Università degli Studi di Verona

Dipartimento di Informatica
Corso di Laurea in Informatica

Guida agli esercizi per il corso di Sistemi

Creato da:
Davide Zampieri

Anno Accademico 2018-2019

Indice

Capitolo 1

Sistemi LTI a tempo continuo

1.1 Segnali elementari

- Impulso

$$\delta(t) = \begin{cases} 1 & se\ t = 0 \\ 0 & altrimenti \end{cases}$$

- Gradino

$$\delta_{-1}(t) = \begin{cases} 1 & se\ t \geq 0 \\ 0 & se\ t < 0 \end{cases}$$

Nota: ricorda che $\delta_{-1}(t) = \int \delta(t)\, dt$ e che $\frac{d\delta(t)}{dt} = \delta_{-1}(t)$

1.2 Forma di un sistema LTI continuo

- Forma generale

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \frac{d^i v(t)}{dt^i} = \sum_{j=0}^{m} b_j \frac{d^j u(t)}{dt^j}$$

- Forma usata negli esercizi

$$a_2 \ddot{v}(t) + a_1 \dot{v}(t) + a_0 v(t) = b_2 \ddot{u}(t) + b_1 \dot{u}(t) + b_0 u(t)$$

1.3 Analisi nel tempo

La risposta totale del sistema si scrive come

$$v(t) = v_l(t) + v_f(t)$$

dove $v_l(t)$ è la risposta libera e $v_f(t)$ è la risposta forzata.

1.3.1 Risposta libera

Per trovare la risposta libera bisogna:

1. Trovare le radici $\lambda_{1,2}$ dell'equazione caratteristica delle uscite

$$a_2 s^2 + a_1 s + a_0 = 0$$

2. Scrivere la risposta libera come

$$v_l(t) = \sum_{i=1}^{r} \sum_{l=0}^{\mu_i - 1} c_{i,l} \cdot e^{\lambda_i t} \cdot \frac{t^l}{l!}$$

3. Usare le condizioni iniziali sulle uscite

   Esempio: se le molteplicità μ_i delle radici sono tutte pari a 1, avremo

$$v_l(t) = c_1 \cdot e^{\lambda_1 t} + c_2 \cdot e^{\lambda_2 t}$$

$$\dot{v}_l(t) = c_1 \cdot \lambda_1 \cdot e^{\lambda_1 t} + c_2 \cdot \lambda_2 \cdot e^{\lambda_2 t}$$

   e quindi bisognerà risolvere il sistema

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = v(0) \\ c_1 \cdot \lambda_1 + c_2 \cdot \lambda_2 = \dot{v}(0) \end{cases}$$

1.3.2 Stabilità asintotica

Grazie ai modi elementari, ovvero le radici λ_i dell'equazione caratteristica delle uscite, possiamo studiare la stabilità asintotica di un sistema LTI.

Infatti, un sistema LTI a tempo continuo è asintoticamente stabile se e solo se $Re(\lambda_i) < 0$.

Infine, si può dire che: se un sistema LTI è asintoticamente stabile, allora è anche BIBO stabile.

1.3.3 Risposta impulsiva

Per trovare la risposta impulsiva bisogna:

1. Scrivere la forma generale

$$h(t) = d_0 \cdot \delta(t) + \sum_{i=1}^{r} \sum_{l=0}^{\mu_i - 1} d_{i,l} \cdot e^{\lambda_i t} \cdot \frac{t^l}{l!} \cdot \delta_{-1}(t)$$

   Nota: il termine con il coefficiente d_0 è presente solo quando il sistema LTI ha $n = m$

2. Porre $v(t) = h(t)$ e $u(t) = \delta(t)$ per trovare i coefficienti d_i

   Esempio: se il sistema LTI ha $n = 2$, bisognerà calcolare la derivata prima e la derivata seconda della risposta impulsiva ricordando che i termini che moltiplicano il gradino vanno eliminati; a questo punto basta raccogliere i termini che moltiplicano l'impulso e le sue derivate e risolvere un sistema

1.3.4 Risposta forzata

La risposta forzata si può calcolare come

$$v_f(t) = [h * u](t) = \int_0^t h(\tau) \cdot u(t-\tau)\, d\tau$$

che è equivalente a

$$v_f(t) = [u * h](t) = \int_0^t u(\tau) \cdot h(t-\tau)\, d\tau$$

1.4 Analisi nelle frequenze

A volte lavorare nel dominio delle frequenze è più semplice che lavorare in quello del tempo.

1.4.1 Trasformata di Laplace

Per passare dal dominio del tempo a quello delle frequenze si utilizza la trasformata di Laplace. Di seguito alcune trasformate notevoli:

- Uscite

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^i v(t)}{dt^i}\right] = s^i \cdot V(s) - \left(\sum_{k=0}^{i} \left.\frac{d^k v(t)}{dt^k}\right|_{t=0^-} \cdot s^{i-1-k}\right)$$

- Ingressi

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^i u(t)}{dt^i}\right] = s^i \cdot U(s)$$

- Esponenziale causale

$$\mathcal{L}\left[e^{\lambda t} \cdot \delta_{-1}(t)\right] = \frac{1}{s-\lambda}$$

1.4.2 Risposta totale

Una volta calcolate le trasformate di Laplace di tutti i termini del sistema LTI si arriva ad una forma del tipo

$$V(s) = V_l(s) + V_f(s) = V_l(s) + H(s) \cdot U(s) = \frac{P(s)}{D(s)} + \frac{N(s)}{D(s)} \cdot U(s)$$

dove $D(s)$ è l'equazione caratteristica delle uscite, $N(s)$ è l'equazione caratteristica degli ingressi e $P(s)$ è la parte relativa alle condizioni iniziali sulle uscite.

1.4.3 BIBO stabilità

Per studiare la BIBO stabilità è necessario ricavare la funzione di trasferimento $H(s)$, che abbiamo visto essere pari a $\frac{N(s)}{D(s)}$.

In particolare, bisogna vedere se i poli p_i (ovvero le radici di $D(s)$) rimasti dopo eventuali semplificazioni con gli zeri z_i (ovvero le radici di $N(s)$) hanno la parte reale negativa. Quindi, un sistema LTI a tempo continuo è BIBO stabile se e solo se $Re(p_i) < 0$.

1.4.4 Metodo dei fratti semplici

Partendo dalla forma usata negli esercizi si arriva, usando la trasformata di Laplace, ad una forma del tipo

$$a_2[s^2 \cdot V(s) - (v(0) \cdot s + \dot{v}(0))] + a_1[s \cdot V(s) - v(0)] + a_0 \cdot V(s) =$$
$$= b_2 s^2 \cdot U(s) + b_1 s \cdot U(s) + b_0 \cdot U(s)$$

A questo punto, dopo alcuni calcoli, si può riuscire a trovare la risposta totale del sistema usando il metodo dei fratti semplici. Di seguito alcuni esempi:

- Tre poli di molteplicità pari a 1

$$V(s) = \frac{f(s)}{(s-\lambda_1)(s-\lambda_2)(s-\lambda_3)} = \frac{A}{s-\lambda_1} + \frac{B}{s-\lambda_2} + \frac{C}{s-\lambda_3}$$
$$A = (s-\lambda_1) \cdot \left.\frac{f(s)}{(s-\lambda_1)(s-\lambda_2)(s-\lambda_3)}\right|_{s=\lambda_1}$$
$$B = (s-\lambda_2) \cdot \left.\frac{f(s)}{(s-\lambda_1)(s-\lambda_2)(s-\lambda_3)}\right|_{s=\lambda_2}$$
$$C = (s-\lambda_3) \cdot \left.\frac{f(s)}{(s-\lambda_1)(s-\lambda_2)(s-\lambda_3)}\right|_{s=\lambda_3}$$

- Due poli di cui uno di molteplicità pari a 2

$$V(s) = \frac{f(s)}{(s-\lambda_1)(s-\lambda_2)^2} = \frac{A}{s-\lambda_1} + \frac{B}{s-\lambda_2} + \frac{C}{(s-\lambda_2)^2}$$
$$A = (s-\lambda_1) \cdot \left.\frac{f(s)}{(s-\lambda_1)(s-\lambda_2)^2}\right|_{s=\lambda_1}$$
$$B = \frac{d}{ds}\left.\left((s-\lambda_2)^2 \cdot \frac{f(s)}{(s-\lambda_1)(s-\lambda_2)^2}\right)\right|_{s=\lambda_2}$$
$$C = (s-\lambda_2)^2 \cdot \left.\frac{f(s)}{(s-\lambda_1)(s-\lambda_2)^2}\right|_{s=\lambda_2}$$

Nota: il metodo dei fratti semplici si può usare anche per trovare la sola risposta libera, forzata o impulsiva. In quest'ultimo caso però, occorre ricordare che se il sistema LTI ha $n = m = 2$, la forma da cui partire diventa

$$H(s) = b_2 + \frac{A}{s-\lambda_1} + \frac{B}{s-\lambda_2}$$

1.4.5 Anti-trasformata di Laplace

Una volta trovata la soluzione nel dominio delle frequenze, è possibile tornare nel dominio del tempo utilizzando l'anti-trasformata di Laplace. Di seguito alcune anti-trasformate notevoli:

- Costante

$$\mathcal{L}^{-1}[A] = A \cdot \delta(t)$$

- Fratti semplici

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{A}{(s-\lambda)^\alpha}\right] = Ae^{\lambda t} \cdot \frac{t^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} \cdot \delta_{-1}(t)$$

1.5 Studio della stabilità al variare di k

Se in un sistema LTI è presente un parametro k, la condizione per garantire la stabilità asintotica (ovvero $Re(\lambda_i) < 0$) diventa

$$\begin{cases} +\frac{c}{a} > 0 \\ -\frac{b}{a} < 0 \end{cases}$$

dove a, b e c sono i coefficienti delle uscite.

