al circuito sottostante, dimostrare che è unitaria e descrivere l'evoluzione del sistema $|\psi_{out}\rangle = M|\psi_{in}\rangle$.



Soluzione. Stato iniziale:

$$|\psi_{in}\rangle = (\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) \otimes (\alpha'|0\rangle + \beta'|1\rangle)$$

Applico il primo CNOT:

$$\alpha\alpha'|00\rangle + \alpha\beta'|01\rangle + \beta\alpha'|10\rangle + \beta\beta'|11\rangle \rightarrow \alpha\alpha'|00\rangle + \alpha\beta'|01\rangle + \beta\alpha'|11\rangle + \beta\beta'|10\rangle$$

Applico il secondo CNOT:

$$\alpha\alpha'|00\rangle + \alpha\beta'|01\rangle + \beta\alpha'|11\rangle + \beta\beta'|10\rangle \rightarrow \alpha\alpha'|00\rangle + \alpha\beta'|01\rangle + \beta\alpha'|10\rangle + \beta\beta'|11\rangle$$

La matrice di rappresentazione del circuito è:

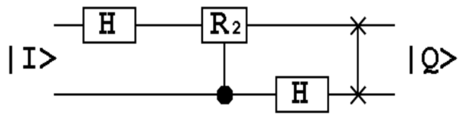
$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

M è unitaria:

$$MM^\dagger = I \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

ESERCIZIO 3:

Trova la matrice associata al circuito sottostante e descrivi il risultato $|Q\rangle$ ottenuto eseguendo il circuito sugli stati della base standard di un registro di due qubit, sapendo che $R_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}$.



Soluzione.

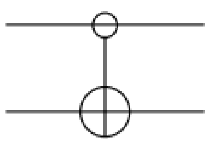
- $|I\rangle = |00\rangle \to \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)|0\rangle \to \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) = |Q\rangle$
- $|I\rangle = |01\rangle \to \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)|1\rangle \to \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + i|1\rangle)|1\rangle \to \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + i|1\rangle) \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle) \to \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle) \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + i|1\rangle) = |Q\rangle$
- $|I\rangle = |10\rangle \to \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)|0\rangle \to \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle) \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \to \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle) = |Q\rangle$
- $|I\rangle = |11\rangle \to \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)|1\rangle \to \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - i|1\rangle)|1\rangle \to \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - i|1\rangle) \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle) \to \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle) \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - i|1\rangle) = |Q\rangle$

La matrice associata al circuito è:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}i & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}i \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}i & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}i \end{bmatrix}$$

ESERCIZIO 4:

Verifica che il circuito sottostante inverte il secondo qubit se il primo qubit è zero e scrivi la matrice che lo rappresenta nella base computazionale standard.



Soluzione. La matrice di rappresentazione del circuito è:

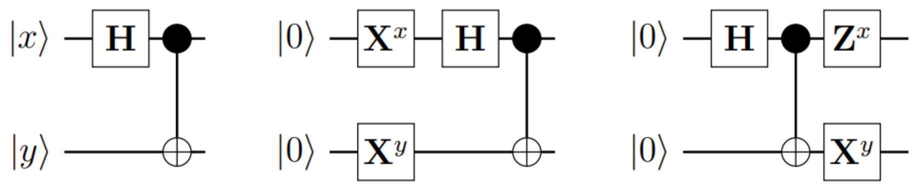
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Infatti, essa restituisce $|01\rangle$ se applicata a $|00\rangle$ e $|00\rangle$ se applicata a $|01\rangle$.

4.2 Stati di Bell

ESERCIZIO 1:

Mostrare che i seguenti circuiti sono equivalenti e dire quali stati vengono prodotti.



Soluzione. Primo circuito:

- $|00\rangle \to \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |10\rangle) \to \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$
- $|01\rangle \to \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |11\rangle) \to \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle)$
- $|10\rangle \to \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle - |10\rangle) \to \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle - |11\rangle)$
- $|11\rangle \to \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |11\rangle) \to \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle)$

Secondo circuito:

- $|00\rangle \xrightarrow{X^0X^0} |00\rangle \to^* \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$
- $|00\rangle \xrightarrow{X^0X^1} |01\rangle \to^* \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle)$
- $|00\rangle \xrightarrow{X^1X^0} |10\rangle \to^* \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle - |11\rangle)$
- $|00\rangle \xrightarrow{X^1X^1} |11\rangle \to^* \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle)$

Terzo circuito:

- $|00\rangle \to^* \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle) \xrightarrow{Z^0X^0} \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$
- $|00\rangle \to^* \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle) \xrightarrow{Z^0X^1} \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle)$
- $|00\rangle \to^* \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle) \xrightarrow{Z^1X^0} \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle - |11\rangle)$
- $|00\rangle \to^* \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle) \xrightarrow{Z^1} \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle - |11\rangle) \xrightarrow{X^1} \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle)$

I tre circuiti sono equivalenti. Essi producono gli stati di Bell.

ESERCIZIO 2:

Descrivere un circuito per il teletrasporto di un generico stato $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$, supponendo che lo stato iniziale sia $|\psi\rangle \otimes |\beta_{01}\rangle$, dove $\beta_{01} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle)$, e che il ricevente abbia a disposizione le operazioni $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ e $Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Soluzione. L'input del circuito sarà:

$$|\psi_0\rangle = |\psi\rangle \otimes |\beta_{01}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[\alpha|0\rangle(|01\rangle + |10\rangle) + \beta|1\rangle(|01\rangle + |10\rangle)]$$

in cui lo stato $|\beta_{01}\rangle$ occupa il secondo qubit di Alice ed il qubit di Bob.

Dall'applicazione del CNOT ai suoi due qubit, Alice otterrà:

$$|\psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[\alpha|0\rangle(|01\rangle + |10\rangle) + \beta|1\rangle(|11\rangle + |00\rangle)]$$

Verrà poi applicato Hadamard al primo qubit, ottenendo:

$$|\psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}[\alpha(|0\rangle + |1\rangle)(|01\rangle + |10\rangle) + \beta(|0\rangle - |1\rangle)(|11\rangle + |00\rangle)] =$$

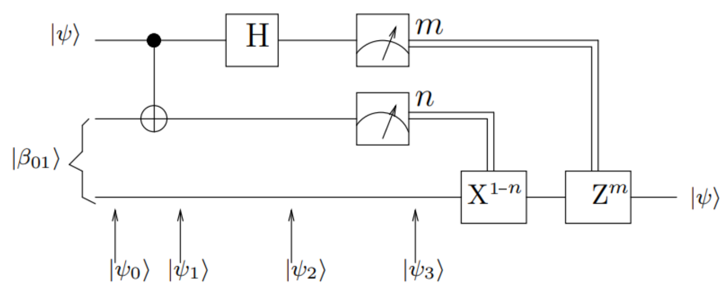
$$= \frac{1}{2}[|00\rangle(\alpha|1\rangle + \beta|0\rangle) + |01\rangle(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) + |10\rangle(\alpha|1\rangle - \beta|0\rangle) + |11\rangle(\alpha|0\rangle - \beta|1\rangle)]$$

