Università degli Studi di Verona

Dipartimento di Informatica
Corso di Laurea in Informatica

Guida agli esercizi per il corso di Fondamenti

Creato da:
Davide Zampieri

Anno Accademico 2019-2020

Indice

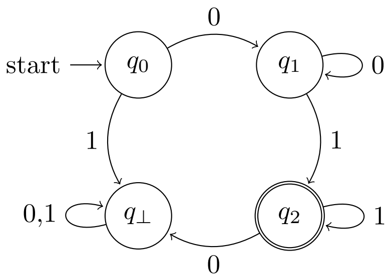
Capitolo 1

Linguaggi (I parte)

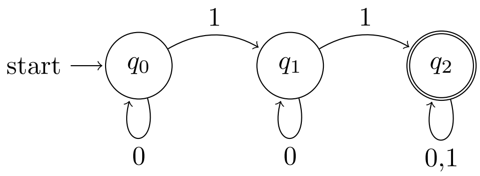
1.1 Linguaggi regolari

Quelli elencati di seguito sono tutti linguaggi regolari. Inoltre, è presente anche la traccia dell'automa per la dimostrazione.

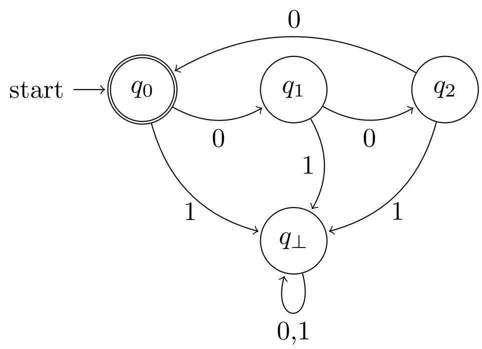
$\boxed{1}$ $L = \{\ 0^n 1^m \mid n, m \geq 1\ \}$



$\boxed{2}$ $L = \{\ x \in \{0,1\}^* \mid \text{x contiene almeno due 1}\ \}$



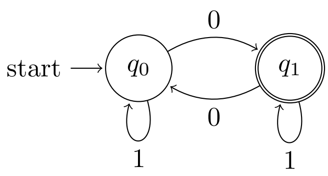
$\boxed{3}$ $L_m = \{\ 0^n 1^m \mid n \in m + 3\mathbb{N}\ \}$
Riscriviamo L_m come $L_m = 0^m \cdot \{\ 0^{3n} \mid n \in \mathbb{N}\ \} \cdot 1^m$ con 0^m e 1^m linguaggi regolari (finiti). Ci basta quindi scrivere un automa per il linguaggio $\{\ 0^{3n} \mid n \in \mathbb{N}\ \}$.

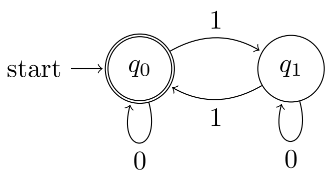


$\boxed{4}$ $L = \{ \ \sigma \in \{0,1\}^* \text{ t.c. } |\sigma|_0 \in 2\mathbb{N}+1 \vee |\sigma|_1 \in 2\mathbb{N} \ \}$
L è l'unione dei seguenti linguaggi:

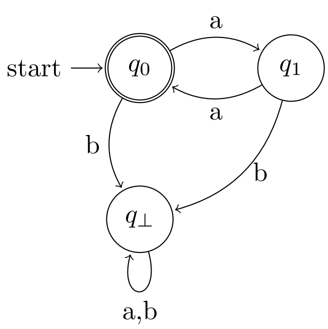
- $L_0 = \{ \ \sigma \in \{0,1\}^* \mid \text{numero di 0 dispari} \ \}$
- $L_1 = \{ \ \sigma \in \{0,1\}^* \mid \text{numero di 1 pari} \ \}$

Ci basta quindi scrivere un automa per ogni linguaggio dell'unione.

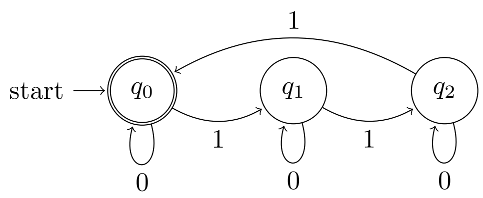




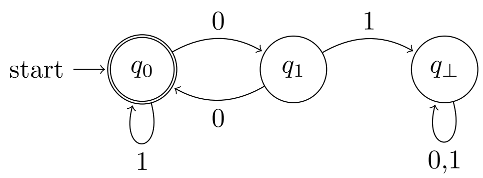
$\boxed{5}$ $L = \{ \ a^{2n} \mid n \in \mathbb{N} \ \}$



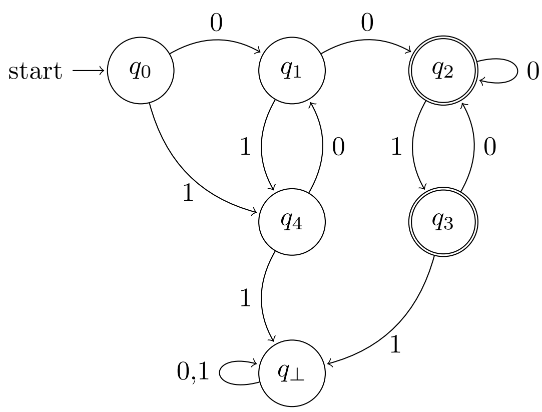
$\boxed{6}$ $L = \{\ \sigma \in \{0,1\}^* \text{ t.c. } |\sigma|_1 \in 3\mathbb{N}\ \}$



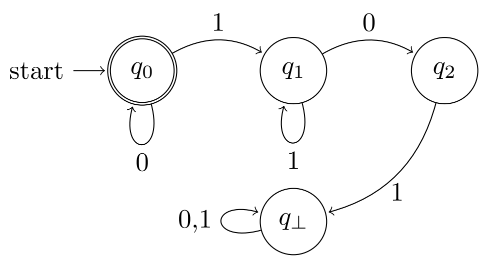
$\boxed{7}$ $L = \{\ \sigma \in \{0,1\}^* \mid \text{gli 0 sono sempre a coppie}\ \}$



$\boxed{8}$ $L = \{\ \sigma \in \{0,1\}^* \mid \text{almeno due 0 consecutivi } \wedge \text{ mai due 1 consecutivi}\ \}$



$\boxed{9}$ $A = \{\ \sigma \in \{0,1\}^* \mid \text{ogni sequenza di 1 è seguita da almeno due 0}\ \}$



1.2 Linguaggi CF

Quelli elencati di seguito sono tutti linguaggi CF. Inoltre, sono presenti anche la stringa da usare per il pumping lemma e la traccia della grammatica per la dimostrazione.

