

# Lineare Algebra 2 Skript

Felix Zillinger

2. Semester

## Inhaltsverzeichnis

<b>7</b>	<b>Euklidische und Unitäre Vektorräume</b>	<b>2</b>
7.7	Spezielle Endomorphismen . . . . .	2
7.8	Der Spektralsatz für normale Endomorphismen . . . . .	5
7.9	Orthogonale und unitäre Abbildungen . . . . .	9
<b>8</b>	<b>Miscellanea</b>	<b>13</b>
8.1	Quotientenraum . . . . .	13
8.2	Interne direkte Summe . . . . .	14
8.3	(Externe) direkte Summe und direktes Produkt . . . . .	15
8.4	Der Dualraum . . . . .	17
8.5	Duale Abbildungen . . . . .	20
8.6	Das Tensorprodukt . . . . .	23

# Einleitung

Dieses Skript ist eine Weiterführung des Skripts von Lineare Algebra I. Das erste Kapitel ist eine Weiterführung des Kapitels über euklidische und unitäre Vektorräume.

## 7 Euklidische und Unitäre Vektorräume

### 7.7 Spezielle Endomorphismen

Dieser Abschnitt hat einen vorbereitenden Character. Wir untersuchen hier eine Reihe von Klassen von Endomorphismen mit zusätzlichen Eigenschaften.

Ein Ziel wird es sein, den Spektralsatz für selbstadjungierte Endomorphismen auf seine essentialen Voraussetzungen zu untersuchen und zu verallgemeinern.

Im gesamten Abschnitt seien  $V, W$  euklidische oder unitäre Vektorräume über  $\mathbb{K} (= \mathbb{R}; \mathbb{C})$ .

**Definition 7.7.1.** Sei  $T \in \mathcal{L}(V) := \text{End}_{\mathbb{K}}(V)$ .  $T$  heißt

- **normal**, falls  $T^* \cdot T = T \cdot T^*$
- **unitär**, falls  $T^* \cdot T = T \cdot T^* = Id_V$
- **selbstadjungiert**, falls  $T^* = T$
- **(Orthogonal)Projektion**, falls  $T = T^* = T^2$

*Bemerkung.* • In Punkt 1 und 2 ist die Existenz von  $T^*$  Teil der Voraussetzung.

- In Punkt 2-4 sind die Endomorphismen bereits normal.
- Ist  $\dim(V) < \infty$ , so folgt aus  $T^* \cdot T = Id_V$  (bzw.  $T \cdot T^* = Id_V$ ) bereits, dass  $T$  unitär ist.

**Lemma 7.7.2.**  $T$  normal  $\Leftrightarrow T^*$  existiert und  $\forall_{x \in V} \|Tx\| = \|T^*x\|$ .

*Bemerkung.* Es folgt dann schon  $\forall_{x, y \in V} \langle Tx, Ty \rangle = \langle T^*x, T^*y \rangle$

*Beweis.*  $\Rightarrow$ : Ist  $T$  normal, so folgt für  $x \in V$ :

$$\begin{aligned} \|Tx\|^2 &= \langle Tx, Tx \rangle = \langle T^*Tx, x \rangle \\ &= \langle TT^*x, x \rangle = \langle T^*x, T^*x \rangle \\ &= \|T^*x\|^2 \end{aligned} \tag{7.7.1}$$

$\Leftarrow$ : Umgekehrt gelte Gleichung (7.1.1) für  $x \in V$ . Dann liefert die Polarisierungsidentität (Satz 7.1.6 in LA I) (exemplarisch für  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ):

$$\begin{aligned} \langle Tx, Ty \rangle &= \frac{1}{4} \sum_{k=0}^3 i^k \langle T(y + i^k x), T(y + i^k x) \rangle \\ &= \frac{1}{4} \sum_{k=0}^3 i^k \langle T^*(y + i^k x), T^*(y + i^k x) \rangle \\ &= \langle T^*x, T^*y \rangle \end{aligned} \tag{7.7.2}$$

und somit

$$\langle T^*Tx, y \rangle = \langle Tx, Ty \rangle = \langle T^*x, T^*y \rangle = \langle TT^*x, y \rangle \tag{7.7.3}$$

Aus der positiven Definitheit des Skalarprodukts folgt das Lemma.  $\square$

Wegen ihrer Wichtigkeit stellen wir die folgende Aussage nochmal heraus:

**Lemma 7.7.3.** Für  $x, y \in V$  gilt:

$$x = y \Leftrightarrow \forall_{z \in V} \langle x, z \rangle = \langle y, z \rangle \quad (7.7.4)$$

*Beweis.*  $\Rightarrow$ : klar.

$\Leftarrow$ : Es folgt

$$\forall_{z \in V} \langle x - y, z \rangle = 0 \quad (7.7.5)$$

Insbesondere mit  $z = x - y$  auch  $\|x - y\|^2 = 0$ , also  $x = y$ .  $\square$

**Übung.** Sei  $T \in \mathcal{L}(V)$ . Falls  $T = T^*$  und  $\forall_{x \in V} \langle Tx, x \rangle = 0$ , so ist  $T = 0$ .

Im Fall  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  kann auf die Voraussetzung  $T = T^*$  verzichtet werden, im Falle  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  jedoch nicht.

**Satz 7.7.4.** Sei  $T \in \mathcal{L}(V)$  normal. Dann gilt:

(i)  $\ker T = \ker T^*$

(ii) Mit  $T$  ist auch  $T - \lambda \cdot \text{Id}_V$  normal für  $\lambda \in \mathbb{K}$ . Es gilt  $\ker(T - \lambda \cdot \text{Id}_V) = \ker(T^* - \lambda \cdot \text{Id}_V)$ . Insbesondere haben  $T$  und  $T^*$  dieselben Eigenwerte mit gleichen Vielfachheiten.

(iii) Sind  $\lambda \neq \mu$  verschiedene Eigenwerte von  $T$ , so stehen die entsprechenden Eigenräume senkrecht:  $\ker(T - \lambda \cdot \text{Id}_V) \perp \ker(T - \mu \cdot \text{Id}_V)$ .

*Beweis.* (i) 1 folgt unmittelbar aus Lemma 7.1.2 :

$$x \in \ker T \Rightarrow Tx = 0 \Rightarrow 0 = \|Tx\| = \|T^*x\|, \text{ also } x \in \ker T^*$$

(ii)

$$\begin{aligned} (T - \lambda)^*(T - \lambda) &= T^*T - \bar{\lambda}\text{Id}_V - \lambda\text{Id}_V + |\lambda|^2\text{Id}_V \\ &= TT^* - \bar{\lambda}\text{Id}_V - \lambda\text{Id}_V + |\lambda|^2\text{Id}_V \\ &= (T - \lambda)(T^* - \lambda) \end{aligned} \quad (7.7.6)$$

Die restlichen Behauptungen folgen nun aus (i).

(iii) Sei  $Tx = \lambda x$ ,  $Ty = \mu y$ . Mit (ii) folgt:

$$\begin{aligned} \lambda \langle x, y \rangle &= \langle \bar{\lambda}x, y \rangle = \langle T^*x, y \rangle \\ &= \langle x, Ty \rangle = \langle x, \mu y \rangle \\ &= \langle x, y \rangle \cdot \mu \end{aligned} \quad (7.7.7)$$

also

$$(\lambda - \mu) \langle x, y \rangle = 0 \Rightarrow \langle x, y \rangle = 0 \quad (7.7.8)$$

$\square$

**Satz 7.7.5.** Für  $U \in \mathcal{L}(V)$  sind äquivalent :

(i)  $\forall_{x, y \in V} \langle Ux, Uy \rangle = \langle x, y \rangle$

(ii)  $\forall_{x \in V} \|Ux\| = \|x\|$

(iii) Ist  $\{e_1, \dots, e_n\}$  ein Orthogonalsystem, so ist auch  $\{Ue_1, \dots, Ue_n\}$  ein Orthogonalsystem.

*Bemerkung.* Ist  $U$  unitär, so gelten (i)-(iii). Ist  $\dim(V) < \infty$ , so implizieren (i), (ii) oder (iii) auch, dass  $U$  unitär ist.

*Beweis.* (i)  $\Rightarrow$  (iii):

$$\langle Ue_i, Ue_j \rangle \stackrel{(i)}{=} \langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij} \quad (7.7.9)$$

(iii)  $\Rightarrow$  (ii):

Klar.

(ii)  $\Rightarrow$  (i):

Folgt aus der Polarisierungsformel. □

**Korollar 7.7.6.** Die Menge der unitären Endomorphismen eines Vektorraums mit Skalarprodukt bilden bzgl. der Komposition eine Gruppe.

*Beweis.* Man muss nur noch bemerken, dass für adjungierbare  $T_1, T_2 \in \mathcal{L}(V)$  gilt:

$T_1 \circ T_2$  ist adjungierbar und  $(T_1 \circ T_2)^* = T_2^* \circ T_1^*$ .

Sind  $T_1, T_2$  unitär, so folgt :

$$(T_1 \cdot T_2)^* T_1 T_2 = T_2^* (T_1^* T_1) T_2 = T_2^* T_2 = Id_V \quad (7.7.10)$$

Beweis der Bemerkung:

Ist  $U$  unitär, so folgt für  $x, y \in V$ :

$$\langle Ux, Uy \rangle = \langle U^* Ux, y \rangle = \langle x, y \rangle \quad (7.7.11)$$

Ist  $\dim(V) < \infty$  und gelte für  $U \in \mathcal{L}(V)$  die äquivalenten Aussagen (i), (ii), (iii), so liefert Satz 7.4.2 die Existenz von  $U^*$  und somit (i). □

Unitarität lässt sich in Koordinaten sehr leicht testen:

**Satz 7.7.7.** Sei  $V$  ein endlich-dimensionaler Vektorraum mit Skalarprodukt.

Dann ist  $T \in \mathcal{L}(V)$  genau dann normal (unitär), wenn bzgl. einer Orthonormalbasis  $B = \{e_1, \dots, e_n\}$  die Matrix  $M_B(T)$  diese Eigenschaft hat.