A questo punto Alice misurerà i suoi due qubit (ottenendo la coppia di bit mn) e, per effetto di tale misurazione, il qubit di Bob collasserà nello stato corrispondente al risultato della misurazione, cioè:

- $00 \rightarrow |\psi_3\rangle = \alpha|1\rangle + \beta|0\rangle$
- $01 \rightarrow |\psi_3\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$
- $10 \rightarrow |\psi_3\rangle = \alpha|1\rangle - \beta|0\rangle$
- $11 \rightarrow |\psi_3\rangle = \alpha|0\rangle - \beta|1\rangle$

Alice comunica a Bob i due bit mn mediante un canale classico. Bob sarà quindi in grado di ottenere $|\psi\rangle$ applicando al suo qubit le operazioni X^{1-n} e Z^m:

- $00 \rightarrow |\psi_3\rangle \xrightarrow{X^1} \beta|1\rangle + \alpha|0\rangle \xrightarrow{Z^0} \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$
- $01 \rightarrow |\psi_3\rangle \xrightarrow{X^0} \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle \xrightarrow{Z^0} \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$
- $10 \rightarrow |\psi_3\rangle \xrightarrow{X^1} -\beta|1\rangle + \alpha|0\rangle \xrightarrow{Z^1} \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$
- $11 \rightarrow |\psi_3\rangle \xrightarrow{X^0} \alpha|0\rangle - \beta|1\rangle \xrightarrow{Z^1} \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$



ESERCIZIO 3:

Definire un circuito che esegua una misurazione nella base di Bell.

Soluzione. Per misurare nella base di Bell devo invertire il circuito che produce gli stati di Bell[1] (ovvero CNOT dopo H sul primo qubit):

$$[CNOT(H \otimes I)]^{-1} = (H^\dagger \otimes I^\dagger)CNOT^\dagger = (H \otimes I)CNOT$$

Perciò, supponendo di avere un generico stato nella base di Bell

$$|\psi\rangle = c_{\beta_{00}}|\beta_{00}\rangle + c_{\beta_{01}}|\beta_{01}\rangle + c_{\beta_{10}}|\beta_{10}\rangle + c_{\beta_{11}}|\beta_{11}\rangle$$

allora dopo l'applicazione di $(H \otimes I)CNOT$ si ottiene

$$|\psi\rangle = c_{\beta_{00}}|00\rangle + c_{\beta_{01}}|01\rangle + c_{\beta_{10}}|10\rangle + c_{\beta_{11}}|11\rangle$$

e si potrà quindi effettuare la misurazione in quanto i coefficienti sono stati mappati dalla base di Bell a quella standard[2].

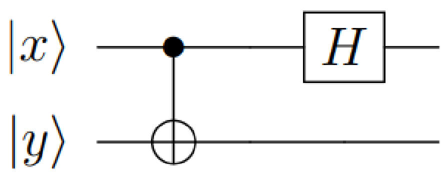
ESERCIZIO 4:

Dire come deve essere preparato lo stato $|xy\rangle$ in input al circuito sottostante per ottenere in output rispettivamente:

(i) Lo stato $|00\rangle$.

(ii) Lo stato $|11\rangle$.

(iii) Lo stato $\frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$.



[1] https://quantumcomputing.stackexchange.com/questions/10115/how-to-measure-in-the-bell-basis

[2] An Introduction to Quantum Computing (Phillip Kaye, Raymond Laflamme, Michele Mosca, Oxford University Press, 2006): vedi figura 4.8 capitolo 4.5

Soluzione.

(i) $|xy\rangle = |\beta_{00}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$

Verifica: $\frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |10\rangle) \rightarrow \frac{1}{2}[(|0\rangle + |1\rangle)|0\rangle + (|0\rangle - |1\rangle)|0\rangle] = \frac{1}{2}(|00\rangle + |10\rangle + |00\rangle - |10\rangle) = |00\rangle$

(ii) $|xy\rangle = |\beta_{11}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle)$

Verifica: $\frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |11\rangle) \rightarrow \frac{1}{2}[(|0\rangle + |1\rangle)|1\rangle - (|0\rangle - |1\rangle)|1\rangle] = \frac{1}{2}(|01\rangle + |11\rangle - |01\rangle + |11\rangle) = |11\rangle$

(iii) $|xy\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\beta_{00}\rangle + |\beta_{11}\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle) + \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle)\right]$

Verifica: $\frac{1}{2}(|00\rangle + |11\rangle + |01\rangle - |10\rangle) \rightarrow \frac{1}{2}(|00\rangle + |10\rangle + |01\rangle - |11\rangle) \rightarrow \frac{1}{2\sqrt{2}}[(|0\rangle+|1\rangle)|0\rangle+(|0\rangle-|1\rangle)|0\rangle+(|0\rangle+|1\rangle)|1\rangle-(|0\rangle-|1\rangle)|1\rangle] = \frac{1}{2\sqrt{2}}(|00\rangle + |10\rangle + |00\rangle - |10\rangle + |01\rangle + |11\rangle - |01\rangle + |11\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$

Capitolo 5

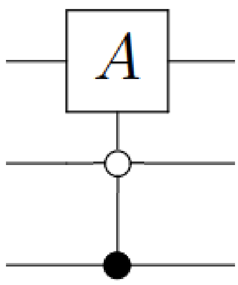
Modello dei circuiti

ESERCIZIO 1:

Costruire un circuito quantistico che implementa la matrice unitaria sottostante usando solo operazioni $C^2(NOT)$ e $C^2(A)$, dove $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$.

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 & 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 & 0 & 0 & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Soluzione. U agisce effettivamente solo sugli stati $|001\rangle$ e $|101\rangle$. Nel circuito che implementa U, gli input saranno inizialmente nella configurazione $|001\rangle$. Quindi applichiamo A al primo qubit a condizione che il secondo sia uguale a 0 e che il terzo sia uguale a 1.



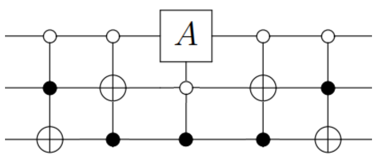
Verifica: $|001\rangle \to \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} |0\rangle|01\rangle = (a|0\rangle + c|1\rangle)|01\rangle = a|001\rangle + c|101\rangle$.

ESERCIZIO 2:

Costruire un circuito quantistico che implementa la matrice unitaria sottostante usando solo operazioni $C^2(NOT)$ e $C^2(A)$, dove $A = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$. Dire inoltre qual è la matrice del cambio di base corrispondente ai $C^2(NOT)$ del circuito risultante.

