Calcolo Scientifico

Quarto Progetto

Žana Ilić - 898373

8 luglio 2019.

Esercizio

Si consideri l'integrale di Fredholm del primo tipo

$$\int_0^1 K(s,t)f(t)\,\mathrm{d}t = g(s), \quad 0 \le s \le 1$$

associato con il calcolo della derivata seconda di una funzione g, ovvero tale che $f(t) = g''(t)$ per $0 \le t \le 1$. Quest'ultima è un equazione differenziale del tipo:

$$f(t) = Lg(t), \quad \text{dove} \quad L = d^2/dt^2$$

cioé si tratta di un equazione di Poisson. La funzione di Green associata all'operatore L è la soluzione di $LK(s,t) = \delta(s-t)$, dove δ è delta di Dirac. Si ottiene che il nostro kernel associato a questa operazione è:

$$K(s,t) = \begin{cases} s(t-1), & s < t \\ t(s-1), & s \ge t \end{cases}$$

Osserviamo che il kernel non è differenziabile in $s = t$.
Verifichiamo che esso ammette la SVE data da:

$$\begin{cases} \mu_i = \dfrac{1}{(i\pi)^2} \\ \\ u_i = \sqrt{2}\sin(i\pi s) \\ \\ v_i = -\sqrt{2}\sin(i\pi t) \end{cases}$$

per ogni $i = 1, 2, \ldots, +\infty$, dove μ_i sono gli valori singolari e u_i, v_i sono gli funzioni singolari. Una relazione fondamentale relativa a SVE è:

$$\int_0^1 K(s,t)v_i(t)\,\mathrm{d}t = \mu_i u_i(s)$$

Vediamo che questa relazione è vera per ogni $i = 1, 2, \dots, +\infty$. Per trovare la soluzione dividiamo il problema in due domini, $s \geq t$ e $s < t$, cioè $0 \leq t \leq s$ e $s < t \leq 1$:

$$\int_0^1 K(s,t)v_i(t)\mathrm{d}t = \int_0^s t(s-1)(-\sqrt{2})\sin(i\pi t)\,\mathrm{d}t + \int_s^1 s(t-1)(-\sqrt{2})\sin(i\pi t)\,\mathrm{d}t$$

calcolando tutto, si ottiene che

$$\int_0^1 K(s,t)v_i(t)\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{2}}{\pi^2 i^2}(\sin(i\pi s) - s\sin(i\pi))$$

ma poiché i è un numero intero positivo, si ha che $\sin(i\pi) = 0$ per ogni i. Concludiamo che vale relazione per ogni $i = 1, 2, \dots, +\infty$ cioè

$$\int_0^1 K(s,t)v_i(t)\,\mathrm{d}t = \mu_i u_i(s) = \frac{\sqrt{2}}{\pi^2 i^2}(\sin(i\pi s)) = \mu_i u_i(s)$$

Ora discretizziamo il problema approssimando l'integrale con il metodo del punto medio con, successivamente, $n = 8, 16, 32, 64$ intervalli, considerando i punti di "misurazione" $s = s_i$, per $i = 1, 2, \dots, m$, con $m = 100$. Usiamo il metodo del punto medio:

$$g(s) = \int_0^1 K(s,t)f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} K(s,t_j)f(t_j) + \varepsilon_n$$

se trascuriamo l'errore, abbiamo per ogni $j = 1, \dots, n$:

$$g(s_i) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} K(s_i,t_j)f(t_j)$$

Scriviamo il problema discreto ottenuto come il sistema lineare $A\mathbf{f} = \mathbf{g}$, con $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^{n\times 1}$, $\mathbf{g} \in \mathbb{R}^{m\times 1}$:

$$A = \frac{1}{n} \begin{pmatrix} K(s_1,t_1) & K(s_1,t_2) & \dots & K(s_1,t_n) \\ K(s_2,t_1) & K(s_2,t_2) & \dots & K(s_2,t_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ K(s_m,t_1) & K(s_m,t_2) & \dots & K(s_m,t_n) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{f} = \begin{pmatrix} f(t_1) \\ f(t_2) \\ \vdots \\ f(t_n) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{g} = \begin{pmatrix} g(s_1) \\ g(s_2) \\ \vdots \\ g(s_m) \end{pmatrix}$$

In Matlab calcoliamo la SVD di A con il comando `svd`. Così troviamo i valori singolari ottenuti con il metodo del punto medio σ_i, $i = 1, 2, \dots, n$ per $n = 64$. Tracciamo il grafico dell'errore $|\mu_i - \sigma_i|$, $i = 1, 2, \dots, n$.