*Beweis.* Der Satz folgt unmittelbar aus Satz 4.2. Für Orthonormalbasen gilt:

$$M_B(T)^* = M_B(T^*) \quad (7.7.12)$$

Wobei  $M_B(T)^*$  die Matrixadjunktion bezeichnet. □

## 7.8 Der Spektralsatz für normale Endomorphismen

*Bemerkung.* Der komplexe Fall ist hier wesentlich einfacher als der reelle Fall.

**Satz 7.8.1.** (Spektralsatz für normale Endomorphismen,  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ) Sei  $V$  ein unitärer Vektorraum,  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ,  $\dim V = n < \infty$ . Dann ist  $T \in \mathcal{L}(V)$  genau dann normal, wenn es zu  $T$  eine Orthonormalbasis von  $V$  gibt, welche nur aus Eigenvektoren von  $T$  besteht.

*Beweis.* (Analog zum Beweis von Satz 5.3)

Wir beginnen mit der einfacheren Implikation:

Sei  $B = \{e_1, \dots, e_n\}$  eine Orthonormalbasis von  $V$  mit  $Te_j = \lambda_j e_j$ . Das heißt:

$$M_B(T) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} \quad (7.8.1)$$

Nach Satz 4.2 ist

$$M_B(T^*) = M_B(T)^* = \begin{pmatrix} \bar{\lambda}_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \bar{\lambda}_n \end{pmatrix} \quad (7.8.2)$$

das heißt also  $T^*e_j = \bar{\lambda}_j e_j$  und folglich

$$M_B(T^*T) = \begin{pmatrix} |\lambda_1|^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & |\lambda_n|^2 \end{pmatrix} = M_B(TT^*) \quad (7.8.3)$$

folglich ist  $TT^* = T^*T$ , d.h.  $T$  ist normal.

Umgekehrt sei  $T$  normal:

Da  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ , existiert zu  $T$  ein normierter Eigenvektor  $e_1$  mit  $\|e_1\| = 1$ ,  $Te_1 = \lambda_1 e_1$  und da  $T$  normal ist, gilt  $T^*e_1 = \bar{\lambda}_1 e_1$ .

Wir führen nun eine Induktion nach  $n = \dim V$  und nehmen an, die Behauptung gelte für alle Dimensionen  $< n$ :

$U = \langle e_1 \rangle^\perp \subset V$  ist ein unitärer Vektorraum der Dimension  $n - 1$ .

Wir zeigen:

**Behauptung 1.**  $T|_U \in \text{End}_{\mathbb{C}}(U)$  ist normal.

Die Induktionsvoraussetzung liefert die Existenz einer Orthonormalbasis  $\{e_2, \dots, e_n\}$  von  $U$  mit  $Te_j = \lambda_j e_j$ .  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  ist dann die gewünschte Basis.

Es bleibt Behauptung 1 zu zeigen:

Sei  $x \in U$ . Dann ist

$$\langle Tx, e_1 \rangle = \langle x, T^*e_1 \rangle = \bar{\lambda}_1 \langle x, e_1 \rangle = 0 \quad (7.8.4)$$

also  $T(U) \subset U$ . Analog sieht man  $T^*(U) \subset U$ .

Dann folgt aber  $(T|_U)^* = T^*|_U$  und daher

$$(T|_U)^* T|_U = T^* T|_U = TT^*|_U = T|_U (T|_U)^* \quad (7.8.5)$$

□

### Die Komplexifizierung eines reellen Vektorraumes

Der reelle Fall bedarf einiger Vorbereitung. Zur Motivation betrachten wir den  $V_{\mathbb{C}} = \mathbb{C}^n$  mit dem Skalarprodukt

$$\langle z, w \rangle = \sum_{j=1}^n \bar{z}_j w_j \quad (7.8.6)$$

$V_{\mathbb{C}}$  ist gleichzeitig ein reeller Vektorraum, indem man die Zerlegung in Real- und Imaginärteil komponentenweise vornimmt:

- (i) Jedes  $z \in \mathbb{C}^n$  besitzt eine eindeutige Zerlegung  $z = x + iy$  mit  $x, y \in \mathbb{R}^n$ . Offenbar ist  $V = \mathbb{R}^n$  ein  $\mathbb{R}$ -Vektorraum.
- (ii) Es gibt eine antilineare Involution  $\bar{\cdot} : V_{\mathbb{C}} \rightarrow V_{\mathbb{C}}$  mit  $V = \{z \in V_{\mathbb{C}} \mid \bar{\bar{z}} = z\}$  (klar:  $\bar{\cdot}$  ist die komplexe Konjugation).
- (iii) Ist  $T \in \text{End}_{\mathbb{R}}$ , so besitzt  $T$  eine eindeutige Fortsetzung  $\hat{T} \in \text{End}_{\mathbb{C}}(V_{\mathbb{C}})$  (klar: dies ist die gleiche Matrix).  
Es gilt, da  $M_B(T)$  reell ist  $\overline{\hat{T}(z)} = \hat{T}(\bar{z})$ .
- (iv) Es gibt genau ein hermitesches Skalarprodukt auf  $V_{\mathbb{C}}$ , welches das (Standard)skalarprodukt fortsetzt (klar: dies ist das Standardskalarprodukt auf  $\mathbb{C}^n$ , Eindeutigkeit: Übung)

**Achtung!** Für  $z = x + iy$ ,  $\tilde{z} = \tilde{x} + i\tilde{y} \in \mathbb{C}^n$  ist

$$\begin{aligned} \langle z, \tilde{z} \rangle &= \sum_{j=1}^n \bar{z}_j \tilde{z}_j \\ &= \sum_{j=1}^n (x_j \tilde{x}_j + y_j \tilde{y}_j) + i(-y_j \tilde{x}_j + x_j \tilde{y}_j) \\ &= (\langle x, \tilde{x} \rangle_{\mathbb{R}^n} + \langle y, \tilde{y} \rangle_{\mathbb{R}^n}) + i(-\langle y, \tilde{x} \rangle_{\mathbb{R}^n} + \langle x, \tilde{y} \rangle_{\mathbb{R}^n}) \end{aligned} \quad (7.8.7)$$

- (v) Ist  $T \in \text{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n)$  normal, so ist auch  $\hat{T} \in \text{End}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^n)$  normal.

Die hier gemachten Bemerkungen sind nicht auf den  $\mathbb{C}^n / \mathbb{R}^n$  begrenzt. Allgemein gilt:

**Satz 7.8.2.** Sei  $V$  ein euklidischer Vektorraum (Vektorraum mit Skalarprodukt über  $\mathbb{R}$ ). Dann existiert ein komplexer Vektorraum  $V_{\mathbb{C}}$ , so dass (i)-(v) gelten. (Details: Übung)

Nach dieser Vorbereitung können wir den Spektralsatz für normale Endomorphismen über  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  formulieren.

**Satz 7.8.3.** (Spektralsatz für normale Endomorphismen,  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ) Sei  $V$  ein euklidischer Vektorraum. Dann ist  $T \in \mathcal{L}(V)$  genau dann normal, wenn es für  $T$  eine Orthonormalbasis  $B$  von  $V$  gibt, bzgl. der  $M_B(T)$  die Gestalt

$$M_B(T) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_r & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \mathcal{Q}_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \mathcal{Q}_r \end{pmatrix} \quad (7.8.8)$$

Dabei sind  $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{R}$  die reellen Eigenwerte von  $T$ . Jedes  $\mathcal{Q}_j \in M(2, \mathbb{R})$  ist von der Gestalt

$$\mathcal{Q}_j = \begin{pmatrix} \alpha_j & \beta_j \\ -\beta_j & \alpha_j \end{pmatrix} \quad (7.8.9)$$

Dabei sind  $\mu_j = \alpha_j + i\beta_j$  genau die komplexen Eigenwerte von  $\hat{T}$  (=komplexe Nullstellen des charakteristischen Polynoms von  $T$ ).

*Beweis.* Wir orientieren uns am Beweis von Satz 7.8.1 mit entsprechenden Modifikationen. Zunächst nehmen wir an, dass  $M_B(T)$  obige Gestalt hat. Dann ist wiederum nach Satz 7.4.2

$$M_B(T^*) = \begin{pmatrix} \bar{\lambda}_1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \bar{\lambda}_r & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \mathcal{Q}_1^* & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \mathcal{Q}_r^* \end{pmatrix} \quad (7.8.10)$$

also gilt

$$M_B(T^*T) = \begin{pmatrix} |\lambda_1|^2 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & |\lambda_r|^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \mathcal{Q}_1^* \mathcal{Q}_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \mathcal{Q}_r^* \mathcal{Q}_r \end{pmatrix} \quad (7.8.11)$$

Wenn man sich eines der Kästchen anschaut sieht man

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_j^* \mathcal{Q}_j &= \begin{pmatrix} \alpha_j & -\beta_j \\ \beta_j & \alpha_j \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_j & \beta_j \\ -\beta_j & \alpha_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_j^2 + \beta_j^2 & 0 \\ 0 & \alpha_j^2 + \beta_j^2 \end{pmatrix} \\ &= \mathcal{Q}_j \mathcal{Q}_j^* \end{aligned} \quad (7.8.12)$$

Folglich gilt

$$M_B(T^*T) = M_B(TT^*) \quad (7.8.13)$$

also ist  $T$  normal.

Wir berechnen das charakteristische Polynom zunächst für  $\mathcal{Q}_j$ :

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} X - \alpha_j & \beta_j \\ -\beta_j & X - \alpha_j \end{pmatrix} &= X^2 - 2\alpha_j X + \alpha_j^2 + \beta_j^2 \\ &= X^2 - 2\operatorname{Re}(\mu_j)X + |\mu_j|^2, \quad \mu_j := \alpha_j + i\beta_j \\ &= (X - \mu_j)(X - \bar{\mu}_j) \end{aligned} \quad (7.8.14)$$

Das heißt das charakteristische Polynom von  $T$  ist gegeben durch

$$\chi_T(X) = \prod_{j=1}^r (X - \lambda_j) \prod_{j=1}^s (X - \mu_j)(X - \bar{\mu}_j) \quad (7.8.15)$$

Dies beendet den Beweis der Richtung  $\Leftarrow$ .