Anche in questo caso possiamo dire che: se un sistema LTI è asintoticamente stabile, allora è anche BIBO stabile.

Capitolo 2

Schemi a blocchi e diagrammi di flusso

2.1 Trasmittanza totale

Dopo aver trasformato uno schema a blocchi in un diagramma di flusso, è possibile trovare la funzione di trasferimento tra ingresso e uscita andando a calcolare la trasmittanza totale come

$$T = \frac{\sum_i P_i \cdot \Delta_i}{\Delta}$$

con

$$\Delta = 1 - \sum_j P_{j1} + \sum_j P_{j2}$$

dove P_i sono i cammini aperti, P_{j1} sono gli anelli singoli, P_{j2} sono le coppie di anelli che non si toccano e Δ_i sono uguali a Δ ma senza i contributi degli anelli che toccano il cammino aperto P_i a cui si riferiscono.

2.2 Esempi di esercizi con soluzione in Matlab

2.2.1 Esempio 1

Si vuole calcolare la funzione di trasferimento del seguente schema a blocchi

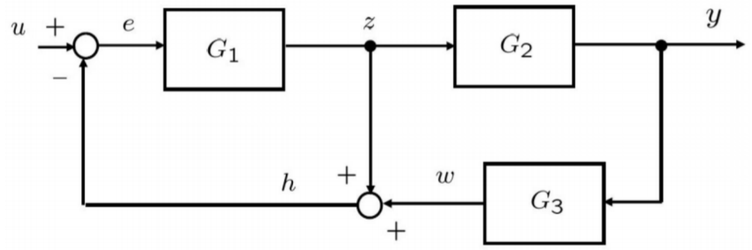

Figura 2.1: Esempio 1

```
syms G1 G2 G3
syms u y e z h w
sys = [e==u-h; z==G1*e; y==G2*z; h==z+w; w==G3*y];
sol = solve(sys,[e,z,y,h,w]);
Gtot = coeffs(sol.y,u)
```

Listing 2.1: Esempio 1 in Matlab

Con le seguenti relazioni ingresso-uscita

- $e = u - h$
- $z = G1 \cdot e$
- $y = G2 \cdot z$
- $h = z + w$
- $w = G3 \cdot y$

la funzione di trasferimento trovata è

$$Gtot = \frac{G1 \cdot G2}{G1 + G1 \cdot G2 \cdot G3 + 1}$$

2.2.2 Esempio 2

Si vuole calcolare la funzione di trasferimento del seguente schema a blocchi

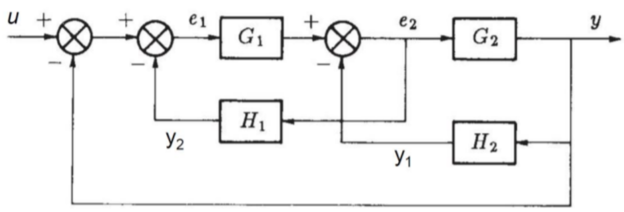

Figura 2.2: Esempio 2

```
syms G1 G2 H1 H2
syms u y e1 e2 y1 y2
sys = [e1==u-y-y2; e2==G1*e1-y1; y1==H2*y; y2==H1*e2; y==G2*e2];
sol = solve(sys,[e1,e2,y1,y2,y]);
Gtot = coeffs(sol.y,u)
```

Listing 2.2: Esempio 2 in Matlab

Con le seguenti relazioni ingresso-uscita

- $e_1 = u - y - y_2$
- $e_2 = G1 \cdot e_1 - y_1$
- $y_1 = H2 \cdot y$
- $y_2 = H1 \cdot e_2$
- $y = G2 \cdot e_2$

la funzione di trasferimento trovata è

$$Gtot = \frac{G1 \cdot G2}{G1 \cdot G2 + G1 \cdot H1 + G2 \cdot H2 + 1}$$

2.2.3 Esempio 3

Si vuole calcolare la funzione di trasferimento del seguente schema a blocchi

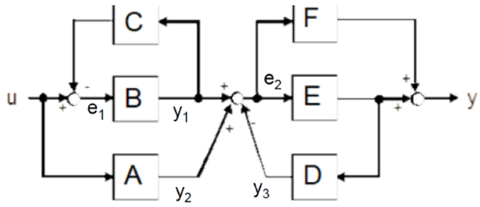

Figura 2.3: Esempio 3

```
syms A B C D E F
syms u y e1 e2 y1 y2 y3
sys = [e1==u-C*y1; e2==y1+y2-y3; y1==B*e1; y2==A*u; y3==D*E*e2; y
    ==(E+F)*e2];
sol = solve(sys,[e1,e2,y1,y2,y3,y]);
Gtot = coeffs(sol.y,u)
```

Listing 2.3: Esempio 3 in Matlab

Con le seguenti relazioni ingresso-uscita

- $e_1 = u - C \cdot y_1$
- $e_2 = y_1 + y_2 - y_3$
- $y_1 = B \cdot e_1$
- $y_2 = A \cdot u$
- $y_3 = D \cdot E \cdot e_2$
- $y = (E + F) \cdot e_2$

la funzione di trasferimento trovata è

$$Gtot = \frac{(E + F) \cdot (A + B + A \cdot B \cdot C)}{(B \cdot C + 1) \cdot (D \cdot E + 1)}$$

Capitolo 3

Trasformata di Fourier

3.1 Trasformate notevoli

Dato uno schema a blocchi, è possibile trovare l'uscita del sistema per via grafica lavorando nel dominio delle frequenze, utilizzando la trasformata di Fourier e le sue proprietà. Di seguito alcune trasformate notevoli:

- Funzione costante
$$\mathcal{F}\left[A\right] = A \cdot \delta(f)$$

- Fasore
$$\mathcal{F}\left[A \cdot e^{j2\pi f_0 t}\right] = A \cdot \delta(f - f_0)$$

- Funzione coseno
$$\mathcal{F}\left[A \cdot \cos(2\pi f_0 t)\right] = \frac{A}{2}\left(\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)\right)$$

- Funzione seno
$$\mathcal{F}\left[A \cdot \sin(2\pi f_0 t)\right] = \frac{A}{2j}\left(\delta(f - f_0) - \delta(f + f_0)\right)$$

- Finesta rettangolare
$$\mathcal{F}\left[A \cdot \Pi\left(\frac{t}{T}\right)\right] = AT \cdot sinc(fT)$$

Nota: valgono anche in senso inverso

3.2 Proprietà

- **Prodotto nel dominio del tempo:** in via grafica consiste nel centrare il segnale $v_1(t)$ nel segnale $v_2(t)$ o viceversa.

$$v_1(t) \cdot v_2(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} V_1(f) * V_2(f)$$

- **Convoluzione nel dominio del tempo:** in via grafica consiste nell'applicare il filtro $v_2(t)$ al segnale $v_1(t)$; bisogna cioè tenere le parti di $v_1(t)$ contenute in $v_2(t)$.

$$v_1(t) * v_2(t) \stackrel{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} V_1(f) \cdot V_2(f)$$

- **Campionamento nel dominio del tempo:** in via grafica consiste nel replicare il segnale $v(t)$ ogni $f = \frac{1}{T}$; bisogna cioè centrare $v(t)$ ogni f Hz.

$$[samp_T\, v](t) \stackrel{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{T}[rep_{\frac{1}{T}}\, V](f)$$

3.3 Ampiezze dei segnali

Nelle operazioni di prodotto e convoluzione, le ampiezze dei due segnali vanno sempre moltiplicate tra di loro.

Le ampiezze vanno invece sommate solo nel caso in cui due segnali si sovrappongano.

Nell'operazione di campionamento, infine, tutti i segnali vanno moltiplicati per la frequenza di campionamento $f = \frac{1}{T}$.

3.4 Aliasing

Il fenomeno di aliasing si verifica quando $f < 2B$, dove con B si intende la banda del segnale, ovvero quanto il segnale è largo nelle frequenze positive.

L'aliasing consiste nella possibile sovrapposizione di due o più segnali, dovuta al fatto che si va a replicare secondo una frequenza che è minore dello spazio che occupa l'intero segnale.

