Calcolo Scientifico

Secondo Progetto

Žana Ilić - 898373

20 maggio 2019.

Primo esercizio

Sia dato il problema ai valori iniziali:

$$\begin{cases} y'(t) = \lambda y(t), & t \in (0, T] \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

dove λ è un valore complesso. Prima dobbiamo trovare $y = y(t)$ che soddisfa il nostro problema che è un equazione differenziale a variabili separabili:

$$y'(t)/y(t) = \lambda \quad \Longrightarrow \int y'(t)/y(t)\mathrm{d}t = \int \lambda \mathrm{d}t \quad \Longrightarrow ln(y(t)) = \lambda t + c$$

dove $c \in \mathbb{R}$. Mettendo il valore iniziale $y(0) = 1$ nella soluzione $y(t) = e^{\lambda t}e^{c}$ concludiamo che $c = 0$. Allora la soluzione esatta del nostro problema è

$$y(t) = e^{\lambda t}$$

Studiamo ora i metodi numerici per l'approssimazione del problema.
Iniziamo con il metodo A, che è un metodo esplicito a tre passi:

$$u_{n+1} = u_n + \frac{h}{12}(23f_n - 16f_{n-1} + 5f_{n-2})$$

con date condizioni iniziali u_0, u_1 e u_2 dove $u_j \simeq y(t_j)$ e $f_j = f(t_j, u_j) = \lambda u_j$. Concludiamo che $u_0 \simeq 1$ e u_1 e u_2 si considerino presi dalla soluzione esatta del problema e valutati agli appropriati livelli temporali. Poiché h è il passo temporale costante si ha che $t_0 = 0, t_1 = h, t_2 = 2h \ldots$
Allora le condizioni iniziali u_1 e u_2 sono:

$$\begin{cases} u_1 \simeq y(t_1) = y(h) = e^{\lambda h} \\ u_2 \simeq y(t_2) = y(2h) = e^{2\lambda h} \end{cases}$$

In Matlab implementiamo il metodo A (`MA.m`).

Fissiamo $\lambda = -1$ e $T = 1$ e calcoliamo in Matlab l'ordine di accuratezza del metodo al variare di h=[0.1, 0.05, 0.025, 0.0125] cioè calcoliamo

$$e_n = ||y(t_n) - u_n||_2$$

Otteniamo che e_n=[0.1017, 0.0726, 0.0517, 0.0366] (`MetodoA.m`). Poiché il metodo A è un metodo esplicito a tre passi, l'ordine di accuratezza di questo metodo è $O(h^3)$.

Nello stesso modo studiamo il metodo B, che è un metodo implicito a due passi:

$$u_{n+1} = \frac{4}{3}u_n - \frac{1}{3}u_{n-1} + \frac{2}{3}hf_{n+1}$$

con date condizioni iniziali u_0 e u_1 dove $u_j \simeq y(t_j)$ e $f_j = f(t_j, u_j) = \lambda u_j$, cioè $u_0 \simeq 1$ e u_1 è preso dalla soluzione esatta del problema e valutato a livello temporale $t_1 = h$:

$$u_1 \simeq y(t_1) = y(h) = e^{\lambda h}$$

In Matlab implementiamo il metodo B (`MB.m`). Poiché il metodo B è implicito, ad ogni passo dobbiamo risolvere un'equazione non lineare per determinare u_{i+1}, per ogni $i \in [1, 2, \ldots, n]$. Nel nostro caso lo facciamo con la funzione `fsolve`.

Fissiamo $\lambda = -1$ e $T = 1$ e calcoliamo in Matlab l'ordine di accuratezza del metodo al variare di h=[0.1, 0.05, 0.025, 0.0125] cioè calcoliamo

$$e_n = ||y(t_n) - u_n||_2$$

Otteniamo e_n=[0.0025, 0.0010, 0.0004, 0.0001] (`MetodoB.m`). Poiché il metodo B è un metodo implicito a due passi, l'ordine di accuratezza di questo metodo è $O(h^3)$.

