UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Finančna matematika – 2. stopnja

Žan Kastelic

Random walks

Matematika z računalnikm

Mentor: prof. dr. Sergio Cabello Justo
Somentor: asist. Gašper Domen Romih

Ljubljana, 2012

1. Naključni sprehodi

Naj bo X slučajna spremenljivka porazdeljena kot

$$X_t \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1-p & p \end{pmatrix}$$

za $t = 1, 2, \ldots$, kjer je $p \in [0, 1]$. Če je $p = \frac{1}{2}$, pravimo, da je naključni sprehod simetričen. Naključni sprehod sledi kumulativni vsoti teh naključnih spremevljivk, kar lahko zapišemo kot

$$S_0 = 0 \quad S_t = \sum_{k=1}^{t} X_k.$$

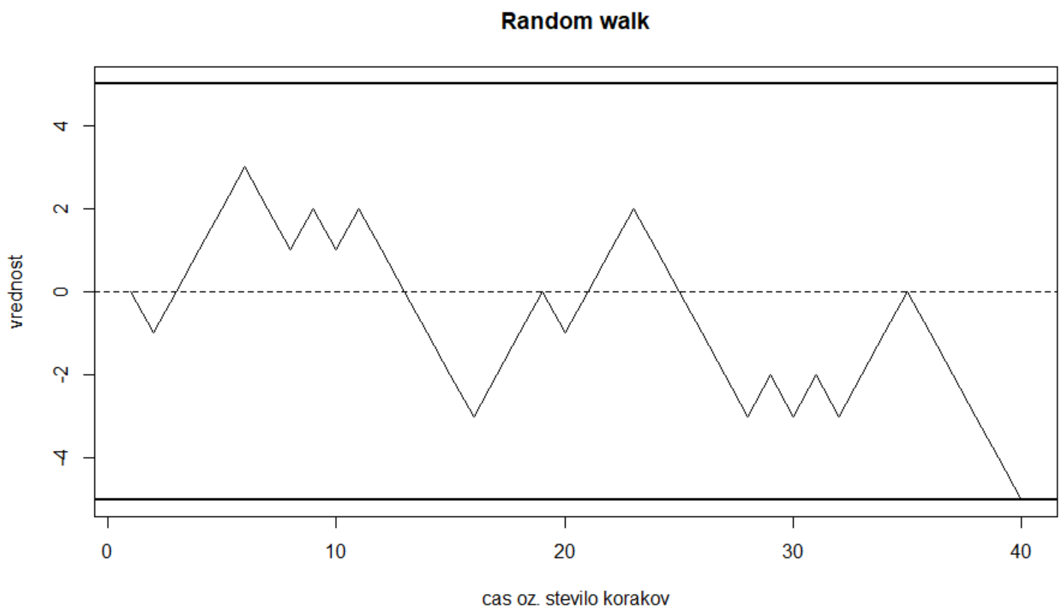
Poglejmo si najprej naključen sprehod po celih številih. Iz verjetnosti vemo, da naključni sprehod spada med markovske procese. Naj bosta $a, b > 0, a, b \in \mathbb{N}$. Naj bo b zgornja meja, $-a$ pa spodnja meja. Potem velja:

$$P(S_t = b) = \begin{cases} \frac{a}{a+b} & \text{če je } p = \frac{1}{2}, \\ \frac{1-(\frac{q}{p})^a}{1-(\frac{q}{p})^{a+b}} & \text{če je } p \neq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

oziroma

$$P(S_t = -a) = \begin{cases} \frac{b}{a+b} & \text{če je } p = \frac{1}{2}, \\ \frac{1-(\frac{q}{p})^b}{1-(\frac{q}{p})^{a+b}} & \text{če je } p \neq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