Capitolo 4

Diagrammi di Bode

4.1 Forma di Bode

Data una funzione di trasferimento nella forma

$$G(s) = K \cdot \frac{\prod_i (s - z_i)^{\mu_i} \cdot \prod_k (s - z_k)(s - \overline{z_k})}{\prod_i (s - p_i)^{\mu_i} \cdot \prod_k (s - p_k)(s - \overline{p_k})}$$

è possibile passare alla sua forma di Bode definita come

$$G(j\omega) = K_B \cdot \prod_l \frac{1}{(j\omega)^{\nu_l}} \cdot \prod_i (1 + j\omega\tau_i)^{\mu_i} \cdot \prod_k \left(1 + 2j\zeta_k \cdot \frac{\omega}{\omega_{n_k}} - \frac{\omega^2}{\omega_{n_k}^2}\right)^{\mu_k}$$

4.2 Diagrammi elementari

Di seguito si elencano le formule per ricavare i diagrammi di modulo e fase di ogni termine della forma di Bode.

NOME e FORMA	MODULO e FASE
Termine costante: $H(j\omega) = K_B$	$\lvert H(j\omega)\rvert_{dB} = 20 \cdot log\lvert K_B\rvert$ $arg(H(j\omega)) = \begin{cases} 0 & se\ K_B > 0 \\ -180 & se\ K_B < 0 \end{cases}$
Zeri e poli nell'origine: $H(j\omega) = \frac{1}{(j\omega)^\nu}$	$\lvert H(j\omega)\rvert_{dB} = 20 \cdot (-\nu) \cdot log\lvert\omega\rvert$ $arg(H(j\omega)) = -\nu \cdot 90$
Zeri e poli reali: $H(j\omega) = (1 + j\omega\tau)^\mu$	$\lvert H(j\omega)\rvert_{dB} = \begin{cases} 0 & se\ \omega \ll \frac{1}{\lvert\tau\rvert} \\ 20\mu \cdot log\lvert\omega\tau\rvert & se\ \omega \gg \frac{1}{\lvert\tau\rvert} \end{cases}$ $arg(H(j\omega)) = \begin{cases} 0 & se\ \omega \ll \frac{1}{\lvert\tau\rvert} \\ 90\mu \cdot sgn(\tau) & se\ \omega \gg \frac{1}{\lvert\tau\rvert} \end{cases}$
Zeri e poli complessi: $H(j\omega) = \left(1 + 2j\zeta\frac{\omega}{\omega_n} - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^\mu$	$\lvert H(j\omega)\rvert_{dB} = \begin{cases} 0 & se\ \omega \ll \omega_n \\ 40\mu \cdot log\left\lvert\frac{\omega}{\omega_n}\right\rvert & se\ \omega \gg \omega_n \end{cases}$ $arg(H(j\omega)) = \begin{cases} 0 & se\ \omega \ll \omega_n \\ 180\mu \cdot sgn(\zeta) & se\ \omega \gg \omega_n \end{cases}$

4.2.1 Note

- Il diagramma del modulo per zeri e poli nell'origine passa per 10^0
- Il diagramma della fase per zeri e poli reali si può approssimare facendolo passare per i seguenti punti

$$A = \left(\frac{1}{5|\tau|}, 0\right)$$

$$B = \left(\frac{5}{|\tau|}, 90\mu \cdot sgn(\tau)\right)$$

- Il diagramma della fase per zeri e poli complessi si può approssimare facendolo passare per i seguenti punti

$$A = \left(\frac{1}{5^{|\zeta|}} \cdot \omega_n, 0\right)$$

$$B = \left(5^{|\zeta|} \cdot \omega_n, 180\mu \cdot sgn(\zeta)\right)$$

4.3 Esempio di esercizio (convenzione Matlab)

Si vuole rappresentare la seguente funzione di trasferimento

$$H(s) = \frac{s-2}{(s+4)\cdot(s+1)}$$

che scritta in forma di Bode diventa

$$H(s) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\left(1-\frac{1}{2}s\right)}{\left(1+\frac{1}{4}s\right)\cdot(1+s)}$$

Non resta che rappresentare i quattro fattori elementari trovati e sommare i vari contributi:

- $H1(s) = -\frac{1}{2}$
- $H2(s) = 1 - \frac{1}{2}s$
- $H3(s) = \left(1+\frac{1}{4}s\right)^{-1}$
- $H4(s) = (1+s)^{-1}$

```
H1 = tf([-0.5],[1]);
H2 = tf([-0.5 1],[1]);
H3 = tf([1],[0.25 1]);
H4 = tf([1],[1 1]);
H = tf([1 -2],[1 5 4]);

subplot(2,3,1)
bode(H1,'r')
title('H1(s)')
subplot(2,3,2)
bode(H2,'g')
title('H2(s)')
subplot(2,3,3)
bode(H3,'b')
title('H3(s)')
subplot(2,3,4)
bode(H4,'m')
title('H4(s)')
subplot(2,3,5)
bode(H1,'r',H2,'g',H3,'b',H4,'m',H,'k')
title('Contributi di H(s)')
subplot(2,3,6)
bode(H,'k')
title('Somma dei contributi di H(s)')
```

Listing 4.1: Codice Matlab

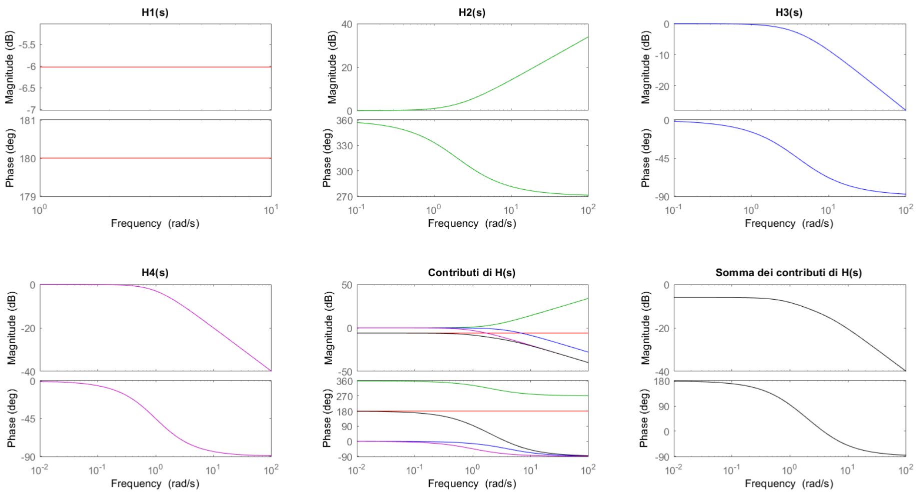

Figura 4.1: Diagrammi di Bode

Capitolo 5

Sistemi LTI a tempo discreto

5.1 Forma di un sistema LTI discreto

- Forma generale

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \cdot v(k-i) = \sum_{j=0}^{m} b_j \cdot u(k-j)$$

- Forma usata negli esercizi ($n \geq m$)

$$a_0 v(k) + a_1 v(k-1) + a_2 v(k-2) = b_0 u(k) + b_1 u(k-1) + b_2 u(k-2)$$

5.2 Analisi nel tempo

La risposta totale del sistema si scrive come

$$v(k) = v_l(k) + v_f(k)$$

dove $v_l(k)$ è la risposta libera e $v_f(k)$ è la risposta forzata.

5.2.1 Risposta libera

Per trovare la risposta libera bisogna:

1. Trovare le radici $\lambda_{1,2}$ dell'equazione caratteristica delle uscite

$$a_0 z^0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} = 0\Big|_{\cdot z^n = z^2}$$

$$a_0 z^2 + a_1 z + a_2 = 0$$

2. Scrivere la risposta libera come

$$v_l(k) = \sum_{i=1}^{r} \sum_{l=0}^{\mu_i - 1} c_{i,l} \cdot \lambda_i^k \cdot \frac{k^l}{l!}$$

3. Usare le condizioni iniziali sulle uscite

   Esempio: se le molteplicità μ_i delle radici sono tutte pari a 1, avremo

$$v_l(k) = c_1 \cdot \lambda_1^k + c_2 \cdot \lambda_2^k$$

   e quindi bisognerà risolvere il sistema

$$\begin{cases} c_1 \cdot \lambda_1^{-1} + c_2 \cdot \lambda_2^{-1} = v(-1) \\ c_1 \cdot \lambda_1^{-2} + c_2 \cdot \lambda_2^{-2} = v(-2) \end{cases}$$

5.2.2 Stabilità asintotica

Grazie ai modi elementari, ovvero le radici λ_i dell'equazione caratteristica delle uscite, possiamo studiare la stabilità asintotica di un sistema LTI.

Infatti, un sistema LTI a tempo discreto è asintoticamente stabile se e solo se $|\lambda_i| < 1$.

Infine, si può dire che: se un sistema LTI è asintoticamente stabile, allora è anche BIBO stabile.

5.2.3 Risposta impulsiva

Per trovare la risposta impulsiva bisogna:

1. Scrivere la forma generale

$$h(k) = d_0 \cdot \delta(k) + \sum_{i=1}^{r} \sum_{l=0}^{\mu_i - 1} d_{i,l} \cdot \lambda_i^k \cdot \frac{k^l}{l!} \cdot \delta_{-1}(k - m + n - 1)$$

   Nota: il termine con il coefficiente d_0 è presente solo quando il sistema LTI ha $n = m$

2. Trovare i coefficienti d_i ponendo $v(k) = h(k)$, $u(k) = \delta(k)$ e cercando una funzione ricorsiva andando a sostituire nell'equazione ottenuta diversi valori di k fino a che non si arriva a riconoscere uno schema ricorsivo; dopodiché basta sostituire i valori della funzione ricorsiva appena trovata nella forma generale e risolvere un sistema

5.2.4 Risposta forzata

La risposta forzata si può calcolare come

$$v_f(k) = [h * u](k) = \sum_{i=0}^{k} h(i) \cdot u(k - i)$$

che è equivalente a

$$v_f(k) = [u * h](k) = \sum_{i=0}^{k} u(i) \cdot h(k - i)$$

La risposta forzata si può calcolare anche come funzione ricorsiva andando a sostituire nel sistema LTI diversi valori di k fino a che non si arriva a riconoscere uno schema ricorsivo.

