Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИНФОРМАТИКИ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ

Факультет Компьютерных сетей и систем

Обработка больших объемов информации

# ОТЧЕТ

**ПО ЛАБОРАТОРНЫМ РАБОТАМ**

по предмету «Системы компьютерной алгебры»

Студент
гр. 758601
Лимонтов А. С.

Проверила
Калугина М. А.

# Лабораторная работа 1

## Цель: Закрепить приобретенные знания по решению базовых математических задач в системе Maple

1. Упростите алгебраическое выражение

$$f(x) := \frac{\left(7x^4 - 126x^2 + 567\right)}{x^5 - 8x^4 - 27x^2 + 216x};$$
$$g(x) := \frac{\left(x^3 + 3x^2 - 9x - 27\right)}{x^3 - 5x^2 - 15x - 72};$$
$$simplify\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right);$$

$$f := x \to \frac{7x^4 - 126x^2 + 567}{x^5 - 8x^4 - 27x^2 + 216x}$$
$$g := x \to \frac{x^3 + 3x^2 - 9x - 27}{x^3 - 5x^2 - 15x - 72}$$
$$\frac{7}{x}$$

`simplify` отвечает за упрощение выражений

2. Приведите выражение к многочлену стандартного вида

$$f := (2x - 5) \cdot \left(3x^2 + 2\right) \cdot (4x + 3);$$
$$expand(f);$$

$$f := (2x - 5)\left(3x^2 + 2\right)(4x + 3)$$
$$24x^4 - 42x^3 - 29x^2 - 28x - 30$$

`expand` - приводит к стандартному виду

3. Разложите многочлен на множители

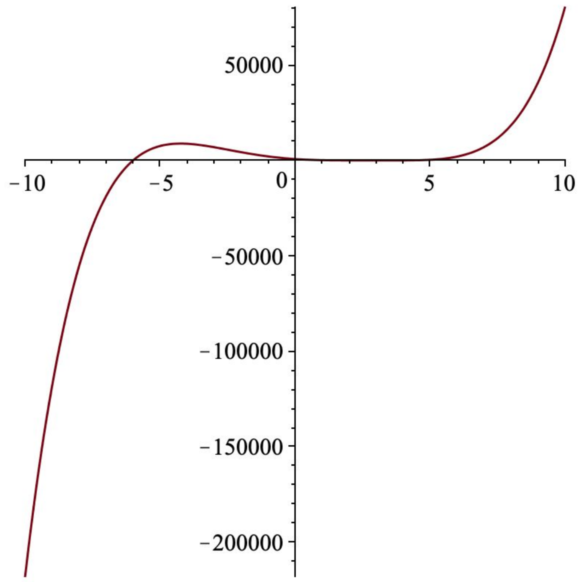
$$f := \left(x^4 + x^3 - 9x^2 + 11x - 4\right);$$
$$factor(f);$$

$$f := x^4 + x^3 - 9x^2 + 11x - 4$$
$$(x + 4)(x - 1)^3$$

4. Постройте график многочлена $P_5(x)$ и найдите все его корни

$p(x) := 2x^5 - 11x^4 - 41x^3 + 404x^2 - 948x + 720;$
$plot(p);$
$solve(p(x) = 0);$

$$p := x \rightarrow 2x^5 - 11x^4 - 41x^3 + 404x^2 - 948x + 720$$




$$2, 3, 4, -6, \frac{5}{2}$$

5. Разложите рациональную дробь на сумму простейших дробей

$f := \dfrac{(2x^4 + 3x^3 + 5x - 4)}{(x^2 + 1) \cdot (x - 3)^2 \cdot (x^2 - 4)};$
$convert(f, parfrac);$

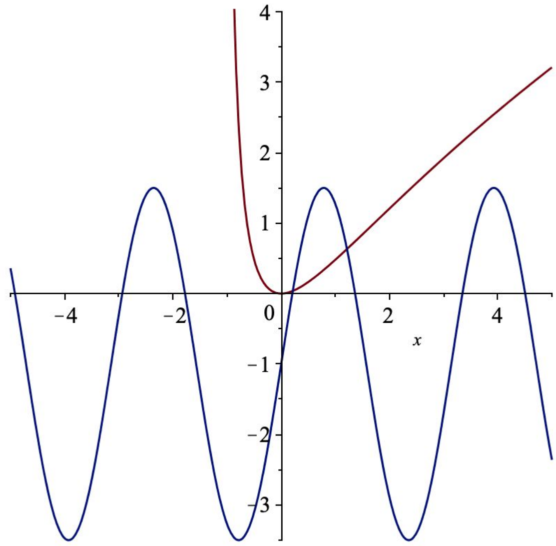
$$\frac{2x^4 + 3x^3 + 5x - 4}{(x-3)^2 (x^2+1)(x^2-4)}$$

$$\frac{3}{250\,(x+2)} + \frac{31}{10\,(x-2)} + \frac{127}{25\,(x-3)^2} - \frac{388}{125\,(x-3)} + \frac{-x+7}{125\,(x^2+1)}$$

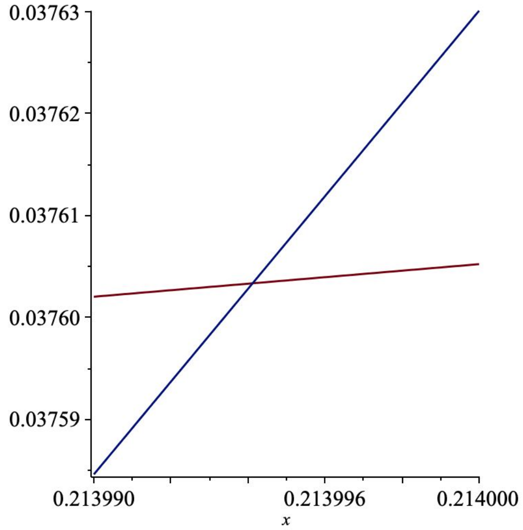
6. Решите графически уравнение и найдите его приближенные корни с точностью $10^{-5}$

$f := \ln(x+1)^2;$
$h := 2.5 \cdot \sin(2x) - 1;$
$plot([f, h], x = -5 ..5);$
$plot([f, h], x = 0.21399 ..0.214);$
$plot([f, h], x = 1.21503 ..1.21506);$

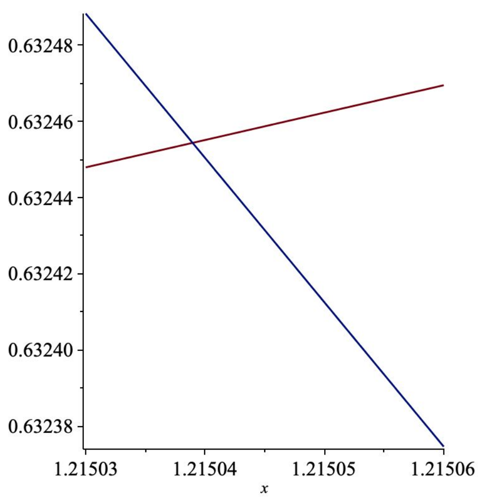
Общий график уравнения:




Приближение первого корня:




Приближение второго корня:

