Calcolo Scientifico

Terzo Progetto

Žana Ilić - 898373

18 giugno 2019.

Primo esercizio

Sia dato il problema:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\alpha(u)\dfrac{\partial u}{\partial x}\right) = 0 & x \in (0,1), t \in (0,T], \\ u(0,t) = u(1,t) = 1 & t \in (0,T], \\ u(x,0) = 1 + \sin(\pi x) & x \in (0,1), \end{cases}$$

dove $\alpha = \alpha(u)$ è il coefficiente di duffusione nonlineare. Dobbiamo trovare $u = u(x,t)$ che soddisfa il nostro problema.

Prima consideriamo per l'approssimazione del problema uno schema alle differenze finite centrate per la parte spaziale e di Eulero Esplicito per la parte temporale. Usiamo le scritture $u(x_j, t_n) \simeq u_j^n$ e $\alpha(u(x_j, t_n)) \simeq \alpha_j^n$.

Per la parte spaziale usiamo l'approssimazione alle differenze finite centrate. A tale scopo introduciamo una nuova griglia con i nodi $u_{j-1/2}^n$ e $u_{j+1/2}^n$, dove $u_{j\pm1/2}^n$ sono i nodi tra u_j^n e $u_{j\pm1}^n$:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\alpha(u)\frac{\partial u}{\partial x}\right) \simeq \frac{\alpha_{j+1/2}^n(u_{j+1}^n - u_j^n) - \alpha_{j-1/2}^n(u_j^n - u_{j-1}^n)}{\triangle x^2}$$

dove

$$\alpha_{j+1/2}^n = \alpha\left(\frac{u_{j+1}^n + u_j^n}{2}\right) \quad \alpha_{j-1/2}^n = \alpha\left(\frac{u_j^n + u_{j-1}^n}{2}\right)$$

e allora:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\alpha(u)\frac{\partial u}{\partial x}\right) \simeq \frac{\alpha\left(\dfrac{u_{j+1}^n + u_j^n}{2}\right)(u_{j+1}^n - u_j^n) - \alpha\left(\dfrac{u_j^n + u_{j-1}^n}{2}\right)(u_j^n - u_{j-1}^n)}{\triangle x^2}$$

Per la parte temporale usiamo l'approssimazione di Eulero Esplicito:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_j, t_n) \simeq \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\triangle t}$$

dove $\triangle x$ e $\triangle t$ sono passi uniformi di mesh per lo spazio e per il tempo rispettivamente. Allora il problema diventa, per ogni j, n:

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\triangle t} = \frac{\alpha_{j+1/2}^n (u_{j+1}^n - u_j^n) - \alpha_{j-1/2}^n (u_j^n - u_{j-1}^n)}{\triangle x^2}$$

cioè

$$u_j^{n+1} = u_j^n + r \cdot (\alpha_{j+1/2}^n (u_{j+1}^n - u_j^n) - \alpha_{j-1/2}^n (u_j^n - u_{j-1}^n))$$

dove $r = \dfrac{\triangle\, t}{\triangle x^2}$.

Troviamo ora la condizione di stabilità e applichiamola al caso

$$\alpha(u) = \frac{1 + 3u^2}{1 + u^2} = 3 - \frac{2}{1 + u^2}$$

Troviamo il risultato locale vicino al punto (x_j, t_n), e fissiamo $\bar{\alpha} = \alpha(u(x_j, t_n))$. La condizione di stabilità locale è:

$$1 - 4\bar{\alpha}\frac{\triangle t}{\triangle x^2} \leq 0 \iff \bar{\alpha}\frac{\triangle t}{\triangle x^2} \leq \frac{1}{2} \iff \triangle t \leq \frac{\triangle x^2}{2\bar{\alpha}}$$

La condizione di stabilità globale è:

$$\triangle t \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{\triangle\, x^2}{\sup\limits_{x \in (0,1), t \in (0,T]} \alpha(u(x_j, t_n))}$$

Poiché $\alpha(u)$ è strettamente maggiore di 1, l'equazione soddisfa il principio di massimo. Abbiamo che:

$$u(x,t) \leq 1 + \sin(\pi x), \quad 1 \leq 1 + \sin(\pi x) \leq 2$$

Questo è sufficiente per calcolare la condizione di stabilità globale:

$$\sup \alpha(u(x,t)) \leq \sup \alpha(1 + \sin(\pi x)) = \sup \left(3 - \frac{2}{1 + (1 + \sin(\pi x))^2} \right) \leq \frac{13}{5}$$