5.3 Analisi nelle frequenze

A volte lavorare nel dominio delle frequenze è più semplice che lavorare in quello del tempo.

5.3.1 Trasformata zeta

Per passare dal dominio del tempo a quello delle frequenze (e viceversa) si utilizza la trasformata zeta. Di seguito alcune trasformate notevoli:

- Uscite
$$\mathcal{Z}\left[v(k-i)\right] = z^{-i} \cdot V(z) + \left(\sum_{l=-i}^{-1} v(l) \cdot z^{-i-l}\right)$$
- Ingressi
$$\mathcal{Z}\left[u(k-i)\right] = z^{-i} \cdot U(z)$$
- Impulso
$$\mathcal{Z}\left[\delta(k)\right] = 1$$
- Gradino
$$\mathcal{Z}\left[\delta_{-1}(k)\right] = \frac{z}{z-1}$$
- Modo elementare di molteplicità pari a 1
$$\mathcal{Z}\left[\lambda^k \cdot \delta_{-1}(k)\right] = \frac{z}{z-\lambda}$$
- Modo elementare di molteplicità pari a 2
$$\mathcal{Z}\left[k \cdot \lambda^k \cdot \delta_{-1}(k)\right] = \frac{z\lambda}{(z-\lambda)^2}$$

5.3.2 Risposta totale

Una volta calcolate le trasformate zeta di tutti i termini del sistema LTI si arriva ad una forma del tipo

$$V(z) = V_l(z) + V_f(z) = V_l(z) + H(z) \cdot U(z) = \frac{P(z)}{D(z)} + \frac{N(z)}{D(z)} \cdot U(z)$$

dove $D(z)$ è l'equazione caratteristica delle uscite, $N(z)$ è l'equazione caratteristica degli ingressi e $P(z)$ è la parte relativa alle condizioni iniziali sulle uscite.

5.3.3 BIBO stabilità

Per studiare la BIBO stabilità è necessario ricavare la funzione di trasferimento $H(z)$, che abbiamo visto essere pari a $\frac{N(z)}{D(z)}$.

In particolare, bisogna vedere se i poli p_i (ovvero le radici di $D(z)$) rimasti dopo eventuali semplificazioni con gli zeri z_i (ovvero le radici di $N(z)$) sono in modulo minori di 1. Quindi, un sistema LTI a tempo discreto è BIBO stabile se e solo se $|p_i| < 1$.

5.3.4 Metodo dei fratti semplici

Partendo dalla forma usata negli esercizi si arriva, usando la trasformata zeta, ad una forma del tipo

$$a_0[z^0 \cdot V(z)] + a_1[z^{-1} \cdot V(z) + v(-1) \cdot z^0] + a_2[z^{-2} \cdot V(z) + v(-1) \cdot z^{-1} + v(-2) \cdot z^0] =$$

$$= b_0 z^0 \cdot U(z) + b_1 z^{-1} \cdot U(z) + b_2 z^{-2} \cdot U(z)\Big|_{\cdot z^n = z^2}$$

$$a_0[z^2 \cdot V(z)] + a_1[z \cdot V(z) + v(-1) \cdot z^2] + a_2[V(z) + v(-1) \cdot z + v(-2) \cdot z^2] =$$

$$= b_0 z^2 \cdot U(z) + b_1 z \cdot U(z) + b_2 \cdot U(z)$$

A questo punto, dopo alcuni calcoli, si può riuscire a trovare la risposta totale del sistema usando il metodo dei fratti semplici come per i sistemi LTI a tempo continuo, ricordando però di dividere per z prima dei calcoli e di moltiplicare per z dopo gli stessi, per riuscire poi a fare la trasformata zeta. La sequenza dei passaggi sarà quindi la seguente:

1. Trovo la risposta totale $V(z)$
2. Divido per z
$$V_1(z) = \frac{V(z)}{z}$$
3. Uso il metodo dei fratti semplici
4. Moltiplico per z
$$V(z) = V_1(z) \cdot z$$
5. Faccio la trasformata zeta e ottengo $v(k)$

Nota: il metodo dei fratti semplici si può usare anche per trovare la sola risposta libera, forzata o impulsiva.

Appendice A

Esempi di esercizi svolti

A.1 Sistemi LTI a tempo continuo

A.1.1 Esercizio 1

Testo:

$$\ddot{v}(t) + \dot{v}(t) - 2v(t) = \dot{u}(t) + u(t)$$
$$v(0) = 2,\ \dot{v}(0) = 0,\ u(t) = e^{-3t} \cdot \delta_{-1}(t)$$

Stabilità asintotica:

$$s^2 + s - 2 = 0$$
$$\lambda_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2}$$
$$\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -2$$

Il sistema non è asintoticamente stabile perché $Re(\lambda_1) > 0$

Risposta libera:

$$v_l(t) = c_1 \cdot e^t + c_2 \cdot e^{-2t}$$
$$\dot{v}_l(t) = c_1 \cdot e^t - 2c_2 \cdot e^{-2t}$$
$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 2 \\ c_1 - 2c_2 = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} c_1 = 2 - c_2 \\ 2 - c_2 - 2c_2 = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} c_1 = \frac{4}{3} \\ c_2 = \frac{2}{3} \end{cases}$$

La risposta libera del sistema è $v_l(t) = \frac{4}{3} \cdot e^t + \frac{2}{3} \cdot e^{-2t}$

Risposta impulsiva:

$$h(t) = (d_1 \cdot e^t + d_2 \cdot e^{-2t}) \cdot \delta_{-1}(t)$$
$$\dot{h}(t) = (d_1 \cdot e^t - 2d_2 \cdot e^{-2t}) \cdot \delta_{-1}(t) + (d_1 \cdot e^t + d_2 \cdot e^{-2t}) \cdot \delta(t)$$
$$\ddot{h}(t) = (d_1 \cdot e^t + 4d_2 \cdot e^{-2t}) \cdot \delta_{-1}(t) + (d_1 \cdot e^t - 2d_2 \cdot e^{-2t}) \cdot \delta(t) +$$
$$+ (d_1 \cdot e^t - 2d_2 \cdot e^{-2t}) \cdot \delta(t) + (d_1 \cdot e^t + d_2 \cdot e^{-2t}) \cdot \frac{d\delta(t)}{dt}$$

$$\begin{cases} v(t) = h(t) \\ u(t) = \delta(t) \end{cases} \longrightarrow \ddot{h}(t) + \dot{h}(t) - 2h(t) = \frac{d\delta(t)}{dt} + \delta(t)$$

$$\delta(t) \cdot (3d_1 \cdot e^t - 3d_2 \cdot e^{-2t} - 1) + \frac{d\delta(t)}{dt} \cdot (d_1 \cdot e^t + d_2 \cdot e^{-2t} - 1) = 0$$

$$\begin{cases} 3d_1 - 3d_2 - 1 = 0 \\ d_1 + d_2 - 1 = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} 3 - 3d_2 - 3d_2 - 1 = 0 \\ d_1 = 1 - d_2 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} d_2 = \frac{1}{3} \\ d_1 = \frac{2}{3} \end{cases}$$

La risposta impulsiva del sistema è $h(t) = \left(\frac{2}{3} \cdot e^t + \frac{1}{3} \cdot e^{-2t}\right) \cdot \delta_{-1}(t)$

Risposta forzata:

$$v_f(t) = [h * u](t) = \int_0^t h(\tau) \cdot u(t - \tau)\, d\tau =$$

$$= \int_0^t \left(\frac{2}{3} \cdot e^\tau + \frac{1}{3} \cdot e^{-2\tau}\right) \cdot \delta_{-1}(\tau) \cdot e^{-3(t-\tau)} \cdot \delta_{-1}(t - \tau)\, d\tau =$$

$$= e^{-3t} \cdot \int_0^t \left(\frac{2}{3} \cdot e^{4\tau} + \frac{1}{3} \cdot e^\tau\right) d\tau = e^{-3t} \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot \int_0^t 4e^{4\tau}\, d\tau + \frac{1}{3} \cdot \int_0^t e^\tau\, d\tau\right) =$$

$$= e^{-3t} \cdot \left(\frac{1}{6} \cdot \left[e^{4\tau}\right]_0^t + \frac{1}{3} \cdot \left[e^\tau\right]_0^t\right) = e^{-3t} \cdot \left[\frac{1}{6} \cdot (e^{4t} - 1) + \frac{1}{3} \cdot (e^t - 1)\right] =$$

$$= \frac{1}{6}e^t - \frac{1}{6}e^{-3t} + \frac{1}{3}e^{-2t} - \frac{1}{3}e^{-3t} = \frac{1}{6}e^t - \frac{1}{2}e^{-3t} + \frac{1}{3}e^{-2t}$$