$\boxed{1}$ $L = \{\ \sigma \in \{0,1\}^* \mid \sigma$ è palindroma $\}$
Per dimostrare che L non è regolare, utilizziamo per esempio la stringa $z = 0^n1^n1^n0^n$ per il pumping lemma. La grammatica che descrive L, invece, è la seguente:

$$S \longrightarrow 0S0 \mid 1S1 \mid 0 \mid 1 \mid \epsilon$$

$\boxed{2}$ $L = \{\ a^nb^n \mid n \in \mathbb{N}\ \}$
Per dimostrare che L non è regolare, utilizziamo per esempio la stringa $z = a^kb^k$ per il pumping lemma. La grammatica che descrive L, invece, è la seguente:

$$S \longrightarrow aSb \mid \epsilon$$

$\boxed{3}$ $L = \{\ a^nb^mc^h \mid n \leq m + h\ \wedge\ m, h \in \mathbb{N}\ \}$
Per dimostrare che L non è regolare, utilizziamo per esempio la stringa $z = a^{2k}b^kc^k$ per il pumping lemma. La grammatica che descrive L, invece, è la seguente:

$$S \longrightarrow aSc \mid Sc \mid A$$
$$A \longrightarrow aAb \mid Ab \mid \epsilon$$

$\boxed{4}$ $L = \{\ 0^n1^m \mid n \in m + 3\mathbb{N}\ \wedge\ m \in \mathbb{N}\ \}$
Riscriviamo L come $L = \{\ 0^m0^{3n}1^m \mid n, m \in \mathbb{N}\ \}$. Per dimostrare che L non è regolare, utilizziamo per esempio la stringa $z = 0^k0^{3k}1^k$ per il pumping lemma. La grammatica che descrive L, invece, è la seguente:

$$S \longrightarrow 0S1 \mid 000S \mid \epsilon$$

$\boxed{5}$ $B = \{\ \sigma \mid$ ogni sequenza di 0 è seguita dallo stesso numero di 1 $\}$
Per dimostrare che B non è regolare, utilizziamo per esempio la stringa $z = 0^k1^k$ per il pumping lemma. La grammatica che descrive B, invece, è la seguente:

$$S \longrightarrow 1S \mid A \mid \epsilon$$
$$A \longrightarrow 0B1A \mid \epsilon$$
$$B \longrightarrow 0B1 \mid \epsilon$$

$\boxed{6}$ $L = \{\ 0^m1^n0^h1^{2h} \mid m, n, h \in \mathbb{N}\ \}$
Per dimostrare che L non è regolare, utilizziamo per esempio la stringa $z = 0^k1^{2k}$ per il pumping lemma. La grammatica che descrive L, invece, è la seguente:

$$S \longrightarrow 0S \mid A$$
$$A \longrightarrow 1A \mid B$$
$$B \longrightarrow 0B11 \mid \epsilon$$

$\boxed{7}$ $L = \{\ 0^n1^m0^n \mid n, m \in \mathbb{N}\ \}$
Per dimostrare che L non è regolare, utilizziamo per esempio la stringa $z = 0^k1^k0^k$ per il pumping lemma. La grammatica che descrive L, invece, è la seguente:

$$S \longrightarrow 0S0 \mid A \mid \epsilon$$
$$A \longrightarrow 1A \mid \epsilon$$

1.3 Linguaggi non CF

Quelli elencati di seguito sono tutti linguaggi non CF. Inoltre, è presente anche la stringa da usare per il pumping lemma.

$\boxed{1}$ $L = \{\ a^{2^n} \mid n \geq 1\ \}$
La presenza di un esponenziale ci fa intuire di avere a che fare con un linguaggio non CF. Infatti, per dimostrare che L non è CF, si può utilizzare per esempio la stringa $z = a^{2^k}$ per il pumping lemma CF.

$\boxed{2}$ $L = \{\ a^n b^n c^n \mid n \geq 0\ \}$
La presenza di n come esponente per 3 volte ci fa intuire di avere a che fare con un linguaggio non CF. Infatti, per dimostrare che L non è CF, si può utilizzare per esempio la stringa $z = a^k b^k c^k$ per il pumping lemma CF.

$\boxed{3}$ $L = \{\ 0^n \mid n \text{ è un numero primo}\ \}$
La presenza dei numeri primi ci fa intuire di avere a che fare con un linguaggio non CF. Infatti, per dimostrare che L non è CF, si può utilizzare per esempio la stringa $z = 0^k$ con k numero primo per il pumping lemma CF.

$\boxed{4}$ $L_1 \cap L_2$ con $L_1 = \{\ a^i b^i c^j \mid i, j \geq 1\ \}$ e $L_2 = \{\ a^i b^j c^j \mid i, j \geq 1\ \}$

- L_1 è CF
  Per dimostrare che L_1 non è regolare, utilizziamo per esempio la stringa $z = a^k b^k c^k$ per il pumping lemma. La grammatica che descrive L_1, invece, è la seguente:

$$S \longrightarrow AC$$

$$A \longrightarrow aAb \mid ab$$

$$C \longrightarrow cC \mid c$$

- L_2 è CF
  Per dimostrare che L_2 non è regolare, utilizziamo per esempio la stringa $z = ab^k c^k$ per il pumping lemma. La grammatica che descrive L_2, invece, è la seguente:

$$S \longrightarrow AB$$

$$A \longrightarrow aA \mid a$$

$$B \longrightarrow bBc \mid bc$$

- $L_1 \cap L_2 = \{\ a^i b^i c^i \mid i \geq 1\ \}$ è non CF
  Per dimostrare che $L_1 \cap L_2$ non è CF, si può utilizzare per esempio la stringa $z = a^k b^k c^k$ per il pumping lemma CF.