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 & 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 & 0 & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Soluzione. U agisce effettivamente solo sugli stati $|010\rangle$ e $|101\rangle$. Nel circuito che implementa U, gli input saranno inizialmente nella configurazione $|010\rangle$. Lo stato successivo sarà $|011\rangle$ e tale passaggio verrà effettuato applicando un NOT al terzo qubit a condizione che il primo sia uguale a 0 e che il secondo sia uguale a 1. Lo stato ancora successivo sarà $|001\rangle$ e tale passaggio verrà effettuato applicando un NOT al secondo qubit a condizione che il primo sia uguale a 0 e che il terzo sia uguale a 1. Quindi applichiamo A al primo qubit a condizione che il secondo sia uguale a 0 e che il terzo sia uguale a 1. La parte destra del circuito riprodurrà simmetricamente la parte sinistra per ottenere la reversibilità.



Verifica: $|010\rangle \to |011\rangle \to |001\rangle \to \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} |0\rangle|01\rangle = (a|0\rangle + b|1\rangle)|01\rangle = a|001\rangle + b|101\rangle \to a|011\rangle + b|101\rangle \to a|010\rangle + b|101\rangle$.

La procedura descritta corrisponde essenzialmente a trovare un cambio nella base computazionale tale che i due livelli non banali corrispondano ad un singolo qubit. Individuare un codice di Gray (ad esempio: $010 \to 011 \to 001 \to 101$ è un codice di Gray che connette 010 e 101) e implementare le trasformazioni descritte dall'algoritmo corrisponde essenzialmente a costruire la matrice B del cambio di base e la sua inversa.

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

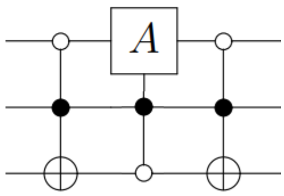
ESERCIZIO 3:

Definire una matrice unitaria a due livelli. Esemplificare la definizione e costruire un circuito che implementi la matrice esempio usando solo operazioni su singolo qubit e CNOT.

Soluzione. Le matrici unitarie a due livelli operano in maniera non banale su al più due componenti del vettore a cui sono applicate. Ad esempio:

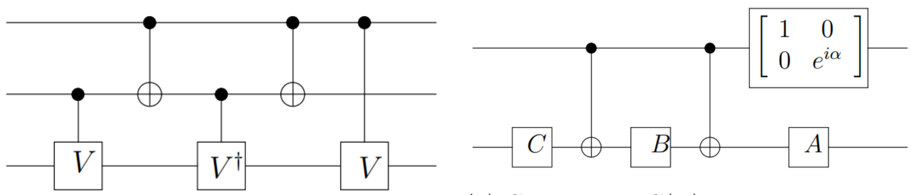
$$U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b & 0 & 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

agisce effettivamente solo sugli stati $|011\rangle$ e $|110\rangle$. Nel circuito che implementa U, gli input saranno inizialmente nella configurazione $|011\rangle$. Lo stato successivo sarà $|010\rangle$ e tale passaggio verrà effettuato applicando un NOT al terzo qubit a condizione che il primo sia uguale a 0 e che il secondo sia uguale a 1. Quindi applichiamo A al primo qubit a condizione che il secondo sia uguale a 1 e che il terzo sia uguale a 0. La parte destra del circuito riprodurrà simmetricamente la parte sinistra per ottenere la reversibilità.



Verifica: $|011\rangle \rightarrow |010\rangle \rightarrow \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} |0\rangle|10\rangle = (a|0\rangle + b|1\rangle)|10\rangle = a|010\rangle + b|110\rangle \rightarrow a|011\rangle + b|110\rangle$.

Ciascuna delle operazioni controllate necessarie per effettuare il passaggio da $|011\rangle$ a $|110\rangle$ in modo reversibile richiede $O(n)$ operazioni su singolo qubit $R_{\vec{n}}(\theta)$ e CNOT. Tale passaggio richiede $2(n-1)+1$ operazioni controllate per essere effettuato. Quindi, per implementare una matrice unitaria a due livelli saranno necessarie $O(n^2)$ operazioni su singolo qubit e CNOT.



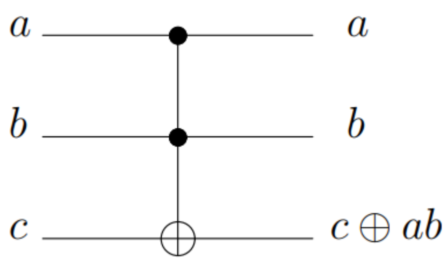
(a) Circuito per $C^2(U)$ con $U = V^2$

(b) Circuito per $C(U)$ con $U = e^{i\alpha}AXBXC = e^{i\alpha}R_z(\beta)R_y(\gamma)R_z(\delta)$

ESERCIZIO 4:

Dimostrare che una qualsiasi operazione classica si può implementare in modo reversibile usando l'operazione di Toffoli.

Soluzione. La porta di Toffoli è universale per le computazioni classiche. Ciò significa che ogni computazione classica si può costruire in modo reversibile mediante la porta di Toffoli. Questo risultato segue dall'universalità delle operazioni NAND e FANOUT per le computazioni classiche e dal fatto che entrambe queste operazioni si possono esprimere mediante il circuito di Toffoli.



Infatti, applicando l'operazione di Toffoli con $c = 1$ otteniamo:

- $a' = a$
- $b' = b$
- $c' = 1 \oplus ab = \overline{ab}$

cioè la simulazione del NAND come operazione reversibile.

Il FANOUT reversibile si ottiene invece applicando l'operazione di Toffoli con $a = 1$ e $c = 0$ ottenendo:

- $a' = 1$
- $b' = b$
- $c' = 0 \oplus 1b = b$

ovvero la copia in output del bit b.

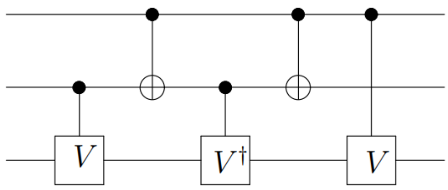
La reversibilità dell'operazione di Toffoli si verifica facilmente osservando che applicando per due volte consecutive la porta di Toffoli si ottiene lo stesso risultato di partenza (l'operazione stessa coincide con la sua inversa):

$$(a, b, c) \to (a, b, c \oplus ab) \to (a, b, c \oplus ab \oplus ab) = (a, b, c)$$

ESERCIZIO 5:

Descrivi un circuito quantistico che implementa l'operazione di Toffoli e che utilizza solo operazioni su singolo qubit e CNOT.

Soluzione. L'operazione di Toffoli si può implementare come operazione quantistica, usando solo operazioni su singolo qubit e CNOT, mediante il seguente circuito ponendo $V = \frac{1}{2}(1 - i)(I + iX)$ (si può verificare che $V^2 = X$).



- $|00c\rangle \rightarrow |00c\rangle$, in quanto non viene attivata alcuna operazione.
- $|01c\rangle \rightarrow |01\rangle V|c\rangle \rightarrow |01\rangle VV^{\dagger}|c\rangle = |01c\rangle$
- $|10c\rangle \rightarrow |11c\rangle \rightarrow |11\rangle V^{\dagger}|c\rangle \rightarrow |10\rangle V^{\dagger}|c\rangle \rightarrow |10\rangle V^{\dagger}V|c\rangle = |10c\rangle$
- $|11c\rangle \rightarrow |11\rangle V|c\rangle \rightarrow |10\rangle V|c\rangle \rightarrow |11\rangle V|c\rangle \rightarrow |11\rangle V^2|c\rangle = |11\rangle X|c\rangle$

In alternativa, Toffoli si può implementare anche usando solo CNOT, H, S e T (vedi esercizio 2 appendice A.1).