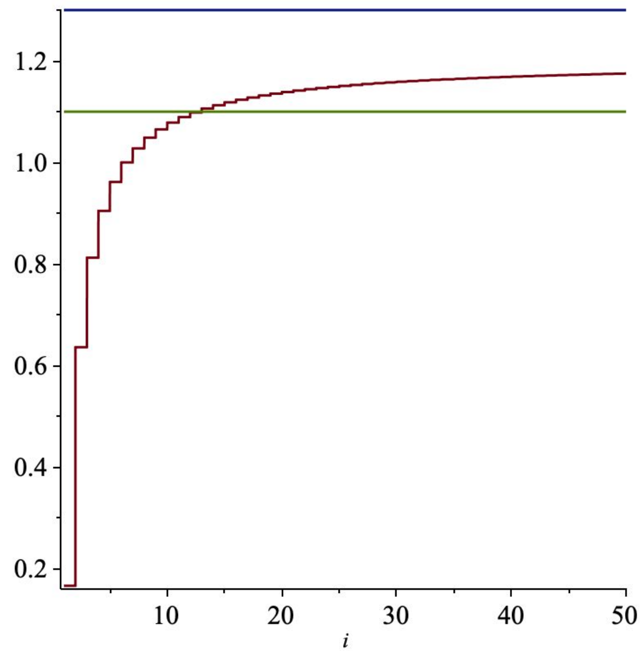



Алгоритм простой: сужали границы для корней до нужной точности

7. Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, определив номер $n_\varepsilon$, начиная с которого все члены последовательности попадут в $\varepsilon$-окрестность $a$.
   Проиллюстрируйте полученный результат с помощью чертежа в Maple, положив $\varepsilon = 0.1$

$$ai := i \to \frac{(6\,i-5)}{5\,i+1};$$
$$a0 := \frac{6}{5};$$
$$EPS := 0.1;$$
$$plot([ai(\mathrm{floor}(i)), a0 + EPS, a0 - EPS], i = 1..50)$$

$$ai := i \mapsto \frac{6\,i-5}{5\,i+1}$$
$$a0 := \frac{6}{5}$$
$$EPS := 0.1$$




Из графика видно, что искомое $n_\varepsilon \approx 14$

8. Вычислите пределы числовых последовательностей

$a := \mathrm{sqrt}(n) \cdot (\mathrm{sqrt}(n+2) - \mathrm{sqrt}(n-3));$
$limit(a, n = \mathrm{infinity});$
$b := \left( \frac{(3n^2 + 4n - 1)}{3n^2 + 2n + 7} \right)^{2n+5};$
$limit(b, n = \mathrm{infinity});$

$$a := \sqrt{n}\left(\sqrt{n+2} - \sqrt{n-3}\right)$$
$$\frac{5}{2}$$
$$b := \left( \frac{3n^2 + 4n - 1}{3n^2 + 2n + 7} \right)^{2n+5}$$
$$e^{\frac{4}{3}}$$

9. Для заданной кусочно-непрерывной функции выполните следующие действия
   a. Определите ее через функциональный оператор и постройте график.

$f := piecewise(x < -\mathrm{Pi}, 5\cos(2x), x \geq -\mathrm{Pi}, 7 \cdot \exp(-0.5x));$
$limit(f, x = -\mathrm{infinity});$
$limit(f, x = \mathrm{infinity});$
$limit(f, x = -\mathrm{Pi}, right);$
$limit(f, x = -\mathrm{Pi}, left);$
$df := diff(f, x);$
$integral := int(f, x, x);$
$plot(\{f, df, integral\}, x = -2\,\mathrm{Pi}\,..1.5\,\mathrm{Pi}, color = [red, green, blue]);$
$int(f(x), x = 1..5) - int(0, x = 1..5);$

$$f := \begin{cases} 5\cos(2x) & x < -\pi \\ 7\,e^{-0.5x} & -\pi \leq x \end{cases}$$
$$-5...5.$$
$$0.$$
$$33.67334167$$
$$5.$$
$$df := \begin{cases} -10.\sin(2.x) & x < -3.141592654 \\ \mathrm{Float}(\mathrm{undefined}) & x = -3.141592654 \\ -3.500000000\,e^{-0.5000000000\,x} & -3.141592654 < x \end{cases}$$
$$integral := \begin{cases} -1.250000000\cos(2.x) & x \leq -3.141592654 \\ 67.34668333\,x + 28.\,e^{-0.5000000000\,x} + 75.63247893 & -3.141592654 < x \end{cases}$$

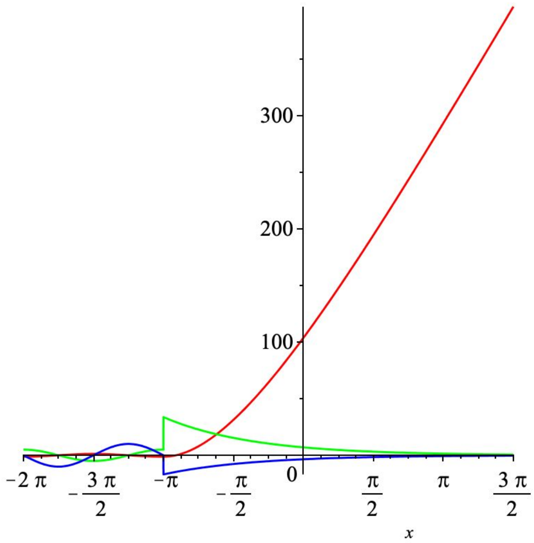
   b. В точке разрыва и на бесконечности найдите односторонние пределы.

С помощью `limit(f, x=+-infinity)`, `limit(f, x=-Pi, left/right)`

   c. Найдите производную и неопределенный интеграл на каждом из промежутков непрерывности.

С помощью `diff(f, x), int(f, x, x)`

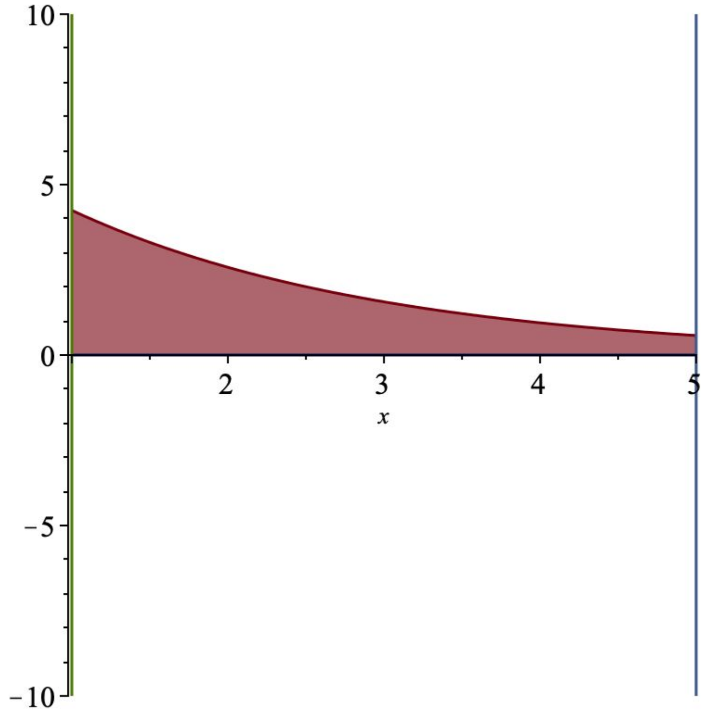
d. Постройте в одной системе координат графики функции, производной и какой-нибудь первообразной.




$$\int_{1}^{5} 7\left(e^{-0.5\,x}\right)(x)\,dx$$

e. Найдите площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции и прямыми $x = 1,\ x = 5,\ y = 0$. Сделайте чертеж.

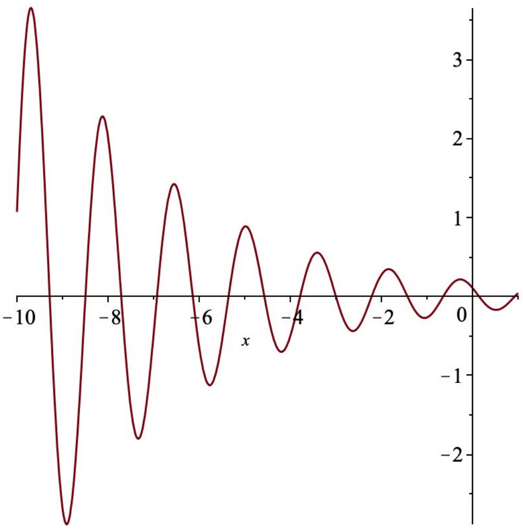
$with(plots):$
$with(plottools):$
$plot([f, 0, [[1, -10], [1, 10]], [[5, -10], [5, 10]]], x = 1\,..5, filled = true);$