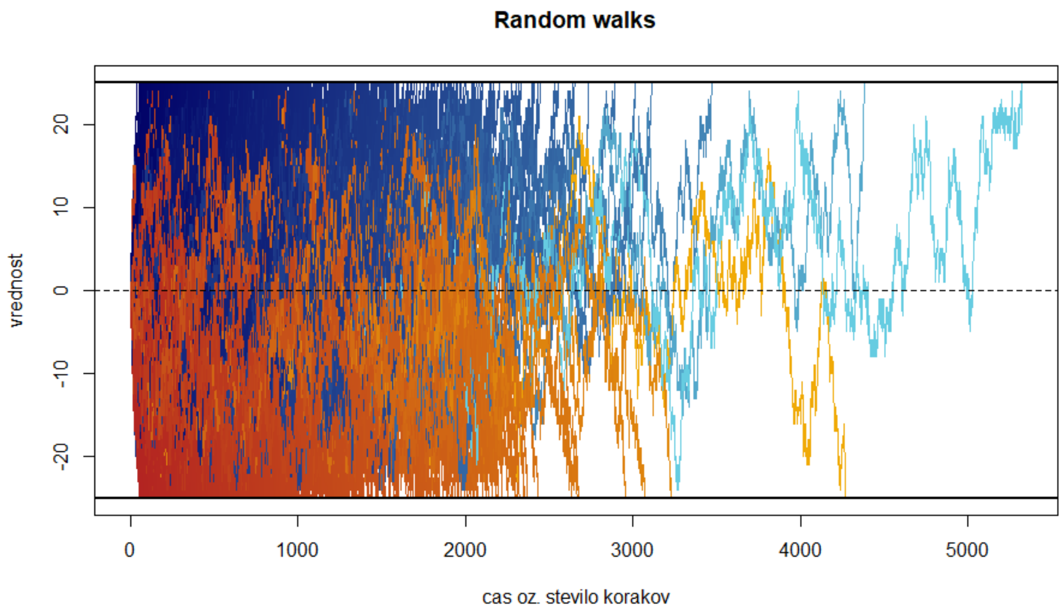
Poglejmo si najprej eno simulacijo simetričnega naključnega sprehoda, torej $p = \frac{1}{2}$. Da lahko dodamo še časovno komponento zarotirajmo os tako, da bo na abcisni osi čas, na ordinatni pa vrednost slučajnega sprehoda. Za spodnjo mejo si izberemo -5, za zgornjo pa 5.



Slika 1. Simetrični naključni sprehod.

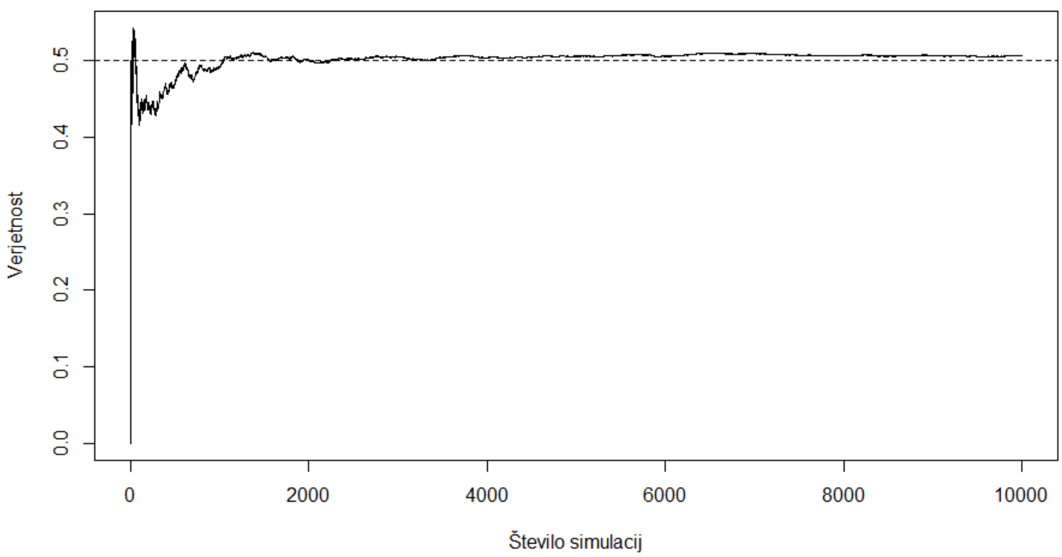
S slike 1 razberemo, da smo prej dosegli spodnjo mejo in da smo za to potrebovali 40 korakov. Simulirajmo sedaj 10.000 sprehodov z zgornjo mejo 25 in spodnjo mejo

−25. Zaradi velikega števila sprehodov so sprehodi obarvani. Sprehodi, ki dosežejo zgornjo mejo, so obarvani z modro, ostali pa z oranžno. Sprehodi se med seboj razlikujejo tudi po svetlosti - tisti bolj temni prej dosežejo mejo, kot svetlejši.