Capitolo 6

Algoritmo di Shor

6.1 Trasformata di Fourier quantistica

ESERCIZIO 1:

Definire la trasformata di Fourier quantistica per un generico $N = 2^n$ e scrivere la matrice che la rappresenta nella base computazionale standard per $n = 1$ e $n = 2$.

Soluzione. La QFT è un operatore lineare che trasforma gli stati della base computazionale standard nel seguente modo:

$$|j\rangle \to \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} e^{2\pi i jk/N} |k\rangle$$

Equivalentemente, la QFT si può vedere come una matrice $N \times N$ in cui ogni cella ha valore $\omega^{jk} = (e^{2\pi i/N})^{jk}$.

Quindi, per $n = 1$ avremo la seguente matrice di rappresentazione della QFT:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \omega \end{bmatrix}$$

Per $n = 2$, invece, la matrice è la seguente:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 & \omega^3 \\ 1 & \omega^2 & \omega^4 & \omega^6 \\ 1 & \omega^3 & \omega^6 & \omega^9 \end{bmatrix}$$

ESERCIZIO 2:

Definisci le due matrici che rappresentano la trasformata di Fourier e la sua inversa per un registro quantistico di 2 qubit. Dimostra inoltre che sono unitarie.

Soluzione. Per $n = 2$ abbiamo

$$QFT : \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 & \omega^3 \\ 1 & \omega^2 & \omega^4 & \omega^6 \\ 1 & \omega^3 & \omega^6 & \omega^9 \end{bmatrix}$$

$$QFT^{-1} : \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega^{-1} & \omega^{-2} & \omega^{-3} \\ 1 & \omega^{-2} & \omega^{-4} & \omega^{-6} \\ 1 & \omega^{-3} & \omega^{-6} & \omega^{-9} \end{bmatrix}$$

Un modo per dimostrare che la trasformazione definita dalla QFT è unitaria è mediante la costruzione di un circuito quantistico che la implementa.

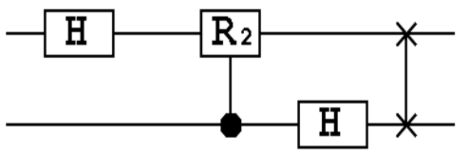
È conveniente esprimere il generico stato $|j\rangle$ di un registro quantistico di 2 qubit come $|j\rangle = |j_1\rangle|j_2\rangle$. In questo modo, possiamo scrivere la QFT di $|j\rangle$ come:

$$\frac{1}{\sqrt{4}}\sum_{k=0}^{3} e^{2\pi ijk/4}|k\rangle = \frac{1}{2}\sum_{k_1=0}^{1}\sum_{k_2=0}^{1} e^{2\pi ij(k_1/2+k_2/4)}|k_1\rangle|k_2\rangle =$$

$$= \frac{1}{2}\bigotimes_{l=1}^{2}\left(\sum_{k_l=0}^{1} e^{2\pi ijk_l/2^l}|k_l\rangle\right) = \frac{1}{2}\left[(|0\rangle + e^{2\pi i0.j_2}|1\rangle) \otimes (|0\rangle + e^{2\pi i0.j_1j_2}|1\rangle)\right]$$

dove la notazione $0.j_1j_2$ rappresenta la frazione binaria $j_1/2 + j_2/2^2$.

Da questa rappresentazione della QFT si può derivare il seguente circuito che la implementa:



dove $R_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{2\pi i/2^k} \end{bmatrix}$.

- Applico H al primo qubit: $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + e^{2\pi i0.j_1}|1\rangle)|j_2\rangle$ con $e^{2\pi i/2} = -1$
- Applico R_2 al primo qubit: $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + e^{2\pi i0.j_1j_2}|1\rangle)|j_2\rangle$
- Applico H al secondo qubit: $\frac{1}{2}(|0\rangle + e^{2\pi i0.j_1j_2}|1\rangle)(|0\rangle + e^{2\pi i0.j_2}|1\rangle)$
- Applico lo swap: $\frac{1}{2}(|0\rangle + e^{2\pi i0.j_2}|1\rangle)(|0\rangle + e^{2\pi i0.j_1j_2}|1\rangle)$

Poiché tutte le operazioni utilizzate sono unitarie, possiamo concludere che QFT è una trasformazione unitaria.

Per QFT^{-1} il procedimento è analogo ma con $R_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-2\pi i/2^k} \end{bmatrix}$.

6.2 Fattorizzazione

ESERCIZIO 1:

Descrivere i passi dell'algoritmo di Shor e simularne l'esecuzione per la fattorizzazione del numero 15. Commentare in dettaglio l'uso della trasformata di Fourier quantistica in questo algoritmo.

Soluzione.

1. Scegliamo un numero casuale x tra 1 e $N-1$.

$$x = 13$$

2. Calcoliamo $MCD(x, N)$. Se $MCD(x, N) > 1$ allora abbiamo trovato un fattore non banale di N, altrimenti procediamo con il passo 3.

$$MCD(13, 15) = 1$$

3. Usiamo l'algoritmo quantistico per trovare l'ordine r di $x \mod N$.

$$13^1 = 13 \mod 15$$

$$13^2 = 4 \mod 15$$

$$13^3 = 7 \mod 15$$

$$13^4 = 1 \mod 15$$

4. Se r è dispari oppure r è pari e $x^{r/2} = -1 \mod N$, allora ritorniamo al passo 1.

$$r = 4 \wedge 13^2 \neq -1 \mod 15$$

5. Calcoliamo $MCD(x^{r/2} - 1, N)$ e $MCD(x^{r/2} + 1, N)$. Se uno dei due interi calcolati risulta essere un fattore non banale di N allora l'algoritmo termina con successo, altrimenti fallisce e bisogna ripeterlo a partire dal passo 1.

$$MCD(168, 15) = 3$$

$$MCD(170, 15) = 5$$

L'algoritmo quantistico per trovare l'ordine di un numero $x \mod N$ (di L bits) consiste essenzialmente nell'applicare il metodo di stima delle fasi basato sulla trasformata di Fourier quantistica

$$|j\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} e^{2\pi ijk/N} |k\rangle$$

all'operatore unitario U definito come

$$U|y\rangle = |xy \mod N\rangle \quad se\ 0 \leq y \leq N-1$$
$$U|y\rangle = |y\rangle \quad se\ N \leq y \leq 2^L - 1$$

per ottenere una stima dei suoi autovalori. Infatti, si verifica facilmente che, se r è l'ordine di $x \mod N$ e $0 \leq s \leq r-1$, ogni vettore della forma

$$|u_s\rangle = \frac{1}{\sqrt{r}} \sum_{k=0}^{r-1} e^{-2\pi i s k/r} |x^k \mod N\rangle$$

è un autovettore di U con autovalore $e^{2\pi i s/r}$:

$$U|u_s\rangle = e^{2\pi i s/r}|u_s\rangle$$

L'idea di base dell'algoritmo è quindi quella di ottenere un'approssimazione accurata della fase s/r da cui poter ricavare il valore di r.