Zum Beweis der Umkehrung wenden wir Induktion über  $n = \dim(V)$ . Für  $n = 1$  ist jeder Endomorphismus normal und schon in Diagonalgestalt, es ist also nichts zu zeigen.

Die Behauptung sei bewiesen für Dimensionen  $< n$  und sei nun  $n = \dim V$  und  $T \in \text{End}_{\mathbb{R}}(V)$  normal gegeben. Dann gibt es die folgenden zwei Fälle:

- **1. Fall:**  $T$  besitzt einen reellen Eigenwert.

Dann erfolgt der Beweis wie in Satz 7.8.1. Man nehme einen Eigenvektor  $e_1$ ,  $\|e_1\| = 1$ ,  $Te_1 = \lambda_1 e_1$ ,  $\lambda_1 \in \mathbb{R}$  und wendet die Induktionsvoraussetzung auf den normalen Endomorphismus  $T|_{\langle e_1 \rangle^\perp}$  an.

- **2. Fall:**  $T$  besitzt keinen reellen Eigenwert.

Nun betrachten wir  $\hat{T} \in \text{End}_{\mathbb{C}}(V_{\mathbb{C}})$  (Satz 7.8.2).  $\hat{T}$  ist normal mit gleichem charakteristischem Polynom wie  $T$  (Übung). Sei also  $\mu = \alpha + i\beta$ ,  $\beta \neq 0$  ein komplexer Eigenwert von  $\hat{T}$  mit normiertem Eigenvektor  $\xi \in V_{\mathbb{C}}$ . Es ist nach Satz 7.8.2

$$\hat{T}(\bar{\xi}) = \overline{\hat{T}(\xi)} = \overline{\mu \cdot \xi} = \bar{\mu} \cdot \bar{\xi} \quad (7.8.16)$$

und da  $\mu \neq \bar{\mu}$  und  $\hat{T}$  normal ist, folgt aus Satz 7.7.4, dass  $\xi \perp \bar{\xi}$ , also mit

$$\begin{aligned} \xi &= \zeta + i\eta \\ \zeta &:= \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi + \bar{\xi}) \\ \eta &:= \frac{1}{\sqrt{2}i}(\xi - \bar{\xi}) \in V \\ \|\zeta\|^2 &= \frac{1}{2}(\|\xi\|^2 + \|\bar{\xi}\|^2) = 1 \\ \|\eta\|^2 &= 1 \text{ analog} \\ \langle \zeta, \eta \rangle &= \frac{1}{2i} \langle \xi + \bar{\xi}, \xi - \bar{\xi} \rangle \\ &= \frac{1}{2i}(\|\xi\|^2 - \|\bar{\xi}\|^2) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (7.8.17)$$

Übung:  $\|\xi\| = \|\bar{\xi}\|$ .

Das heißt, die Vektoren  $\zeta, \eta \in V$  sind orthonormal und spannen einen 2-dimensionalen Unterraum von  $V$  auf.



Bezüglich der Basis  $\langle \zeta, \eta \rangle$  dieses Unterraums hat  $T$  die Matrix

$$\begin{aligned}
 T\zeta &= \hat{T} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} (\xi + \bar{\xi}) \right) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}} ((\alpha + i\beta)\xi + (\alpha - i\beta)\bar{\xi}) \\
 &= \alpha\zeta - \beta\eta \\
 T\eta &= \hat{T} \left( \frac{1}{\sqrt{2}i} (\xi - \bar{\xi}) \right) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}i} ((\alpha + i\beta)\xi - (\alpha - i\beta)\bar{\xi}) \\
 &= \alpha\eta + \beta\zeta \\
 \text{also gilt} \\
 M_{\langle \zeta, \eta \rangle}(T) &= \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{7.8.18}$$

Da  $T$  normal ist, sieht man nun wie im Beweis von Satz 7.8.1, dass  $T$  auch den Unterraum  $U = \langle \zeta, \eta \rangle^\perp$  invariant lässt und  $T|_U$  ebenfalls normal ist. Nun wendet man die Induktionsvoraussetzung auf  $U$  an und ist fertig

□

## 7.9 Orthogonale und unitäre Abbildungen

Wie immer seien  $V, W, \dots \mathbb{K}$ -Vektorräume mit Skalarprodukt.

**Definition 7.9.1.**  $U \in \text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$  heißt **Isometrie**, falls  $\|Ux\| = \|x\| \ \forall x \in V$ . Ist zusätzlich  $U$  surjektiv, so nennt man  $U$  unitär.

*Bemerkung.* (i) Der Unterschied zu Abschnitt 7 ist, dass  $U$  a priori zwischen verschiedenen Vektorräumen abbildet. Wir sehen gleich, dass Definition 7.9.1 mit dem Unitaritätsbegriff aus Abschnitt 7 konsistent ist.

(ii) Die Terminologie weicht hier von Kowalsky ab. Dort wird  $U$  schon unitär genannt, wenn es isometrisch ist. Hier wird es anders gemacht, da klar zwischen den Begriffen Isometrie und Isomorphismus klar unterschieden werden sollte und der Begriff unitär den Isomorphismen von Vektorräumen mit Skalarprodukt vorbehalten werden sollte.

(iii) Ist der Grundkörper  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ , so spricht man auch von Orthogonalen Abbildungen.

(iv) Aus Def. 9.1 folgt unmittelbar, dass Isometrien injektiv sind.

(v) Für Isometrien gilt die Äquivalenz  $(i) \Leftrightarrow (ii) \Leftrightarrow (iii)$  des Satzes 7.7.5.

**Satz 7.9.2.** Ist  $U \in \text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$  unitär im Sinne von Definition 7.9.1, so ist  $U$  bijektiv,  $U^*$  existiert und ist gleich  $U^{-1}$  und es gelten  $U^*U = Id_V, UU^* = Id_W$ .

Folglich ist Definition 7.9.1 mit Definition 7.1.2 konsistent.

*Beweis.* Die Bijektivität folgt aus der Definition. Wie oben bemerkt, gelte (i)-(iii) aus Satz 7.7.5. Also gilt für  $x \in V, y \in W$

$$\langle Ux, y \rangle = \langle Ux, U(U^{-1}y) \rangle = \langle x, U^{-1}y \rangle \tag{7.9.1}$$

somit gilt  $U^{-1} = U^*$

□

**Satz 7.9.3.** Sei  $U \in \text{End}_{\mathbb{K}}(V)$  unitär. Dann ist  $U$  normal und sämtliche komplexe Eigenwerte haben den Betrag 1.

Sei umgekehrt  $\dim V < \infty$  und  $T \in \text{End}_{\mathbb{K}}(V)$  normal mit sämtlichen komplexen Eigenwerten von Betrag 1, so ist  $T$  schon unitär.

*Beweis.*  $\Rightarrow$ :

Sei  $U$  unitär. Dann ist  $U^*U = Id = UU^*$ , also ist  $U$  normal. Ist  $Ux = \lambda x, x \neq 0$  ein Eigenvektor mit Eigenwert  $\lambda$ , so folgt

$$0 \neq \|x\| = \|Ux\| = \|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\| \quad (7.9.2)$$

also  $|\lambda| = 1$ .

$\Leftarrow$ :

Sei nun  $T \in \text{End}_{\mathbb{K}}(V)$  normal mit  $\dim V < \infty$ , so dass alle Eigenwerte Betrag 1 haben.

Ist  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ , so gehen wir zu  $\hat{T} \in \text{End}_{\mathbb{C}}(V_{\mathbb{C}})$  über. Die Eigenwerte von  $\hat{T}$  sind sämtliche komplexe Eigenwerte von  $T$ , also von Betrag 1. Nach Satz 7.8.1 existiert eine Orthonormalbasis  $B$  mit

$$M_B(\hat{T}) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} \quad (7.9.3)$$

folglich gilt

$$M_B(\hat{T}^* \hat{T}) = \begin{pmatrix} |\lambda_1|^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & |\lambda_n|^2 \end{pmatrix} = Id \quad (7.9.4)$$

Analog gilt  $M_B(\hat{T} \hat{T}^*) = Id$ . Also ist  $\hat{T}$  unitär.

Es gilt aber

$$\widehat{T^* T} = \widehat{T^*} \widehat{T} = \widehat{T}^* \widehat{T} = Id_{V_{\mathbb{C}}} = \widehat{Id}_V \quad (7.9.5)$$

woraus folgt

$$T^* T = T T^* = Id \quad (7.9.6)$$

□

Aufgrund dieses Satzes sind die Spektralsätze des Abschnittes 7.8 auf unitäre Endomorphismen anwendbar. Wir gehen noch auf den reellen Fall ein:

Ist  $U \in \text{End}_{\mathbb{R}}(V)$ ,  $\dim V < \infty$  unitär, so besitzt  $V$  nach Satz 7.8.3 eine Orthonormalbasis, sodass

$$M_B(U) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda_r & & \\ & & & \mathcal{Q}_1 & \\ & & & & \ddots \\ 0 & & & & & \mathcal{Q}_s \end{pmatrix} \quad (7.9.7)$$

Dabei ist  $\lambda_j \in \mathbb{R}, |\lambda_j| = 1$ , also  $\lambda_j \in \{-1, 1\}$ .