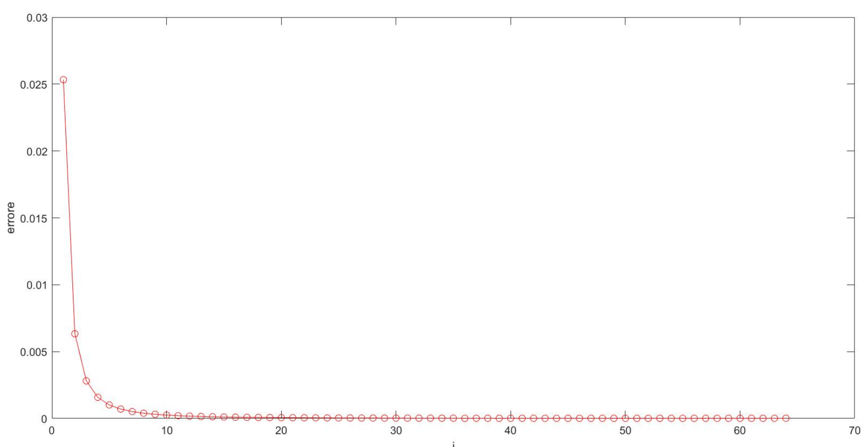

Figura 1: Il grafico dell'errore $|\mu_i - \sigma_i|$

Vediamo che per i numeri piccoli di i, l'errore è più grande, ma quando i si aumenta, errore è più piccolo. Come i valori singolari, anche l'errore decade a 0, in questo caso rapidamente. Ma se guardiamo questo grafico un po più vicino, osserviamo che l'errore non decresce "uniformemente", cioé ci sono salti. Questo si vede in Figura 2.

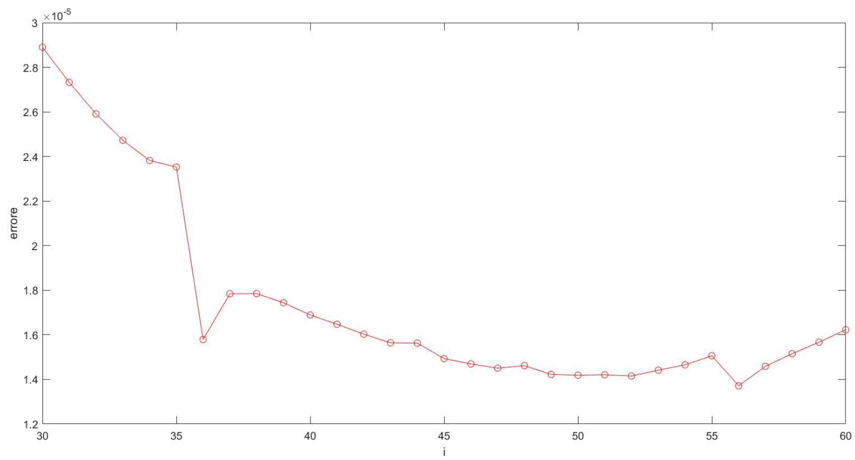

Figura 2: Il grafico dell'errore $|\mu_i - \sigma_i|$, solo per valori di i tra 35 e 60

In particolare,

$$A = UQV^t = \sum_{i=1}^{n} u_i \sigma_i v_i^t$$

dove Q è la matrice diagonale di valori singolari tali che $\sigma_1 \geq \cdots \geq \sigma_n > 0$ cioé i valori singolari decadono gradualmente a zero senza salti e U, V sono gli matrici ortogonali di vettori singolari, cioé u_i e v_i sono rispettivamente i vettori singolari sinistri e destri di A:

$$Q = diag(\sigma_1, \ldots, \sigma_n), \quad U = (u_1, \ldots, u_n), \quad V = (v_1, \ldots, v_n)$$

Allora $||A||_2 = \sigma_1$, $||A^{-1}||_2 = {\sigma_n}^{-1}$ e abbiamo che il condizionamento della matrice è:

$$cond(A) = ||A||_2 ||A^{-1}||_2 = \sigma_1 / \sigma_n$$

cioé la differenza tra il valore singolare più grande e il valore singolare più piccolo è molto grande. Più precisamente, in nostro caso è pari a 2.9×10^3. Questo significa che il problema è mal-condizionato.