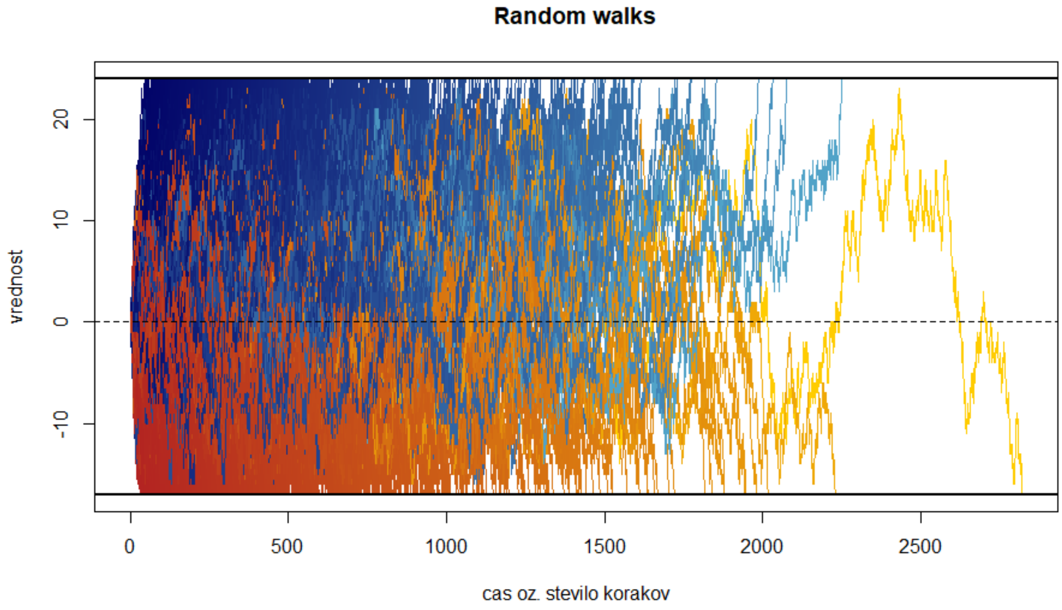
Slika 2. 10.000 naključnih simetričnih sprehodov.

Poglejmo si verjetnost, da prej dosežemo zgornjo mejo. S pomočjo slike 1 se lahko prepričamo zgornja formula drži. Če je $p = \frac{1}{2}, -a = -25, b = 25$, verjetnost znaša 0.5. Simulirana vrednost pa je enaka 0.5063.



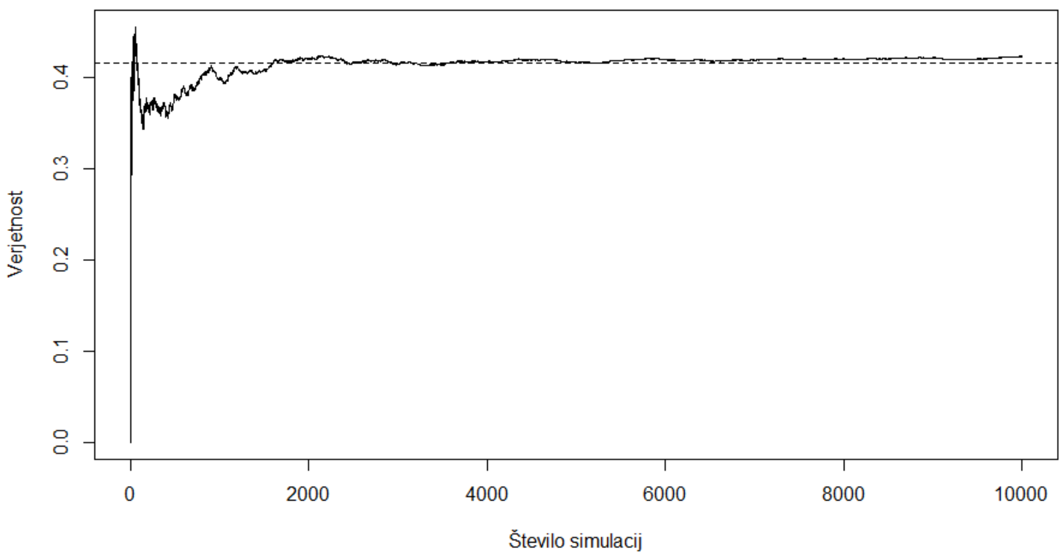
Slika 3. Verjetnost, da prej dosežemo zgornjo mejo.

Poglejmo si še primer, ko sta a in b različna. Naj bo $-a = -17$ in $b = 24$. Opazimo, da je spodnja meja dosežena večkrat kot zgornja, kar je logično, saj je manj oddaljena od izhodišča.



Slika 4. 10.000 naključnih sprehodov.

Formula nam pove, da je verjetnost, da prej dosežemo zgornjo mejo enaka $\frac{17}{17+24} = \frac{17}{41} \approx 0.4146341$. Simulirana vrednost znaša 0.4223.



Slika 5. Verjetnost, da prej dosežemo zgornjo mejo.

1.1. **Pričakovano število korakov zadetja meje.** Naj bo $T = T_{-a} \wedge T_b$ čas ustavljanja, kjer sta $T_{-a} = \inf\{t \geq 0 | S_t = -a\}$ oziroma $T_b = \inf\{t \geq 0 | S_t = b\}$. Koliko korakov bomo naredili v povprečju, preden zadanemo a oziroma b? S predavanj pri predmetih Verjetnost 2 in Finančna matematika vemo, da velja

$$E(T) = a \cdot b.$$