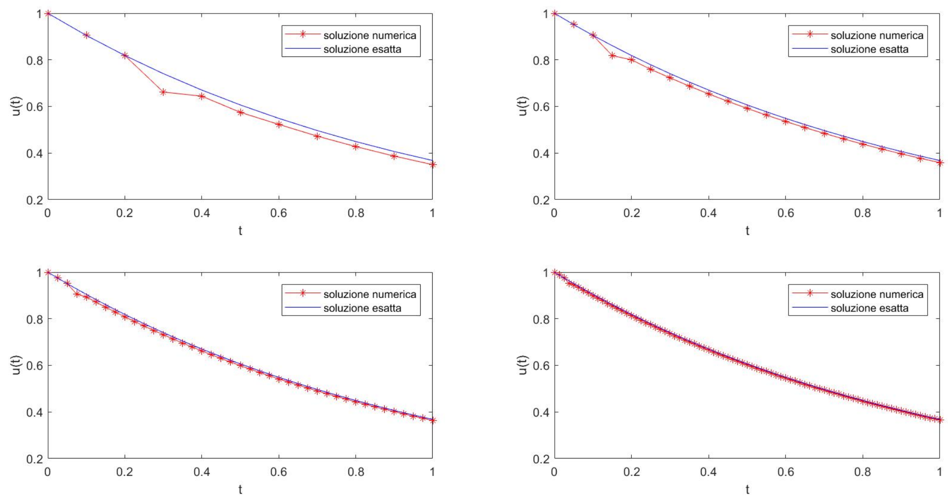

Figura 1: Soluzione esatta e ottenuta con il metodo A per h=[0.1, 0.05, 0.025, 0.0125]

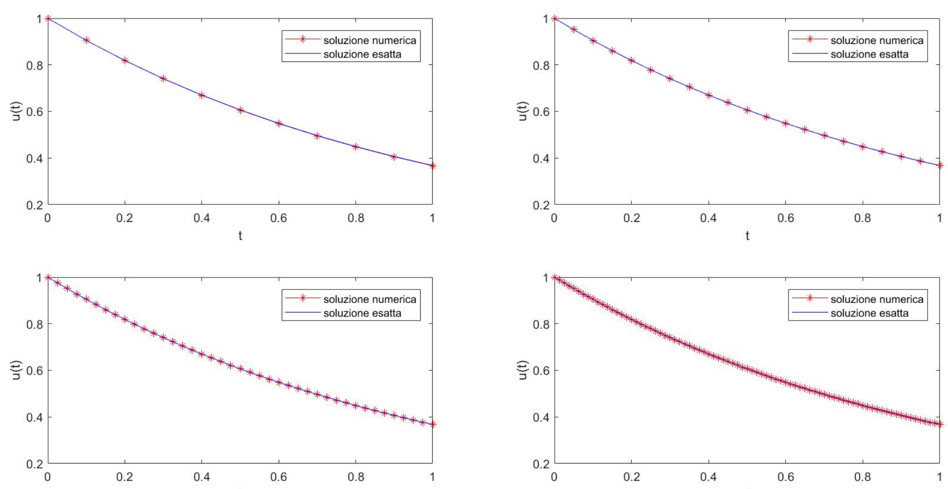

Figura 2: Soluzione esatta e ottenuta con il metodo B per h=[0.1, 0.05, 0.025, 0.0125]

Ora vogliamo disegnare per i metodi A e B la regione di assoluta stabilità. Consideriamo i valori di λ corrispondenti ai nodi discreti di una griglia cartesiana rettangolare in modo tale che

$$\lambda = (Re(\lambda) + iIm(\lambda)) \in ([-5, 5] + i[-5, 5])$$

Per ogni valore di λ calcoliamo la regione di assoluta stabilità per la soluzione esatta del problema ai valori iniziali $y(t) = e^{\lambda t}$:

$$\lim_{t\to\infty} |y(t)| = \lim_{t\to\infty} \left|e^{\lambda t}\right| = \lim_{t\to\infty} \left|e^{(Re(\lambda)+iIm(\lambda))t}\right| = 0 \iff Re(\lambda) < 0$$

Concludiamo che la regione di assoluta stabilità è l'intero semipiano sinistro, per qualsiasi valore di h, cioè dove è $hRe(\lambda) < 0$.
Ora dobbiamo trovare le regioni di assoluta stabilità per i metodi A e B, e vedere se tali regioni contengono l'intero semipiano sinistro. L'approssimazione del problema con il metodo A si può riscrivere così:

$$u_{n+1} - (1 + \frac{23}{12}h\lambda)u_n + \frac{16}{12}h\lambda u_{n-1} - \frac{5}{12}h\lambda u_{n-2} = 0$$