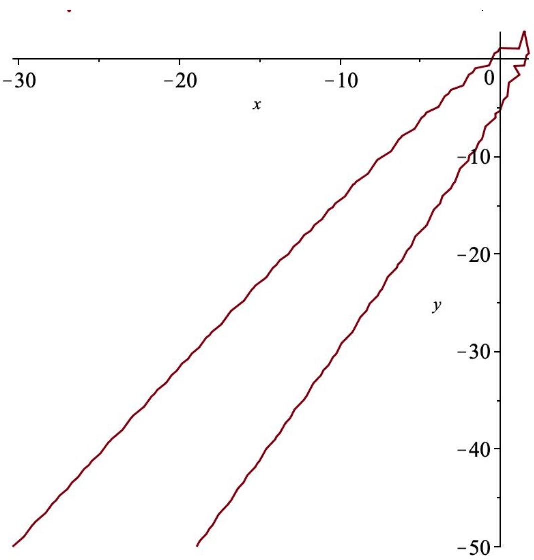


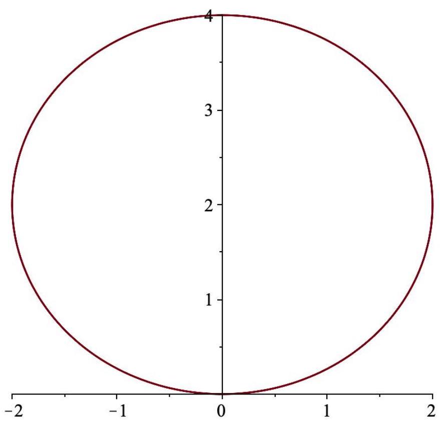

Площадь подсчитана пунктом выше

10. Постройте кривые на плоскости. Для кривой второго порядка (пункт 2) найдите каноническое уравнение с помощью ортонормированного базиса из собственных векторов квадратичной формы

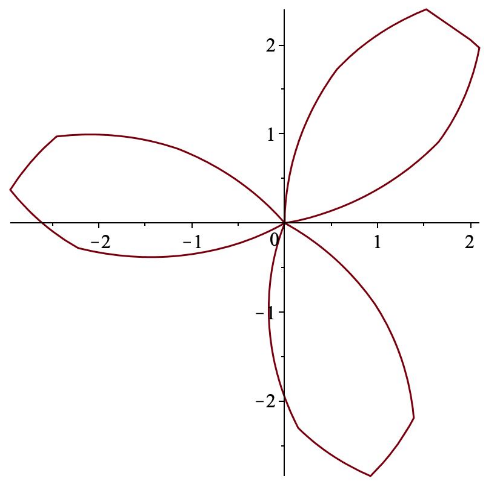
$plot(0.2\cdot\exp(-0.3\cdot x)\cdot\cos(4x+1), x=-10..1);$
$implicitplot(4x^2 - 4x\cdot y + y^2 - 3x + 4y - 7 = 0, x=-50..5, y=-50..5);$
$plot([2\sin(2t), 4\cos^2(t), t=0..2\pi]);$
$implicitplot\left(r = 1 - 2\cos\left(3\cdot\theta + \frac{\pi}{6}\right), r=0..4, \theta=0..2\pi, coords=\text{polar}\right);$





4
3
2
1
−2
−1
0
1
2

2
1
−2
−1
0
1
2
−1
−2

# Лабораторная работа 2

Цель:

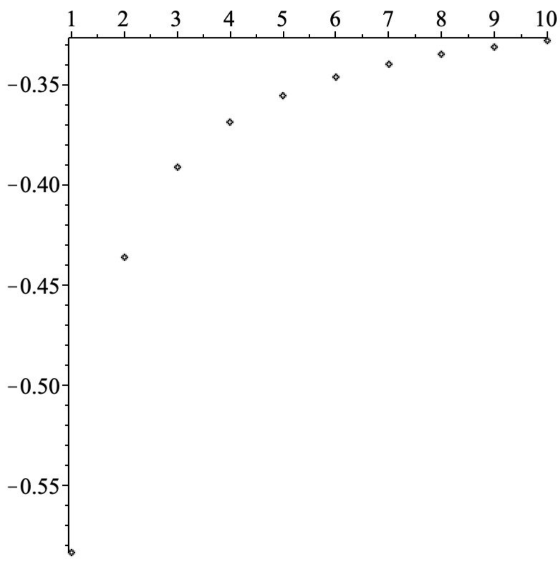
1. Научиться исследовать числовые ряды на сходимость и контролировать результаты с помощью средств системы Maple.
2. Научиться находить область сходимости функциональных рядов, определять тип их сходимости, раскладывать функции в степенные ряды и контролировать результаты с помощью средств системы Maple.
3. Научиться раскладывать функцию в ряд Фурье по тригонометрической системе функций и по ортогональным полиномам (на примере многочленам Лежандра и Чебышёва), определять области сходимости полученного ряда к порождающей их функции, контролировать результаты с помощью средств системы Maple.

1. Постройте в прямоугольной системе координат 10 первых членов ряда и убедитесь в том, что для него выполняется необходимый признах сходимости. Найдите сумму ряда и сравните с результатом, полученным в Maple. Определите минимальный порядок частичной суммы ряда, приближающей сумму ряда с точностью, не превышающей 0,1. Проиллюстрируйте свой результат с помощью графических средств системы Maple.

```
a := k→sum(14/(49 n^2 − 28 n − 45), n = 1 ..k);
values := seq(a(k), k = 1 ..10);
plots[pointplot]({seq([k, a(k)], k = 1 ..10)});
final := a(infinity);
ans := 1 :
for i from 1 while abs(final − a(i)) ≥ 0.1 do ans := i end do:
ans;
convert(a(ans + 1), float);
```

$$a := k \mapsto \sum_{n=1}^{k} \frac{14}{49 n^2 - 28 n - 45}$$

$$values := -\frac{7}{12}, -\frac{497}{1140}, -\frac{483}{1235}, -\frac{791}{2145}, -\frac{469}{1320}, -\frac{651}{1880}, -\frac{2156}{6345}, -\frac{2758}{8235}, -\frac{6867}{20740}, -\frac{1673}{5100}$$




$$final := -\frac{3}{10}$$

$$2$$

$$-0.3910931174$$

С помощью процедуры `for i from 1 while abs(final-a(i)) >= 0.1 do ans := i end do:` находится `i` частичная сумма ряда, отклоняющаяся на 0.1 от предела

2. Докажите, что ряд удовлетворяет условиям теоремы Лейбница. Найдите минимальный порядок частичной суммы ряда, приближающей его сумму с точностью $\alpha$, и сравните с результатом, полученным в СКА. Проиллюстрируйте свой результат с помощью графических средств Maple.

$$a := n \to \frac{1}{(2n+1)!}:$$
$$c := k \to sum\left((-1)^n \cdot a(n), n = 1..k\right):$$
$$EPS := 0.0001:$$
$$limit(a(n), n = \text{infinity});$$
$$a(t) \geq a(t+1);$$
$$c(\text{infinity});$$
$ans := 1$ : **for** $i$ **from** 1 **while** abs($convert(c(\text{infinity}) - c(i), float)$) $\geq EPS$ **do** $ans := i$ **end do**:
$ans$;
$c(ans)$;

$$0$$
$$\frac{1}{(2t+3)!} \leq \frac{1}{(2t+1)!}$$
$$-1 + \sin(1)$$
$$2$$
$$-\frac{19}{120}$$

`limit(a(n), n=infinity)=0`, значит ряд сходится. Порядок находится аналогично предыдущему заданию

3. Докажите справедливость равенства, убедившись в сходимости соответствующего числового ряда с помощью предельных признаков Даламбера или Коши. Проведите контрольные расчеты в системе Maple.

$$a := n \to \frac{n^n}{(n!)^2};$$
$$limit\left(\frac{a(n+1)}{a(n)}, n = \text{infinity}\right);$$
$$limit\left(a^{\left(\frac{1}{n}\right)}, n = \text{infinity}\right);$$

$$a := n \mapsto \frac{n^n}{n!^2}$$
$$0$$
$$1$$

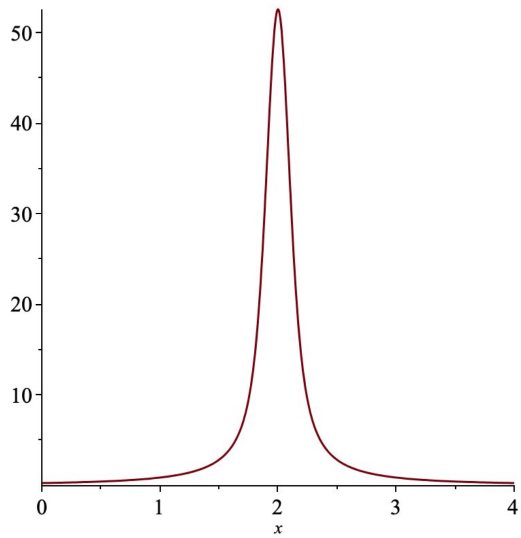
1) по Даламберу
2) по Коши

4. Найдите область сходимости функционального ряда, постройте график его суммы и сравните с полученным результатом

$$a := n \rightarrow \frac{(n+1)}{2 \cdot n} \cdot \frac{1}{\left(x^2 - 4 \cdot x + 5\right)^n};$$
$$simplify\left( limit\left( \frac{a(t+1)}{a(t)}, t = \text{infinity} \right) \right);$$
$$solve\left(x^2 - 4 \cdot x + 5 > 1\right) \text{ assuming } x :: float;$$
$$plot(sum(a(n), n = 1 ..100), x = 0 ..4);$$

$$a := n \mapsto \frac{n+1}{2\, n\, \left(x^2 - 4\, x + 5\right)^n}$$
$$\frac{1}{x^2 - 4\, x + 5}$$
$$(-\infty, 2), (2, \infty)$$