Allora:

$$\triangle t \leq \frac{5}{26} \cdot \triangle x^2$$

Implementiamo in un codice Matlab la risoluzione del problema utilizzando ad ogni istante temporale per il calcolo del coefficiente di diffusione nonlineare il valore della soluzione u calcolata al tempo precedente, cioè usiamo lo schema:

$$u_j^{n+1} = u_j^n + \frac{\triangle t}{\triangle x^2} \left(\alpha \left(\frac{u_{j+1}^n + u_j^n}{2} \right) (u_{j+1}^n - u_j^n) - \alpha \left(\frac{u_{j-1}^n + u_j^n}{2} \right) (u_j^n - u_{j-1}^n) \right)$$

Per il calcolo del coefficiente di diffusione nonlineare al tempo t_1 dobbiamo utilizzare il valore della soluzione u calcolata al tempo t_0, cioè $u(x_j, t_0)$. Allora per il tempo t_1 calcoliamo $\alpha(u(x_j, t_0))$, per il tempo t_n calcoliamo $\alpha(u(x_j, t_{n-1}))$...

Assegniamo un opportuno valore di guess iniziale per la soluzione per partire:

$$u(x, t_0) = u(x, 0) = 1 + \sin(\pi x) \quad \forall x \in (0,1)$$

$$t_1 : \alpha(u(x, t_0)) = \alpha(1 + \sin(\pi x)) = 3 - \frac{2}{1 + (1 + \sin(\pi x))^2}$$

Codici per questo esercizio in Matlab sono: `parabolico.m`, `EEtempo.m`, `DFCspazio.m` e `bcfun.m`.

Secondo esercizio

Si consideri la legge di conservazione per $c = c(x,t)$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial c}{\partial t} + a\dfrac{\partial c}{\partial x} = -\gamma c \\ \\ c(x,0) = g(x), \end{cases}$$

con γ parametro reale positivo e $a = cost$ velocità di propagazione.
Introduciamo la variabile $u(x,t) = c(x,t)e^{\frac{\gamma}{a}x}$ e riscriviamo in funzione di essa il problema dato, che assume una forma nota, legge di trasporto:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + a\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0 \\ \\ u(x,0) = g(x)e^{\frac{\gamma}{a}x} \end{cases}$$

La soluzione generale di questo problema è $u(x,t) = f(x-at)$, con f funzione di una variabile. Le curve caratteristiche sono $x - at = cost$, cioè lungo ogni curva la soluzione è costante. Onda si muove verso destra con velocità a, se $a > 0$, oppure verso sinistra con velocità a, se $a < 0$. Cerchiamo ora la soluzione usando la condizione iniziale.
Se fissiamo $t = 0$, allora abbiamo che $u(x,0) = f(x) = g(x)e^{\gamma x/a}$.
Se fissiamo $w = x$, allora abbiamo che $f(w) = g(w)e^{\gamma w/a}$.
Otteniamo che la soluzione è:

$$u(x,t) = f(x-at) = g(x-at)e^{\frac{\gamma}{a}(x-at)}$$

Scegliamo la condizione iniziale $g(x) = e^{(x-0.5)^2}$, $\gamma = 0.7$ e $a = 1/2$. In questo caso la soluzione esatta è:

$$u(x,t) = e^{x^2 - tx + 0.4x + 0.25t^2 - 0.2t + 0.25}$$

In questo caso le curve caratteristiche sono delle rette parallele. Onda si muove verso destra con velocità a. In Matlab tracciamo i grafici delle curve caratteristiche nel piano (x,t) e della soluzione stessa in assi $(x,t,c(x,t))$ per $x \in \mathbb{R}$ (`trasporto.m`).