Sia ora

$$g(s) = \begin{cases} (4s^3 - 3s)/24, & s < 0.5, \\ \\ (-4s^3 + 12s^2 - 9s + 1)/24, & s \geq 0.5. \end{cases}$$

Prima di tutto, vogliamo calcolare la soluzione esatta di $f(t)$, sapendo che $f(t) = g''(t)$ per $0 \leq t \leq 1$:

$$g'(t) = \begin{cases} t^2/2 - 1/8, & t < 0.5, \\ \\ -t^2/2 + t - 3/8, & t \geq 0.5. \end{cases} \quad , \quad g''(t) = \begin{cases} t, & t < 0.5, \\ \\ 1 - t, & t \geq 0.5. \end{cases}$$

Fissiamo $n = 64$ e approssimiamo i valori della derivata seconda di g tramite la discretizzazione dell'integrale di Fredholm dato. Perturbiamo i dati g_i, $i = 1, \ldots, m$, con un rumore gaussiano η_i (comando `randn`) tale che complessivamente $||\eta||_2 = 5 \times 10^{-5}$. Abbiamo che $g_i^{\text{preturbato}} = g_i^{\text{esatto}} + \eta_i$.

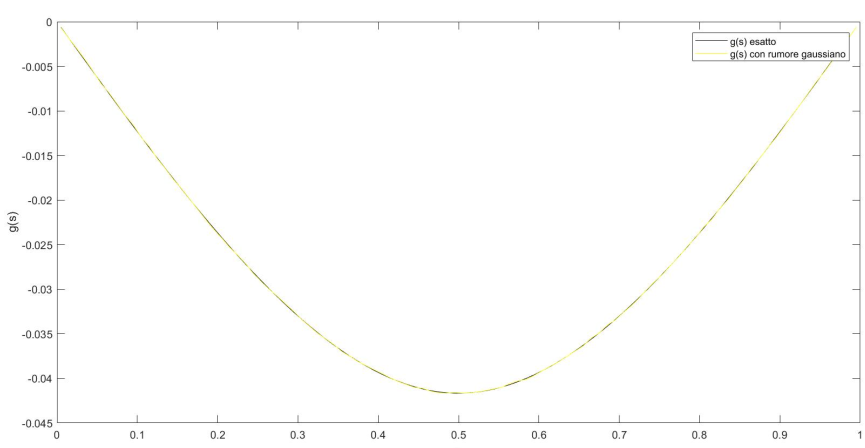

Figura 3: Il grafico di g esatto e g con il rumore gaussiano applicato

Risolviamo il sistema lineare $A\mathbf{f} = \mathbf{g}$ in maniera *naive*, ovvero senza nessun tipo di regolarizzazione. Consideriamo la soluzione ai minimi quadrati, cioé:

$$f_N = \min_f \{\|Af - g\|_2\}$$

dove f_N è la soluzione *naive*. Osserviramo che la matrice A ha rango pieno, e si ha:

$$f = \sum_{j=1}^{n} \frac{u_j^t g}{\sigma_j} v_j = \sum_{j=1}^{n} \frac{u_j^t g^{\text{esatto}}}{\sigma_j} v_j + \sum_{j=1}^{n} \frac{u_j^t \eta}{\sigma_j} v_j$$