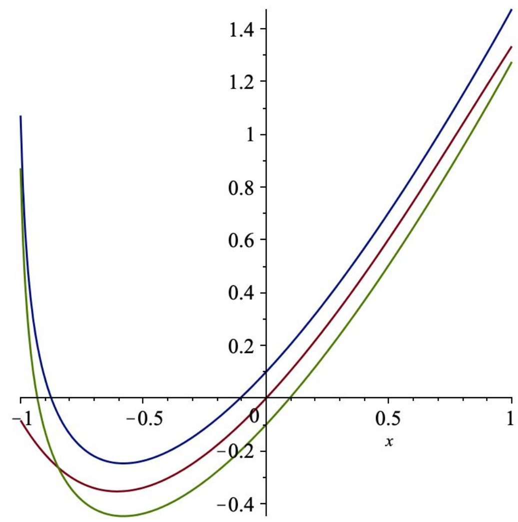
Для нахождения областей сходимость, необходимо найти $R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|}$.




5. Докажите равномерную сходимость функционального ряда на отрезке $[0,\ 1]$. Для контроля результата выполните расчеты в системе Maple и найдите наименьшее значение $n_{min}$, при котором $|r_{n_{min}}(x)| < 0.1\ \forall x \in [0,\ 1]$. Убедитесь, что график частичной суммы $S_{n_{min}}$ ряда не выходит на отрезке $[0,\ 1]$ за пределы 0.2-полосы, центрированной относительно графика суммы ряда.

$$a := k \rightarrow sum\left( \frac{(-1)^n \cdot x^n}{3 \cdot n - 4}, n = 1 .. k \right);$$
$$solve\left( \frac{1}{3 \cdot n - 4} < 0.1 \right) \text{ assuming } n :: posint;$$
$$f := x \rightarrow subs(x = x, a(100));$$
$$plot([subs(x = x, a(5)), f(x) + 0.1, f(x) - 0.1], x = -1 ..1);$$

$$a := k \mapsto \sum_{n=1}^{k} \frac{(-1)^n x^n}{3\, n - 4}$$
$$(-\infty, 1.333333333), (4.666666667, \infty)$$
$$f := x \mapsto subs(x = x, a(100))$$




6. Вычислите интеграл с точностью до 0,001 и проконтролируйте результат с помощью расчетов в системе Maple. Обоснуйте свое решение.

$$f := x \rightarrow \frac{\ln\left(1+\frac{x}{5}\right)}{x};$$

$$goal = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x;$$

$ans := 0.0;$
$d\_x := 0.001;$
**for** $i$ **from** $d\_x$ **by** $d\_x$ **to** 1 **do** $ans := ans + f(i) \cdot d\_x$ **end do**:
$ans;$

$$convert\left(\mathrm{abs}\left(ans - \int_0^1 \frac{\ln\left(1+\frac{x}{5}\right)}{x}\mathrm{d}x\right), float\right);$$

$$f := x \mapsto \frac{\ln\left(1+\frac{x}{5}\right)}{x}$$

$$goal = -\mathrm{dilog}\left(\frac{6}{5}\right)$$

$$ans := 0.$$

$$d\_x := 0.001$$

$$0.1907912988$$

$$8.8390\ 10^{-6}$$

Раз не указан метод вычисления интеграла, то посчитаем его по определению!

7. Для $2\pi$-периодической кусочно-непрерывной функции $f(x)$ по ее аналитическому определению на главном периоде получите разложение в тригонометрический ряд Фурье. Убедитесь в правильности результата, проведя расчеты в системе Maple. Создайте пользовательскую процедуру-функцию, осуществляющую построение тригонометрического ряда Фурье для произвольной функции, удовлетворяющей теореме Дирихле. Постройте в одной системе координат на промежутке $[-\pi,\ \pi]$

график заданной функции $f(x)$ , графики частичных сумм $S_1(x),\ S_2(x),\ S_3(x)$ ряда и его суммы $S(x)$. Постройте графики частичных сумм $S_1(x),\ S_2(x),\ S_{10}(x)$ ряда и график его суммы $S(x)$ на промежутке $[-3\pi,\ 3\pi]$. Сравните полученные чертежи. Анимируйте процесс построения графиков сумм ряда, взяв в качестве параметра порядковый номер частичной суммы.

$$f := x \rightarrow piecewise\left(-\mathrm{Pi} \le x < 0, \frac{x}{2} - \frac{\mathrm{Pi}}{4}, 0 \le x < \mathrm{Pi}, \frac{\mathrm{Pi}}{4}\right);$$

$$plot(f(x), x=-\mathrm{Pi}..\mathrm{Pi});$$

$$a0 := \frac{1}{\mathrm{Pi}} \cdot int(f(x), x=-\mathrm{Pi}..\mathrm{Pi});$$

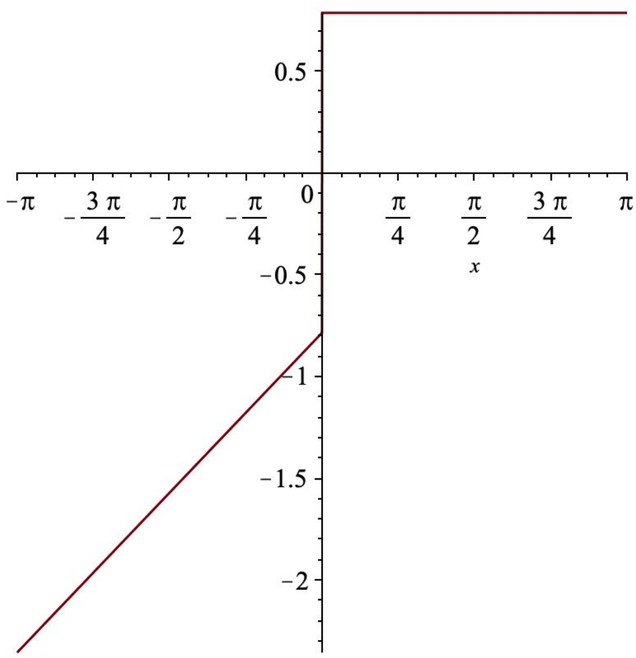
$$an := \frac{1}{\mathrm{Pi}} \cdot int(f(x) \cdot \cos(n \cdot x), x=-\mathrm{Pi}..\mathrm{Pi}) \text{ assuming } n :: posint;$$

$$bn := \frac{1}{\mathrm{Pi}} \cdot int(f(x) \cdot \sin(n \cdot x), x=-\mathrm{Pi}..\mathrm{Pi}) \text{ assuming } n :: posint;$$

$$Sk := (k, x) \rightarrow \frac{a0}{2} + sum(an \cdot \cos(n \cdot x) + bn \cdot \sin(n \cdot x), n=1..k);$$

$$plot([Sk(1000, x), f(x), Sk(1, x), Sk(2, x), Sk(3, x)], x=-3\,\mathrm{Pi}..\mathrm{Pi}, discont=true);$$
$$plot([Sk(1000, x),\ Sk(1, x), Sk(3, x), Sk(10, x)], x=-3\,\mathrm{Pi}..\mathrm{Pi}, discont=true);$$

$$f := x \mapsto \begin{cases} \frac{x}{2} - \frac{\pi}{4} & -\pi \le x < 0 \\ \frac{\pi}{4} & 0 \le x < \pi \end{cases}$$