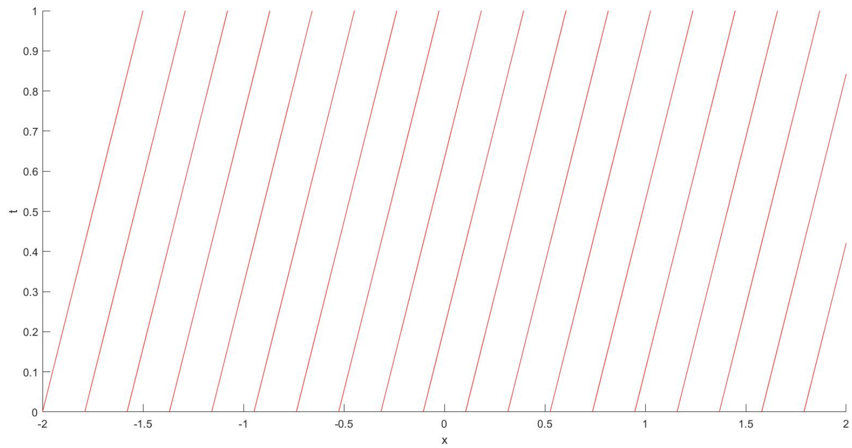

Figura 1: Grafico delle curve caratteristiche nel piano (x, t)

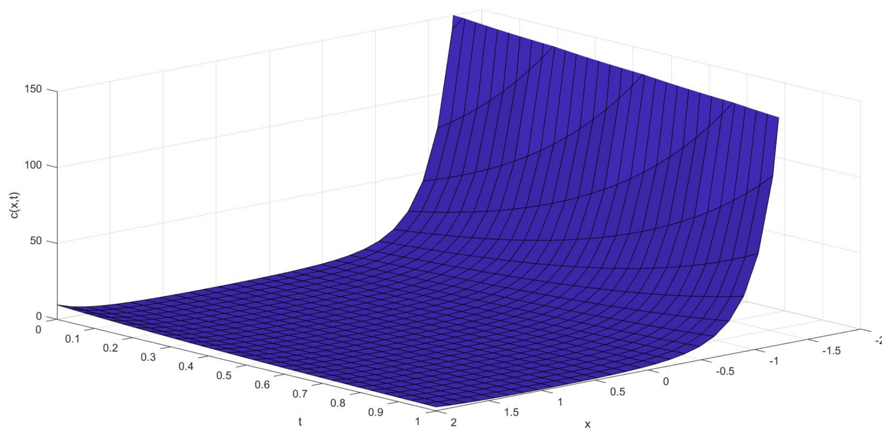

Figura 2: Grafico della soluzione in assi $(x, t, c(x, t))$

Risolviamo ora lo stesso problema del punto precedente, considerando questa volta il dominio spaziale $x \geq 0$, condizione iniziale $g(x) = 0$ per $x > 0$ e condizione di inflow $c(0,t) = 2$ per $t \geq 0$. Come nel punto precedente, $\gamma = 0.7$ e $a = 1/2$.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial c}{\partial t} + a\dfrac{\partial c}{\partial x} = -\gamma c \\ \\ c(x,0) = 0 & x > 0 \\ \\ c(0,t) = 2 & t \geq 0 \end{cases}$$

Troviamo le curve caratteristiche e la soluzione con il metodo delle caratteristiche. Abbiamo che:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = a \\ \\ \dot{c} = -\gamma c \end{cases} \implies \begin{cases} \int_{x_0}^{x} \mathrm{d}x = \int_0^t a \, \mathrm{d}t \\ \\ \int_{c_0}^{c} \mathrm{d} \ln c = \int_0^t -\gamma \, \mathrm{d}t \end{cases} \implies \begin{cases} x = x_0 + at \\ \\ c = c_0 e^{-\gamma t} \end{cases}$$

Concludiamo che

$$c(x,t) = \begin{cases} 2e^{-\gamma t} & x > at \\ \\ 0 & x < at \end{cases}$$

Nel caso in cui $\gamma = 0.7$ e $a = 1/2$, la soluzione esatta è:

$$c(x,t) = \begin{cases} 2e^{-0.7t} & 2x > t \\ \\ 0 & 2x < t \end{cases}$$

Le curve caratteristiche sono $x = x_0 + at$ e sono parallele. Osserviamo che lungo ciascuna curva caratteristica la soluzione è zero. Osserviamo anche che per $a < 0$ non esiste la soluzione. In Matlab tracciamo i grafici delle curve caratteristiche nel piano (x,t) e della soluzione stessa in assi $(x, t, c(x,t))$ per $x \geq 0$ (`conservazione.m`).