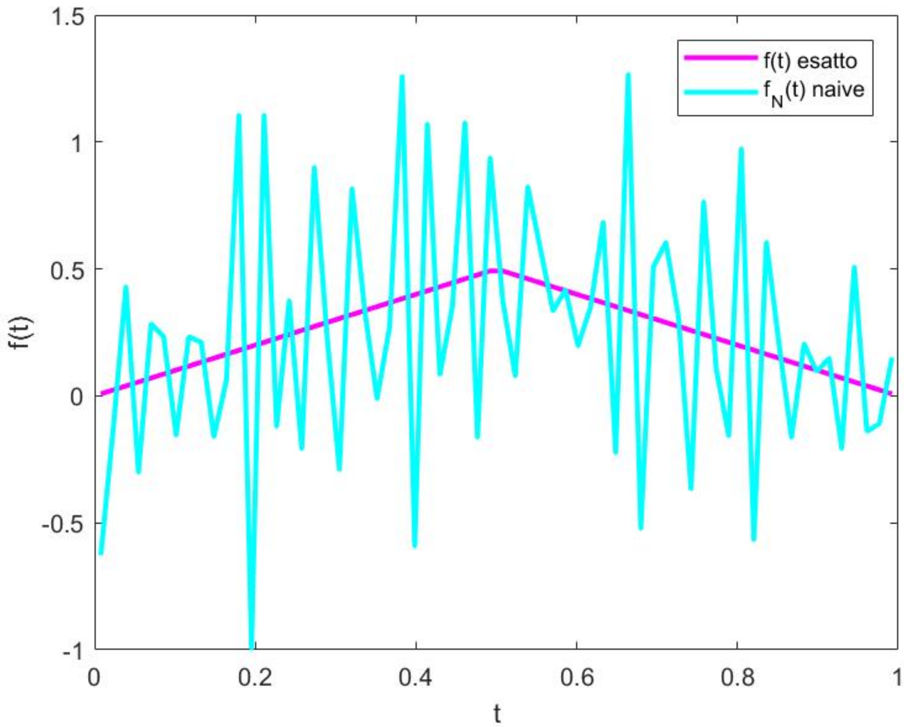

Figura 4: Il grafico di f esatto e f ottento in maniera *naive*

Concludiamo che la soluzione "*naive*" è molto diversa da quella esatta e che essa è inutile. Ci sono tanti valori di f_N molto diversi da f esatto. Poiché stiamo usando il comando `randn`, f_N è un po' diversa ogni volta.

Risolviamo ora il sistema lineare $A\mathbf{f} = \mathbf{g}$ usando la regolarizzazione di Tikhonov e vediamo cosa succede. Scriviamo la relazione:

$$f_\lambda = \min_f \left\{ \|Af - g\|_2^2 + \lambda \|f\|_2^2 \right\}$$

f_λ si scrive anche così:

$$f_\lambda = (A^t A + \lambda I)^{-1} A^t g$$

dove $\lambda \in \mathbb{R}^+$ è il parametro di regolarizzazione, $\|f\|_2^2$ è il termine di regolarizzazione e $\|Af - g\|_2^2$ è il residuo. Se $\lambda = 0$, abbiamo la soluzione "*naive*". Se λ è grande abbiamo regolarizzazione forte, la soluzione è più liscia. Se λ è piccolo, la soluzione è meglia di quella "*naive*", ma in ogni caso è dominata dal rumore.

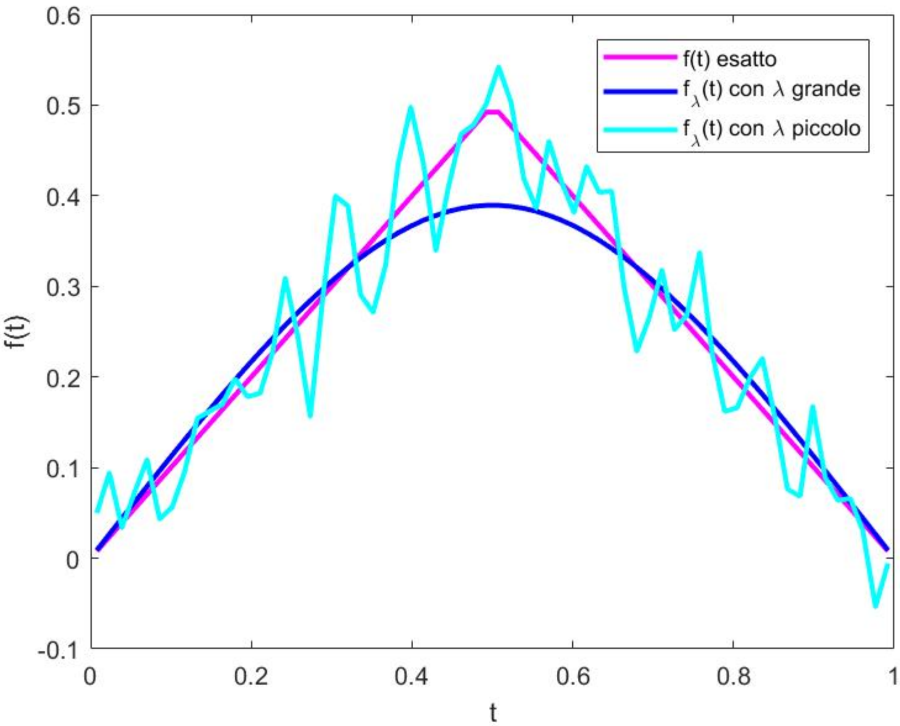

Figura 5: Il grafico di f esatto e f_λ con valori $\lambda = 10^{-3}$ e $\lambda = 10^{-7}$