BIBO stabilità:

$$H(s) = \frac{s+1}{s^2 + s - 2} = \frac{s+1}{(s-1)(s+2)}$$

Il sistema non è BIBO stabile perché $Re(p_1) > 0$

Risposta impulsiva (fratti semplici):

$$H(s) = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s+2}$$

$$A = (s-1) \cdot \left.\frac{s+1}{(s-1)(s+2)}\right|_{s=1} = \left.\frac{s+1}{s+2}\right|_{s=1} = \frac{2}{3}$$

$$B = (s+2) \cdot \left.\frac{s+1}{(s-1)(s+2)}\right|_{s=-2} = \left.\frac{s+1}{s-1}\right|_{s=-2} = \frac{1}{3}$$

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}[H(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{s-1} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{s+2}\right] = \left(\frac{2}{3} \cdot e^t + \frac{1}{3} \cdot e^{-2t}\right) \cdot \delta_{-1}(t)$$

Risposta forzata (fratti semplici):

$$U(s) = \mathcal{L}\left[e^{-3t} \cdot \delta_{-1}(t)\right] = \frac{1}{s+3}$$

$$V_f(s) = H(s) \cdot U(s) = \frac{s+1}{(s-1)(s+2)(s+3)} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s+2} + \frac{C}{s+3}$$

$$A = (s-1) \cdot \left.\frac{s+1}{(s-1)(s+2)(s+3)}\right|_{s=1} = \left.\frac{s+1}{(s+2)(s+3)}\right|_{s=1} = \frac{1}{6}$$

$$B = (s+2) \cdot \left.\frac{s+1}{(s-1)(s+2)(s+3)}\right|_{s=-2} = \left.\frac{s+1}{(s-1)(s+3)}\right|_{s=-2} = \frac{1}{3}$$

$$C = (s+3) \cdot \left.\frac{s+1}{(s-1)(s+2)(s+3)}\right|_{s=-3} = \left.\frac{s+1}{(s-1)(s+2)}\right|_{s=-3} = -\frac{1}{2}$$

$$v_f(t) = \mathcal{L}^{-1}[V_f(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{s-1} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{s+2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s+3}\right]$$

La risposta forzata del sistema è $v_f(t) = \left(\frac{1}{6} \cdot e^{t} + \frac{1}{3} \cdot e^{-2t} - \frac{1}{2} \cdot e^{-3t}\right) \cdot \delta_{-1}(t)$

A.1.2 Esercizio 2

Testo:

$$\ddot{v}(t) - \dot{v}(t) - 2v(t) = \ddot{u}(t) + 2\dot{u}(t) + u(t)$$

$$v(0) = 1,\ \dot{v}(0) = -1,\ u(t) = e^{-3t} \cdot \delta_{-1}(t)$$

Stabilità asintotica:

$$s^2 - s - 2 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2}$$

$$\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = -1$$

Il sistema non è asintoticamente stabile perché $Re(\lambda_1) > 0$

Risposta libera:

$$v_l(t) = c_1 \cdot e^{2t} + c_2 \cdot e^{-t}$$

$$\dot{v}_l(t) = 2c_1 \cdot e^{2t} - c_2 \cdot e^{-t}$$

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 1 \\ 2c_1 - c_2 = -1 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} c_1 = 1 - c_2 \\ 2 - 2c_2 - c_2 = -1 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2 = 1 \end{cases}$$

La risposta libera del sistema è $v_l(t) = e^{-t}$

Risposta impulsiva (caso particolare $n = m$):

$$h(t) = d_0 \cdot \delta(t) + (d_1 \cdot e^{2t} + d_2 \cdot e^{-t}) \cdot \delta_{-1}(t)$$

$$\dot{h}(t) = d_0 \cdot \frac{d\delta(t)}{dt} + (2d_1 \cdot e^{2t} - d_2 \cdot e^{-t}) \cdot \delta_{-1}(t) + (d_1 \cdot e^{2t} + d_2 \cdot e^{-t}) \cdot \delta(t)$$

$$\ddot{h}(t) = d_0 \cdot \frac{d^2\delta(t)}{dt^2} + (4d_1 \cdot e^{2t} + d_2 \cdot e^{-t}) \cdot \delta_{-1}(t) + +2 \cdot (2d_1 \cdot e^{2t} - d_2 \cdot e^{-t}) \cdot \delta(t)+$$
$$+(d_1 \cdot e^{2t} + d_2 \cdot e^{-t}) \cdot \frac{d\delta(t)}{dt}$$

$$\begin{cases} v(t) = h(t) \\ u(t) = \delta(t) \end{cases} \longrightarrow \ddot{h}(t) - \dot{h}(t) - 2h(t) = \frac{d^2\delta(t)}{dt^2} + 2\frac{d\delta(t)}{dt} + \delta(t)$$

$$\delta(t) \cdot (3d_1 e^{2t} - 3d_2 e^{-t} - 2d_0 - 1) + \frac{d\delta(t)}{dt} \cdot (d_1 e^{2t} + d_2 e^{-t} - d_0 - 2) + \frac{d^2\delta(t)}{dt^2} \cdot (d_0 - 1) = 0$$

$$\begin{cases} 3d_1 - 3d_2 - 2d_0 - 1 = 0 \\ d_1 + d_2 - d_0 - 2 = 0 \\ d_0 - 1 = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} -3d_2 + 9 - 3d_2 - 3 = 0 \\ d_1 = -d_2 + 3 \\ d_0 = 1 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} d_2 = 1 \\ d_1 = 2 \\ d_0 = 1 \end{cases}$$

La risposta impulsiva del sistema è $h(t) = \delta(t) + (2 \cdot e^{2t} + e^{-t}) \cdot \delta_{-1}(t)$

BIBO stabilità:

$$H(s) = \frac{s^2 + 2s + 1}{s^2 - s - 2} = \frac{(s+1)^2}{(s-2)(s+1)} = \frac{s+1}{s-2}$$

Il sistema non è BIBO stabile perché $Re(p_1) > 0$

Risposta impulsiva (fratti semplici con caso particolare $n = m$):

$$H(s) = 1 + \frac{A}{s-2} + \frac{B}{s+1}$$

$$A = (s-2) \cdot \left.\frac{(s+1)^2}{(s-2)(s+1)}\right|_{s=2} = \left.\frac{(s+1)^2}{s+1}\right|_{s=2} = 3$$

$$B = (s+1) \cdot \left.\frac{(s+1)^2}{(s-2)(s+1)}\right|_{s=-1} = \left.\frac{(s+1)^2}{s-2}\right|_{s=-1} = 0$$

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}[H(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[1 + \frac{3}{s-2} + \frac{0}{s+1}\right] = \delta(t) + \left(3 \cdot e^{2t} + 0 \cdot e^{-t}\right) \cdot \delta_{-1}(t)$$

Nota: si può notare che la risposta impulsiva calcolata in questo modo è diversa da quella calcolata precedentemente, ciò è dovuto al fatto che l'impulso e le sue derivate sono linearmente indipendenti e quindi le soluzioni trovate sono combinazioni lineari

A.1.3 Esercizio 3

Testo:

$$\ddot{v}(t) - 2(k-1)\dot{v}(t) + (k+5)v(t) = 2\dot{u}(t) - u(t)$$
$$v(0) = 2,\ \dot{v}(0) = -3,\ u(t) = e^{-3t} \cdot \delta_{-1}(t)$$

Stabilità:

$$\begin{cases} k+5 > 0 \\ 2(k-1) < 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} k > -5 \\ k < 1 \end{cases} \longrightarrow -5 < k < 1$$

Se $-5 < k < 1$, il sistema è asintoticamente stabile e quindi anche BIBO stabile

Risposta totale (con $k = -1$):

$$U(s) = \mathcal{L}\left[e^{-3t} \cdot \delta_{-1}(t)\right] = \frac{1}{s+3}$$

$$s^2 \cdot V(s) - (2s-3) + 4 \cdot (s \cdot V(s) - 2) + 4 \cdot V(s) = 2s \cdot U(s) - U(s)$$
$$V(s) \cdot (s^2 + 4s + 4) - 2s + 3 - 8 = U(s) \cdot (2s - 1)$$
$$V(s) = \frac{2s-1}{s^2+4s+4} \cdot U(s) + \frac{2s+5}{s^2+4s+4} = \frac{2s-1}{(s+2)^2 \cdot (s+3)} + \frac{2s+5}{(s+2)^2} =$$
$$= \frac{2s-1+(2s+5)(s+3)}{(s+2)^2 \cdot (s+3)} = \frac{2s^2+13s+14}{(s+2)^2 \cdot (s+3)} = \frac{A}{s+3} + \frac{B}{s+2} + \frac{C}{(s+2)^2}$$
$$A = (s+3) \cdot \left.\frac{2s^2+13s+14}{(s+2)^2 \cdot (s+3)}\right|_{s=-3} = \left.\frac{2s^2+13s+14}{(s+2)^2}\right|_{s=-3} = -7$$
$$B = \frac{d}{ds}\left.\left((s+2)^2 \cdot \frac{2s^2+13s+14}{(s+2)^2 \cdot (s+3)}\right)\right|_{s=-2} = \left.\frac{2s^2+12s+25}{(s+3)^2}\right|_{s=-2} = 9$$
$$C = (s+2)^2 \cdot \left.\frac{2s^2+13s+14}{(s+2)^2 \cdot (s+3)}\right|_{s=-2} = \left.\frac{2s^2+13s+14}{s+3}\right|_{s=-2} = -4$$
$$v(t) = \mathcal{L}^{-1}[V(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[-\frac{7}{s+3} + \frac{9}{s+2} - \frac{4}{(s+2)^2}\right]$$