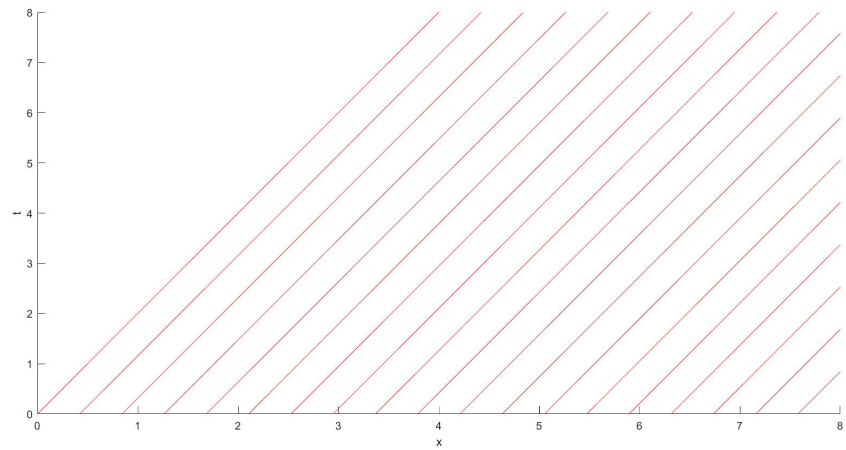

Figura 3: Grafico delle curve caratteristiche nel piano (x, t)

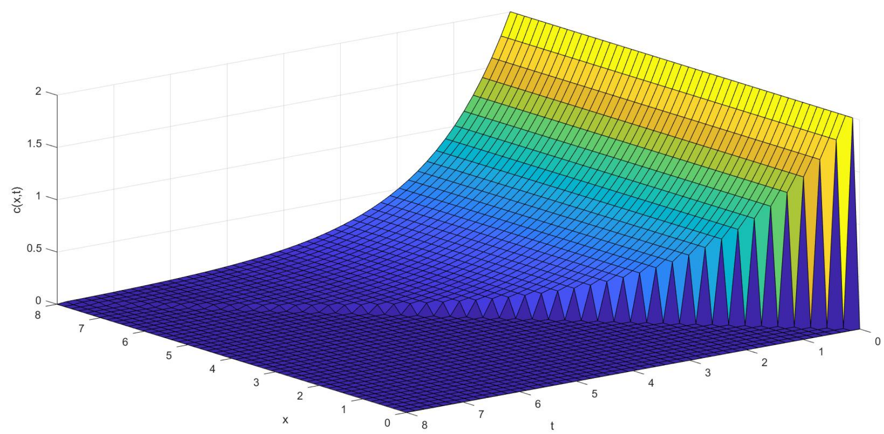

Figura 4: Grafico della soluzione in assi $(x, t, c(x, t))$

Consideriamo ora, per $x \in \mathbb{R}$, il problema:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial c}{\partial t} + c\dfrac{\partial c}{\partial x} = 0 \\ \\ c(x,0) = g(x) \end{cases}$$

con $g(x)$ così definito:

$$g(x) = \begin{cases} 0 & x < -1 \\ 2(1+x) & x \in [-1, -\frac{1}{2}] \\ 1 & x \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \\ 2(1-x) & x \in [\frac{1}{2}, 1] \\ 0 & x > 1 \end{cases}$$

Dobbiamo trovare e disegnare le linee caratteristiche del problema.

$$\begin{cases} \dfrac{dc}{dt} = \dfrac{\partial c}{\partial t} + \dfrac{\partial c}{\partial x} \cdot \dfrac{dx}{dt} = 0 \\ \\ \dfrac{\partial c}{\partial t} + c \cdot \dfrac{\partial c}{\partial x} = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} \dfrac{\partial c}{\partial x}\left(\dfrac{dx}{dt} - c(x,t)\right) = 0 \\ \\ \dfrac{\partial c}{\partial t} + c \cdot \dfrac{\partial c}{\partial x} = 0 \end{cases}$$

Poiché $\dfrac{\partial c}{\partial x} \neq 0 \implies \dfrac{dx}{dt} = c(x,t)$. Allora:

$$\frac{dx}{dt} = c(x,t) = g(x_0) \implies \frac{dx}{g(x_0)} = dt \implies \int_{x_0}^{x} \frac{1}{g(x_0)} \mathrm{d}x = \int_0^t \mathrm{d}t$$

Quindi le linee caratteristiche sono

$$x = x_0 + g(x_0)t$$

Osserviamo che le linee caratteristiche sono con pendenza $g(x_0)$. In Matlab tracciamo il grafico delle linee caratteristiche nel piano (x,t) (`burgers.m`).