Il cui polinomio caratteristico è

$$P(\omega, \lambda h) := \omega^3 - (1 + \frac{23}{12}h\lambda)\omega^2 + \frac{16}{12}h\lambda\omega - \frac{5}{12}h\lambda = 0$$

Da questo si trova che

$$\lambda h = \frac{12(\omega - 1)}{23 - \frac{16}{\omega} + \frac{5}{\omega^2}}$$

La regione di assoluta stabilità di metodo A è

$$R_A = \{\lambda h \in \mathbb{C} \text{ tale che } |\omega_i(\lambda h)| < 1\}$$

dove $\omega_i(\lambda h)$ per $i = 1, 2, 3$ sono gli zeri della funzione $P(\omega, \lambda h)$. La regione R_A non è assolutamente stabile perché non contiene l'intero semipiano sinistro.

L'approssimazione del problema con il metodo B si può riscrivere così:

$$u_{n+1}(1-\frac{2}{3}\lambda h)-\frac{4}{3}u_n+\frac{1}{3}u_{n-1}=0$$

Il cui polinomio caratteristico è

$$Q(\mu,\lambda h):=\mu^2(1-\frac{2}{3}\lambda h)-\frac{4}{3}\mu+\frac{1}{3}=0$$

Da questo si trova che

$$\lambda h=\frac{3\mu^2-4\mu+1}{2\mu^2}$$

La regione di assoluta stabilità di metodo B è

$$R_B=\left\{\lambda h\in\mathbb{C}\text{ tale che }\left|\frac{-2\pm\sqrt{1-2\lambda h}}{2\lambda h-3}\right|<1\iff\lambda h<0\right\}$$

cioè per ogni λ è soddisfato che $hRe(\lambda)<0$ e concludiamo che la regione R_B è assolutamente stabile.

Per ogni metodo in Matlab disegniamo un grafico che rappresenta sull'asse x la quantità $hRe(\lambda)$ e sull'asse y la quantità $hIm(\lambda)$. Denotiamo con colore verde l'area del grafico che garantisce assoluta stabilità e con colore rosso l'area complementare (`MetodoA_stab.m` e `MetodoB_stab.m`).

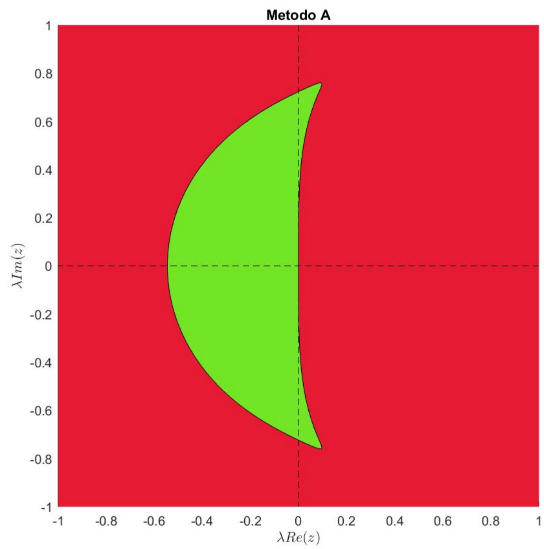

Figura 3: La regione di assoluta stabilità per il metodo A

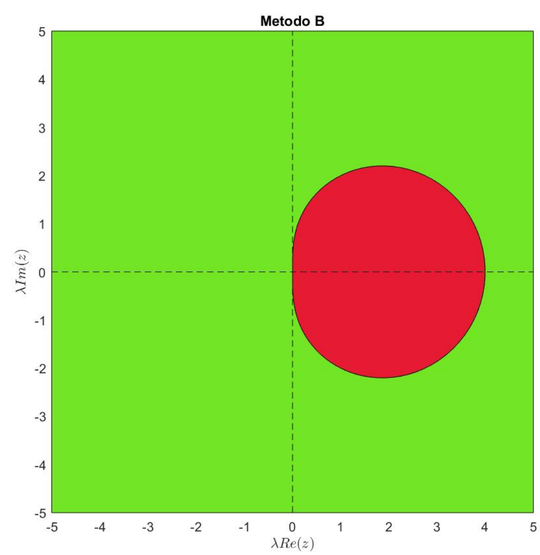

Figura 4: La regione di assoluta stabilità per il metodo B

Secondo esercizio

Sia dato il problema al contorno:

$$\begin{cases} Lu := -\triangle u + \boldsymbol{\beta} \bigtriangledown u = 0 & \text{in } \Omega, \\ u = u_B & \text{su } \partial\Omega, \end{cases}$$

dove $\Omega = (0,1)^2$ e $\boldsymbol{\beta} = (a, 0)^t$ con a valore reale positivo. La soluzione esatta del problema è data da

$$u(x,y) = \frac{1}{e^{-a} - 1}[e^{a(x-1)} - 1]$$

Possiamo calcolare i valori al bordo dalla soluzione esatta:

$$\begin{cases} u(0,y) = 1 \\ u(1,y) = 0 \\ u(x,0) = u(x,1) = \frac{1}{e^{-a}-1}[e^{a(x-1)} - 1] \end{cases}$$

Troviamo $u = u(x,y)$ che soddisfa il nostro problema mediante il metodo delle differenze finite centrate. Usiamo la scrittura $u(x_i, y_j) = u_{i,j}$, e supponiamo che il passo di mesh uniforme sia uguale per x e y cioè $h_x = h_y = h$. Questo implica che anche numero di nodi interni N_i e N_j sono uguali ($N_i = N_j = N$):

$$\bigtriangledown u\big|_{i,j} = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{i,j} + \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{i,j} = \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2h} + \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2h} + O(h)$$

$$\triangle u\big|_{i,j} = \left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{i,j} + \left.\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right|_{i,j} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} + \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{h^2} + O(h^2)$$

Allora $Lu = 0$ diventa

$$\frac{1}{2h^2}\left(u_{i+1,j}(2 - ah) + u_{i-1,j}(2 + ah) - 8u_{i,j} + 2u_{i,j+1} + 2u_{i,j-1}\right) = 0$$

per $i = 1, \ldots, N$ e $j = 1, \ldots, N$.
Per implementazione della risoluzione del problema mediante il metodo delle differenze finite centrate dobbiamo trovare la matrice A di dimensione nxn dove n è numero di equazioni cioè N^2. Matrice A deve soddisfare $A\boldsymbol{v} = \boldsymbol{f}$

dove $\boldsymbol{v}$ e un vettore di incognite. Per la costruzione di $\boldsymbol{v}$ usiamo l'ordinamento lessicografico per $i = 1, \ldots, N$ e $j = 1, \ldots, N$:

$$v_l = u_{i,j}, \qquad \text{per} \qquad l = (j-1)N + i$$

$$\frac{1}{2h^2}\left(v_{l+1}(2-ah) + v_{l-1}(2+ah) - 8v_l + 2v_{l+N} + 2v_{l-N}\right) = 0$$

Mettendo tutto insieme, si ottiene che A ha la seguente forma:

$$A = \frac{1}{2h^2}\begin{bmatrix} T & D & & & & \\ D & T & D & & 0 & \\ & D & T & D & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & 0 & & D & T & D \\ & & & & D & T \end{bmatrix}$$

cioè la matrice A è composta da blocchi T e D, ed è simmetrica. T e D sono le matrici di dimensione NxN che hanno la seguente forma:

$$T = \begin{bmatrix} -8 & 2-ah & & & & \\ 2+ah & -8 & 2-ah & & 0 & \\ & 2+ah & -8 & 2-ah & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & 0 & & 2+ah & -8 & 2-ah \\ & & & & 2+ah & -8 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 2 & & & & & \\ & 2 & & & 0 & \\ & & 2 & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & 0 & & & 2 & \\ & & & & & 2 \end{bmatrix}$$

Dobbiamo anche aggiornare il vettore $\boldsymbol{f}$ che contiene i valori al bordo in modo da completare la matrice A.