ESERCIZIO 2:

Seguendo i passi dell'algoritmo di Shor per la fattorizzazione di $N = 91$:

(i) Qual è il periodo r della sovrapposizione periodica preparata dall'algoritmo se si sceglie $x = 8$? In altre parole, qual è il periodo della funzione $f(j) = 8^j \mod 91$?

(ii) Usando la risposta precedente, trovare una radice non banale di $1 \mod 91$.

(iii) L'ultimo passo dell'algoritmo prevede il calcolo di $MCD(91, y)$ per qualche y. Individuarne almeno uno.

Soluzione.

1. Scelgo x tra 1 e $N-1$:
$$x = 8$$

2. Calcolo $MCD(x, N)$:
$$MCD(8, 91) = 1$$

3. Calcolo l'ordine r di $x \mod N$:
$$8^1 = 8 \mod 91$$
$$8^2 = 64 \mod 91$$
$$8^3 = 57 \mod 91$$
$$8^4 = 1 \mod 91$$

4. Controllo se r è dispari oppure se r è pari e $x^{r/2} = -1 \mod N$:
$$r = 4 \wedge 8^2 \neq -1 \mod 91$$

5. Calcolo $MCD(x^{r/2} - 1, N)$ e $MCD(x^{r/2} + 1, N)$:
$$MCD(63, 91) = 7$$
$$MCD(65, 91) = 13$$

ESERCIZIO 3:

Seguendo i passi dell'algoritmo di Shor per la fattorizzazione di N:

(i) Si consideri $N = 91$. Assumendo la scelta di $x = 4$ al primo passo, verificare che l'algoritmo ha successo.

(ii) Si consideri $N = 18$. Assumendo la scelta di $x = 5$ al primo passo, verificare che l'algoritmo fallisce.

Soluzione.

(i) 1. Scelgo x tra 1 e $N-1$:
$$x = 4$$

2. Calcolo $MCD(x, N)$:
$$MCD(4, 91) = 1$$

3. Calcolo l'ordine r di $x \mod N$:
$$4^1 = 4 \mod 91$$
$$4^2 = 16 \mod 91$$
$$4^3 = 64 \mod 91$$
$$4^4 = 74 \mod 91$$
$$4^5 = 23 \mod 91$$
$$4^6 = 1 \mod 91$$

4. Controllo se r è dispari oppure se r è pari e $x^{r/2} = -1 \mod N$:
$$r = 6 \wedge 4^3 \neq -1 \mod 91$$

5. Calcolo $MCD(x^{r/2} - 1, N)$ e $MCD(x^{r/2} + 1, N)$:
$$MCD(63, 91) = 7$$
$$MCD(65, 91) = 13$$

(ii) 1. Scelgo x tra 1 e $N-1$:
$$x = 5$$

2. Calcolo $MCD(x, N)$:
$$MCD(5, 18) = 1$$

3. Calcolo l'ordine r di $x \mod N$:
$$5^1 = 5 \mod 18$$
$$5^2 = 7 \mod 18$$
$$5^3 = 17 \mod 18$$
$$5^4 = 13 \mod 18$$
$$5^5 = 11 \mod 18$$
$$5^6 = 1 \mod 18$$

4. Controllo se r è dispari oppure se r è pari e $x^{r/2} = -1 \mod N$:
$$r = 6 \wedge 5^3 = -1 \mod 18$$

ESERCIZIO 4:

Considera l'algoritmo di Shor per fattorizzare l'intero 21. Fornisci due esecuzioni dell'algoritmo di cui una ha successo e l'altra fallisce.

Soluzione.

- 1. Scelgo x tra 1 e $N-1$:
$$x = 11$$
  2. Calcolo $MCD(x, N)$:
$$MCD(11, 21) = 1$$
  3. Calcolo l'ordine r di $x \mod N$:
$$11^1 = 11 \mod 21$$
$$11^2 = 16 \mod 21$$
$$11^3 = 8 \mod 21$$
$$11^4 = 4 \mod 21$$
$$11^5 = 2 \mod 21$$
$$11^6 = 1 \mod 21$$
  4. Controllo se r è dispari oppure se r è pari e $x^{r/2} = -1 \mod N$:
$$r = 6 \wedge 11^3 \neq -1 \mod 21$$
  5. Calcolo $MCD(x^{r/2} - 1, N)$ e $MCD(x^{r/2} + 1, N)$:
$$MCD(1330, 21) = 7$$
$$MCD(1332, 21) = 3$$

- 1. Scelgo x tra 1 e $N-1$:
$$x = 5$$
  2. Calcolo $MCD(x, N)$:
$$MCD(5, 21) = 1$$
  3. Calcolo l'ordine r di $x \mod N$:
$$5^1 = 5 \mod 21$$
$$5^2 = 4 \mod 21$$
$$5^3 = 20 \mod 21$$
$$5^4 = 16 \mod 21$$
$$5^5 = 17 \mod 21$$
$$5^6 = 1 \mod 21$$
  4. Controllo se r è dispari oppure se r è pari e $x^{r/2} = -1 \mod N$:
$$r = 6 \wedge 5^3 = -1 \mod 21$$

Capitolo 7

Algoritmo di Grover

ESERCIZIO 1:

Data una funzione booleana f definita su uno spazio di dimensione $N = 2^n$, diciamo che un elemento x dello spazio è una soluzione se $f(x) = 1$. Descrivere l'operatore di Grover G e applicarlo per la ricerca di soluzioni in questo spazio. Assumendo poi che il numero di soluzioni sia $M = 1$, calcolare il numero di iterazioni di G necessarie per massimizzare la probabilità di successo dell'algoritmo e calcolare tale probabilità (con $N = 2^2 = 4$).

Soluzione. Un oracolo che determina se una data sequenza di n bit è una soluzione oppure no ha la forma

$$O : |x\rangle|q\rangle \rightarrow |x\rangle|q \oplus f(x)\rangle$$

Se $|q\rangle$ è preparato nello stato $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)$, allora l'azione dell'oracolo O è quella di invertire le ampiezze degli stati $|x\rangle$ che sono soluzioni, lasciando invariati gli altri stati

$$O : |x\rangle \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \rightarrow (-1)^{f(x)}|x\rangle \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}$$

Poiché il qubit $|q\rangle$ non viene modificato da O possiamo ignorarlo. L'azione di O su un generico stato quantistico è quindi

$$O : \sum_{x\in\{0,1\}^n} \alpha_x|x\rangle \rightarrow \sum_{x\in\{0,1\}^n} (-1)^{f(x)}\alpha_x|x\rangle$$

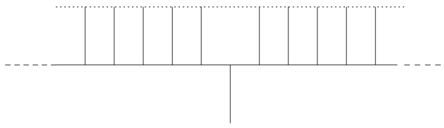
L'operatore di Grover ha la forma

$$G = (HBH)O$$

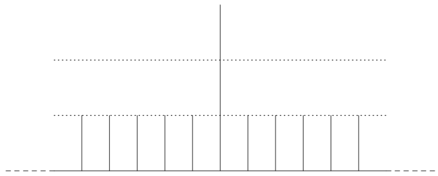
dove $B = 2|0\rangle\langle 0| - I$ effettua uno shift di fase di -1 su tutti gli stati computazionali diversi da $|0\rangle$.