$\boxed{5}$ $L = \{\ a^n b^n c^m \mid n \geq m\ \}$
La presenza di n come esponente per 2 volte unita alla presenza di un'ulteriore condizione su n ci fa intuire di avere a che fare con un linguaggio non CF. Infatti, per dimostrare che L non è CF, si può utilizzare per esempio la stringa $z = a^k b^k c^k$ per il pumping lemma CF.

$\boxed{6}$ $L = \{\ a^n b^j \mid n \leq j^2\ \}$
La presenza di un esponenziale nella condizione su j ci fa intuire di avere a che fare con un linguaggio non CF. Infatti, per dimostrare che L non è CF, si può utilizzare per esempio la stringa $z = a^{k^2} b^k$ per il pumping lemma CF.

$\boxed{7}$ $L_h \cap M_h$ con $L_h = \{1^{h+m}0^m 1^n \mid m, n \geq 1\}$ e $M_h = \{1^n 0^m 1^{h+m} \mid m, n \geq 1\}$

- L_h al variare di h sono tutti CF
  Per dimostrare che L_1 non è regolare, utilizziamo per esempio la stringa $z = 1^k 1 0^k 1$ per il pumping lemma. La grammatica che descrive L_1, invece, è la seguente:

$$S \longrightarrow 1AB$$

$$A \longrightarrow 1A0 \mid 10$$
$$B \longrightarrow 1B \mid 1$$

- M_h al variare di h sono tutti CF
  Per dimostrare che M_1 non è regolare, utilizziamo per esempio la stringa $z = 10^k 1^k 1$ per il pumping lemma. La grammatica che descrive M_1, invece, è la seguente:

$$S \longrightarrow 1S \mid 10B11$$

$$B \longrightarrow 0B1 \mid \epsilon$$

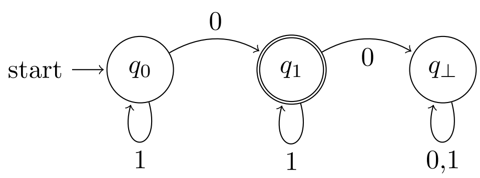
- $L_h \cap M_h = \{\ 1^{h+m}0^m 1^{h+m} \mid m \geq 1\ \}$ è non CF
  Per dimostrare che $L_h \cap M_h$ non è CF, si può utilizzare per esempio la stringa $z = 1^{2k}0^k 1^{2k}$ per il pumping lemma CF.

1.4 Esercizi di riepilogo sulla I parte

Per i linguaggi elencati di seguito è presente la relativa classificazione e anche una traccia per la dimostrazione.

$\boxed{1}$ $L_m = \{\ \sigma \in \{0,1\}^*$ t.c. $|\sigma|_0 = (|\sigma|_1)^m\ \}$ al variare di m

- $L_0 = \{\ \sigma \in \{0,1\}^*$ t.c. $|\sigma|_0 = 1\ \}$ è regolare



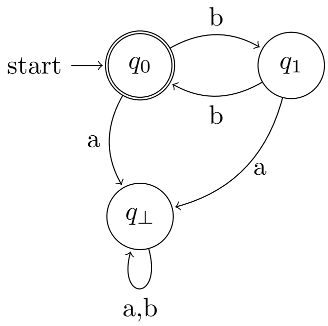
- $L_1 = \{\ \sigma \in \{0,1\}^*$ t.c. $|\sigma|_0 = |\sigma|_1\ \}$ è CF
  Per dimostrare che L_1 non è regolare, utilizziamo per esempio la stringa $z = 0^k 1^k$ per il pumping lemma. La grammatica che descrive L_1, invece, è la seguente:

$$S \longrightarrow S1S0S \mid S0S1S \mid \epsilon$$

- $L_2 = \{ \ \sigma \in \{0,1\}^* \text{ t.c. } |\sigma|_0 = (|\sigma|_1)^2 \ \}$ è non CF
  Per dimostrare che L_2 non è CF, utilizziamo per esempio la stringa $z = 0^{k^2}1^k$ per il pumping lemma CF.
- $L_3, \ ..., \ L_m$ sono anch'essi non CF
- $\bigcap_{m \in \mathbb{N}} L_m = L_0$ è regolare

$\boxed{2}$ $L_m = \{ \ a^{3m}b^{2n}c^{4m \cdot n} \mid n \in \mathbb{N} \ \}$ al variare di m

- $L_0 = \{ \ b^{2n} \mid n \in \mathbb{N} \ \}$ è regolare



- $L_1 = \{ \ a^3b^{2n}c^{4n} \mid n \in \mathbb{N} \ \}$ è CF
  Per dimostrare che L_1 non è regolare, utilizziamo per esempio la stringa $z = a^3b^kc^{2k}$ con $k \in 2\mathbb{N}$ per il pumping lemma. La grammatica che descrive L_1, invece, è la seguente:

$$S \longrightarrow aaaA$$

$$A \longrightarrow bbAcccc \mid \epsilon$$

- $L_2, \ ..., \ L_m$ sono anch'essi CF
- $L = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} L_m = \{ \ a^{3m}b^{2n}c^{4m \cdot n} \mid n, m \in \mathbb{N} \ \}$ è non CF
  Per dimostrare che L non è CF, utilizziamo per esempio la stringa $z = a^{3k}b^{2k}c^{4k^2}$ per il pumping lemma CF.
- $\bigcap_{m \in \mathbb{N}} L_m = \varnothing$ è regolare

$\boxed{3}$ $L_n = \left\{ 1^{n^k}0^n1^{n^k} \mid k \in \mathbb{N} \right\}$ al variare di $n > 0$