Weiterhin ist

$$\mathcal{Q}_j = \begin{pmatrix} \alpha_j & \beta_j \\ -\beta_j & \alpha_j \end{pmatrix}, \beta_j \neq 0 \quad (7.9.8)$$

wobei  $\mu_j = \alpha_j + i\beta_j$  ein komplexer Eigenwert von  $\hat{U}$  ist. Nun ist

$$1 = |\mu_j|^2 = \alpha_j^2 + \beta_j^2 \quad (7.9.9)$$

In der Analysis lernt man, dass es für  $\alpha_j, \beta_j \in \mathbb{R}$  mit  $\alpha_j^2 + \beta_j^2$  genau ein  $\varphi_j \in (-\pi, \pi]$  gibt mit  $\alpha_j = \cos(\varphi_j)$ ,  $\beta_j = \sin(\varphi_j)$ . Damit können also die  $\mathcal{Q}_j$  in der Form

$$\mathcal{Q}_j = \begin{pmatrix} \cos(\varphi_j) & \sin(\varphi_j) \\ -\sin(\varphi_j) & \cos(\varphi_j) \end{pmatrix} \quad (7.9.10)$$

geschrieben werden.

### Die Polarzerlegung

In diesem Unterabschnitt gilt  $\dim V < \infty$ .

Wir erinnern daran (§7.6), dass  $A \in \text{End}_{\mathbb{K}}(V)$  positiv (semi)definit heißt, falls  $A = A^*$  und

$\forall x \in V \langle Ax, x \rangle \geq 0$  (im Falle positiv definit:  $= 0$  nur für  $x = 0$ ).

Falls  $\dim V < \infty$ , so ist  $A > 0 (\geq 0)$  genau dann, wenn sämtliche Eigenwerte  $> 0 (\geq 0)$  sind. (Wir schreiben kurz  $A > 0 (\geq 0)$ , falls  $A = A^*$  und  $A$  positiv (semi)definit ist.)

**Satz 7.9.4.** (Quadratwurzel) Sei  $\dim V < \infty$  und  $A \in \text{End}_{\mathbb{K}}(V)$  positiv semi-definit.

Dann existiert genau ein  $S \in \text{End}_{\mathbb{K}}(V)$ ,  $S \geq 0$  mit  $S^2 = A$ . (Schreibweise:  $S = \sqrt{A} = A^{\frac{1}{2}}$ )

Die Eigenwerte von  $S$  sind genau  $\sqrt{\lambda}$ ,  $\lambda \in \text{spec}(A)$  ( $\{\lambda \in \mathbb{K} \mid \exists v \in V : Tv = \lambda v\}$ )

*Beweis. Existenz:*

Sei  $\{e_1, \dots, e_n\}$  eine Orthonormalbasis von  $V$  mit  $Ae_j = \lambda_j e_j$ , beachte  $\lambda_j \geq 0$ .

Setze

$$Se_j := \sqrt{\lambda_j} e_j \quad (7.9.11)$$

Das legt  $S$  fest. Offenbar ist  $S = S^* \geq 0$  und  $S^2 e_j = \lambda_j e_j = Ae_j$ , also  $S^2 = A$ .

**Eindeutigkeit:**

Wir halten fest, dass auf den Eigenvektoren von  $A$  zu den Eigenwerten  $\lambda$  der Operator  $S$  durch  $Sx = \sqrt{\lambda}x$  operiert.

Sei nun  $\tilde{S} = \tilde{S}^* \geq 0$ ,  $\tilde{S}^2 = A$ . Dann sei  $\{f_1, \dots, f_n\}$  eine Orthonormalbasis von  $V$  mit  $\tilde{S}f_j = \mu_j f_j$ ,  $\mu_j \geq 0$ .

Es gilt  $Af_j = \tilde{S}^2 f_j = \mu_j^2 f_j$ , also ist  $\mu_j^2$  ein Eigenwert von  $A$ . Dann folgt aber

$$Sf_j = \sqrt{\mu_j^2} f_j = \mu_j f_j = \tilde{S}f_j - \quad (7.9.12)$$

□

**Übung.** Alternativbeweis mit Hilfe der Analysis.

**Definition 7.9.5. + Satz** Für  $T \in \text{End}_{\mathbb{K}}(V)$ ,  $\dim V < \infty$  ist  $T^* T \geq 0$  und es gilt:

$T^* T > 0 \Leftrightarrow T$  invertierbar.

Wir setzen  $|T| := \sqrt{T^* T}$

*Beweis.* Da  $\dim V < \infty$  ist injektiv  $\Leftrightarrow$  bijektiv.

$$\langle T^* T x, x \rangle = \langle T x, T x \rangle = \|T x\|^2 \geq 0 \quad (7.9.13)$$

Daraus folgt

$$x \in \ker T \Leftrightarrow \langle T^* T x, x \rangle = 0 \quad (7.9.14)$$

Daraus folgt die Behauptung. □

**Satz 7.9.6.** (Polarzerlegung) Sei  $\dim V < \infty$  und  $T \in \text{End}_{\mathbb{K}}(V)$ . Dann ist  $|T|$  der eindeutig bestimmte Operator  $S \geq 0$  mit  $\|Tx\| = \|Sx\| \ \forall x \in V$ .

Weiterhin existiert ein  $U \in \text{End}_{\mathbb{K}}(V)$  mit:

- $\ker U = \ker T$
- $U|_{\ker T^\perp} : \ker T^\perp \rightarrow \text{Im } T$  unitär
- $T = U|T|$

Insbesondere gilt  $U^*U|T| = |T|$ ,  $U^*T = |T|$ ,  $UU^*T = T$ .

Ist  $T$  invertierbar, so auch  $|T|$  und es gilt  $U = T|T|^{-1}$

*Bemerkung.* Man mache sich die Polarzerlegung in  $\mathbb{C}$  klar.

Wäre  $T$  normal, so könnte man in den Eigenräumen die Polarzerlegung vornehmen. Im Allg. muss man sich etwas anderes überlegen.

*Beweis.* Für  $|T|$  gilt sicherlich für  $x \in V$ :

$$\begin{aligned} \|Tx\|^2 &= \langle Tx, Tx \rangle = \langle T^*Tx, x \rangle \\ &= \langle |T|^2x, x \rangle \\ &= \| |T|x \|^2 \end{aligned} \tag{7.9.15}$$

insbesondere auch  $\ker T = \ker |T|$ .

Ist umgekehrt  $S \geq 0$  und  $\|Sx\| = \|Tx\| \ \forall x \in V$ , so folgt:

$$\begin{aligned} \langle S^2x, x \rangle &= \|Sx\|^2 = \|Tx\|^2 \\ &= \langle T^*Tx, x \rangle \end{aligned} \tag{7.9.16}$$

Da  $S^2, T^*T$  selbstadjungiert sind, folgt aus der Polarisierung  $S^2 = T^*T$ , also  $S = |T|$  (mit Satz 7.9.5).

Nach der Rang-Defekt-Formel ist

$$\begin{aligned} \dim(\text{Im } T) &= \dim V - \dim(\ker T) = \dim(\ker T^\perp) \\ &= \dim(\ker |T|^\perp) \\ &= \dim(\text{Im } |T|) \end{aligned} \tag{7.9.17}$$

Genauer gilt, da  $|T| = |T|^*$ :

$$\text{Im } |T| = \ker |T|^\perp \tag{7.9.18}$$

Wir setzen für  $y = |T|x \in \text{Im } |T|$ :

$$U_0y := Tx \tag{7.9.19}$$

$U_0$  ist wohldefiniert: ist  $y = |T|x'$ , so ist  $x - x' \in \ker |T| = \ker T$ , also auch  $Tx = Tx'$ .

$U_0$  ist isometrisch:

$$\|U_0y\| = \|Tx\| = \| |T|x \| = \|y\| \tag{7.9.20}$$

Da  $\dim(\text{Im } |T|) = \dim(\text{Im } T)$ , ist  $U_0$  unitär.

Man setzt

$$U|_{\ker T} = 0, U|_{\ker T^\perp} = U_0 \tag{7.9.21}$$

Es folgt nun für  $x \in V$ :

$$Tx = U_0|T|x = U|T|x \tag{7.9.22}$$

also  $T = U|T|$

Rest: Übung. □

## 8 Miscellanea

Es folgen Themen, für die es keine kanonische Einordnung gibt.

### 8.1 Quotientenraum

Die Quotientenkonstruktion ist ein Standardverfahren zur Konstruktion neuer Vektorräume, welche nicht in offensichtlicher Weise  $\mathbb{K}^n$ 's sind.

Im Folgenden sei  $V$  ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum und  $U \subset V$  ein Unterraum. Wir betrachten die Nebenklassen  $x + U, x \in V$ .

Etwas formaler sei für  $x, y \in V$ :

$$x \sim_U y \Leftrightarrow x - y \in U \quad (8.1.1)$$

Man prüft unmittelbar nach, dass  $\sim_U$  eine Äquivalenzrelation auf  $V$  ist. Die Äquivalenzklasse von  $x$  besteht aus:

$$[x]_{\sim_U} = \{y \in V \mid x - y \in U\} = \{x + u \mid u \in U\} = x + U \quad (8.1.2)$$

**Definition 8.1.1.** (Und Satz)  $V/U := V / \sim_U$  bezeichnet die Menge aller Äquivalenzklassen *mod*  $U$ . Man nennt  $V/U$  den Quotientenraum nach  $U$ . Mittels der Verknüpfungen

$$\begin{aligned} (x + U) + (y + U) &:= (x + y) + U, \quad x, y \in V \\ \lambda \cdot (x + U) &:= (\lambda x) + U, \quad \lambda \in \mathbb{K}, x \in V \end{aligned} \quad (8.1.3)$$

wird  $V/U$  zu einem  $\mathbb{K}$ -Vektorraum.