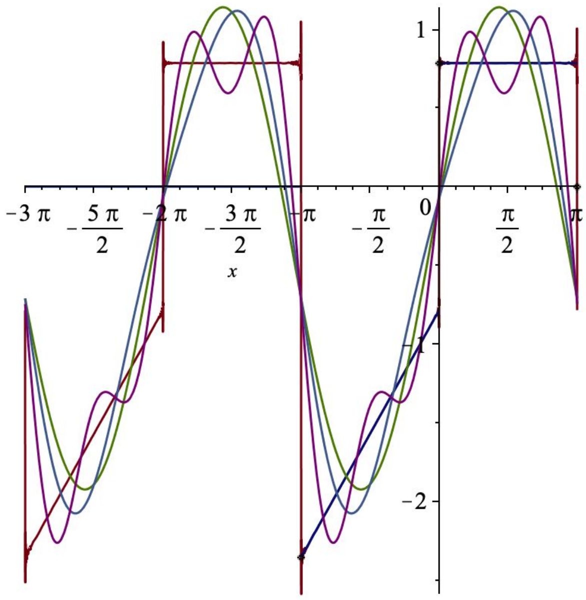


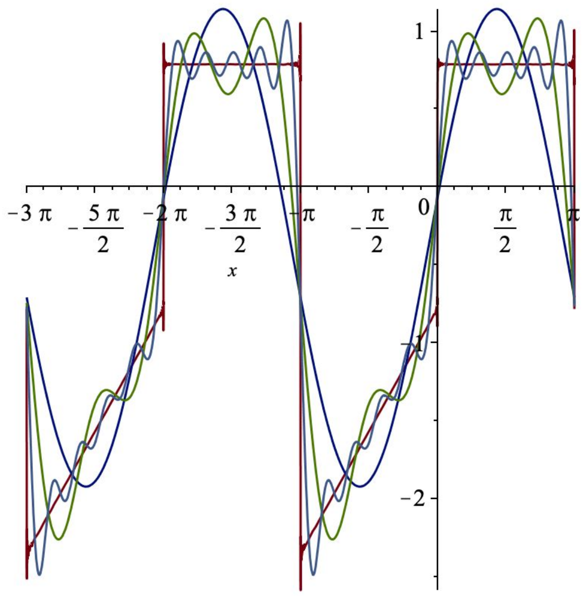
$$a0 := -\frac{\pi}{4}$$

$$an := -\frac{(-1)^n - 1}{2\pi n^2}$$

$$bn := \frac{-\frac{\pi\left(3(-1)^n - 1\right)}{4n} - \frac{\pi\left((-1)^n - 1\right)}{4n}}{\pi}$$

$$Sk := (k, x) \mapsto \frac{a0}{2} + \sum_{n=1}^{k} \left(an \cos(n x) + bn \sin(n x)\right)$$




(Без анимации)

8. Разложите в ряд Фурье периодическую функцию $y = f(x)$, заданную на промежутке $(0,\ x_1)$ формулой $y = ax + b$, а на $[x_1,\ x_2]$ $y = c$. Убедитесь в правильности результата, проведя расчеты в системе Maple. Воспользуйтесь созданной ранее процедурой (задание 1). Постройте в одной системе координат график заданной функции $f(x)$, графики частичных сумм $S_1(x),\ S_2(x),\ S_3(x)$ ряда и его суммы $S(x)$ на промежутке $[0,\ x_2]$. Постройте график суммы ряда $S(x)$ на промежутке $[-2x_2,\ 2x_2]$. Сравните полученные чертежи.
9. Для графически заданной на промежутке функции как комбинации квадратичной и линейной постройте три разложения в тригонометрический ряд Фурье, считая, что функция определена:
   - на полном периоде,
   - на полупериоде (является четной),
   - на полупериоде (является нечетной).

Убедитесь в правильности результата, проведя расчеты в системе Maple. Постройте для каждого ряда график его суммы на промежутках, превышающих длину заданного в 3-5 раз. Сравните с графиками порождающих их функций.

$$f := x \rightarrow piecewise\left(0 \le x \le 2,\ -x^2 + 2\,x - 1,\ 2 < x \le 5,\ \frac{1}{3}x - \frac{5}{3}\right);$$

$$plot(f(x), x = 0\,..5, discont = true);$$

$$right := 5:$$

$$left := 2:$$

$$a0 := \frac{1}{left}\int_0^{right} f(x)\,\mathrm{d}x:$$

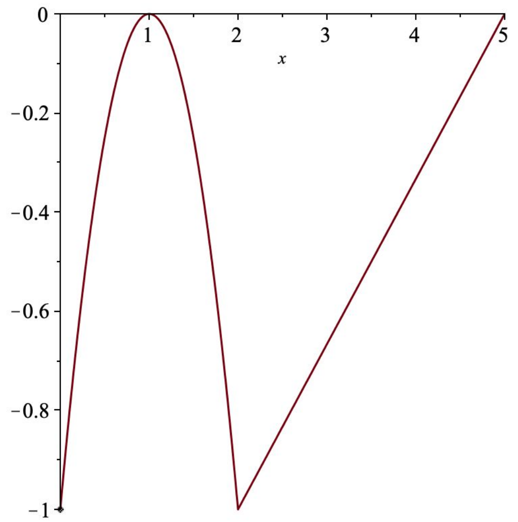
$$an := \frac{1}{left}\int_0^{right} f(x)\cos\left(\frac{n\cdot \mathrm{Pi}\cdot x}{left}\right)\mathrm{d}x:$$

$$bn := \frac{1}{left}\int_0^{right} f(x)\sin\left(\frac{n\cdot \mathrm{Pi}\cdot x}{left}\right)\mathrm{d}x:$$

$$Sn := (k, x) \rightarrow \frac{a0}{2} + sum\left(an\cdot\cos\left(\frac{n\cdot \mathrm{Pi}\cdot x}{left}\right) + bn\cdot\sin\left(\frac{n\cdot \mathrm{Pi}\cdot x}{left}\right), n = 1\,..k\right):$$

$$plot([f(x), Sn(3, x), Sn(20, x)], x = -10\,..10, discont = true);$$

$$f := x \mapsto \begin{cases} -x^2 + 2\,x - 1 & 0 \le x \le 2 \\ \frac{x}{3} - \frac{5}{3} & 2 < x \le 5 \end{cases}$$




С помощью `piecewise` задаем кусочно-непрерывную функцию.

Определим вспомогательную функцию:

$$try\_fourier := \mathbf{proc}\ (f, x1, x2)$$
$$\mathbf{local}\ a0, an, bn, Sk, T;$$

$$T := \frac{\mathrm{abs}(x1 - x2)}{2};$$

$$a0 := \frac{1}{T} \cdot int(f(x), x = x1\ ..x2);$$

$$an := \frac{1}{T} \cdot int\left(f(x) \cdot \cos\left(\frac{n \cdot \mathrm{Pi}}{T} \cdot x\right), x = x1\ ..x2\right);$$

$$bn := \frac{1}{T} \cdot int\left(f(x) \cdot \sin\left(\frac{n \cdot \mathrm{Pi}}{T} \cdot x\right), x = x1\ ..x2\right);$$

$$Sk := (k, x) \rightarrow \frac{a0}{2} + sum\left(an \cdot \cos\left(\frac{n \cdot \mathrm{Pi}}{T} \cdot x\right) + bn \cdot \sin\left(\frac{n \cdot \mathrm{Pi}}{T} \cdot x\right), n = 1\ ..k\right);$$

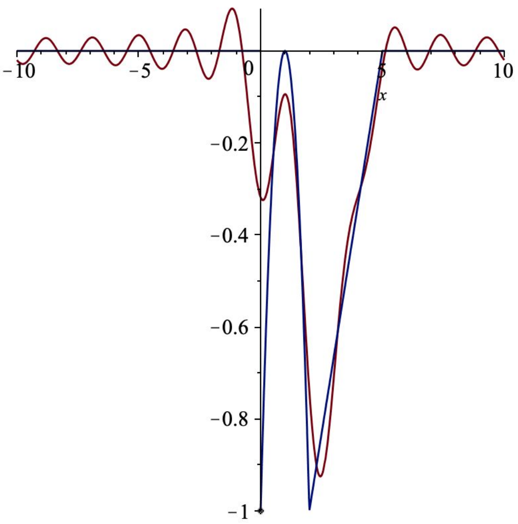
$$plot([Sk(10, x), f(x)], x = (x1)\ ..(x2), discont = true)$$

$$\mathbf{end}$$

Затем зададим формулы для ряда Фурье и отрисуем итоговую сумму:

*try_fourier*( *f*, −10, 10 );

$$f := x \mapsto \begin{cases} -x^2 + 2x - 1 & 0 \le x \le 2 \\ \frac{x}{3} - \frac{5}{3} & 2 < x \le 5 \end{cases}$$



# Лабораторная работа 3

Цель:

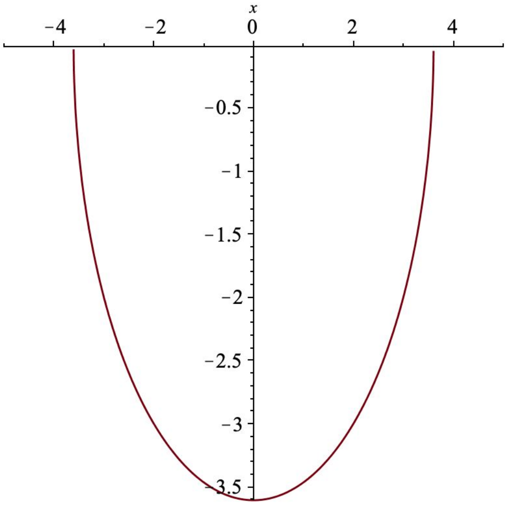
1. Научиться графически и аналитически находить общее и частное решение основных типов уравнений 1-го порядка, строить для геометрических задач простейшие модели в виде дифференциального уравнения 1-го порядка и контролировать результаты с помощью средств системы Maple.
2. Научиться находить общее и частное решение некоторых уравнений высших порядков и контролировать результаты с помощью средств системы Maple.
3. Научиться строить фазовый портрет нормальной системы 2-го порядка в точке покоя, аналитически находить общее и частное решение линейных систем методами Лагранжа, Эйлера, Даламбера и контролировать результаты с помощью средств системы Maple.
4. Научиться находить изображение Лапласа для функций-оригиналов, решать обратную задачу, применять операторный метод для решения задачи Коши и контролировать результаты с помощью средств системы Maple.

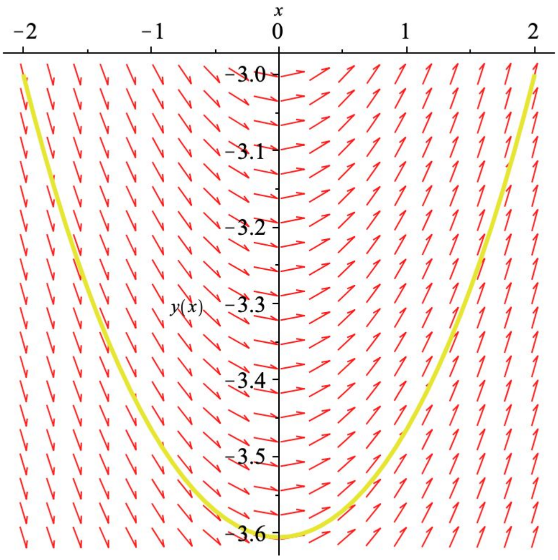
1. Для данного дифференциального уравнения методом изоклин постройте интегральную кривую, проходящую через точку М

```
ode := y(x)·(diff(y(x),x)) = -x;
solution := dsolve({ode, y(-2) = -3});
plot(-sqrt(-x^2 + 13), x = -5 .. 5);
DEplot(ode, y(x), x = -2 .. 2, [y(-2) = -3]);
```

$$ode := y(x)\left(\frac{d}{dx}\,y(x)\right) = -x$$

$$solution := y(x) = -\sqrt{-x^2 + 13}$$





2.

a. Найдите линию, проходящую через точку $M_0$, и обладаю- щую тем свойством, что в любой ее точке $M$ нормальный вектор $MN$ с концом на оси $Oy$ имеет длину, равную $a$, и образует острый угол с положительным направлением оси $Oy$. Сделайте чертеж.

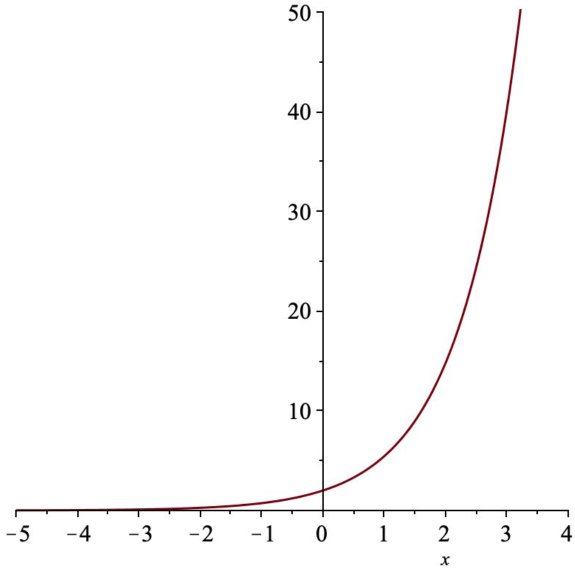
b. Найдите линию, проходящую через точку $M_0$, и обладающую тем свойством, что в любой ее точке $M$ касательный вектор $MN$ с концом на оси $Ox$ имеет проекцию на ось $Ox$, обратно пропорциональную абсциссе точки $M$ . Коэффициент пропорциональности равен $a$ . Сделайте чертеж.

3. Найдите общий интеграл уравнения. Постройте на одном чертеже вблизи особой точки уравнения поле направлений и какую-либо интегральную кривую. Сделайте вывод о типе особой точки
4. Найдите решение задачи Коши. Сделайте чертеж интегральной кривой

```
ode := 2·( diff(y(x), x) + x·y(x) ) = (1 + x)·exp(−x)·y(x)^2;
res := dsolve({ode, y(0) = 2});
plot(2/exp(−x), x = −5 .. 5);
```

$$ode := 2\,\frac{d}{dx}\,y(x) + 2\,x\,y(x) = (1+x)\,e^{-x}\,y(x)^2$$

$$res := y(x) = \frac{2}{e^{-x}}$$




5. -
6. Найдите все решения уравнения. Постройте в одной системе координат график особого решения и интегральных кривых при целых значениях произвольной постоянной от -3 до 3

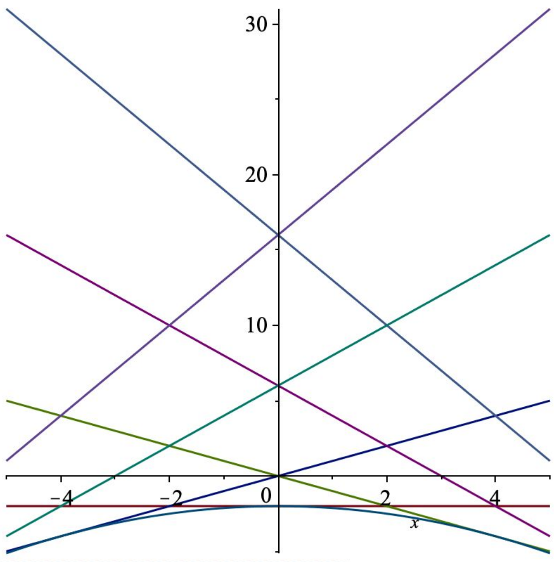
```
ode := y(x) = x·(diff(y(x), x)) + 2·(diff(y(x), x))^2 − 2;
res := dsolve(ode);
y1(x) := -(1/8)·x^2 − 2;
y2(x) := 2·C1^2 + C1·x − 2;
plot({seq(subs(C1 = n, y2(x)), n = −3 .. 3), y1(x)}, x = −5 .. 5);
```

$$ode := y(x) = x\left(\frac{d}{dx}\,y(x)\right) + 2\left(\frac{d}{dx}\,y(x)\right)^2 - 2$$

$$res := y(x) = -\frac{x^2}{8} - 2, y(x) = 2\,\_C1^2 + x\,\_C1 - 2$$

$$y1 := x \rightarrow -\frac{1}{8}\,x^2 - 2$$

$$y2 := x \rightarrow 2\,C1^2 + C1\,x - 2$$




7. -
8. Найдите общее решение уравнения и сравните с результатом, полученным в системе Maple

```
restart;
ode := x^2·diff(diff(y(x), x), x) + x·diff(y(x), x) = 1;
dsolve(ode);
```