L'operazione HBH è detta inversione intorno alla media perché il suo effetto è quello di amplificare le ampiezze degli stati soluzione (che erano state moltiplicate per -1 dall'oracolo O) innalzandole del doppio al di sopra della media di tutte le ampiezze. Formalmente tale operazione corrisponde a

$$H(2|0\rangle\langle 0| - I)H = 2|\psi\rangle\langle\psi| - I$$



(a) Effetto dell'oracolo O sulle ampiezze

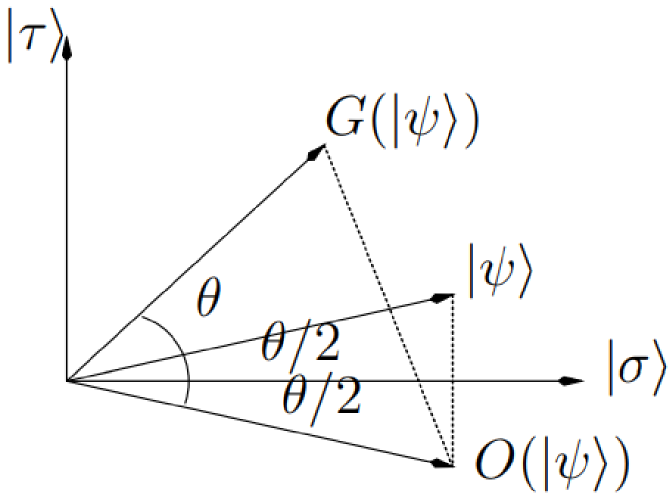


(b) Inversione intorno alla media delle ampiezze

Il numero massimo di iterazioni di G necessarie per trovare una soluzione è

$$m \leq \left\lceil \frac{\pi}{4}\sqrt{\frac{N}{M}} \right\rceil \to m \leq \left\lceil \frac{\pi}{4}\sqrt{4} \right\rceil \to m \leq \left\lceil \frac{\pi}{2} \right\rceil = 2 = \sqrt{N}$$

L'operatore di Grover corrisponde ad una rotazione dello stato iniziale $|\psi\rangle$ nel piano reale generato dai due stati normalizzati $|\sigma\rangle$ e $|\tau\rangle$ (ossia le sovrapposizioni uniformi degli stati rispettivamente non soluzione e soluzione del problema di ricerca):



Dopo m iterazioni l'angolo tra $|\psi\rangle$ e $|\sigma\rangle$ è $\frac{\pi}{4}$, che è quindi uguale all'angolo tra $|\psi\rangle$ e $|\tau\rangle$, poiché i due angoli sono complementari. Quindi, una misurazione di $|\psi\rangle$ ci darebbe una soluzione con probabilità $\sin^2 \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}$.

ESERCIZIO 2:

Considera l'algoritmo di Grover. Dimostra che

$$(2|\psi\rangle\langle\psi| - I)\sum_x \alpha_x|x\rangle = \sum_x (2A - \alpha_x)|x\rangle$$

dove $A = \sum_x \alpha_x/N$. Spiega perché tale operazione è chiamata inversione intorno alla media.

Soluzione. Dato $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_x |x\rangle$, si ha:

$$(2|\psi\rangle\langle\psi| - I) \sum_x \alpha_x |x\rangle = \frac{2}{N} \left(\sum_x |x\rangle \sum_x \langle x| - I \right) \sum_x \alpha_x |x\rangle =$$

$$= \frac{2}{N} \sum_x |x\rangle \left(\sum_x \alpha_x - \sum_x \alpha_x |x\rangle \right) = \sum_x (2A - \alpha_x)|x\rangle$$

L'operazione è quindi un'inversione intorno alla media poiché:

$$\sum_x (2A - \alpha_x)|x\rangle = \sum_x [(A - \alpha_x) + A]|x\rangle$$

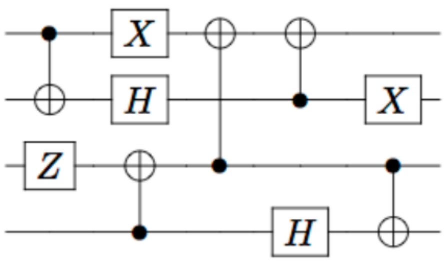
Appendice A

Alcuni esercizi svolti su qiskit

A.1 Circuiti quantistici

ESERCIZIO 1:

Considera la matrice corrispondente al circuito sottostante.



(i) Qual è il prodotto scalare tra la riga 3 e la riga 14 di questa matrice?

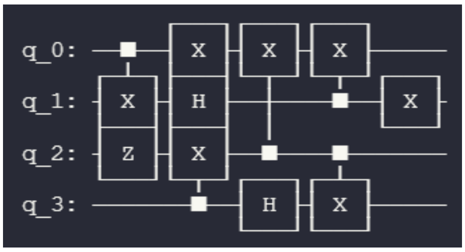
(ii) Qual è il prodotto scalare tra la riga 3 e sé stessa?

Soluzione. Di seguito il codice Python per codificare il circuito in qiskit:

```
from qiskit import *

qc = QuantumCircuit(4)  # un circuito operante su un registro di 4 qubit (con indici da 0 a 3)

qc.cnot(0,1)
qc.z(2)
qc.x(0)
qc.h(1)
qc.cnot(3,2)
qc.cnot(2,0)
```

```python
qc.cnot(1,0)
qc.h(3)
qc.x(1)
qc.cnot(2,3)

qc.draw()
```

Output:



Recupero la matrice simulando il circuito con `unitary_simulator`:

```python
unitary_sim = Aer.get_backend('unitary_simulator')
result = execute(qc, backend=unitary_sim, shots=1).result().get_unitary()

from qiskit.quantum_info import Operator
from qiskit.visualization.array import array_to_latex
array_to_latex(Operator(qc), max_size=16)
```

Output:

$$\begin{bmatrix}
\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\
0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\
0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\
\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\
0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\
0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\
\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}$$

Rispondo alle domande:

```python
import numpy as np
mat = np.round(np.array(result), decimals=1)
```

```
print(np.dot(mat[2][:], mat[13][:]))  # (i)
print(np.dot(mat[2][:], mat[2][:]))  # (ii)
```

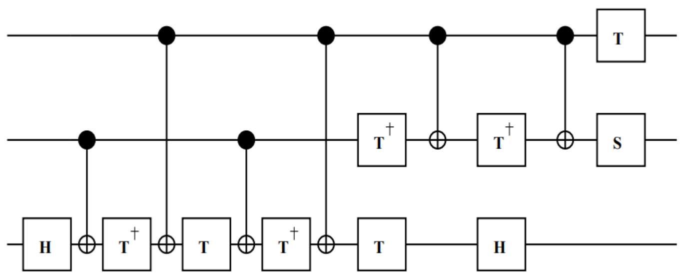
Output:

(i) Il prodotto scalare tra la riga 3 e la riga 14 è: 0.