Das neutrale Element ist  $U = 0 + U$

*Beweis.* Die standardmäßigen Details bleiben dem Leser erspart. Wir prüfen nur die Wohldefiniertheit der Verknüpfungen:

Sind  $x - x', y - y' \in U$ , so ist auch  $(x + y) - (x' + y') \in U$ , also gilt

$$(x + y) + U = (x' + y') + U \quad (8.1.4)$$

Analog: Multiplikation □

**Satz 8.1.2.** (Universelle Eigenschaft des Quotienten) Sei  $V$  ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum und  $U \subset V$ . Sei  $\pi : V \rightarrow V/U, x \mapsto x + U$  die Quotientenabbildung. Dann gilt:

(i)  $\pi$  ist linear

(ii)  $\ker \pi = U, \pi$  ist surjektiv

(iii) Falls  $\dim V < \infty$ , so ist  $\dim V/U = \dim V - \dim U$

(iv) Ist  $V \xrightarrow{f} W$  eine lineare Abbildung mit  $U \subset \ker f$ , so gibt es genau eine lineare Abbildung  $\hat{f} : V/U \rightarrow W$ , so dass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & W \\ \pi \downarrow & \nearrow \hat{f} & \\ V/U & & \end{array}$$

Es gilt  $\ker \hat{f} = \ker f/U$

*Beweis.* (i) klar

(ii) Nach Konstruktion ist  $\pi$  surjektiv.

$$x \in \ker \pi \Leftrightarrow x + U = U \Leftrightarrow x \in U \quad (8.1.5)$$

(iii) Folgt aus der Rang-Defekt-Formel:

$$\begin{aligned} \dim V/U &= \operatorname{rg} \pi \\ &= \dim V - \dim(\ker \pi) \\ &= \dim V - \dim U \end{aligned} \quad (8.1.6)$$

(iv) Wir setzen  $\hat{f}(x+U) := f(x)$ . Ist  $x+U = x'+U$ , so ist  $x-x' \in U$ , also  $f(x) = f(x')$ . Somit ist  $\hat{f}$  wohldefiniert. Linearität folgt nun leicht.

$$x+U \in \ker \hat{f} \Leftrightarrow x \in \ker f \Leftrightarrow x+U \in (\ker f)/U$$

*Bemerkung.*  $(\ker f)/U \subset V/U$  ist ein Unterraum.

□

**Korollar 8.1.3.** 2. Isomorphiesatz Sei  $W$  ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum und  $U \subset V \subset W$  Unterräume. Dann gibt es einen kanonischen Isomorphismus

$$\frac{W/U}{V/U} \xrightarrow{\cong} W/V \quad (8.1.7)$$

*Beweis.* Übung.

□

## 8.2 Interne direkte Summe

Im Folgenden sei  $V$  ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum.

**Definition 8.2.1.** (und Satz) Sei  $(U_i)_{i \in I}$  eine Familie von Unterräumen von  $V$ . Dann bezeichnet

$$\sum_{i \in I} U_i = \{x \in V \mid \exists x_{i_1} \in U_{i_1}, \dots, x_{i_r} \in U_{i_r} : x = x_{i_1} + \dots + x_{i_r}, r < \infty\} \quad (8.2.1)$$

$\sum_{i \in I} U_i$  ist ein Unterraum von  $V$ .

Ist  $I = \{1, \dots, N\}$  endlich, so schreibt man auch  $U_1 \oplus \dots \oplus U_N$

*Beweis.* Klar

□

**Satz 8.2.2.** Für  $(U_i)_{i \in I}$  sind äquivalent:

(i) Jedes  $x \in \sum U_i - \{0\}$  besitzt genau eine Darstellung  $x = x_{i_1} + \dots + x_{i_r}$  mit eindeutig bestimmten  $x_{i_j} \in U_{i_j} - \{0\}$  und paarweise verschiedenen Indizes  $i_1, \dots, i_r \in I$ .

(ii) Ist  $x_{i_1} + \dots + x_{i_r} = 0$  mit paarweise verschiedenen Indizes  $i_1, \dots, i_r$  und  $x_{i_j} \in U_{i_j}$ , so ist schon  $x_{i_1} = \dots = x_{i_r} = 0$

(iii) Für jedes  $j \in I$  gilt:

$$U_j \cap \sum_{i \in I - \{j\}} U_i = \{0\} \quad (8.2.2)$$

Sind die äquivalenten Bedingungen erfüllt, so schreibt man  $\bigoplus U_i$  und nennt es die direkte Summe.

Ist die Summe direkt und sind  $(B_i)_{i \in I}$  Basen von  $U_i$ , so ist  $\bigcup_{i \in I} B_i$  eine Basis von  $\bigoplus_{i \in I} U_i$ .

Insbesondere gilt, falls  $I, \dim U_i < \infty$ :

$$\dim \bigoplus_{i \in I} U_i = \sum_{i \in I} \dim U_i \quad (8.2.3)$$

*Beweis.* (i)  $\Rightarrow$  (ii):

klar

(ii)  $\Rightarrow$  (iii):

Sei

$$x = x_j = x_{i_1} + \dots + x_{i_r} \quad (8.2.4)$$

mit  $j \notin \{i_1, \dots, i_r\}$ . Dann ist  $x_{i_1} + \dots + x_{i_r} - x_{i_j} = 0$  und (ii)  $\Rightarrow x_j = 0 = x_{i_1} = \dots = x_{i_r}$ , also  $x = 0$ .

(iii)  $\Rightarrow$  (i);

Sei

$$x = x_{i_1} + \dots + x_{i_r} = y_{k_1} + \dots + y_{k_s} \quad (8.2.5)$$

mit jeweils paarweise verschiedenen  $i_1, \dots, i_r, k_1, k_s$  und  $x_{i_j} \in U_{i_j} - \{0\}, y_{k_l} \in U_{k_l} - \{0\}$ .

Wäre  $i_1 \notin \{k_1, \dots, k_s\}$ , so wäre

$$\begin{aligned} U_{i_1} \ni x_{i_1} &= y_{k_1} + \dots + y_{k_s} - x_{i_2} - \dots - x_{i_r} \\ &\in \sum_{l \neq i_1} U_l \end{aligned} \quad (8.2.6)$$

und somit nach (iii) auch schon  $x_{i_1} = 0$ .

Widerspruch!

Seien nun  $B_i$  Basen von  $U_i$ .

$B_i = \{x_{i_j} | j \in I_i\}$ ,  $I_i$  eine Indexmenge. Ist  $\xi = \xi_{i_1} + \dots + \xi_{i_n}$  mit  $\xi_{i_j} \in U_{i_j}$ , so ist jedes  $\xi_{i_j}$  Linearkombination von Elementen aus  $B_{i_j}$ , also ist  $\xi$  Linearkombination von Elementen aus  $\bigcup_{i \in I} B_i$ .

Sei nun

$$\sum_{\text{endlich}} \lambda_{i_l} x_{i_j} = 0 \quad (8.2.7)$$

Dann ist wegen (ii) für jedes feste  $i$  schon  $\sum \lambda_{i_l} x_{i_l} = 0$ . Da aber  $B_i$  linear unabhängig ist, folgt schon  $\lambda_{i_l} = 0, l \in I_i$ . Die letzte Aussage ist nun klar.  $\square$

### 8.3 (Externe) direkte Summe und direktes Produkt

Im letzten Abschnitt waren die Räume  $U_i$  Unterräume eines Raumes  $V$ , so dass  $\bigoplus U_i$  als Unterraum von  $V$  konstruiert werden konnte. Abstrakter kann man zu beliebigen Vektorräumen  $U_i$  einen Raum  $V$  und Einbettungen  $U_i \hookrightarrow V$  so konstruieren, dass die direkte Summe  $\bigoplus U_i$  gebildet werden kann. Allerdings gibt es für unendliche Indexmengen zwei Varianten.

Seien  $X_i, i \in I$  Vektorräume über  $\mathbb{K}$ .  $I$  ist eine beliebige Indexmenge. Wir erinnern an das allgemeine kartesische Produkt

$$\prod_{i \in I} X_i \quad (8.3.1)$$

Dieses besteht aus allen Familien  $(x_i)_{i \in I}$  mit  $x_i \in X_i$ .

Etwas formaler sei  $X$  irgendeine Menge mit  $X_i \subset X$  für alle  $i \in I$ . Dann ist

$$\prod_{i \in I} X_i = \{f : I \rightarrow X | \forall i \in I f(i) \in X_i\} \quad (8.3.2)$$

Wir führen auf  $\prod_{i \in I} X_i$  Addition und Skalarmultiplikation ein durch

$$\begin{aligned} (f + g)(i) &:= f(i) + g(i), \quad i \in I \\ (\lambda f)(i) &:= \lambda \cdot f(i), \quad i \in I \end{aligned} \quad (8.3.3)$$

für  $f, g \in \prod_{i \in I} X_i, \lambda \in \mathbb{K}$ .

Man prüft unmittelbar nach:

**Definition 8.3.1.** (Und Satz)

- (i) Sei  $\prod_{i \in I} X_i$  mit  $+$ ,  $\cdot$  wie oben ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum. Man nennt es das "direkte Produkt" der Vektorräume  $X_i, i \in I$ .
- (ii)  $\bigoplus_{i \in I} X_i := \{f \in \prod_{i \in I} X_i \mid f(i) \neq 0, \text{ endlich viele } i\}$  ist ein Unterraum von  $\prod_{i \in I} X_i$ . Man nennt ihn die "externe direkte Summe".

*Bemerkung.* Falls  $I$  endlich ist, so ist nach Definition

$$\bigoplus_{i \in I} X_i = \prod_{i \in I} X_i \quad (8.3.4)$$

Für unendliche  $I$  hingegen gibt es sicherlich  $f \in \prod_{i \in I} X_i$  mit  $f(i) \neq 0$  für unendlich viele  $i$  (Auswahlaxiom).

Ist  $I = \{i_1, \dots, i_n\}$  endlich, so schreibt man die Elemente von  $\bigoplus X_i = \prod X_i$  auch als Tupel  $(x_{i_1} \ x_{i_2} \ \dots \ x_{i_n})$

oder Spalten  $\begin{pmatrix} x_{i_1} \\ x_{i_2} \\ \vdots \\ x_{i_n} \end{pmatrix}$ .

*Beweis.* (i) Einfache Übung.