La risposta totale del sistema è $v(t) = \left(-7 \cdot e^{-3t} + 9 \cdot e^{-2t} - 4t \cdot e^{-2t}\right) \cdot \delta_{-1}(t)$

A.2 Diagrammi di flusso

A.2.1 Esercizio 1

Testo: trovare la funzione di trasferimento tra ingresso e uscita del seguente diagramma di flusso

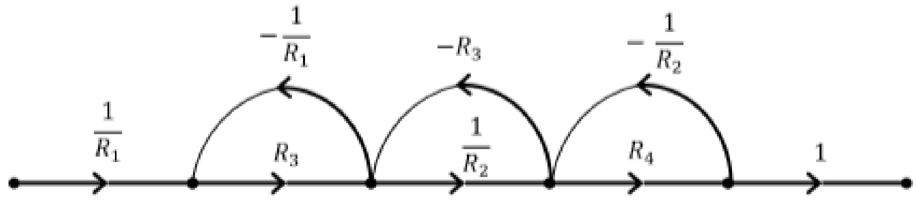

Figura A.1: Diagramma di flusso

Cammini aperti:

$$P_1 = \frac{R_3 \cdot R_4}{R_1 \cdot R_2}$$

Anelli singoli:

$$P_{11} = -\frac{R_3}{R_1}$$

$$P_{21} = -\frac{R_3}{R_2}$$

$$P_{31} = -\frac{R_4}{R_2}$$

Coppie di anelli che non si toccano:

$$P_{12} = \left(-\frac{R_3}{R_1}\right) \cdot \left(-\frac{R_4}{R_2}\right) = \frac{R_3 \cdot R_4}{R_1 \cdot R_2}$$

Delta:

$$\Delta = 1 - \left(-\frac{R_3}{R_1} - \frac{R_3}{R_2} - \frac{R_4}{R_2}\right) + \frac{R_3 \cdot R_4}{R_1 \cdot R_2}$$

$$\Delta_1 = 1$$

Trasmittanza totale:

$$T = \frac{\frac{R_3 \cdot R_4}{R_1 \cdot R_2} \cdot 1}{\frac{R_1 \cdot R_2 + R_3 \cdot R_2 + R_3 \cdot R_1 + R_4 \cdot R_1 + R_3 \cdot R_4}{R_1 \cdot R_2}} =$$

$$= \frac{R_3 \cdot R_4}{R_1 \cdot R_2 + R_3 \cdot R_2 + R_3 \cdot R_1 + R_4 \cdot R_1 + R_3 \cdot R_4}$$

A.3 Diagrammi di Bode

A.3.1 Esercizio 1

Testo: tracciare i diagrammi di Bode della seguente funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{s+1}{s^4+2s^3+100s^2} = \frac{s+1}{s^2 \cdot (s^2+2s+100)}$$

Forma di Bode:

$$G(j\omega) = \frac{1}{100} \cdot \frac{1}{(j\omega)^2} \cdot \frac{1+j\omega}{1+\frac{2}{100} \cdot j\omega - \frac{\omega^2}{100}}$$

Termine costante:

$$H(j\omega) = 10^{-2}$$

- Modulo

$$|H(j\omega)|_{dB} = 20 \cdot log|10^{-2}| = -40\,dB$$

- Fase

$$arg(H(j\omega)) = 0$$

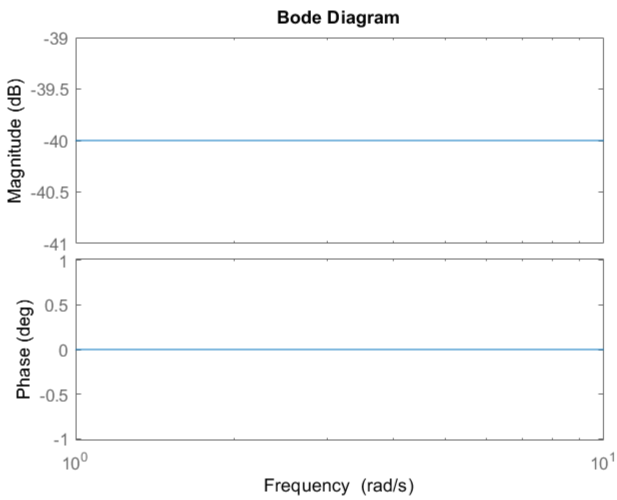

Figura A.2: Termine costante

Zeri e poli nell'origine:

$$H(j\omega) = \frac{1}{(j\omega)^2}$$

- Modulo

$$|H(j\omega)|_{dB} = 20 \cdot (-2) \cdot log|\omega| = -40\,\frac{dB}{dec}$$

- Fase

$$arg(H(j\omega)) = -2 \cdot 90 = -180$$

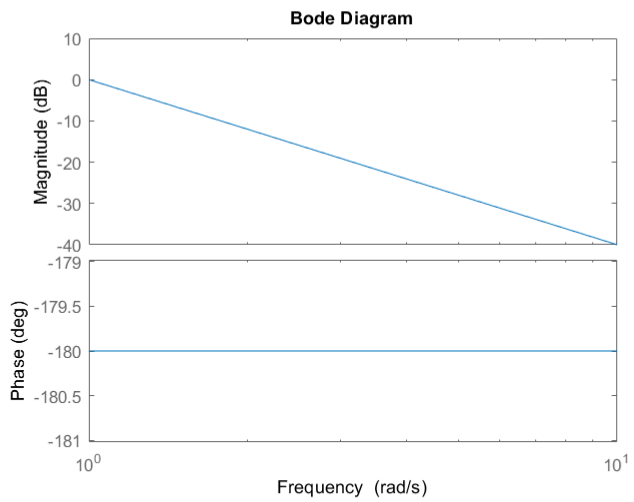

Figura A.3: Polo nell'origine

Zeri e poli reali:

$$\tau = 1,\, \mu = 1$$

$$H(j\omega) = 1 + j\omega$$

- Modulo

$$|H(j\omega)|_{dB} = \begin{cases} 0 & se\ \omega << 10^0 \\ 20\,\frac{dB}{dec} & se\ \omega >> 10^0 \end{cases}$$

- Fase

$$arg(H(j\omega)) = \begin{cases} 0 & se\ \omega << 10^0 \\ 90 & se\ \omega >> 10^0 \end{cases}$$

Approssimazione:

$$A = (0.2, 0)$$

$$B = (5, 90)$$

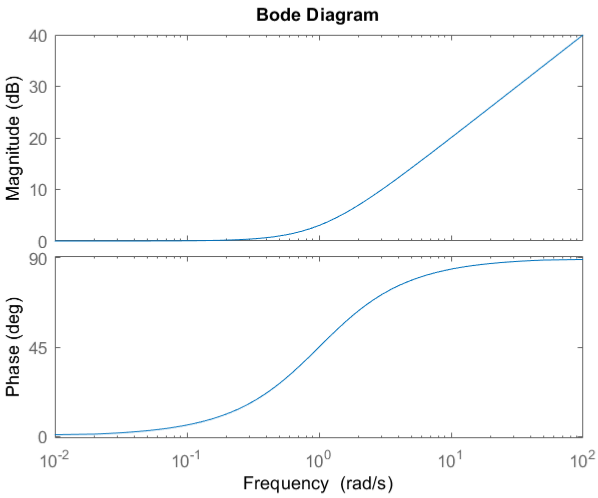

Figura A.4: Zero reale

Zeri e poli complessi coniugati:

$$\omega_n = \sqrt{100} = 10,\ \frac{2}{10}\zeta = \frac{2}{100} \longrightarrow \zeta = \frac{1}{10},\ \mu = -1$$

$$H(j\omega) = \left(1 + \frac{2}{100} \cdot j\omega - \frac{\omega^2}{100}\right)^{-1}$$

- Modulo

$$|H(j\omega)|_{dB} = \begin{cases} 0 & se\ \omega << 10^1 \\ -40\ \frac{dB}{dec} & se\ \omega >> 10^1 \end{cases}$$

- Fase

$$arg(H(j\omega)) = \begin{cases} 0 & se\ \omega << 10^1 \\ -180 & se\ \omega >> 10^1 \end{cases}$$