- $L_1 = \{ \ 101 \ \}$ è regolare (finito)
- $L_2 = \left\{ 1^{2^k}0^21^{2^k} \mid k \in \mathbb{N} \right\}$ è non CF
  Per dimostrare che L_2 non è CF, utilizziamo per esempio la stringa $z = 1^{2^k}0^21^{2^k}$ per il pumping lemma CF.
- $L_3, \ ..., \ L_m$ sono anch'essi non CF
- $\bigcap_{n > 0} L_n = \varnothing$ è regolare

$\boxed{4}$ $L_n = \{\ a^m b^m c^m \mid m \leq n\ \}$

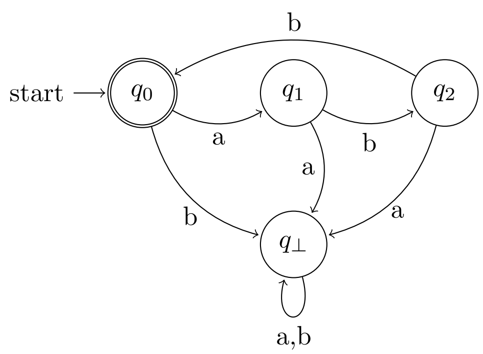
- L_n al variare di n sono tutti regolari (finiti)
- $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} L_n = \{\ \epsilon\ \}$ è regolare
- $L = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} L_n = \{\ a^n b^n c^n \mid n \geq 0\ \}$ è non CF
  Per dimostrare che L non è CF, utilizziamo per esempio la stringa $z = a^k b^k c^k$ per il pumping lemma CF.

$\boxed{5}$ $A_{m,n} = \{\ \sigma \in \{a,b\}^* \mid \sigma = (a^n b^{2n})^m\ \}$

- $A_{m,n}$ al variare di m e n sono tutti regolari (finiti)
- $B_m = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_{m,n} = \{\ \sigma \in \{a,b\}^* \mid \sigma = (a^n b^{2n})^m \ \wedge\ n \in \mathbb{N}\ \}$ è CF per $m = 1$
  Per dimostrare che B_1 non è regolare, utilizziamo per esempio la stringa $z = a^k b^{2k}$ per il pumping lemma. La grammatica che descrive B_1, invece, è la seguente:

$$S \longrightarrow aSbb \mid \epsilon$$

- B_m è non CF per $m \geq 2$
  Per dimostrare che B_2 non è CF, utilizziamo per esempio la stringa $z = a^k b^{2k} a^k b^{2k}$ per il pumping lemma CF.
- $C_n = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} A_{m,n} = \{\ \sigma \in \{a,b\}^* \mid \sigma = (a^n b^{2n})^m \ \wedge\ m \in \mathbb{N}\ \}$ al variare di n sono tutti regolari
  Per dimostrare che C_1 è regolare, scriviamo il seguente automa:



$\boxed{6}$ $L_m = \{\ 0^m 1^{2m} 1^{2n} 0^{3n} \mid n \in \mathbb{N}\ \}$

- L_m al variare di m sono tutti CF
  Per dimostrare che L_0 non è regolare, utilizziamo per esempio la stringa $z = 1^{2k} 0^{3k}$ per il pumping lemma. La grammatica che descrive L_0, invece, è la seguente:

$$S \longrightarrow 11S000 \mid \epsilon$$

- $L = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} L_m = \{\ 0^m 1^{2m} 1^{2n} 0^{3n} \mid n, m \in \mathbb{N}\ \}$ è CF
  Per dimostrare che L non è regolare, utilizziamo per esempio la stringa $z = 0^k 1^{2k} 1^{2k} 0^{3k}$ per il pumping lemma. La grammatica che descrive L, invece, è la seguente:

$$S \longrightarrow AB \mid \epsilon$$

$$A \longrightarrow 0A11 \mid \epsilon$$

$$B \longrightarrow 11B000 \mid \epsilon$$

- $H = L \cap \{\ 0^n 1^m 0^{3n} \mid n, m \in \mathbb{N}\ \} = \{\ 0^m 1^{4m} 0^{3m} \mid m \in \mathbb{N}\ \}$ è non CF
  Per dimostrare che H non è CF, utilizziamo per esempio la stringa $z = 0^k 1^{4k} 0^{3k}$ per il pumping lemma CF.

Capitolo 2

Insiemi (II parte)

2.1 Insiemi creativi

Quelli elencati di seguito sono tutti insiemi creativi (e quindi i loro complementari sono produttivi). Inoltre, è presente anche una traccia per la dimostrazione.

$\boxed{1}$ $A = \{\ x \mid \varphi_x(2x^2 + x) \downarrow\ \}$
Per dimostrare che A è R.E., scriviamo per esempio il seguente algoritmo:

```
input(x);
y = 2x^2 + x;
if φ_x(y)↓ then return 1;
```

Per dimostrare che $K \preceq A$, usiamo una funzione parziale ricorsiva $\psi(x, y)$ definita come

$$\psi(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in K \\ \uparrow & \text{altrimenti} \end{cases}$$

e descritta per esempio dal seguente algoritmo:

```
input(x);
input(y);
if φ_x(x)↓ then return 1;
```

$\boxed{2}$ $A = \{\ x \mid \varphi_x(2x^2 + x) = 5\ \}$
Per dimostrare che A è R.E., scriviamo per esempio il seguente algoritmo:

```
input(x);
y = 2x^2 + x;
if φ_x(y) = 5 then return 1;
else while true {
    x = x;
}
```

Per dimostrare che $K \preceq A$, usiamo una funzione parziale ricorsiva $\psi(x, y)$ definita come

$$\psi(x,y) = \begin{cases} 5 & \text{se } x \in K \\ \uparrow & \text{altrimenti} \end{cases}$$

e descritta per esempio dal seguente algoritmo:

```
input(x);
input(y);
if φ_x(x)↓ then return 5;
```

$\boxed{3}$ $A = \{\ x \mid \varphi_x(2x^2 + x) = x^3\ \}$
Per dimostrare che A è R.E., scriviamo per esempio il seguente algoritmo:

```
input(x);
y = 2x^2 + x;
z = x^3;
if φ_x(y) = z then return 1;
else while true {
    x = x;
}
```