- (ii) Sind  $f, g \in \bigoplus X_i, \lambda \in \mathbb{K}$ , so ist  $(f + \lambda \cdot g)$  höchstens  $\neq 0$ , wenn  $f(i) \neq 0$  und  $g(i) \neq 0$ , also höchstens für endlich viele  $i$ .

□

**Übung.** Universelle Eigenschaften von  $\bigoplus_{i \in I} X_i, \prod_{i \in I} X_i$

Wir führen noch natürliche lineare Abbildungen im Zusammenhang mit direkter Summe und Produkt ein:

für ein festes  $\alpha \in I$  seien

$$\begin{aligned} \pi_\alpha : \prod_{i \in I} X_i &\rightarrow X_\alpha \\ f &\mapsto f(\alpha) \\ \kappa_\alpha : X_\alpha &\rightarrow \bigoplus_{i \in I} X_i \subset \prod_{i \in I} X_i \\ x &\mapsto f_x, \\ f_x(i) &= \begin{cases} 0, & i \neq \alpha \\ x, & i = \alpha \end{cases} \end{aligned} \quad (8.3.5)$$

Man überlegt sich unmittelbar, dass

- (i)  $\pi_\alpha \in \text{Hom}_{\mathbb{K}}(\prod_{i \in I} X_i, X_\alpha)$  surjektiv ist
- (ii)  $\kappa_\alpha \in \text{Hom}_{\mathbb{K}}(X_\alpha, \bigoplus_{i \in I} X_i)$  injektiv ist
- (iii)

$$\begin{aligned} \pi_\alpha \circ \kappa_\alpha(x) &= x, \quad x \in X_\alpha \\ \pi_\alpha \circ \kappa_\beta &= 0, \quad \alpha \neq \beta, \quad \alpha, \beta \in I \end{aligned} \quad (8.3.6)$$

Schließlich erhalten wir folgende Beziehung zwischen interner und externer direkter Summe:



**Satz 8.3.2.** Die externe Summe  $\bigoplus_{i \in I} X_i$  ist gleich der internen Summe  $\bigoplus_{i \in I} \kappa_i X_i$  der Unterräume  $\kappa_i X_i$ .

*Beweis.*  $\kappa_i$  ist injektiv, folglich ist  $\kappa_i : X_i \rightarrow \kappa_i(X_i)$  ein kanonischer Isomorphismus auf den Unterraum

$$\kappa_i(X_i) = \left\{ f \in \bigoplus_{i \in I} X_i \mid f(j) = 0, j \neq i \right\} \quad (8.3.7)$$

wir zeigen, dass die Familie  $\kappa_i(X_i)$  die Bedingung (iii) des Satzes 8.2.2 erfüllt:

Sei  $j \in I$  und

$$f \in \kappa_j(X_j) \cap \sum_{i \in I - \{j\}} \kappa_i(X_i) \quad (8.3.8)$$

Dann ist einerseits  $f(i) = 0$  für  $i \neq j$ , andererseits  $f = \sum_{\text{endl}} \kappa_i(X_i)$  mit endlich vielen  $x_i \in X_i, i \neq j$ , also auch  $f(j) = \sum (\kappa_i(X_i))(j) = 0$ , somit  $f = 0$ . Ist nun  $f \in \text{ext} - \bigoplus_{i \in I} X_i$ , so ist nach Def.  $f(i) \neq 0$  für höchstens endlich viele  $i \in I$ , etwa  $i_1, \dots, i_n$ . Also

$$f = \sum_{\alpha=1}^n \kappa_{i_\alpha}(f(i_\alpha)) \in \text{int} - \bigoplus_{i \in I} \kappa_i(X_i) \quad (8.3.9)$$

andererseits ist ein Vektor

$$x = \sum_{\alpha=1}^n \kappa_{i_\alpha}(x_{i_\alpha}) \in \text{int} - \bigoplus_{i \in I} X_i \quad (8.3.10)$$

sicherlich in  $\text{ext} - \bigoplus_{i \in I} X_i$ , denn

$$x(i) = 0, i \notin \{i_1, \dots, i_n\} \quad (8.3.11)$$

□

## 8.4 Der Dualraum

**Definition 8.4.1.** Sei  $V$  ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum. Dann heißt

$$V^* := \text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, \mathbb{K}) \quad (8.4.1)$$

der Dualraum von  $V$ .

Wir führen noch folgende Notation ein:

Für  $\varphi \in V^*, x \in V$  schreiben wir auch  $\langle x, \varphi \rangle$  statt  $\varphi(x)$ .

Die Notation erinnert an das Skalarprodukt und das ist durchaus gewollt. Für Formalisten:  $\langle x, \varphi \rangle_{V, V^*}$

**Satz 8.4.2.** Sei  $V$  ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum.

(i) Zu  $x \in V - \{0\}$  und  $\lambda \in \mathbb{K}$  gibt es ein  $\varphi \in V^*$  mit  $\langle x, \varphi \rangle = \lambda$ . Insbesondere ist  $x \in V$  schon dann 0, wenn  $\langle x, \varphi \rangle = 0$  für alle  $\varphi \in V^*$

(ii) Ist  $\dim(V) < \infty$  und  $B = \{e_1, \dots, e_n\}$  eine Basis von  $V$ , so ist durch

$$\langle e_i, e_j^* \rangle = \delta_{ij} \quad (8.4.2)$$

eine Basis  $B^* = \{e_1^*, \dots, e_n^*\}$  von  $V$  bestimmt. Man nennt  $B^*$  die zu  $B$  duale Basis.

*Beweis.* (i) Wir benötigen hierzu den allgemeinen Existenzsatz für Basen. Sei also  $(e_i)_{i \in I}$  eine Basis von  $V$  mit  $e_{i_0} = x$ . Dann besitzt jedes  $y \in V$  eine eindeutige Darstellung

$$y = \sum_{\text{endl}} \alpha_i \cdot e_i \quad (8.4.3)$$

Setze

$$\varphi(y) := \lambda \cdot \alpha_{i_0} \quad (8.4.4)$$

Dann besitzt  $\varphi$  die gewünschte Eigenschaft.

- (ii) Lineare Abbildungen können auf Basen beliebig vorgegeben werden und dies legt sie auch fest, also ist  $e_j^*$  durch (8.4.2) wohldefiniert.

Ist  $\varphi \in V^*$ , so folgt für  $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i$

$$\begin{aligned}\langle x, \varphi \rangle &= \sum_{i=1}^n \lambda_i \varphi(e_i) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_i \varphi(e_j) \langle e_i, e_j^* \rangle \\ &= \left\langle \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i, \sum_{j=1}^n \varphi(e_j) e_j^* \right\rangle\end{aligned}\tag{8.4.5}$$

Also folgt  $\varphi = \sum_{j=1}^n \varphi(e_j) e_j^*$ . Aus (8.4.2) folgt aber auch die lineare Unabhängigkeit von  $B^*$ .  $\square$

Für  $\dim V < \infty$  ist also  $V$  isomorph zu  $V^*$ . Man beachte, dass die Wahl eines Isomorphismus von der Wahl einer Basis abhängt. Es gibt keinen kanonischen Isomorphismus  $V \rightarrow V^*$ .

Weiterhin wird für  $\dim V = \infty$  das System  $B^*$  zwar linear unabhängig sein, es wird  $V^*$  jedoch nicht aufspannen. Genauer gilt:

**Satz 8.4.3.** Sei  $V$  ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum. Dann ist

$$\begin{aligned}\kappa : V &\rightarrow V^{**} \\ \langle \varphi, \kappa(x) \rangle_{V^*, V^{**}} &:= \langle x, \varphi \rangle_{V, V^*}\end{aligned}\tag{8.4.6}$$

eine (kanonische) injektive lineare Abbildung von  $V$  in den Bidualraum  $V^{**} := (V^*)^*$ .

$\kappa$  ist genau dann ein Isomorphismus, wenn  $\dim V < \infty$ .

*Beweis.* Für jedes  $x \in V$  ist sicherlich  $V^* \ni \varphi \mapsto \langle x, \varphi \rangle$  eine Linearform (lineare Abbildung nach  $\mathbb{K}$ ) auf  $V^*$ . Weiterhin ist für  $x, y \in V, \lambda \in \mathbb{K}$

$$\begin{aligned}\langle \varphi, \kappa(\lambda x + y) \rangle &= \langle \lambda x + y, \varphi \rangle = \dots \\ &= \langle \varphi, \lambda \kappa(x) + \kappa(y) \rangle\end{aligned}\tag{8.4.7}$$

also  $\kappa \in \text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, V^{**})$ .

Ist  $\kappa(x) = 0$ , so folgt  $\langle x, \varphi \rangle = 0$  für alle  $\varphi \in V^*$  und Satz 8.4.2 impliziert  $x = 0$ , also ist  $\kappa$  injektiv.  $\square$

*Bemerkung.* Der Dualraum des  $\mathbb{K}^n$  besitzt eine natürliche Beschreibung als Zeilenvektoren: wie üblich sei

$$\mathbb{K}^n = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mid x_j \in \mathbb{K} \right\} = \mathcal{M}(n \times 1, \mathbb{K})\tag{8.4.8}$$

die Menge der Spaltenvektore, bzw. der  $n \times 1$ -Matrizen mit der kanonischen Basis  $e_j = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ .

Betrachte  $\varphi \in (\mathbb{K}^n)^*$ . Dann ist für  $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$

$$\varphi(x) = \sum_{j=1}^n x_j \varphi(e_j) = (\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\tag{8.4.9}$$

Dabei haben wir stillschweigend die  $1 \times 1$ -Matrix ganz rechts mit ihrem Eintrag identifiziert; Puri-  
sten hätten auch die beiden linken Terme zusätzlich noch in Klammern setzen können.

**Fazit:** Der Dualraum des  $\mathbb{K}^n$  ist in natürlicher Weise isomorph zum Raum  $\mathcal{M}(1 \times n, \mathbb{K})$  der Zeilen-  
vektoren.