Approssimazione:

$$A = (8.5, 0)$$

$$B = (11.7, -180)$$

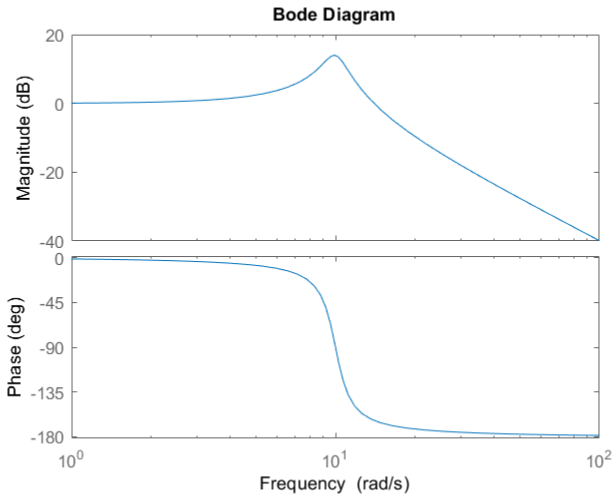

Figura A.5: Polo complesso

Diagramma globale: unendo tutti i diagrammi si ricava il seguente

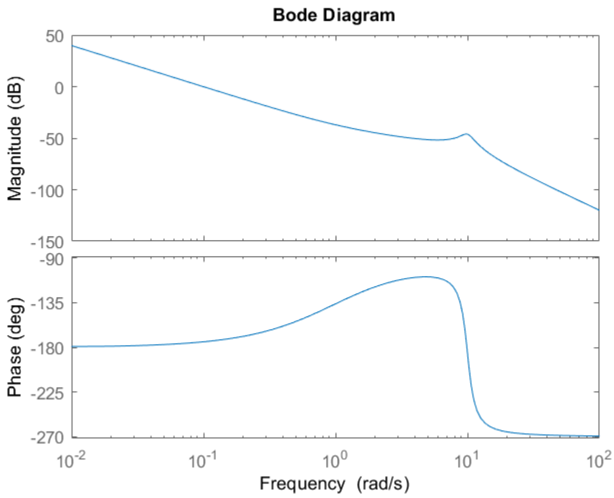

Figura A.6: Diagramma globale

A.4 Sistemi LTI a tempo discreto

A.4.1 Esercizio 1

Testo:

$$v(k) + v(k-1) = u(k) - u(k-1)$$

Stabilità asintotica:

$$z^0 + z^{-1} = 0\big|_{\cdot z^n = z^1}$$

$$z + 1 = 0 \longrightarrow \lambda_1 = -1$$

Il sistema non è asintoticamente stabile perché $|\lambda_1| = 1$

BIBO stabilità:

$$H(z) = \frac{z-1}{z+1}$$

Il sistema non è BIBO stabile perché $|p_1| = 1$

Risposta impulsiva (ricorsione):

$$\begin{cases} v(k) = h(k) \\ u(k) = \delta(k) \end{cases} \longrightarrow h(k) + h(k-1) = \delta(k) - \delta(k-1)$$

$$k = 0 \longrightarrow h(0) + h(-1) = \delta(0) - \delta(-1) \longrightarrow h(0) = 1$$

$$k = 1 \longrightarrow h(1) + h(0) = \delta(1) - \delta(0) \longrightarrow h(1) = -2$$

$$k = 2 \longrightarrow h(2) + h(1) = \delta(2) - \delta(1) \longrightarrow h(2) = 2$$

$$h(k) = \begin{cases} 1 & se\ k = 0 \\ -2 & se\ k \geq 1\ e\ dispari \\ 2 & se\ k \geq 1\ e\ pari \end{cases}$$

$$h(k) = d_0 \cdot \delta(k) + d_1 \cdot (-1)^k \cdot \delta_{-1}(k-1)$$

$$\begin{cases} h(0) = d_0 \cdot \delta(0) + d_1 \cdot (-1)^0 \cdot \delta_{-1}(-1) \\ h(1) = d_0 \cdot \delta(1) + d_1 \cdot (-1)^1 \cdot \delta_{-1}(0) \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} d_0 = 1 \\ -d_1 = -2 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} d_0 = 1 \\ d_1 = 2 \end{cases}$$

La risposta impulsiva del sistema è $h(k) = \delta(k) + 2 \cdot (-1)^k \cdot \delta_{-1}(k-1)$

Risposta forzata (ricorsione):

$$k = 0 \longrightarrow v(0) + v(-1) = u(0) - u(-1) \longrightarrow v(0) = u(0)$$

$$k = 1 \longrightarrow v(1) + v(0) = u(1) - u(0) \longrightarrow v(1) = u(1) - 2u(0)$$

$$k = 2 \longrightarrow v(2) + v(1) = u(2) - u(1) \longrightarrow v(2) = u(2) - 2u(1) + 2u(0)$$

La risposta forzata del sistema è

$$v_f(k) = u(k) + \sum_{i=0}^{k-1} 2 \cdot (-1)^{k-i} \cdot u(i)$$

Risposta forzata (convoluzione):

$$h(k-i) = \delta(k-i) + 2 \cdot (-1)^{k-i} \cdot \delta_{-1}(k-i-1)$$

$$v_f(k) = [u * h](k) = \sum_{i=0}^{k} u(i) \cdot h(k-i) =$$

$$= \sum_{i=0}^{k} u(i) \cdot [\delta(k-i) + 2 \cdot (-1)^{k-i} \cdot \delta_{-1}(k-i-1)] =$$

$$= [\delta(k-k) + 2 \cdot (-1)^{k-k} \cdot \delta_{-1}(k-k-1)] \cdot u(k) + \sum_{i=0}^{k-1} 2 \cdot (-1)^{k-i} \cdot u(i) =$$

$$= [\delta(0) + 2 \cdot (-1)^{0} \cdot \delta_{-1}(-1)] \cdot u(k) + \sum_{i=0}^{k-1} 2 \cdot (-1)^{k-i} \cdot u(i) =$$

$$= [1 + 0] \cdot u(k) + \sum_{i=0}^{k-1} 2 \cdot (-1)^{k-i} \cdot u(i) = u(k) + \sum_{i=0}^{k-1} 2 \cdot (-1)^{k-i} \cdot u(i)$$

A.4.2 Esercizio 2

Testo:

$$v(k) - \frac{3}{10}v(k-1) - \frac{1}{10}v(k-2) = u(k) - \frac{2}{5}u(k-2)$$

$$v(-1) = 2,\ v(-2) = -2,\ u(k) = 2^k \cdot \delta_{-1}(k)$$

Stabilità:

$$z^0 - \frac{3}{10}z^{-1} - \frac{1}{10}z^{-2} = 0 \Big|_{\cdot z^n = z^2}$$

$$z^2 - \frac{3}{10}z - \frac{1}{10} = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{\frac{3}{10} \pm \sqrt{\frac{9}{100} + \frac{4}{10}}}{2} = \frac{\frac{3}{10} \pm \frac{7}{10}}{2}$$

$$\lambda_1 = \frac{1}{2},\ \lambda_2 = -\frac{1}{5}$$

Il sistema è asintoticamente stabile e quindi anche BIBO stabile

Risposta libera:

$$v_l(k) = c_1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k + c_2 \cdot \left(-\frac{1}{5}\right)^k$$

$$\begin{cases} 2c_1 - 5c_2 = 2 \\ 4c_1 + 25c_2 = -2 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} c_1 = 1 + \frac{5}{2}c_2 \\ 4 + 10c_2 + 25c_2 = -2 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} c_1 = \frac{4}{7} \\ c_2 = -\frac{6}{35} \end{cases}$$

La risposta libera del sistema è $v_l(k) = \frac{4}{7} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k - \frac{6}{35} \cdot \left(-\frac{1}{5}\right)^k$

Risposta impulsiva (fratti semplici):

$$H(z) = \frac{z^2 - \frac{2}{5}}{z^2 - \frac{3}{10}z - \frac{1}{10}} = \frac{z^2 - \frac{2}{5}}{(z - \frac{1}{2})(z + \frac{1}{5})}$$

$$H_1(z) = \frac{H(z)}{z} = \frac{z^2 - \frac{2}{5}}{z(z - \frac{1}{2})(z + \frac{1}{5})} = \frac{A}{z} + \frac{B}{z - \frac{1}{2}} + \frac{C}{z + \frac{1}{5}}$$

$$A = z \cdot \left.\frac{z^2 - \frac{2}{5}}{z(z - \frac{1}{2})(z + \frac{1}{5})}\right|_{z=0} = \left.\frac{z^2 - \frac{2}{5}}{(z - \frac{1}{2})(z + \frac{1}{5})}\right|_{z=0} = 4$$

$$B = \left(z - \frac{1}{2}\right) \cdot \left.\frac{z^2 - \frac{2}{5}}{z(z - \frac{1}{2})(z + \frac{1}{5})}\right|_{z=\frac{1}{2}} = \left.\frac{z^2 - \frac{2}{5}}{z(z + \frac{1}{5})}\right|_{z=\frac{1}{2}} = -\frac{3}{7}$$

$$C = \left(z + \frac{1}{5}\right) \cdot \left.\frac{z^2 - \frac{2}{5}}{z(z - \frac{1}{2})(z + \frac{1}{5})}\right|_{z=-\frac{1}{5}} = \left.\frac{z^2 - \frac{2}{5}}{z(z - \frac{1}{2})}\right|_{z=-\frac{1}{5}} = -\frac{18}{7}$$

$$H_1(z) = \frac{4}{z} - \frac{3}{7} \cdot \frac{1}{z - \frac{1}{2}} - \frac{18}{7} \cdot \frac{1}{z + \frac{1}{5}}$$

$$H(z) = H_1(z) \cdot z = 4 - \frac{3}{7} \cdot \frac{z}{z - \frac{1}{2}} - \frac{18}{7} \cdot \frac{z}{z + \frac{1}{5}}$$

$$h(k) = \mathcal{Z}[H(z)] = 4 \cdot \delta(k) + \left[-\frac{3}{7} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k - \frac{18}{7} \cdot \left(-\frac{1}{5}\right)^k\right] \cdot \delta_{-1}(k)$$