Tracciamo anche la L-curva. Si ha che in presenza di valori singolari piccoli la norma della soluzione $\|f\|_2$ aumenta e si allontana da quella esatta pur diminuendo il residuo $\|Af - g\|_2^2$.

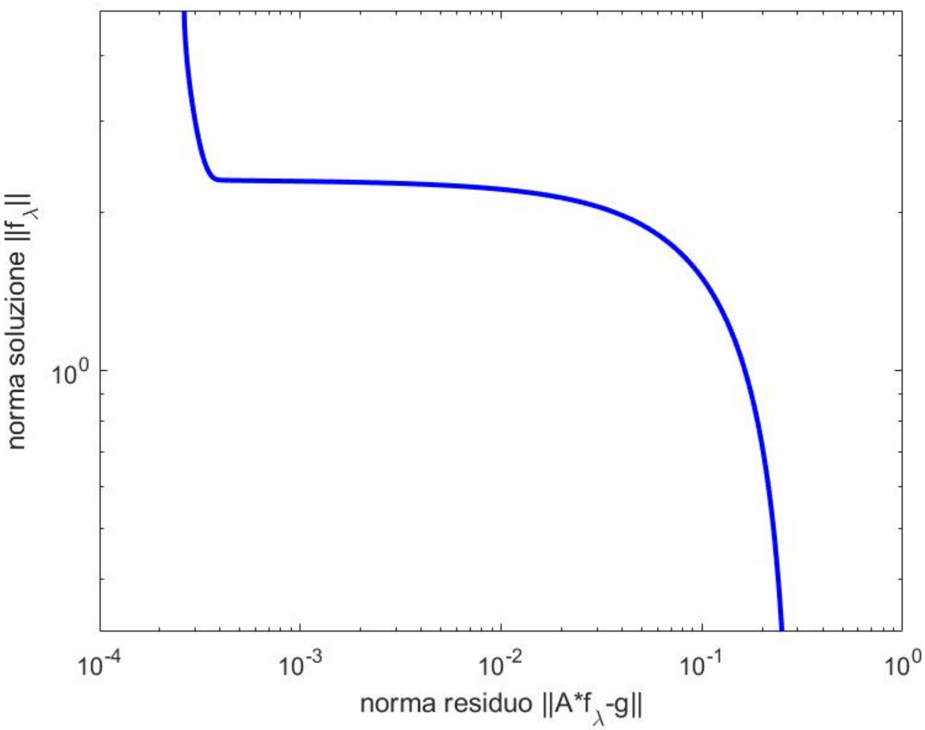

Figura 6: L-curva con i valori di λ tra 10^{-10} e 10^{-1}

Alla fine risolviamo il sistema lineare $A\mathbf{f} = \mathbf{g}$ usando la SVD troncata opportunamente (TSVD). A tale scopo, vogliamo scartare i coefficienti di SVD corrispondenti ai più piccoli valori singolari che creano problemi nella soluzione, così la matrice mal condizionata si sostituisce con una matrice di rango minore k ben condizionata:

$$A_k = UQ_kV^t = \sum_{j=1}^{k} u_j \sigma_j v_j^t, \quad k < n$$

Risolviamo il sistema $A_k\mathbf{f}_k = \mathbf{g}$ in modo da soddisfare:

$$\min \|f\|_2 \quad \text{tale che} \quad \min \|A_k f - g\|_2$$

Le soluzioni di TSVD sono calcolate come:

$$f_k = \sum_{j=1}^{k} \frac{u_j^t g}{\sigma_j} v_j, \quad k < n$$

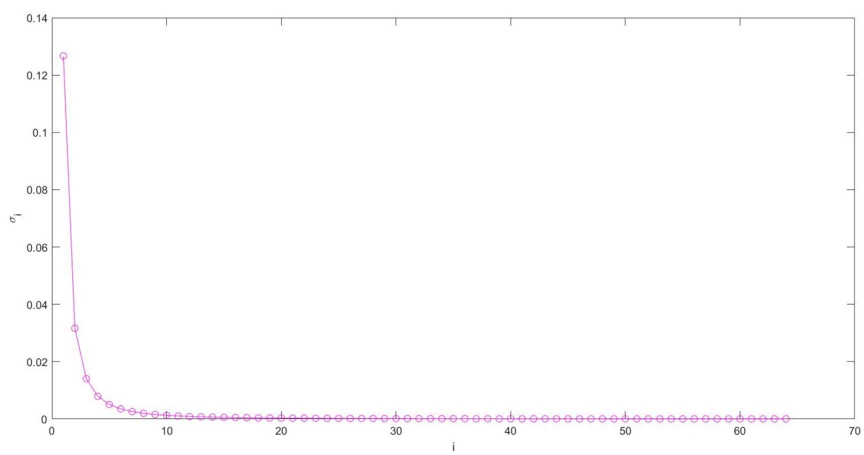

Figura 7: Il grafico dei valori singolari

Abbiamo già detto che $\sigma_1 \geq \cdots \geq \sigma_n > 0$ cioé i valori singolari decadono gradualmente a zero senza salti. In questo caso vogliamo solo $k < n$ valori singolari, e che tutti gli altri $n-k$ diventano uguali a 0. Dal grafico osserviamo che solo i primi dieci-quindici valori singolari hanno valore maggiore di 0.001. Fissiamo questa soglia e troviamo la matrice Q_k.