Introduciamo il numero di Péclet locale Pe$= |\boldsymbol{\beta}|_\infty h/\varepsilon = ah/\varepsilon$ cioè Pe$= ah$ e guardiamo il comportamento del metodo proposto al variare di a. Per i piccoli valori di a la soluzione ottenuta con il metodo è molto simile a quello esatto, cioè quando è:

$$2 \pm \mathrm{Pe} > 0 \iff ah < 2$$

Per $h = [1/8, 1/16, 1/32, 1/64]$ e diversi valori di a proviamo a implementare il metodo. Scegliamo a tale che $ah < 2$ (`Ex2.m`).
Per $a = 10$ otteniamo che l'errore è $\varepsilon = [0.0527, 0.0116, 0.0029, 0.0007]$.

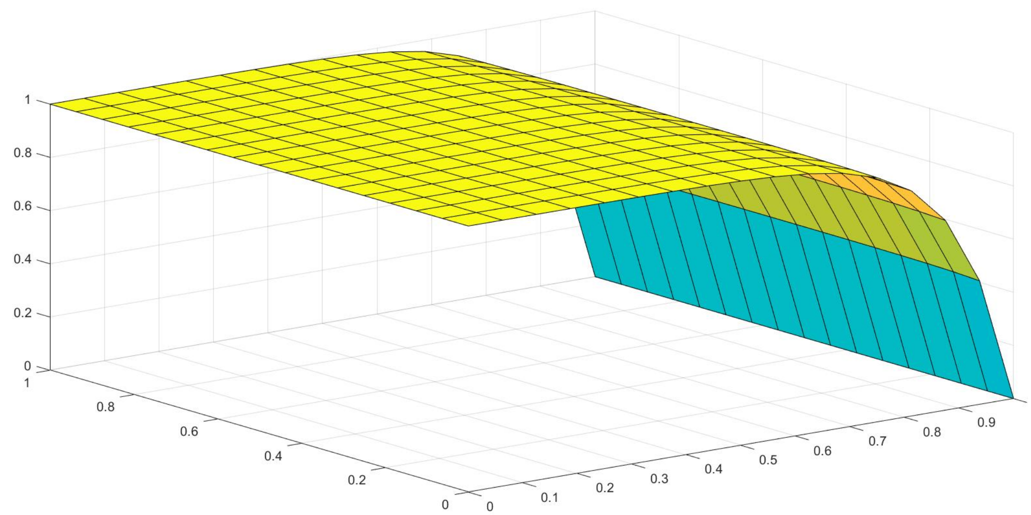

Figura 5: Plot di soluzione esatta del problema per $a = 10$ e $h = 1/16$

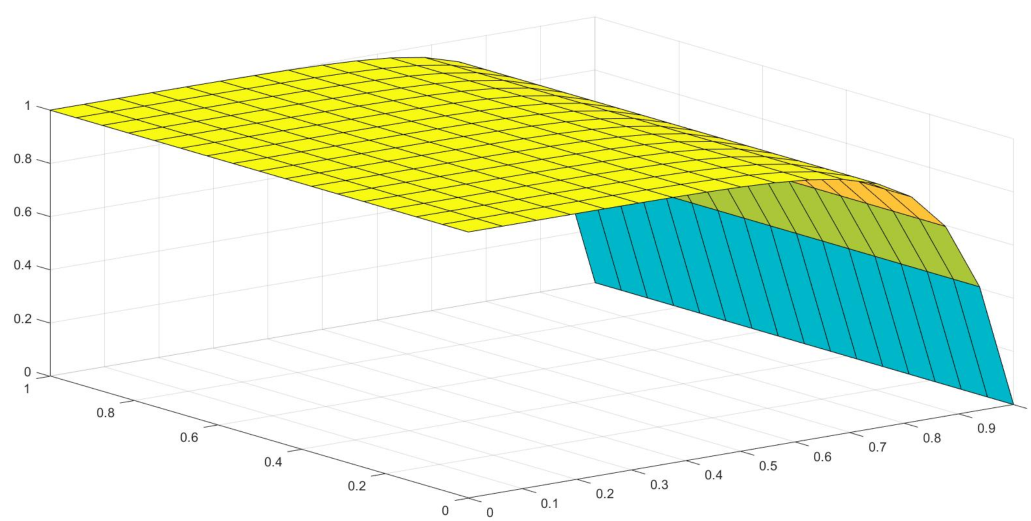

Figura 6: Plot di soluzione ottenuta con il metodo per $a = 10$ e $h = 1/16$

Codici Matlab

Codici del primo esercizizio

Funzione per il metodo A

```
% Secondo Progetto Calcolo Scientifico
% Primo esercizio
% Funzione per il metodo A

function u=MA(t0,y0,T,h,lambda)
n=ceil((T-t0)/h);
t=[t0:h:T];

u(1)=y0; % u_0
u(2)=exp(lambda*h); % u_1
u(3)=exp(lambda*2*h); % u_2

% applico il metodo A dato
for i=3:n
    f(i)=lambda*u(i);
    u(i+1)=u(i)+h/12*(23*f(i)-16*f(i-1)+5*f(i-2));
end
```