Per dimostrare che $K \preceq A$, usiamo una funzione parziale ricorsiva $\psi(x, y)$ definita come

$$\psi(x,y) = \begin{cases} z^3 & \text{se } x \in K \ \wedge \ y = 2z^2 + z \\ \uparrow & \text{altrimenti} \end{cases}$$

e descritta per esempio dal seguente algoritmo:

```
input(x);
input(y);
z = 0;
while z <= y {
    if y = 2z^2 + z then
        if φ_x(x)↓ then return z^3;
    z = z + 1;
}
```

$\boxed{4}$ $A = \{\ x^x + x \mid \varphi_x(\varphi_x(x^x)) = 11\ \}$
Per dimostrare che A è R.E., scriviamo per esempio il seguente algoritmo:

```
input(x);
y = x^x;
if φ_x(φ_x(y)) = 11 then return 1;
else while true {
    x = x;
}
```

Per dimostrare che $K \preceq A$, usiamo una funzione parziale ricorsiva $\psi(x, y)$ definita come

$$\psi(x,y) = \begin{cases} 11 & \text{se } x \in K \\ \uparrow & \text{altrimenti} \end{cases}$$

e descritta per esempio dal seguente algoritmo:

```
input(x);
input(y);
if φ_x(x)↓ then return 11;
```

$\boxed{5}$ $A = \{\ x \mid x\ mod\ 7 = 0 \Rightarrow \varphi_{x\ div\ 7}(x^3+1) = x^7\ \}$
Per dimostrare che A è R.E., scriviamo per esempio il seguente algoritmo:

```
input(x);
y = x^3 + 1;
z = x^7;
if x mod 7 = 0 then
    if φ_{x/7}(y) = z then return 1;
    else while true {
        x = x;
    }
else return 1;
```

Notiamo che tale algoritmo restituisce 1 se $V \Rightarrow V$ e anche se $F \Rightarrow V$ o $F \Rightarrow F$, come da definizione di implicazione logica.
Per dimostrare che $K \preceq A$, usiamo una funzione parziale ricorsiva $\psi(x,y)$ definita come

$$\psi(x,y) = \begin{cases} z^7 & \text{se } x \in K \ \wedge \ y = z^3+1 \\ \uparrow & \text{altrimenti} \end{cases}$$

e descritta per esempio dal seguente algoritmo:

```
input(x);
input(y);
z = 0;
while z <= y {
    if y = z^3 + 1 then
        if φ_x(x)↓ then return z^7;
    z = z + 1;
}
```

$\boxed{6}$ $A = \{\ x \mid \exists y.\ x = 2y \Rightarrow \varphi_{x\ div\ 2}(x)\downarrow\ \}$
Per dimostrare che A è R.E., scriviamo per esempio il seguente algoritmo:

```
input(x);
y = 0;
while y <= x {
    if x = 2y then
        if φ_{x/2}(x)↓ then return 1;
    y = y + 1;
}
return 1;
```

Notiamo che tale algoritmo restituisce 1 se $V \Rightarrow V$ e anche se $F \Rightarrow V$ o $F \Rightarrow F$, come da definizione di implicazione logica.
Per dimostrare poi che $K \preceq A$, procediamo come visto nell'esercizio 1.

$\boxed{7}$ $A = \{\ x \mid x\ mod\ 5 = 0 \Rightarrow \varphi_{x\ div\ 5}(x)\downarrow\ \}$
Per dimostrare che A è R.E., scriviamo per esempio il seguente algoritmo:

```
input(x);
if x mod 5 = 0 then
    if φ_{x/5}(x)↓ then return 1;
else return 1;
```

Notiamo che tale algoritmo restituisce 1 se $V \Rightarrow V$ e anche se $F \Rightarrow V$ o $F \Rightarrow F$, come da definizione di implicazione logica.
Per dimostrare poi che $K \preceq A$, procediamo come visto nell'esercizio 1.

$\boxed{8}$ $A = \{ \ x \text{ t.c. } |W_x| \geq 5 \ \}$
Per dimostrare che A è R.E. basta lanciare dovetail per generare W_x e tenere un contatore; quindi se trovo 5 input per cui $\varphi_x(y) \downarrow$ allora $x \in A$.
Per dimostrare che $K \preceq A$ dobbiamo far sì che quando $x \in K$ si ottenga che il dominio di $\psi(x, y)$ abbia cardinalità maggiore o uguale a 5, ovvero ad esempio sia tutto $\mathbb{N}$; d'altra parte quando $x \notin K$ è sufficiente far divergere la funzione in modo da ottenere il dominio vuoto.
Alla luce di tutte queste considerazioni definiamo la funzione $\psi(x, y)$ come

$$\psi(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in K \\ \uparrow & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Essendo K un insieme R.E. la definizione di tale funzione è effettiva e dunque essa è parziale ricorsiva.

$\boxed{9}$ $A = \{ \ x \mid W_x \not\subseteq \bar{K} \ \}$
Per dimostrare che A è R.E. basta lanciare dovetail per generare W_x; quindi se trovo un x tale per cui $\varphi_x(x) \downarrow$ allora $x \in A$ perché siccome $x \in K = \{x \mid \varphi_x(x) \downarrow\}$, W_x non può essere tutto contenuto in $\bar{K}$.
Per dimostrare che $K \preceq A$ dobbiamo far sì che quando $x \in K$ si ottenga che il dominio di $\psi(x, y)$ sia tutto $\mathbb{N}$ in quanto $\mathbb{N} \not\subseteq \bar{K}$; d'altra parte quando $x \notin K$ è sufficiente far divergere la funzione in modo da ottenere come dominio l'insieme vuoto (che è contenuto in tutti gli insiemi).
Alla luce di tutte queste considerazioni definiamo la funzione $\psi(x, y)$ come

$$\psi(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in K \\ \uparrow & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Essendo K un insieme R.E. la definizione di tale funzione è effettiva e dunque essa è parziale ricorsiva.

2.2 Insiemi produttivi

Quelli elencati di seguito sono tutti insiemi produttivi. Inoltre, è presente anche una traccia per la dimostrazione.