(ii) Il prodotto scalare tra la riga 3 e sé stessa è: 1.

ESERCIZIO 2:

Dimostra che il circuito sottostante implementa il gate di Toffoli usando i gate H, $CNOT$, $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\pi/2} \end{pmatrix}$ e $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\pi/4} \end{pmatrix}$.

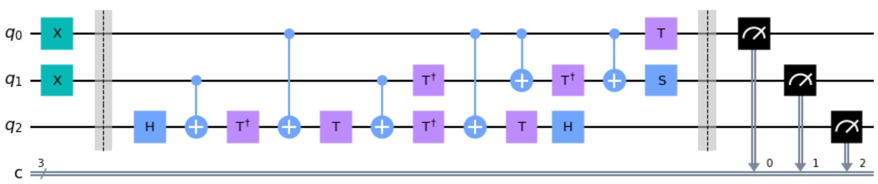


Soluzione. Di seguito il codice Python per codificare il circuito in qiskit:

```
from qiskit import *

def create_circuit(input):
    qc = QuantumCircuit(3, 3)

    # input (uso X per trasformare gli 0 in 1)
    for i in range(3):
        if input[i] == '1':
            qc.x(i)

    qc.barrier()
    qc.h(2)
    qc.cnot(1,2)
    qc.tdg(2)
    qc.cnot(0,2)
    qc.t(2)
    qc.cnot(1,2)
    qc.tdg(2)
    qc.cnot(0,2)
    qc.tdg(1)
    qc.t(2)
    qc.cnot(0,1)
    qc.tdg(1)
    qc.h(2)
```

```python
    qc.cnot(0,1)
    qc.t(0)
    qc.s(1)
    qc.barrier()

    # output (misuro tutti i qubit)
    qc.measure(range(3), range(3))

    return qc
```

Output (per 110):



Simulo il circuito su tutti gli input con `qasm_simulator`:

```python
qasm_sim = Aer.get_backend('qasm_simulator')
N = 3
for n in range(2**N):
    n_base2 = format(n, f'0{N}b')
    qc = create_circuit(n_base2)
    result = execute(qc, backend=qasm_sim, shots=1000).result().get_counts()
    print("Input:", n_base2, "- Output:", result)
```

Dalla simulazione ottengo il seguente risultato, che corrisponde alla tabella di verità del gate di Toffoli (i qubit in output vanno letti da destra a sinistra):

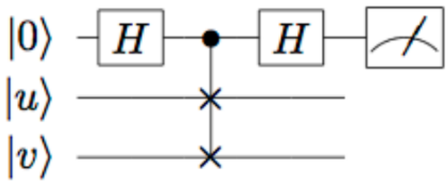
```
Input: 000 - Output: {'000': 1000}
Input: 001 - Output: {'100': 1000}
Input: 010 - Output: {'010': 1000}
Input: 011 - Output: {'110': 1000}
Input: 100 - Output: {'001': 1000}
Input: 101 - Output: {'101': 1000}
Input: 110 - Output: {'111': 1000}
Input: 111 - Output: {'011': 1000}
```

ESERCIZIO 3:

Dato il circuito che controlla se $|u\rangle$ è uguale a $|v\rangle$, determinare:

(i) Qual è la probabilità che il risultato della misurazione sia 0 per l'input $|u\rangle = |v\rangle = |+\rangle$.

(ii) Qual è la probabilità che il risultato della misurazione sia 0 per l'input $|u\rangle = |+\rangle$ e $|v\rangle = |-\rangle$.



Soluzione. Rispondo alla prima domanda codificando il circuito per l'input $|u\rangle = |v\rangle = |+\rangle$ per poi simularlo con `qasm_simulator`:

```
from qiskit import *

qc = QuantumCircuit(3,1)

# input (uso H per trasformare gli 0 in +)
qc.h(1)
qc.h(2)

qc.h(0)
qc.cswap(0,1,2)
qc.h(0)
qc.measure(0,0)

qasm_sim = Aer.get_backend('qasm_simulator')
result = execute(qc, backend=qasm_sim, shots=1000).result().get_counts()
result
```

Output: {`'0': 1000`} ossia $p(0) = 1$.

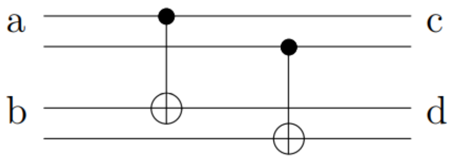
Rispondo alla seconda domanda codificando il circuito per l'input $|u\rangle = |+\rangle$, $|v\rangle = |-\rangle$ per poi simularlo con `qasm_simulator`:

```
from qiskit import *

qc = QuantumCircuit(3,1)

# input (uso H e X per trasformare 0 in + e 1 in -)
qc.h(1)
qc.x(2)
qc.h(2)

qc.h(0)
qc.cswap(0,1,2)
qc.h(0)
qc.measure(0,0)

qasm_sim = Aer.get_backend('qasm_simulator')
result = execute(qc, backend=qasm_sim, shots=1000).result().get_counts()
result
```

Output: {`'0': 483, '1': 517`} ossia $p(0) = \frac{1}{2}$.

ESERCIZIO 4:

Verifica che se $|a\rangle$ e $|b\rangle$ sono due stati di Bell, allora gli stati $|c\rangle$ e $|d\rangle$ ottenuti mediante il circuito sottostante sono entrambi entangled.