Risposta forzata (fratti semplici):

$$U(z) = \mathcal{Z}\left[2^k \cdot \delta_{-1}(k)\right] = \frac{z}{z - 2}$$

$$V_f(z) = H(z) \cdot U(z) = \frac{z^2 - \frac{2}{5}}{(z - \frac{1}{2})(z + \frac{1}{5})} \cdot \frac{z}{z - 2}$$

$$V_{f_1}(z) = \frac{V_f(z)}{z} = \frac{z^2 - \frac{2}{5}}{(z - \frac{1}{2})(z + \frac{1}{5})(z - 2)} = \frac{A}{z - \frac{1}{2}} + \frac{B}{z + \frac{1}{5}} + \frac{C}{z - 2}$$

$$A = \left(z - \frac{1}{2}\right) \cdot \left.\frac{z^2 - \frac{2}{5}}{(z - \frac{1}{2})(z + \frac{1}{5})(z - 2)}\right|_{z=\frac{1}{2}} = \left.\frac{z^2 - \frac{2}{5}}{(z + \frac{1}{5})(z - 2)}\right|_{z=\frac{1}{2}} = \frac{1}{7}$$

$$B = \left(z + \frac{1}{5}\right) \cdot \left.\frac{z^2 - \frac{2}{5}}{(z - \frac{1}{2})(z + \frac{1}{5})(z - 2)}\right|_{z=-\frac{1}{5}} = \left.\frac{z^2 - \frac{2}{5}}{(z - \frac{1}{2})(z - 2)}\right|_{z=-\frac{1}{5}} = -\frac{18}{77}$$

$$C = (z - 2) \cdot \left.\frac{z^2 - \frac{2}{5}}{(z - \frac{1}{2})(z + \frac{1}{5})(z - 2)}\right|_{z=2} = \left.\frac{z^2 - \frac{2}{5}}{(z - \frac{1}{2})(z + \frac{1}{5})}\right|_{z=2} = \frac{12}{11}$$

$$V_{f_1}(z) = \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{z - \frac{1}{2}} - \frac{18}{77} \cdot \frac{1}{z + \frac{1}{5}} + \frac{12}{11} \cdot \frac{1}{z - 2}$$

$$V_f(z) = V_{f_1}(z) \cdot z = \frac{1}{7} \cdot \frac{z}{z - \frac{1}{2}} - \frac{18}{77} \cdot \frac{z}{z + \frac{1}{5}} + \frac{12}{11} \cdot \frac{z}{z - 2}$$

$$v_f(k) = \mathcal{Z}[V_f(z)] = \left[\frac{1}{7} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k - \frac{18}{77} \cdot \left(-\frac{1}{5}\right)^k + \frac{12}{11} \cdot (2)^k\right] \cdot \delta_{-1}(k)$$

A.4.3 Esercizio 3

Testo:

$$v(k) - v(k-1) + \frac{1}{4}v(k-2) = u(k) - 3u(k-1)$$

$$v(-1) = 4,\ v(-2) = 3,\ u(k) = \left(-\frac{1}{2}\right)^k \cdot \delta_{-1}(k)$$

Stabilità:

$$z^0 - z^{-1} + \frac{1}{4}z^{-2} = 0\Big|_{\cdot z^n = z^2}$$

$$z^2 - z + \frac{1}{4} = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1-1}}{2} = \frac{1 \pm 0}{2} = \frac{1}{2}$$

Il sistema è asintoticamente stabile e quindi anche BIBO stabile

Risposta libera:

$$v_l(k) = c_1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k + c_2 \cdot k \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k$$

$$\begin{cases} 2c_1 - 2c_2 = 4 \\ 4c_1 - 8c_2 = 3 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} c_1 = 2 + c_2 \\ 8 + 4c_2 - 8c_2 = 3 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} c_1 = \frac{13}{4} \\ c_2 = \frac{5}{4} \end{cases}$$

La risposta libera del sistema è $v_l(k) = \frac{13}{4} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k + \frac{5}{4} \cdot k \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k$

Risposta totale:

$$U(z) = \mathcal{Z}\left[\left(-\frac{1}{2}\right)^k \cdot \delta_{-1}(k)\right] = \frac{z}{z+\frac{1}{2}}$$

$$z^0 \cdot V(z) - (z^{-1} \cdot V(z) + 4z^0) + \frac{1}{4} \cdot (z^{-2} \cdot V(z) + 4z^{-1} + 3z^0) =$$
$$= z^0 \cdot U(z) - 3z^{-1} \cdot U(z)\big|_{\cdot z^n = z^2}$$

$$V(z) \cdot \left(z^2 - z + \frac{1}{4}\right) - 4z^2 + z + \frac{3}{4}z^2 = U(z) \cdot (z^2 - 3z)$$

$$V(z) = \frac{z^2 - 3z}{z^2 - z + \frac{1}{4}} \cdot U(z) + \frac{\frac{13}{4}z^2 - z}{z^2 - z + \frac{1}{4}} = \frac{z^3 - 3z^2}{(z-\frac{1}{2})^2 \cdot (z+\frac{1}{2})} + \frac{\frac{13}{4}z^2 - z}{(z-\frac{1}{2})^2} =$$

$$= \frac{z^3 - 3z^2 + \frac{13}{4}z^3 - z^2 + \frac{13}{8}z^2 - \frac{1}{2}z}{(z-\frac{1}{2})^2 \cdot (z+\frac{1}{2})} = \frac{\frac{17}{4}z^3 - \frac{19}{8}z^2 - \frac{1}{2}z}{(z-\frac{1}{2})^2 \cdot (z+\frac{1}{2})}$$

$$V_1(z) = \frac{V(z)}{z} = \frac{\frac{17}{4}z^2 - \frac{19}{8}z - \frac{1}{2}}{(z-\frac{1}{2})^2 \cdot (z+\frac{1}{2})} = \frac{A}{z+\frac{1}{2}} + \frac{B}{z-\frac{1}{2}} + \frac{C}{(z-\frac{1}{2})^2}$$

$$A = \left(z + \frac{1}{2}\right) \cdot \left.\frac{\frac{17}{4}z^2 - \frac{19}{8}z - \frac{1}{2}}{(z - \frac{1}{2})^2 \cdot (z + \frac{1}{2})}\right|_{z=-\frac{1}{2}} = \left.\frac{\frac{17}{4}z^2 - \frac{19}{8}z - \frac{1}{2}}{(z - \frac{1}{2})^2}\right|_{z=-\frac{1}{2}} = \frac{7}{4}$$

$$B = \frac{d}{dz}\left.\left(\left(z - \frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{\frac{17}{4}z^2 - \frac{19}{8}z - \frac{1}{2}}{(z - \frac{1}{2})^2 \cdot (z + \frac{1}{2})}\right)\right|_{z=\frac{1}{2}} = \left.\frac{\frac{17}{4}z^2 + \frac{17}{4}z - \frac{11}{16}}{(z + \frac{1}{2})^2}\right|_{z=\frac{1}{2}} = \frac{5}{2}$$

$$C = \left(z - \frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left.\frac{\frac{17}{4}z^2 - \frac{19}{8}z - \frac{1}{2}}{(z - \frac{1}{2})^2 \cdot (z + \frac{1}{2})}\right|_{z=\frac{1}{2}} = \left.\frac{\frac{17}{4}z^2 - \frac{19}{8}z - \frac{1}{2}}{z + \frac{1}{2}}\right|_{z=\frac{1}{2}} = -\frac{5}{8}$$

$$V_1(z) = \frac{7}{4} \cdot \frac{1}{z + \frac{1}{2}} + \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{z - \frac{1}{2}} - \frac{5}{8} \cdot \frac{1}{(z - \frac{1}{2})^2}$$

$$V(z) = V_1(z) \cdot z = \frac{7}{4} \cdot \frac{z}{z + \frac{1}{2}} + \frac{5}{2} \cdot \frac{z}{z - \frac{1}{2}} - \frac{5}{8} \cdot \frac{z}{(z - \frac{1}{2})^2} =$$

$$= \frac{7}{4} \cdot \frac{z}{z + \frac{1}{2}} + \frac{5}{2} \cdot \frac{z}{z - \frac{1}{2}} - \frac{5}{4} \cdot \frac{z \cdot \frac{1}{2}}{(z - \frac{1}{2})^2}$$

$$v(k) = \mathcal{Z}[V(z)] = \left[\frac{7}{4} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^k + \frac{5}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k - \frac{5}{4} \cdot k \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k\right] \cdot \delta_{-1}(k)$$

Credits

Repository github: https://github.com/zampierida98/UniVR-informatica
Indirizzo e-mail: zampieri.davide@outlook.com