**Übung.** Hieraus erhält man einen weiteren abstrakten Beweis der Gleichheit von Zeilenrang und  
Spaltenrang einer Matrix. (vgl. Fischer Kap. 6)

### Der Dualraum eines Vektorraums mit Skalarprodukt

Die Dualitätstheorie nimmt eine neue Wendung, falls  $K = \mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$  und  $V$  mit einem Skalarpro-  
dukt versehen ist.

**Satz 8.4.4. (und Definition)** Sei  $V$  ein Vektorraum mit Skalarprodukt. Dann ist

$$\begin{aligned} b: V &\rightarrow V^* \\ x &\mapsto \langle x, - \rangle \end{aligned} \tag{8.4.10}$$

eine injektive (anti)lineare Abbildung. D.h. falls  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ , so ist  $b$  linear, falls  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ , so ist  $b$  antilinear.  
Ist  $\dim V < \infty$ , so ist  $b$  sogar ein Isomorphismus, d.h. endlich-dimensionale Vektorräume mit Ska-  
larprodukt sind **kanonisch** antiisomorph zu ihrem Dualraum.

*Bemerkung.* 1. Wir wissen schon, dass Vektorräume gleicher endlicher Dimension stets ab-  
strakt isomorph sind. Deshalb ist es wesentlich, dass im obigen Satz die Abbildung natürlich  
(kanonisch) gegeben ist.

2. Die letzte Aussage des Satzes nennt man auch den Darstellungssatz von Riesz.

*Beweis.* Das Skalarprodukt ist linear im 2. Argument. Deshalb ist  $x^b = \langle x, - \rangle$  für  $x \in V$  eine Linear-  
form auf  $V$ . Die Antilinearität der Zuordnung  $x \mapsto x^b$  folgt aus der Antilinearität des Skalarprodukts  
im 1. Argument.

Zum Beweis der Injektivität von  $b$  sei  $x^b = 0$ . Dann ist also insbesondere  $0 = x^b(x) = \langle x, x \rangle = \|x\|^2$ ,  
also  $x = 0$ . Schließlich sei  $\dim V < \infty$  und  $\{e_1, \dots, e_n\}$  eine Orthonormalbasis von  $V$ . Dann gilt für  
 $\{e_1^b, \dots, e_n^b\}$  aber

$$e_i^b(e_j) = \langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij} \tag{8.4.11}$$

also folgt aus Satz 4.2.2, dass  $\{e_1^b, \dots, e_n^b\}$  die zu  $\{e_1, \dots, e_n\}$  duale Basis von  $V^*$  ist. Insbesondere ist  $b$   
surjektiv.  $\square$

### Der Antiraum eines $\mathbb{C}$ -Vektorraums

Die komplex antilinearen Abbildung verlieren ihre Sonderrolle, wenn man stattdessen einen  $\mathbb{C}$ -  
Vektorraum  $V$  seinen Antiraum  $\overline{V}$  an die Seite stellt. Dies stellt in gewisser Weise die Abstraktion  
der komponentenweisen Konjugation von Spaltenvektoren dar.

Als additive abelsche Gruppe sei  $\overline{V} = V$ . Allerdings setzen wir für  $\lambda \in \mathbb{C}, x \in V: \lambda \overline{\cdot} x = \overline{\lambda} \cdot x$ . Für den  
Moment dient die Notation  $\overline{\cdot}$  der Unterscheidung der beiden skalaren Multiplikationen. Man über-  
prüft unmittelbar, dass  $(\overline{V}, +, \overline{\cdot})$  ein  $\mathbb{C}$ -Vektorraum ist. Weiterhin ist  $\langle x, y \rangle_{\overline{V}} := \langle y, x \rangle_V$  (Reihenfolge!)  
ein Skalarprodukt auf  $\overline{V}$ .

Schließlich ist  $id: V \rightarrow \overline{V}$  ein kanonischer antilinearer Isomorphismus. Das Wort "kanonisch" ist  
hier wesentlich, denn falls  $\dim V < \infty$ , so sind  $V, \overline{V}$  auch (nicht-kanonisch)  $\mathbb{C}$ -isomorph.

Nach dieser Vorrede können wir die Abbildung  $b$  für einen Vektorraum mit Skalarprodukt noch-  
mals betrachten:

betrachtet man sie auf  $\overline{V}$ , so erhält man eine lineare Abbildung

$$\begin{array}{ccccc}
& \text{antilinear} & & \text{antilinear} & \\
\overline{V} & \xrightarrow{\quad \cdot \quad} & V & \xrightarrow{\quad b \quad} & V^* \\
& \searrow & & \nearrow & \\
& & \text{linear} & & \\
\bar{x} & \longmapsto & x & \longmapsto & x^b
\end{array}$$

Das heißt, falls  $\dim V < \infty$ , so ist  $\overline{V}$  kanonisch isomorph zu  $V^*$ . Alternativ ist die Abbildung  $x \mapsto \langle -, x \rangle$  ein Isomorphismus von  $V$  auf  $\overline{V^*} = \overline{V^*}$ .

## 8.5 Duale Abbildungen

Schon bei der Diskussion der Vektorräume mit Skalarprodukt tauchte die Frage auf, ob sich der Begriff der adjungierten Abbildung nicht auf allgemeine Räume ausdehnen lässt. In der Tat ist dies in gewisser Weise möglich. Dies und den Zusammenhang mit Vektorräumen mit Skalarprodukt wollen wir hier diskutieren.

**Satz 8.5.1. (und Definition)** Seien  $V, W$   $\mathbb{K}$ -Vektorräume und sei  $T \in \text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$ . Dann erklärt man  $T^* \in \text{Hom}_{\mathbb{K}}(W^*, V^*)$  durch

$$\langle V, T^* \varphi \rangle_{V, V^*} := \langle T v, \varphi \rangle_{W, W^*} \quad (8.5.1)$$

Man nennt  $T^*$  auch die zu  $T$  duale Abbildung. Die Zuordnung  $\text{Ad} : \text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{K}}(W^*, V^*)$  ist linear.

*Beweis.*  $T^*$  ist durch (8.5.1) wohldefiniert. Die Linearität von  $T^*$  ebenso wie die von  $\text{Ad}$  ergeben sich ebenfalls aus (8.5.1).  $\square$

Analog zum orthogonalen Komplement setzt man für  $U \subset V$  den  $U$ -Annulator

$$U^o := \{\varphi \in V^* \mid \forall_{x \in U} \langle x, \varphi \rangle = 0\} \quad (8.5.2)$$

Entsprechend gilt:

**Satz 8.5.2.** Sei  $T \in \text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$  und  $T^* \in \text{Hom}_{\mathbb{K}}(W^*, V^*)$  die duale Abbildung. Dann gelten

- (i)  $\ker T^* = (\text{Im } T)^o$ ,  $\ker T = (\text{Im } T^*)^o \cap V$
- (ii)  $T^*$  injektiv  $\Leftrightarrow T$  surjektiv
- (iii)  $T^*$  surjektiv  $\Leftrightarrow T$  injektiv
- (iv) Ist  $\dim V < \infty$  oder  $\dim W < \infty$ , so ist  $\text{rg } T^* = \text{rg } T$

*Beweis.* (i)

$$\begin{aligned}
\varphi \in \ker T^* &\Leftrightarrow \forall_{x \in V} \langle x, T^* \varphi \rangle = 0 \\
&\Leftrightarrow \forall_{x \in V} \langle T x, \varphi \rangle = 0 \\
&\Leftrightarrow \varphi \in (T(V))^o
\end{aligned} \quad (8.5.3)$$

Analog gilt

$$\begin{aligned}
x \in \ker T &\Leftrightarrow \forall_{\varphi \in V^*} \langle T x, \varphi \rangle = 0 \\
&\Leftrightarrow \forall_{\varphi \in V^*} \langle x, T^* \varphi \rangle = 0 \\
&\Leftrightarrow x \in (T^*(V))^o \cap V
\end{aligned} \quad (8.5.4)$$

Beachte, dass  $(T^* \varphi)^o \subset V^{**}$  und nach Satz 8.4.3  $V \subset V^{**}$ .

(ii)  $T^*$  injektiv  $\Leftrightarrow (\forall_x \langle x, T^* \varphi \rangle = 0 \Rightarrow \varphi = 0) \Leftrightarrow (\forall_x \langle Tx, \varphi \rangle = 0 \Rightarrow \varphi = 0)$ .

Ist  $T$  surjektiv, so ist die letzte Bedingung sicher erfüllt. Ist hingegen  $T$  nicht surjektiv, so ist  $W/T(V) \neq 0$ . Wähle  $\bar{\varphi} \in (W/T(V))^* - \{0\}$ . Dann ist

$$\begin{array}{ccc} W & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{K} \\ \downarrow & \searrow \bar{\varphi} & \\ W/T(V) & \xrightarrow{\quad} & \mathbb{K} \end{array}$$

eine nichttriviale Linearform auf  $W$ , welche auf  $T(V)$  verschwindet, also kann (5.2.1) nicht gelten.

Insgesamt ist (5.2.1) äquivalent zur Surjektivität von  $T$  und (ii) ist bewiesen.

(iii)  $\Rightarrow$ : Sei  $T^*$  surjektiv. Dann liefert (i)

$$\ker T = (\operatorname{Im} T^*)^0 \cap V = (V^*)^0 \cap V = \{0\} \quad (8.5.5)$$

$\Leftarrow$ : Sei  $T$  injektiv und  $(x_i)_{i \in I}$  eine Basis von  $V$ . Dann ist  $(Tx_i)_{i \in I}$  ein linear unabhängiges System in  $W$ . Ergänze dies zu einer Basis  $(y_j)_{j \in J}$  von  $W$ ,  $J \supset I$ ,  $y_i = Tx_i$  für  $i \in I$ . Ist nun  $\varphi \in V^*$  gegeben, so wähle  $\Psi \in W^*$  mit

$$\begin{aligned} \Psi(Tx_i) &= \varphi(x_i) \\ \Psi(y_j) &= 0, j \in J - I \end{aligned} \quad (8.5.6)$$

Beachte, dass Lineare Abbildungen auf Basen frei vorgegeben werden können. Es ist nun für  $x = \sum_{\text{endl.}} \lambda_i x_i \in V$

$$\begin{aligned} \langle x, T^* \Psi \rangle &= \langle Tx, \Psi \rangle \\ &= \sum_{\text{endl.}} \lambda_i \langle Tx_i, \Psi \rangle \\ &= \sum_{\text{endl.}} \lambda_i \langle x_i, \varphi \rangle \\ &= \langle x, \varphi \rangle \end{aligned} \quad (8.5.7)$$

also  $T^* \Psi = \varphi$ . Da  $\varphi \in V^*$  beliebig war, folgt die Surjektivität von  $T^*$ .