Implementazione del metodo A

```
% Secondo Progetto Calcolo Scientifico
% Primo esercizio
% Metodo A-un metodo esplicito a tre passi
% Al variare di h

clear all, close all

t0=0; T=1;
lambda=-1;
y0=1;
hh=[0.1 0.05 0.025 0.0125];

cont=0;
for l=1:numel(hh)
```

```
    cont=cont+1;
    h=hh(l);
    n=ceil((T-t0)/h);
    t=[t0:h:T];

    u_ex=exp(lambda*t); % soluzione esatta del pb.
    u=MA(t0,y0,T,h,lambda); % soluzione con il metodo A

    subplot(2,2,cont);
    figure(1), plot(t, u, 'r-*'), hold on, plot(t, u_ex, 'b');
    xlabel('t')
    ylabel('u(t)')
    legend('soluzione numerica','soluzione esatta');

    err(cont)=abs(u-u_ex);
end

err
```

Grafico di assoluta stabilità per il metodo A

```
% Secondo Progetto Calcolo Scientifico
% Primo esercizio
% Metodo A-la regione di assoluta stabilit

clear all, close all

x=linspace(-5,5);
y=linspace(-5,5);
lambda=x+1i*y;

red=[0.9 0.1 0.2];
green=[0.4471 0.9020 0.1451];

% l'area complementare
r1=[-5 5 5 -5];
r2=[-5 -5 5 5];
patch(r1,r2,red), hold on
```

```
% l'area del grafico che garantisce assoluta stabilit
theta=linspace(0,2*pi);
z=exp(1i*theta);
r=z-1;
s=(23-16./z+5./z.^2)/12;
A=r./s;
plot(real(A),imag(A),'-k'), hold on
fill(real(A),imag(A),green), hold on


plot([0 0], ylim, 'k--'); % asse x
plot(xlim, [0 0], 'k--'); % asse y
hold off

axis([-1 1 -1 1]), axis square, grid on
title('Metodo A')
xlabel('$\lambda Re(z)$','interpreter','latex');
ylabel('$\lambda Im(z)$','interpreter','latex');
```

Funzione per il metodo B

```
% Secondo Progetto Calcolo Scientifico
% Primo esercizio
% Funzione per il metodo B

function u=MB(t0,y0,T,h,lambda)
n=ceil((T-t0)/h);

u(1)=y0; % u_0
u(2)=exp(lambda*h); % u_1

fcn=@(t,u)lambda*u;

options=optimset('Display','off');
t=t0+h;

% applico il metodo B dato
```

```
% con fsolve risolvo la funzione non lineare ad ogni
    passo
for i=2:n
    y=fsolve(@(y) y-4/3*u(i)+1/3*u(i-1)-h*2/3*fcn(t+h,y
        ), u(i), options);
    u(i+1)=y;
end
```

Implementazione del metodo B

```
% Secondo Progetto Calcolo Scientifico
% Primo esercizio
% Metodo B-un metodo implicito a due passi
% Al variare di h

clear all, close all

t0=0; T=1;
lambda=-1;
y0=1;
hh=[0.1 0.05 0.025 0.0125];

cont=0;
for l=1:numel(hh)
    cont=cont+1;
    h=hh(l);
    n=ceil((T-t0)/h);
    t=[t0:h:T];

    u_ex=exp(lambda*t); % soluzione esatta del pb.
    u=MB(t0,y0,T,h,lambda); % soluzione con il metodo A

    subplot(2,2,cont);
    figure(1), plot(t, u, 'r-*'), hold on, plot(t, u_ex
        , 'b');
    xlabel('t')
    ylabel('u(t)')
    legend('soluzione numerica','soluzione esatta');