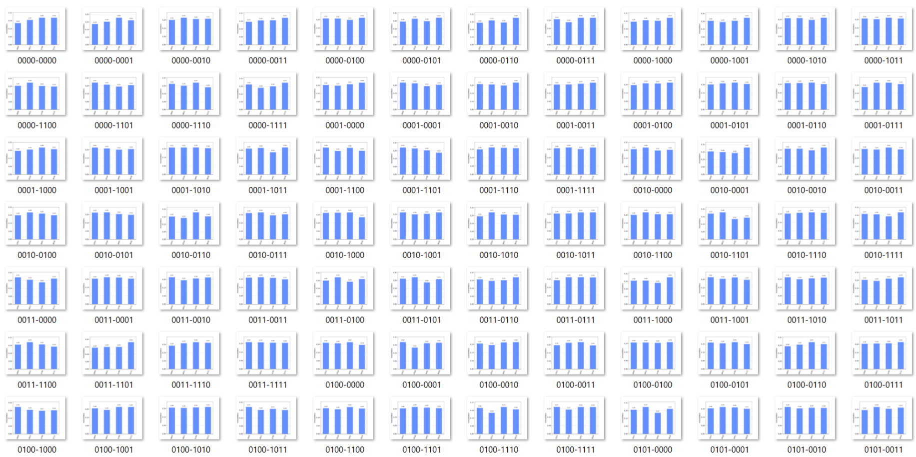


Soluzione. Di seguito il codice Python per codificare il circuito in qiskit:

```python
from qiskit import *

def create_circuit(a, b, measure=False):
    qc = QuantumCircuit(4, 4)

    # input a (uno stato di Bell)
    for i in range(2):
        if a[i] == '1':
            qc.x(i)
    qc.h(0)
    qc.cnot(0,1)

    # input b (uno stato di Bell)
    for i in range(2):
        if b[i] == '1':
            qc.x(i)
    qc.h(2)
    qc.cnot(2,3)

    qc.barrier()
    qc.cnot(0,2)
    qc.cnot(1,3)
    qc.barrier()

    # output (misuro tutti i qubit)
    if measure:
        qc.measure(range(4), range(4))

    return qc

from qiskit.visualization import plot_histogram
from qiskit.visualization.array import array_to_latex

svsim = Aer.get_backend('aer_simulator')
measure = True  # con True ottengo gli istogrammi, con False ottengo gli statevector

```

```
N = 4
for n_a in range(2**N):
    n_a_base2 = format(n_a, f'0{N}b')
    for n_b in range(2**N):
        n_b_base2 = format(n_b, f'0{N}b')

        qc = create_circuit(n_a_base2, n_b_base2, measure=measure)

        qc.save_statevector()
        qobj = assemble(qc)
        result = svsim.run(qobj).result()

        if measure:
            plot_histogram(result.get_counts(),
            ↪  filename=f"./5/{n_a_base2}-{n_b_base2}.png")
        else:
            print(array_to_latex(result.get_statevector(),
            ↪  prefix=f"|{n_a_base2}\\rangle|{n_b_base2}\\rangle: ",
            ↪  source=True, max_size=16))
```

Alcuni output:



Si può notare che gli stati misurati in ogni figura sono equiprobabili (e che tutti gli altri stati hanno probabilità nulla di essere misurati). Gli stati $|c\rangle$ e $|d\rangle$ ottenuti mediante il circuito sono quindi entangled.

A.2 Parallelismo quantistico

ESERCIZIO 1:

Supponendo che $H^{\otimes n}|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|000\rangle + |111\rangle)$, determinare $|\psi\rangle$.

Soluzione. Di seguito il codice Python che codifica il circuito $H^{\otimes n}$ per $n = 3$ e ne recupera la matrice corrispondente:

```
from qiskit import *

qc = QuantumCircuit(3)
qc.h(range(3))
qc.draw()

unitary_sim = Aer.get_backend('unitary_simulator')
result = execute(qc, backend=unitary_sim, shots=1).result().get_unitary()

from qiskit.quantum_info import Operator
from qiskit.visualization.array import array_to_latex
array_to_latex(Operator(qc), max_size=16)
```

Output:

$$\begin{bmatrix}
\frac{1}{\sqrt{8}} & \frac{1}{\sqrt{8}} & \frac{1}{\sqrt{8}} & \frac{1}{\sqrt{8}} & \frac{1}{\sqrt{8}} & \frac{1}{\sqrt{8}} & \frac{1}{\sqrt{8}} & \frac{1}{\sqrt{8}} \\
\frac{1}{\sqrt{8}} & -\frac{1}{\sqrt{8}} & \frac{1}{\sqrt{8}} & -\frac{1}{\sqrt{8}} & \frac{1}{\sqrt{8}} & -\frac{1}{\sqrt{8}} & \frac{1}{\sqrt{8}} & -\frac{1}{\sqrt{8}} \\
\frac{1}{\sqrt{8}} & \frac{1}{\sqrt{8}} & -\frac{1}{\sqrt{8}} & -\frac{1}{\sqrt{8}} & \frac{1}{\sqrt{8}} & \frac{1}{\sqrt{8}} & -\frac{1}{\sqrt{8}} & -\frac{1}{\sqrt{8}} \\
\frac{1}{\sqrt{8}} & -\frac{1}{\sqrt{8}} & -\frac{1}{\sqrt{8}} & \frac{1}{\sqrt{8}} & \frac{1}{\sqrt{8}} & -\frac{1}{\sqrt{8}} & -\frac{1}{\sqrt{8}} & \frac{1}{\sqrt{8}} \\
\frac{1}{\sqrt{8}} & \frac{1}{\sqrt{8}} & \frac{1}{\sqrt{8}} & \frac{1}{\sqrt{8}} & -\frac{1}{\sqrt{8}} & -\frac{1}{\sqrt{8}} & -\frac{1}{\sqrt{8}} & -\frac{1}{\sqrt{8}} \\
\frac{1}{\sqrt{8}} & -\frac{1}{\sqrt{8}} & \frac{1}{\sqrt{8}} & -\frac{1}{\sqrt{8}} & -\frac{1}{\sqrt{8}} & \frac{1}{\sqrt{8}} & -\frac{1}{\sqrt{8}} & \frac{1}{\sqrt{8}} \\
\frac{1}{\sqrt{8}} & \frac{1}{\sqrt{8}} & -\frac{1}{\sqrt{8}} & -\frac{1}{\sqrt{8}} & -\frac{1}{\sqrt{8}} & -\frac{1}{\sqrt{8}} & \frac{1}{\sqrt{8}} & \frac{1}{\sqrt{8}} \\
\frac{1}{\sqrt{8}} & -\frac{1}{\sqrt{8}} & -\frac{1}{\sqrt{8}} & \frac{1}{\sqrt{8}} & -\frac{1}{\sqrt{8}} & \frac{1}{\sqrt{8}} & \frac{1}{\sqrt{8}} & -\frac{1}{\sqrt{8}}
\end{bmatrix}$$

Sapendo che $(H^{\otimes n})^{-1} = H^{\otimes n}$ è possibile calcolare $|\psi\rangle$ come

$$(H^{\otimes n})^{-1}H^{\otimes n}|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[(H^{\otimes n})^{-1}|000\rangle + (H^{\otimes n})^{-1}|111\rangle\right]$$

ottenendo

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(H^{\otimes n}|000\rangle + H^{\otimes n}|111\rangle) = \frac{1}{2}(|000\rangle + |011\rangle + |101\rangle + |110\rangle)$$

Verifica:

```
import numpy as np
mat = np.array(result)
psi = np.array([[0.5,0,0,0.5,0,0.5,0.5,0]]).transpose()
print(np.matmul(mat, psi))
```

Output (trasposto):

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

Credits

Basato sugli appunti delle lezioni forniti dalla *prof.ssa Alessandra Di Pierro*

Repository github: `https://github.com/zampierida98/UniVR-informatica`
Indirizzo e-mail: `zampieri.davide@outlook.com`