$\boxed{1}$ $A = \{ \ x \text{ t.c. } |W_x| = \omega \ \}$
Per dimostrare che $\bar{K} \preceq A$ dobbiamo far sì che quando $x \in K$ si ottenga che il dominio di $\psi(x, y)$ sia finito, perciò da un certo punto in poi bisogna essere sicuri che la funzione diverga. Notiamo che se decidiamo che $x \in K$ significa che $\varphi_x(x)$ termina e questo avviene sicuramente in un numero finito di passi; possiamo allora pensare di far terminare la funzione solo se tali passi non sono meno di y (questo controllo richiede un'esecuzione finita e quindi è decidibile); in tal modo se n è il numero di passi necessari per dire che $x \in K$, allora il dominio di $\psi(x, y)$ sarà costituito da ogni valore più piccolo di n; questo significa che su $n + 1$ la funzione diverge, e quindi riusciamo a negare l'appartenenza ad A. D'altra parte se $x \notin K$, il dominio di $\psi(x, y)$ sarà tutto $\mathbb{N}$ (infinito) perché per nessun n si ha che $x \in K$ è deciso in meno di n passi (essendo un fatto falso).

Alla luce di tutte queste considerazioni definiamo la funzione $\psi(x,y)$ come

$$\psi(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in K \text{ non deciso in meno di } y \text{ passi} \\ \uparrow & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Essendo K un insieme R.E. la definizione di tale funzione è effettiva e dunque essa è parziale ricorsiva.

Consideriamo ora $\bar{A} = \{\ x \text{ t.c. } |W_x| < \omega\ \}$.
Per dimostrare che $\bar{K} \preceq \bar{A}$ dobbiamo far sì che quando $x \in K$ si ottenga che il dominio di $\psi(x,y)$ sia tutto $\mathbb{N}$ (infinito); d'altra parte quando $x \notin K$ è sufficiente far divergere la funzione in modo da ottenere il dominio vuoto (finito).
Alla luce di tutte queste considerazioni definiamo la funzione $\psi(x,y)$ come

$$\psi(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in K \\ \uparrow & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Essendo K un insieme R.E. la definizione di tale funzione è effettiva e dunque essa è parziale ricorsiva.

$\boxed{2}$ $A = \{\ x \mid W_x = \{2\}^{\mathbb{N}}\ \}$
Riscriviamo A come $A = \{\ x \mid W_x = D\ \}$ in quanto la dimostrazione è sempre la stessa, qualunque insieme D si consideri.
Per dimostrare che $\bar{K} \preceq A$ dobbiamo far sì che quando $x \in \bar{K}$ si ottenga che il dominio di $\psi(x,y)$ sia D; un modo per ottenere ciò è quello di far terminare la funzione solo se $y \in D$. Dobbiamo però anche far sì che quando $x \notin \bar{K}$ il dominio non sia D, ovvero ad esempio sia tutto $\mathbb{N}$.
Alla luce di tutte queste considerazioni definiamo la funzione $\psi(x,y)$ come

$$\psi(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in K \ \vee \ y \in D \\ \uparrow & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Essendo K un insieme R.E. la definizione di tale funzione è effettiva e dunque essa è parziale ricorsiva.

Consideriamo ora $\bar{A} = \{\ x \mid W_x \neq D\ \}$.
Per dimostrare che $\bar{K} \preceq \bar{A}$ dobbiamo far sì che quando $x \in \bar{K}$ si ottenga che il dominio di $\psi(x,y)$ non sia D; per ottenere ciò si può fare in modo che il dominio sia vuoto, ovvero che la funzione diverga sempre. Dobbiamo però anche far sì che quando $x \notin \bar{K}$ il dominio sia D; un modo per ottenere ciò è quello di far terminare la funzione solo se $y \in D$.
Alla luce di tutte queste considerazioni definiamo la funzione $\psi(x,y)$ come

$$\psi(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in K \ \wedge \ y \in D \\ \uparrow & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Essendo K un insieme R.E. la definizione di tale funzione è effettiva e dunque essa è parziale ricorsiva.

$\boxed{3}$ $A = \{\ x \mid W_x \text{ è ricorsivo }\}$
Per dimostrare che $\bar{K} \preceq A$ dobbiamo far sì che quando $x \in K$ si ottenga che il dominio di $\psi(x, y)$ non sia ricorsivo; un modo per ottenere ciò è quello di far terminare la funzione solo se $y \in K$, in quanto K non è ricorsivo. Dobbiamo però anche far sì che quando $x \notin K$ il dominio sia ricorsivo; per ottenere ciò si può fare in modo che il dominio sia vuoto, ovvero che la funzione diverga sempre.
Alla luce di tutte queste considerazioni definiamo la funzione $\psi(x, y)$ come

$$\psi(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in K \ \wedge \ y \in K \\ \uparrow & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Essendo K un insieme R.E. la definizione di tale funzione è effettiva e dunque essa è parziale ricorsiva.

Consideriamo ora $\bar{A} = \{\ x \mid W_x \text{ non è ricorsivo }\}$.
Per dimostrare che $\bar{K} \preceq \bar{A}$ dobbiamo far sì che quando $x \in K$ si ottenga che il dominio di $\psi(x, y)$ sia ricorsivo, ovvero ad esempio sia tutto $\mathbb{N}$. Dobbiamo però anche far sì che quando $x \notin K$ il dominio non sia ricorsivo; un modo per ottenere ciò è quello di far terminare la funzione solo se $y \in K$, in quanto K non è ricorsivo.
Alla luce di tutte queste considerazioni definiamo la funzione $\psi(x, y)$ come

$$\psi(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in K \ \vee \ y \in K \\ \uparrow & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Essendo K un insieme R.E. la definizione di tale funzione è effettiva e dunque essa è parziale ricorsiva.