$$ode := x^2\left(\frac{d^2}{dx^2}\,y(x)\right) + x\left(\frac{d}{dx}\,y(x)\right) = 1$$

$$y(x) = \frac{\ln(x)^2}{2} + \_C1\ln(x) + \_C2$$

9. Найдите общее решение дифференциального уравнения.

```
restart;
ode := diff(diff(y(x), x), x) - 4 diff(y(x), x) + 8 y(x) = e^x(5 sin(x) - 3 cos(x));
solution := dsolve(ode, y(x));
 Order := 2;
 solution := dsolve(ode, y(x), type=series) :
 cond := y(0) = 1, D(y)(0) = 1;
 solution := dsolve({ode, cond}, y(x)) :
y1 := rhs(%);
 dsolve({ode, cond}, y(x), series) :
convert(%, polynom);
y2 := rhs(%);
```

$$ode := \frac{d^2}{dx^2}\, y(x) - 4\, \frac{d}{dx}\, y(x) + 8\, y(x) = e(5 \sin(x) - 3 \cos(x))^x$$

$$solution := y(x) = e^{2x} \sin(2x)\, \_C2 + e^{2x} \cos(2x)\, \_C1 + \frac{1}{2}\left(e^{2x}\left(\left(\int \cos(2x)\, e(5 \sin(x) - 3 \cos(x))^x\, e^{-2x}\, dx\right) \sin(2x) - \left(\int \sin(2x)\, e(5 \sin(x) - 3 \cos(x))^x\, e^{-2x}\, dx\right) \cos(2x)\right)\right)$$

$$Order := 2$$

$$cond := y(0) = 1, D(y)(0) = 1$$

$$y1 := -\frac{e^{2x} \sin(2x)}{2} + e^{2x} \cos(2x) + \frac{1}{2}\left(e^{2x}\left(\left(\int_0^x \cos(2\, \_z1)\, e(5 \sin(\_z1) - 3 \cos(\_z1))^{\_z1}\, e^{-2\, \_z1}\, d\_z1\right) \sin(2x) - \left(\int_0^x \sin(2\, \_z1)\, e(5 \sin(\_z1) - 3 \cos(\_z1))^{\_z1}\, e^{-2\, \_z1}\, d\_z1\right) \cos(2x)\right)\right)$$

$$y(x) = 1 + x$$

$$y2 := 1 + x$$

10.

# Лабораторная работа 4

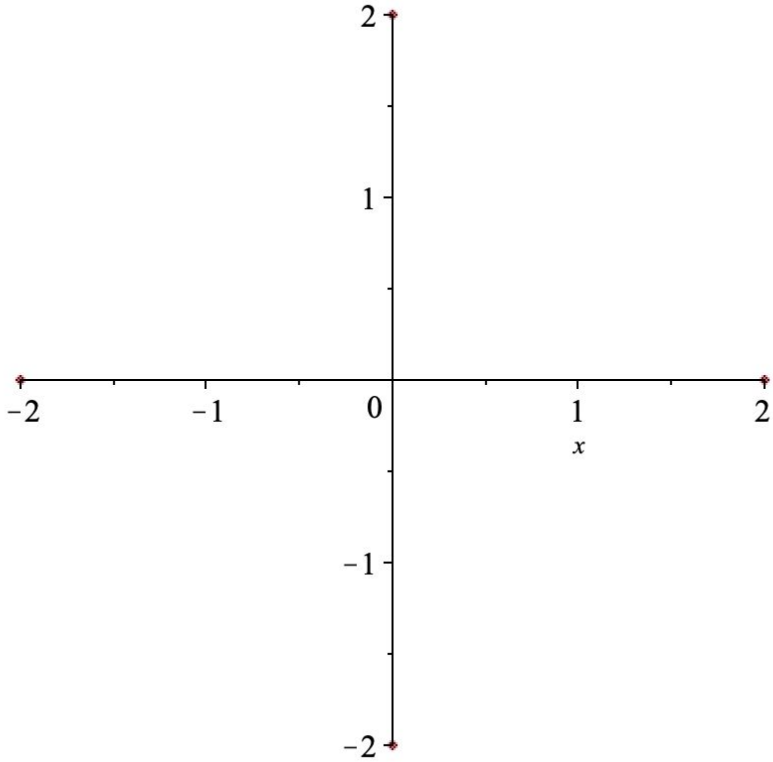
Цель: Научиться решать простейшие задачи теории функций комплексного переменного и контролировать полученные результаты с помощью средств системы Maple

1. Найдите все значения корня «вручную», в Maple и постройте соответствующие им точки в комплексной плоскости.

```
restart : with(plots) :
z := x^4 - 16;
t := fsolve(z, x, complex);
complexplot([t], x=-2 ..2, style=point);
```

$$z := x^4 - 16$$

$$t := -2.00000000000000,\ -2.000000000\,I,\ 2.000000000\,I,\ 2.00000000000000$$

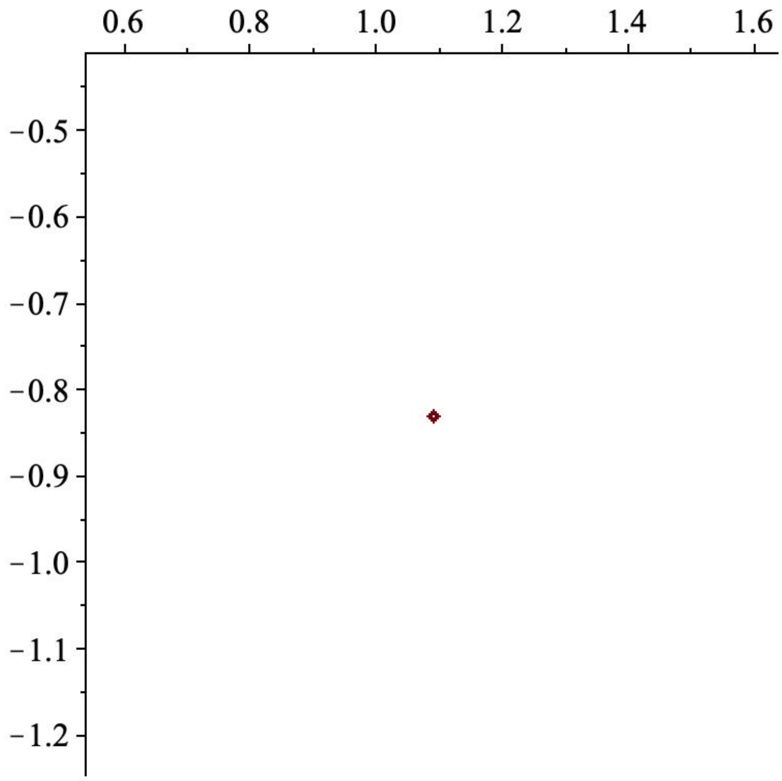



2. Представьте выражение в алгебраической форме. Изобразите точки, соответствующие аргументу и значению функции, в одной системе координат.

$s := \cos\left(\frac{\mathrm{Pi}}{4} + I\right);$
$evalc(s);$
$with(plots):$
$complexplot(s, -\mathrm{Pi} .. \mathrm{Pi}, style = point);$

$$s := \cos\left(\frac{\pi}{4} + \mathrm{I}\right)$$

$$\frac{\sqrt{2}\cosh(1)}{2} - \frac{\mathrm{I}\sqrt{2}\sinh(1)}{2}$$




3. Представьте выражение в алгебраической форме и получите результат в Maple. Найдите его главное значение.

```
s := arcsin(17/8);
evalc(s);
im := Im(s);
re := Re(s);
phi := simplify(arctan(im/re));
evalf(%);
```