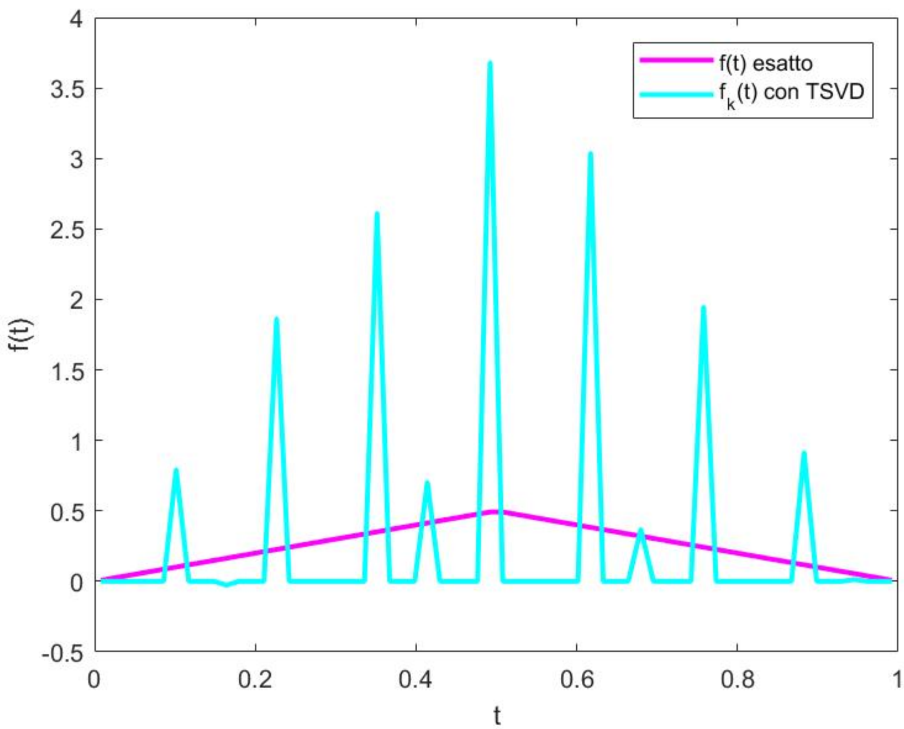

Figura 8: Il grafico di f esatto e f_k ottenuto usando la SVD troncata

Codici Matlab

```
% Calcolo Scientifico
% Quarto Progetto
% Primo Esercizio
% Problema Inverso

clear all, close all

nn=[8 16 32 64]; % il numero di intervalli
for n=nn
    m=100; % per s
    K=@(s,t)s.*(t-1)*(s<t)+t.*(s-1)*(s>=t); % kernel K(s,t)

    % metodo del punto medio (punti medi tra 0 e 1)
    ds=1/m;
    s=ds/2:ds:1-ds/2;
    dth=1/n;
    t=dth/2:dth:1-dth/2;
    for i=1:m
        for j=1:n
            KK(i,j)=K(s(i),t(j));
        end
    end
    A=1/n*KK; % la matrice A
end

%% decomposizione in valori singolari (SVD) per n=64

n=64;
cond(A);
rank(A);
[U,S,V]=svd(A);

for j=1:n
    mu(j)=1/(pi*j)^2; % valori singolari esatti
```

```
    err(j)=abs(S(j,j)-mu(j)); % errore
end

% il grafico dell'errore tra valori singolari esatti e
% valori singolari ottenuti
figure(1), plot(err,'r-o')
xlabel('i');
ylabel('errore');
figure(2), plot(err,'r-o')
xlabel('i');
ylabel('errore');
xlim([30 60]);

%% le funzioni g,f esatte; il rumore gaussiano

% la funzione g data:
g=@(s)((4*s^3-3*s)/24)*(s<1/2)+((-4*s^3+12*s^2-9*s+1)/24)*(s>=1/2);
% la funzione f=g'' esatta:
f_ex=@(t)t*(t<0.5)+(1-t)*(t>=0.5);

for i=1:m
    for j=1:n
        gg(i)=g(s(i));
        ff_ex(j)=f_ex(t(j));
    end
end
f=A\gg'; % f ottenuta

% il grafico di f esatto vs. f ottenuto
figure(3), plot(t,ff_ex,'k','LineWidth',2), hold on
plot(t,f,'c','LineWidth',2), hold on
legend('f(t) esatto','f(t) ottenuto'),
xlabel('t'), ylabel('f(t)'), hold off

% perturbazione di dati gg_i con un rumore gaussiano->g_p
var=(5e-5)^2;
```

```
gp=gg+sqrt(var)*randn(size(gg));

% il grafico di g esatto vs. g con rumore gaussiano
figure(4), plot(s,gg,'k'), hold on
plot(s,gp,'y'), hold on
legend('g(s) esatto','g(s) con rumore gaussiano'),
xlabel('s'), ylabel('g(s)'), hold off

%% la soluzione "naive"

fp=A\gp';
% il grafico di f esatto vs. f naive
figure(5), plot(t,ff_ex,'m','LineWidth',2), hold on
plot(t,fp,'c','LineWidth',2), hold on
legend('f(t) esatto','f_N(t) naive')
xlabel('t'), ylabel('f(t)'), hold off


%% regolarizzazione di Tikhonov

Id=eye(size(A'*A));
lambda_grande=1e-3;
lambda_piccolo=1e-7;
flambda_grande=(A'*A+lambda_grande*Id)\(A'*gp');
flambda_piccolo=(A'*A+lambda_piccolo*Id)\(A'*gp');
% il grafico
figure(6), plot(t,ff_ex,'m','LineWidth',2), hold on
plot(t,flambda_grande,'b','LineWidth',2), hold on
plot(t,flambda_piccolo,'c','LineWidth',2), hold on
legend('f(t) esatto','f_{\lambda}(t) con \lambda grande
    ','f_{\lambda}(t) con \lambda piccolo')
xlabel('t'), ylabel('f(t)'), hold off

% L-curve
lambda=logspace(-10,-1,1000);
Id=eye(size(A'*A));
for i=1:numel(lambda)
    flambda=(A'*A+lambda(i)*Id)\(A'*gp');
```

```
    norma(i)=norm(flambda,2);
    res(i)=norm(A*flambda-gp',2);
end
figure(7), loglog(res,norma,'b','LineWidth',2)
xlabel('norma residuo ||A*f_{\lambda}-g||')
ylabel('norma soluzione ||f_{\lambda}||')

%% regolarizzazione TSVD

% il grafico dei valori singolari
figure(8), plot(diag(S),'m-o');
xlabel('i')
ylabel('\sigma_i')

% TSVD
soglia=0.001;
for i=1:n
    if( S(i,i)<soglia )
        S(i,i)=0;
    end
end
Ak=U*S*V';
fk=Ak\gp';
figure(9), plot(t,ff_ex,'m','LineWidth',2), hold on
plot(t,fk,'c','LineWidth',2), hold on
legend('f(t) esatto','f_k(t) con TSVD')
xlabel('t'), ylabel('f(t)'), hold off
```