$\boxed{4}$ $A = \{\ x \mid \varphi_x \text{ non crescente} \vee range(\varphi_x) = W_x\ \}$
Per dimostrare che $\bar{K} \preceq A$ dobbiamo assumere che la funzione $\psi(x, y)$ sia crescente dove è definita (per rendere falsa la prima condizione) e far sì che quando $x \in K$ si ottenga che il range e il dominio di $\psi(x, y)$ siano diversi; per ottenere ciò si può fare in modo che il dominio sia tutto $\mathbb{N}$, mentre il range sia $[1, +\infty]$. Dobbiamo però anche far sì che quando $x \notin K$ il range e il dominio di $\psi(x, y)$ siano uguali; per ottenere ciò è sufficiente far divergere la funzione in modo da ottenere dominio e range vuoti.

Alla luce di tutte queste considerazioni definiamo la funzione $\psi(x, y)$ come

$$\psi(x, y) = \begin{cases} y + 1 & \text{se } x \in K \\ \uparrow & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Essendo K un insieme R.E. la definizione di tale funzione è effettiva e dunque essa è parziale ricorsiva.

$\boxed{5}$ $A = \{\ g(x) \mid W_x \subseteq 2^{\mathbb{N}}\ \}$
Per dimostrare che $\bar{K} \preceq A$ dobbiamo far sì che quando $x \in K$ si ottenga che il dominio di $\psi(x, y)$ non sia contenuto in $2^{\mathbb{N}}$, ovvero che ad esempio sia il singoletto $\{3\}$; d'altra parte quando $x \notin K$ è sufficiente far divergere la funzione in modo da ottenere come dominio l'insieme vuoto.

Alla luce di tutte queste considerazioni definiamo la funzione $\psi(x, y)$ come

$$\psi(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in K \ \wedge \ y = 3 \\ \uparrow & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Essendo K un insieme R.E. la definizione di tale funzione è effettiva e dunque essa è parziale ricorsiva.

$\boxed{6}$ $A = \{ \ z \mid range(\varphi_x) \subseteq 2\mathbb{N} + 1 \wedge z = x + 1 \ \}$
Riscriviamo A come $A = \{ \ x + 1 \mid range(\varphi_x) \subseteq 2\mathbb{N} + 1 \ \}$.
Per dimostrare che $\bar{K} \preceq A$ dobbiamo far sì che quando $x \in K$ si ottenga che il range (insieme dei risultati definiti) di $\psi(x, y)$ non sia contenuto in $2\mathbb{N} + 1$, ovvero che ad esempio sia il singoletto $\{2\}$; d'altra parte quando $x \notin K$ è sufficiente far divergere la funzione in modo da ottenere come range l'insieme vuoto (che è contenuto in tutti gli insiemi).
Alla luce di tutte queste considerazioni definiamo la funzione $\psi(x, y)$ come

$$\psi(x,y) = \begin{cases} 2 & \text{se } x \in K \\ \uparrow & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Essendo K un insieme R.E. la definizione di tale funzione è effettiva e dunque essa è parziale ricorsiva.

$\boxed{7}$ $A = \{ \ x \mid W_x \subset K \ \}$
Per dimostrare che $\bar{K} \preceq A$ dobbiamo far sì che quando $x \in K$ si ottenga che il dominio di $\psi(x, y)$ non sia incluso strettamente in K; un modo per ottenere ciò è quello di far terminare la funzione solo se $y \in K$, in quanto K non è incluso strettamente in K. Dobbiamo però anche far sì che quando $x \notin K$ il dominio sia incluso strettamente in K; per ottenere ciò è sufficiente far divergere la funzione in modo da ottenere come dominio l'insieme vuoto (che è incluso strettamente in K).
Alla luce di tutte queste considerazioni definiamo la funzione $\psi(x, y)$ come

$$\psi(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in K \ \wedge \ y \in K \\ \uparrow & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Essendo K un insieme R.E. la definizione di tale funzione è effettiva e dunque essa è parziale ricorsiva.

2.3 Successioni di insiemi ricorsivi

$\boxed{1}$ Definire una successione di insiemi ricorsivi $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tali che

$$A = \{ \ x \mid \bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n \preceq W_x \ \}$$

è un insieme ricorsivo.
Per il teorema di Rice, A può essere $\varnothing$ o $\mathbb{N}$.
Considerando $A = \varnothing$, possiamo riscriverlo in maniera equivalente come

$$A = \{ \ x \mid \bar{K} \preceq W_x \ \}$$

Di conseguenza, dobbiamo fare in modo che $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n = \bar{K}$ e quindi

$$B_n = \{\ x \mid \varphi_x(x) \text{ non termina in meno di } n \text{ passi }\}$$

$\boxed{2}$ Definire una successione di insiemi ricorsivi $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tali che

$$A = \{\ x \mid W_x \preceq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\ \}$$

è un insieme ricorsivo.
Per il teorema di Rice, A può essere $\varnothing$ o $\mathbb{N}$.
Considerando $A = \mathbb{N}$, possiamo riscriverlo in maniera equivalente come

$$A = \{\ x \mid W_x \preceq K\ \}$$

Di conseguenza, dobbiamo fare in modo che $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n = K$ e quindi

$$B_n = \{\ x \mid \varphi_x(x) \text{ termina in meno di } n \text{ passi }\}$$

$\boxed{3}$ Definire una successione di insiemi ricorsivi $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tali che

$$A = \{\ x \mid \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bar{B_n} \preceq \bar{W_x}\ \}$$

è un insieme ricorsivo.
Per il teorema di Rice, A può essere $\varnothing$ o $\mathbb{N}$.
Considerando $A = \varnothing$, possiamo riscriverlo in maniera equivalente come

$$A = \{\ x \mid \bar{K} \preceq W_x\ \} = \{\ x \mid K \preceq \bar{W_x}\ \}$$

Di conseguenza, dobbiamo fare in modo che $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bar{B_n} = K$ e quindi

$$B_n = \{\ x \mid \varphi_x(x) \text{ non termina in meno di } n \text{ passi }\}$$

$\boxed{4}$ Definire una successione di insiemi ricorsivi $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tali che

$$A = \{\ x \mid \bar{W_x} \preceq \bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n\ \}$$

è un insieme ricorsivo.
Per il teorema di Rice, A può essere $\varnothing$ o $\mathbb{N}$.
Considerando $A = \mathbb{N}$, possiamo riscriverlo in maniera equivalente come

$$A = \{\ x \mid W_x \preceq K\ \} = \{\ x \mid \bar{W_x} \preceq \bar{K}\ \}$$

Di conseguenza, dobbiamo fare in modo che $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n = \bar{K}$ e quindi

$$B_n = \{\ x \mid \varphi_x(x) \text{ non termina in meno di } n \text{ passi }\}$$

2.4 Esercizi di riepilogo sulla II parte

Per gli insiemi elencati di seguito è presente la relativa classificazione e anche una traccia per la dimostrazione.