```

```
    err(cont)=norm(u-u_ex,2);
end

err
```

Grafico di assoluta stabilità per il metodo B

```
% Secondo Progetto Calcolo Scientifico
% Primo esercizio
% Metodo B-la regione di assoluta stabilit

clear all, close all

x=linspace(-5,5);
y=linspace(-5,5);
lambda=x+1i*y;

red=[0.9 0.1 0.2];
green=[0.4471 0.9020 0.1451];

r1=[-5 5 5 -5];
r2=[-5 -5 5 5];
patch(r1,r2,green), hold on

theta=linspace(0,2*pi);
z=exp(1i*theta);
B=(3-4./z+1./z.^2)/2;
plot(real(B),imag(B),'-k'), hold on
fill(real(B),imag(B),red), hold on

plot([0 0], ylim, 'k--'); % asse x
plot(xlim, [0 0], 'k--'); % asse y
hold off

axis([-5 5 -5 5]), axis square, grid on
title('Metodo B')
xlabel('$\lambda Re(z)$','interpreter','latex');
ylabel('$\lambda Im(z)$','interpreter','latex');
%
```

Codice del secondo esercizio

```matlab
% Calcolo Scientifico Secondo Progetto
% Secondo Esercizio

clear all, close all

hh=[1/8 1/16 1/32 1/64]; % passo unifome di mesh

for l=1:numel(hh)
    h=hh(l);
    nx=ceil(1/h); ny=nx;
    N=nx+1; % numero di nodi
    dim=N^2-(4*N-4); % numero di incognite
    xi=0; xf=1; yi=0; yf=1; % valori al bordo
    x=xi:h:xf;
    y=yi:h:yf;
    f=zeros(dim,1);
    % a=0.1; a=1; a=10; a=100;
    a=10;

    Pe=a*h; % numero di Peclet

    % bordo sud
    gS=@(x,y)0+1/(exp(-a)-1).*(exp(a*(x-1))-1)+0.*y; % u(x,0)
    % bordo nord
    gN=@(x,y)0+1/(exp(-a)-1).*(exp(a*(x-1))-1)+0.*y; % u(x,1)
    % bordo ovest
    gW=@(x,y)1+0.*x+0.*y; % u(0,y)
    % bordo est
    gE=@(x,y)0+0.*x+0.*y; % u(1,y)

    f(1:N-2)=f(1:N-2)-1/(2*(h^2))*2*(gS([1:N-2]*h,0))'; %bordo sud
    f(dim-(N-2)+1:dim)=f(dim-(N-2)+1:dim)-1/(2*(h^2))*2*(gN([1:N-2]*h,1))'; %bordo nord
```

```
    f(1:N-2:dim-(N-2)+1)=f(1:N-2:dim-(N-2)+1)-1/(2*(h^2))*(2+Pe)*(gW(0,[1:N-2]*h))'; %bordo ovest
    f(N-2:N-2:dim)=f(N-2:N-2:dim)-1/(2*(h^2))*(2-Pe)*(gE(1,[1:N-2]*h))'; %bordo est

    uex=@(x,y)1/(exp(-a)-1).*(exp(a*(x-1))-1); % soluzione esatta del problema

    % matrice A per i nodi interni, senza condizioni al bordo
    I=speye(N-2);
    e=ones(N-2,1);
    T=spdiags([(2+Pe)*e -8*e (2-Pe)*e],[-1 0 1],N-2,N-2);
    S=spdiags([e e],[-1 1],N-2,N-2); % struttura diamante
    P=2*speye(N-2);
    A=1/(2*h^2)*(kron(I,T)+kron(S,P));

    % risolvo il sistema lineare nelle incognite (valori di u nei nodi interni)
    u=A\f;

    % dispongo la soluzione come nel piano fisico
    umat=reshape(u,N-2,N-2);
    umat=(fliplr(umat))';

    U=zeros(N);
    U(2:N-1,2:N-1)=umat;

    U(1,:)=gS(x,yi); %per j=1..N end=N+1

    U(end,:)=gN(x,yf); %per j=1..N

    U(:,1)=gW(xi,y); %per i=1..N

    U(:,end)=gE(xf,y); %per i=1..N

```

```
    [X,Y]=meshgrid(x,y);
    figure, surf(X,Y,U);
    figure, surf(X,Y,uex(X,Y));

    err(l)=max(max(abs(U-uex(X,Y))));
end
```