$$s := \arcsin\left(\frac{17}{8}\right)$$

$$\frac{\pi}{2} - 2\,\mathrm{I}\ln(2)$$

$$im := -2\ln(2)$$

$$re := \frac{\pi}{2}$$

$$\phi := -\arctan\left(\frac{4\ln(2)}{\pi}\right)$$

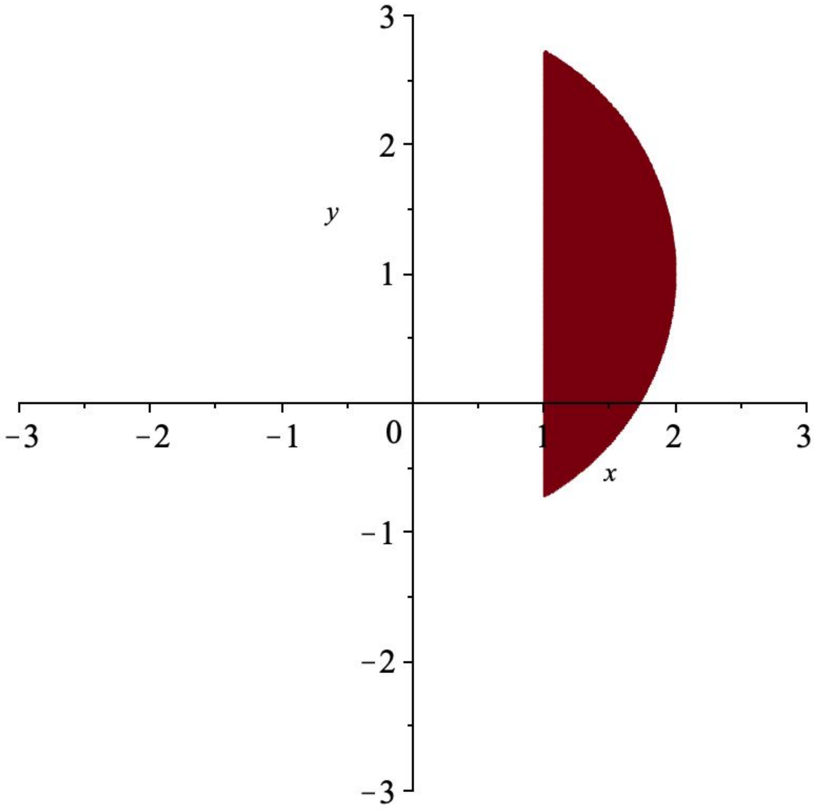
$$-0.7230858681$$

4. Изобразите области, заданные неравенствами.

   a.

```
restart;
z := x + I·y;
plots:-implicitplot( piecewise( (abs(z - I) ≤ 2) and (Re(z) > 1),
                 false, true),
          x=-3..3, y=-3..3,
          gridrefine=3, view=[-3..3,-3..3] );
```

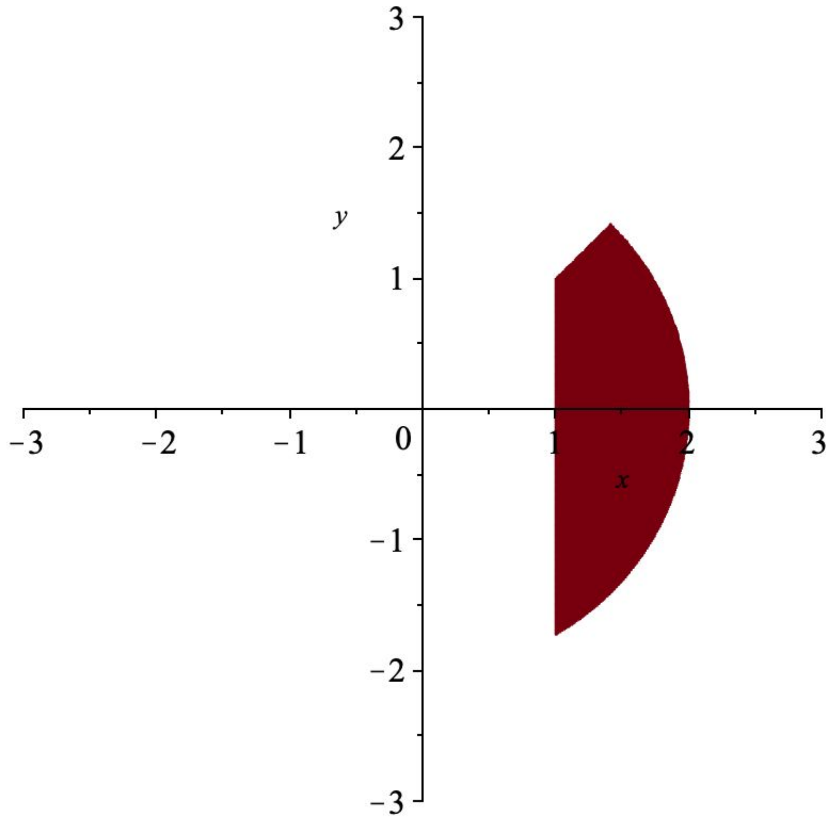
$$z := x + \mathrm{I}\,y$$



b.

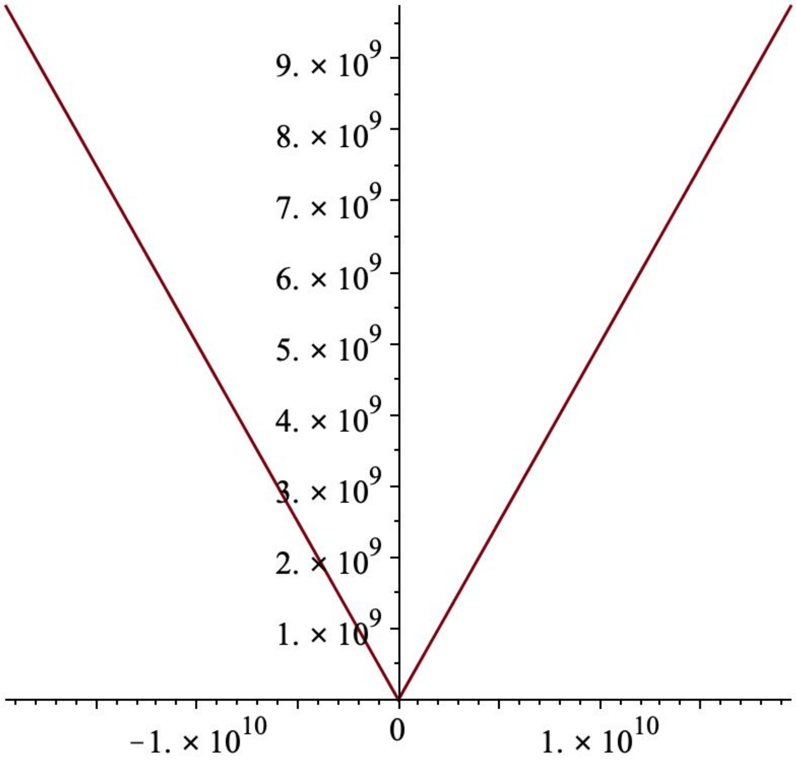
```
restart;
z := x + I·y;
plots:-implicitplot( piecewise( (abs(z) < 2) and (Re(z) ≥ 1) and (argument(z) < Pi/4),
                false, true ),
        x =-3 ..3, y =-3 ..3,
        gridrefine = 3, view = [ -3 ..3, -3 ..3 ] );
```

$$z := x + \mathrm{I}\, y$$




5. Определите вид кривой. Сделайте чертеж.

```
restart;
with(plots) :
z := -4 tan - I·2·sec :
complexplot(z, -Pi/2 .. Pi/2)
```




6. -
7. -
8. Найдите все лорановские разложения заданной функции по степеням $z$. Получите ответ в системе Maple

```
restart;
with(numapprox) :
s := (7 z - 196)/(z^4 + 7 z^3 - 98 z^2) :
laurent(s, z);
```

$$2z^{-2} + \frac{1}{14}z^{-1} + \frac{5}{196} + \frac{1}{392}z + \frac{17}{38416}z^2 + \frac{31}{537824}z^3 + O(z^4)$$

9. Найдите все лорановские разложения данной функции по степеням $z - z_0$

```
restart;
with(numapprox) :
s := (z-1)/(z(z + 1)) :
z0 := 2 - I:
subs(z - 2 + I=z - z0, laurent(s, z=2 - I, 3));
Error, (in numapprox:-laurent) unable to compute Laurent series
```

По каким-то причинам, данный ряд не захотел разложиться

10. Заданную функцию разложите в ряд Лорана в окрестности точки $z_0$

```
restart;
with(numapprox) :
s := sin(5 z/(z - 2 I));
laurent(s, z=2 I)
```

$$s := \sin\left(\frac{5\,z}{z - 2\,I}\right)$$

```
Error, (in numapprox:-laurent) unable to compute Laurent series
```

Аналогично здесь

11.