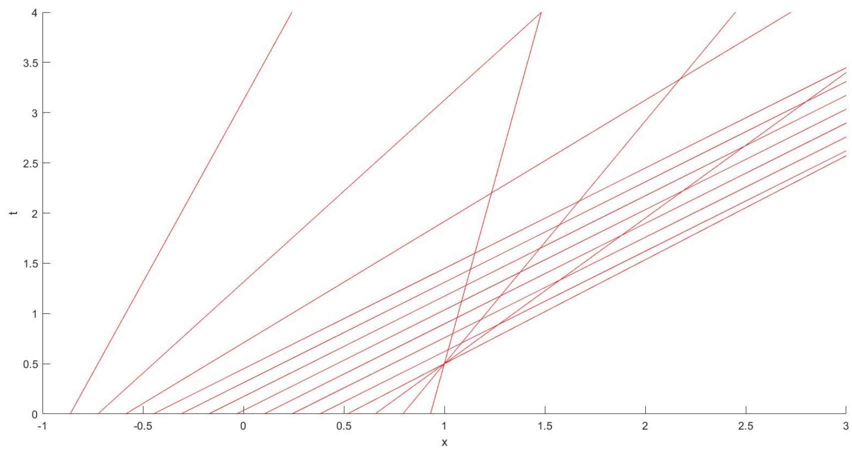

Figura 5: Grafico delle curve caratteristiche nel piano (x, t)

Codici Matlab

Codici del primo esercizio

```
% Calcolo Scientifico
% Terzo Progetto
% Primo Esercizio
% Soluzione del problema con il metodo delle differenze
    finite centrate in
% spazio ed Eulero Esplicito per il tempo

clear all, close all

h=0.05; % passo di mesh spaziale
L=1; % x finale
x=0:h:L; % disretizzo lo spazio
nX=numel(x); % numero di nodi di mesh spaziali
T=1; % tempo finale

dtcr=(5/26)*h^2; % condizione di stabilita globale
dt=0.8*dtcr; % delta t

% condizione iniziale u(x,0)
u0=@(x)(1+sin(pi*x))';

[tE,uE]=EEtempo(@DFCspazio,[0 L],u0(x(2:end-1)),L,nX,dt
    ,h,@bcfun);

u=zeros(nX,numel(tE));
u(2:nX-1,:)=uE;

% condizioni al bordo
% u(0,t)=u(1,t)=1
for i=1:numel(tE)
    u(1,i)=bcfun(tE(i),0,L);
    u(nX,i)=bcfun(tE(i),L,L);
```

```
end

figure, plot(x,u(:,10))
xlabel('x')
ylabel('u(x,t)')
```

Funzione per parte spaziale

```
% Calcolo Scientifico
% Terzo Progetto
% Primo esercizio
% Funzione per il metodo delle differenze finite centrate in spazio

function F=DFCspazio(t,u,L,nX,h,bcfun)

    nodi=nX-2; % numero di nodi interni
    F=zeros(nodi,1);

    x=0:h:L; % passo di mesh
    alpha=@(u)3-2/(1+u^2);
    for j=2:nodi-1
        F(j)=(1/h^2)*(alpha((u(j)+u(j+1))/2)*(u(j+1)-u(j))-alpha((u(j)+u(j-1))/2)*(u(j)-u(j-1)));
    end

    F(1)=(1/h^2)*(alpha((u(1)+u(2))/2)*(u(2)-u(1))-alpha((u(1)+bcfun(t,0,L))/2)*(u(1)-bcfun(t,0,L)));
    F(nodi)=(1/h^2)*(alpha((u(nodi)+bcfun(t,L,L))/2)*(bcfun(t,L,L)-u(nodi))-alpha((u(nodi)+u(nodi-1))/2)*(u(nodi)-u(nodi-1)));

return
```

Funzione per parte temporale

```
% Calcolo Scientifico
% Terzo Progetto
% Primo Esercizio
```

```
% Funzione Eulero Esplicito per parte temporale

function [t,u]=EEtempo(odefun,tspan,u0,L,nX,dt,h,bcfun)

    Nh=ceil((tspan(2)-tspan(1))/dt); % numero di passi
        temporali
    tt=linspace(tspan(1),tspan(2),Nh+1);

    % condizione iniziale
    u(:,1)=u0;

    for t=tt(1:end-1)
        u=[u, u(:,end)+dt*odefun(t,u(:,end),L,nX,h,
            bcfun)];
    end

    t=tt;

return
```