(iv) Sei etwa  $\dim W < \infty$ .

**Übung.**  $\dim V < \infty$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \operatorname{rg} T^* &= \dim W - \dim \ker T^* \\ &= \dim W - \dim (\operatorname{Im} T)^0 \quad (i) \\ &= \dim W - (\dim W^* - \operatorname{rg} T) \\ &= \operatorname{rg} T \end{aligned} \quad (8.5.8)$$

Dabei wurde  $\dim W = \dim W^*$  sowie folgendes Resultat verwendet

**Übung.** Sei  $X$  ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum,  $\dim X < \infty$  und  $Y \subset X$  ein Unterraum. Dann ist  $\dim Y^0 = \dim X - \dim Y$

□

Im Folgenden diskutieren wir den Zusammenhang zwischen dualen Abbildungen und Matrizen:

**Satz 8.5.3.** Seien  $V, W$   $\mathbb{K}$ -Vektorräume endlicher Dimension sowie  $T \in \text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$ . Seien  $A, B$  Basen von  $U$  bzw.  $W$  mit zugeordneten dualen Basen  $A^*, B^*$ . Dann gilt

$$M_{B^*, A^*}(T^*) = M_{A, B}(T)^t \quad (8.5.9)$$

*Beweis.* Seien  $A = \{a_1, \dots, a_n\}, B = \{b_1, \dots, b_m\}$ ,

$$M_{A, B} =: (t_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n},$$

$$Ta_j = \sum_{i=1}^m t_{ij} b_i,$$

$$T^* b_j^* = \sum_{i=1}^n \overline{t_{ij}} a_i^*.$$

$$\begin{aligned} \langle a_k, T^* b_j^* \rangle &= \sum_{i=1}^n \overline{t_{ij}} \langle a_k, a_i^* \rangle = \overline{t_{kj}} \\ &\parallel \\ \langle Ta_k, b_j^* \rangle &= \sum_{l=1}^m t_{lk} \langle b_l, b_j^* \rangle = t_{jk} \end{aligned}$$

□

### Duale Abbildungen und adjungierte Abbildungen im Falle von Vektorräumen mit Skalarprodukt

Von nun an sind  $V, W, \dots$  endlich-dimensionale  $\mathbb{K}$ -Vektorräume ( $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ ) mit Skalarprodukt. Hier müssen wir notationell etwas pedantisch sein:

$\langle - | - \rangle_V$  bezeichnet Skalarprodukte,  $\langle -, - \rangle_{V, V^*}$  die Dualität. Weiterhin bezeichnet  $T^t$  die duale (transponierte) Abbildung und  $T^{ad}$  die adjungierte Abbildung.  $b: V \rightarrow V^*$  bezeichnet den Isomorphismus aus Satz 8.4.4 und  $\phi: V^* \rightarrow V$  bezeichne dessen Inverses. Beachte, dass für  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  die Abbildung  $b, \phi$  antilinear sind, bzw. linear, wenn man zu  $\overline{V}$  übergeht.

Für  $x, y \in V$  gilt nun

$$\langle y, x^b \rangle_{V, V^*} = x^b(y) = \langle x | y \rangle_V \stackrel{!}{=} \langle y | x \rangle_{\overline{V}} \quad (8.5.10)$$

M. a. W. durch  $b$  geht das Skalarprodukt auf  $\overline{V}$  in die Dualität von  $V, V^*$  über.

Sei nun  $T \in \text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$ . Dann gilt für  $x \in V, y \in W$ :

$$\begin{aligned} \langle x, T^t y^b \rangle &= \langle x, (T^t y^b)^{\phi b} \rangle_{V, V^*} \\ &= \langle (T^t y^b)^{\phi} | x \rangle_V \end{aligned} \quad (8.5.11)$$

andererseits

$$= \langle Tx, y^b \rangle_{W, W^*} = \langle y | Tx \rangle_W \quad (8.5.12)$$

Liest man dies von ganz rechts rückwärts, so sehen wir, dass  $T^{ad} = \phi \circ T^t \circ b$ .

Auf den ersten Blick mag dies erstaunen, denn  $T \mapsto T^t$  ist linear, während  $T \mapsto T^{ad}$  antilinear ist. Es hat jedoch alles seine Richtigkeit, denn wegen der Antilinearität von  $\phi, b$  erhalten wir für  $x \in W, \lambda \in \mathbb{K}$

$$\begin{aligned} (\lambda T^{ad})(x) &= \left( (\lambda T)^t x^b \right)^{\phi} = (\lambda T^t x^b)^{\phi} \\ &= \overline{\lambda} (T^t x^b)^{\phi} \\ &= \overline{\lambda} T^{ad}(x) \end{aligned} \quad (8.5.13)$$

## 8.6 Das Tensorprodukt

Eine weitere vielseitige Konstruktion von neuen Vektorräumen aus gegebenen ist das Tensorprodukt.

Im Folgenden seien  $X_i, Y_i, Z_i, i = 1, 2, \dots$  Vektorräume über dem Körper  $\mathbb{K}$ . Im Abschnitt über Determinanten hatte wir bereits multilineare Abbildungen berührt. Ebenso im Abschnitt über Bilinearformen

**Definition 8.6.1.** Eine Abbildung  $T : X_1 \times \dots \times X_n \rightarrow Y$  heißt **n-fach multilinear**, wenn für jedes  $i \in \{1, \dots, n\}$  und feste Vektoren  $x_1, \dots, \widehat{x_i}, \dots, x_n$  die Abbildung

$$T(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) \in \text{Hom}_{\mathbb{K}}(X_i, Y) \quad (8.6.1)$$

Schreibweise:  $\mathcal{L}(X_1, \dots, X_n; Y)$  bezeichnet die Menge der n-fach multilinearen Abbildungen  $X_1 \times \dots \times X_n \rightarrow Y$ .

**Beispiel.** (i) Ist  $\dim V = n$ , so ist die Determinantenfunktion

$$\det : V \times \dots \times V \rightarrow \mathbb{K} \quad (8.6.2)$$

*n-fach multilinear.*

(ii) Eine Bilinearform ist 2-fach multilinear.

**Bemerkung.** 1. Mit der punktweisen Addition und skalaren Multiplikation wird  $\mathcal{L}(X_1, \dots, X_n; Y)$  selbst zu einem Vektorraum über  $\mathbb{K}$ . Für  $n = 1$  gilt trivialerweise  $\mathcal{L}(X_1; Y) = \text{Hom}_{\mathbb{K}}(X, Y)$

2. Für ein festes  $1 \leq k \leq n$  ist

$$\begin{aligned} \phi : \mathcal{L}(X_k, \mathcal{L}(X_1, \dots, \widehat{X_k}, \dots, X_n; Y)) &\rightarrow \mathcal{L}(X_1, \dots, X_n; Y) \\ \phi(T)(x_1, \dots, x_n) &:= T(x_k)(x_1, \dots, \widehat{x_k}, \dots, x_n) \end{aligned}$$

ein Isomorphismus.

3. Sind alle involvierten Vektorräume endlich-dimensional, so gilt

$$\dim(\mathcal{L}(X_1, \dots, X_n; Y)) = \left( \prod_{j=1}^n \dim X_j \right) \cdot \dim Y \quad (8.6.3)$$

**Definition 8.6.2. (Konstruktion des Tensorprodukts)** Man starte mit dem (Riesen-)raum, welcher dadurch entsteht, dass wir die Elemente von  $X_1 \times \dots \times X_n$  als Indexmenge auffassen:

$$\bar{\zeta} := \text{Abb}(X_1 \times \dots \times X_n, \mathbb{K}) \quad (8.6.4)$$

Bekanntlich ist für jede Menge  $\Xi$  der Raum  $\text{Abb}(\Xi, \mathbb{K})$  ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum bezüglich punktweiser Addition und skalar Multiplikation. Man bezeichne für  $x_i \in X_i$

$$\begin{aligned} (x_1, \dots, x_n) &\in \bar{\zeta} \\ (x_1, \dots, x_n)((y_1, \dots, y_n)) &= \begin{cases} 1, & x_1 = y_1, \dots, x_n = y_n \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned} \quad (8.6.5)$$

Dann ist  $\bar{\zeta}$  der Raum aller (formalen) Linearkombinationen

$$\sum_{\text{endl.}, (x_1, \dots, x_n) \in X_1 \times \dots \times X_n} \lambda_{(x_1, \dots, x_n)} (x_1, \dots, x_n) \quad (8.6.6)$$

Sei  $\mathcal{U}$  der Unterraum von  $\bar{\zeta}$ , welche aufgespannt wird von den Vektoren der Form

$$x = (x_1, \dots, x_{i-1}, \eta + \lambda \cdot \gamma, x_{i+1}, \dots, x_n) - (x_1, \dots, x_{i-1}, \eta, x_{i+1}, \dots, x_n) - \lambda \cdot (x_1, \dots, x_{i-1}, \gamma, x_{i+1}, \dots, x_n) \quad (8.6.7)$$

Der Quotientenraum  $\bar{\zeta}/\mathcal{U}$  heißt **Tensorprodukt** der Räume  $X_1, \dots, X_n$  über  $\mathbb{K}$ .