$\boxed{1}$ $A = \{\ x \mid y \in W_x \iff y\ mod\ 7 = 3\ \}$

- $A = \{\ x \mid y \in W_x \iff y \in 7\mathbb{N} + 3\ \} = \{\ x \mid W_x = 7\mathbb{N} + 3\ \}$ è produttivo
  Per dimostrare che $\bar{K} \preceq A$, si procede come nell'esercizio 2 della sottosezione relativa agli insiemi produttivi.
- $\bar{A} = \{\ x \mid W_x \neq 7\mathbb{N} + 3\ \}$ è produttivo
  Per dimostrare che $\bar{K} \preceq \bar{A}$, si procede come nell'esercizio 2 della sottosezione relativa agli insiemi produttivi.

$\boxed{2}$ $A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} W_{\gamma_n}$ con

$$\gamma_n(x) = \begin{cases} 0^{3x}1^{3x}0^{3x} & \text{se } \varphi_x(4x+3) \text{ non termina in meno di } n \text{ passi} \\ \uparrow & \text{altrimenti} \end{cases}$$

- $A = \{\ x \mid \forall n.\ x \in W_{\gamma_n}\ \} = \{\ x \mid \forall n.\ \varphi_x(4x+3)$ non termina in meno di n passi $\} = \{\ x \mid \varphi_x(4x+3)\uparrow\ \}$ è produttivo
  Per dimostrare che $\bar{K} \preceq A$, dimostro che $K \preceq \bar{A}$ procedendo come nell'esercizio 1 della sottosezione relativa agli insiemi creativi.
- $\bar{A} = \{\ x \mid \varphi_x(4x+3)\downarrow\ \}$ è R.E. e quindi creativo

$\boxed{3}$ $A = \{\ x \mid W_x = \mathbb{N}\ \}$

- A è produttivo
  Per dimostrare che $\bar{K} \preceq A$, si procede in maniera simile a quanto visto nell'esercizio 1 della sottosezione relativa agli insiemi produttivi.
- $\bar{A} = \{\ x \mid W_x \neq \mathbb{N}\ \}$ è produttivo
  Per dimostrare che $\bar{K} \preceq \bar{A}$, si procede in maniera simile a quanto visto nell'esercizio 1 della sottosezione relativa agli insiemi produttivi.

$\boxed{4}$ $A_m = \{\ x$ t.c. $|W_x| = m\ \}$

- $\bar{A}_0 = \{\ x$ t.c. $|W_x| \neq 0\ \}$ è creativo
  Per dimostrare che $K \preceq \bar{A}_0$, si procede in maniera simile a quanto visto nell'esercizio 7 della sottosezione relativa agli insiemi creativi.
- $A_0 = \{\ x$ t.c. $|W_x| = 0\ \}$ è quindi produttivo
- A_m con $m \geq 1$ è produttivo
  Per dimostrare che $\bar{K} \preceq A_m$, si procede in maniera simile a quanto visto nell'esercizio 2 della sottosezione relativa agli insiemi produttivi, usando come insieme D un insieme avente cardinalità pari a m (ad esempio $[1, m]$).
- $\bar{A_m}$ con $m \geq 1$ è produttivo
  Per dimostrare che $\bar{K} \preceq \bar{A_m}$, si procede in maniera simile a quanto visto nell'esercizio 2 della sottosezione relativa agli insiemi produttivi, usando come insieme D un insieme avente cardinalità pari a m (ad esempio $[1, m]$).

$\boxed{5}$ $A = \{\ x \mid W_x \neq \bar{K} \Rightarrow W_x = K\ \}$

- Siccome $W_x \neq \bar{K}$ è sempre vera (perché W_x è R.E.), $A = \{\ x \mid W_x = K\ \}$ è produttivo
  Per dimostrare che $\bar{K} \preceq A$, si procede come nell'esercizio 2 della sottosezione relativa agli insiemi produttivi.
- $\bar{A} = \{\ x \mid W_x \neq K\ \}$ è produttivo
  Per dimostrare che $\bar{K} \preceq \bar{A}$, si procede come nell'esercizio 2 della sottosezione relativa agli insiemi produttivi.

$\boxed{6}$ $A_n = \{\ x^n \text{ t.c. } |W_x| = 2^n\ \}$ con $n \geq 1$

- A_n è produttivo
  Per dimostrare che $\bar{K} \preceq A_n$, si procede in maniera simile a quanto visto nell'esercizio 2 della sottosezione relativa agli insiemi produttivi, usando come insieme D un insieme avente cardinalità pari a 2^n (ad esempio $[1, 2^n]$).
- $\bar{A_n} = \{\ x^n \text{ t.c. } |W_x| \neq 2^n\ \}$ con $n \geq 1$ è produttivo
  Per dimostrare che $\bar{K} \preceq \bar{A_n}$, si procede in maniera simile a quanto visto nell'esercizio 2 della sottosezione relativa agli insiemi produttivi, usando come insieme D un insieme avente cardinalità pari a 2^n (ad esempio $[1, 2^n]$).

Credits

Basato sugli appunti delle lezioni del *prof. Roberto Giacobazzi* e sull'eserciziario della *prof.ssa Isabella Mastroeni*
Vedere anche qui: `https://github.com/davbianchi/dispense-info-univr/tree/master/triennale/fondamenti-dell'-informatica`

Repository github: `https://github.com/zampierida98/UniVR-informatica`
Indirizzo e-mail: `zampieri.davide@outlook.com`