Funzione per condizioni al bordo

```
% Calcolo Scientifico
% Terzo Progetto
% Primo Esercizio
% Funzione per condizioni al bordo

function val=bcfun(t,xB,L)

    if(xB==0)
        val=1;
    else
        val=1;
    end

return
```

Codici del secondo esercizio

Primo punto

```
% Calcolo Scientifico
% Terzo Progetto
% Secondo Esercizio
% Legge di Trasporto

clear all, close all

xmin=-2; xmax=2;
x=linspace(xmin,xmax,20);
a=1/2; % velocita' di propogazione del onda
gamma=0.7;
g=@(x)exp((x-a).^2).*exp((gamma/a).*x); % condizione iniziale

% grafico di condizione iniziale
figure(1), plot(x,g(x)), hold off

% grafico delle linee caratteristiche
figure(2), hold on

x0=x;
for i=x0
    t=(x-i)/a;
    plot(x,t,'r');
end
xlabel('x');
ylabel('t');
axis([xmin xmax 0 1]) %, axis equal
hold off

% grafico della soluzione 3D
x=linspace(xmin,xmax,30);
t=linspace(0,1,30);

for it=1:numel(t)
    for ix=1:numel(x)
        x0=x(ix)-a*t(it); % piede della caratteristica per (x(ix),t(it))
```

```
        u(ix,it)=g(x0); % propagazione della condizione iniziale lungo la caratteristica
        c(ix,it)= u(ix,it)*exp(-(gamma/a).*x0);
    end
end

% grafico della soluzione in assi (x,t,u(x,t))
figure(3), [XX,TT]=meshgrid(x,t);
surf(XX,TT,u');
axis([xmin xmax 0 1 0 150]);
xlabel('x');
ylabel('t');
zlabel('u(x,t)');

% grafico della soluzione in assi (x,t,c(x,t))
figure(4), [XX,TT]=meshgrid(x,t);
surf(XX,TT,c');
axis([xmin xmax 0 1 0 150]);
xlabel('x');
ylabel('t');
zlabel('c(x,t)');
```

Secondo punto

```
% Calcolo Scientifico
% Terzo Progetto
% Secondo Esercizio
% Secondo Punto
% Legge di Conservazione

clear all, close all

xmin=0; xmax=8;
x=linspace(xmin,xmax,20);
a=1/2; % velocita' di propogazione del onda
gamma=0.7;
g=@(x)x*0; % condizione iniziale c(x,0)

% grafico delle linee caratteristiche
```

```
figure(1), hold on

x0=x;
for i=x0
    t=(x-i)/a;
    plot(x,t,'r');
end
xlabel('x');
ylabel('t');
axis([xmin xmax 0 8]) %, axis equal
hold off

% grafico della soluzione 3D
x=linspace(xmin,xmax,50);
t=linspace(0,8,50);

for it=1:numel(t)
    for ix=1:numel(x)
        x0=x(ix)-a*t(it); % piede della caratteristica per (x(ix),t(it))
        t0=(x(ix)-x0)/a;
        %c(ix,it)=2*exp(-gamma*t0);
        c(ix,it)=2*exp(-gamma*t0)*(x0>a*t0)+0*(x0<a*t0);
    end
end

% grafico della soluzione in assi (x,t,c(x,t))
figure(2), [XX,TT]=meshgrid(x,t);
surf(XX,TT,c');
xlabel('x');
ylabel('t');
zlabel('c(x,t)');
```

Terzo punto

```
% Calcolo Scientifico
% Terzo Progetto
% Secondo Esercizio
```

```
% Terzo Punto
% Equazione di Burgers

clear all, close all

xmin=-1; xmax=3;
x=linspace(xmin,xmax,30);

% condizione iniziale c(x,0)=g(x)
g=@(x) 0*(x<-1)+2*(x+1)*(x>=-1 && x<=-1/2)+1*(x>-1/2 && x<1/2)+2*(-x+1)*(x>=1/2 && x<=1)+0*(x>1);

% disegno le linee caratteristiche
figure, axis([xmin xmax 0 4]), hold on
x0=x;
for i=1:numel(x0)
    plot(x,(x-x0(i))/g(x0(i)),'r');
end
xlabel('x')
ylabel('t')
hold off
```