

Algoritmo di coordinamento di sciame di droni
Università di Pisa
Ingegneria Informatica

Gianluca Mondini

19 luglio 2024

Prefazione

L'obiettivo di questa trattazione è di illustrare l'implementazione di un insieme di classi `OpenModelica` con lo scopo di controllare un insieme di droni, per permettere ad esso di disporsi in modo equo su una data superficie.

In particolare, si vedrà l'implementazione dell'algoritmo di Lloyd.

È prevista la realizzazione di un modulo nell'ambiente `OpenModelica` che permetta di simulare il suddetto algoritmo; più avanti verranno illustrate parti di codice e verranno fornite informazioni relative alla sua implementazione.

Indice

1	Il drone e i suoi componenti	6
1.1	Ipotesi e semplificazioni	7
2	Diagramma di Voronoi	8
2.1	Definizione	8
2.2	Tassellazione di Voronoi Centroidale	9
3	L'algoritmo di Lloyd	12
3.1	Descrizione dell'algoritmo	12
3.2	Esempio di applicazione dell'algoritmo	12
3.3	Concezione intuitiva della convergenza dell'algoritmo	14
3.4	Esecuzione dell'algoritmo	14
4	Prototipazione	15
4.1	Codifica	15
4.2	Testing	15
5	Implementazione in <i>OpenModelica</i>	17
5.1	OpenModelica	17
5.2	Un approccio funzionale	18
5.3	Diagramma delle dipendenze	20
5.4	Scelte implementative	22
5.5	Rappresentazione del punto geometrico	22
5.6	Verifica della sovrapposizione di due punti	23
5.7	Rappresentazione del segmento geometrico	23
5.8	Verifica della sovrapposizione di due segmenti	24
5.9	Linea	24
5.10	Conversione da linea a segmento	25
5.11	Intersezione tra segmenti	25
5.12	Asse di un segmento	27
5.13	Centro di massa	28
5.14	Ricerca ed eliminazione dei segmenti in eccesso	30
5.15	La funzione <code>VoronoiCell</code>	33
5.15.1	Esempio grafico di applicazione dell'algoritmo di Voronoi	34

5.16	La funzione <code>TargetPos</code>	39
5.17	Testing del codice	39
6	Conclusioni	42

Capitolo 1

Il drone e i suoi componenti



Possiamo schematizzare, ai fini di questa trattazione, un *drone* mediante tre componenti: il *centro fisico*, il *controllo di volo* e il *controllo della traiettoria*.

Centro fisico Il centro fisico è un'astrazione che rappresenta il rapporto del drone con il mondo esterno. Vengono qui considerati parametri come la massa, la velocità, l'accelerazione, la posizione, la rotazione, la velocità di rotazione dei motori e la potenza ad essi fornita.

Controllo di volo Il centro di volo considera il drone come un velivolo, e utilizzando i dati forniti dal centro fisico e dal controllo della traiettoria permette il controllo della direzione, della quota e della velocità.

Controllo della traiettoria Componente centrale della trattazione, il controllo della traiettoria ha la funzione di comunicare al centro di volo la posizione da raggiungere.

Nel nostro modello astratto, il controllo della traiettoria si orienta utilizzando la funzione **TargetPos**, la cui ideazione e implementazione viene illustrata in seguito.

1.1 Ipotesi e semplificazioni

La trattazione e l'implementazione richiedono che vengano effettuate alcune ipotesi semplificative in relazione al mondo esterno nel quale l'algoritmo andrà ad operare. In particolare, si suppone che:

- l'area nella quale il drone opera sia un poligono convesso
- non siano presenti degli ostacoli all'interno dell'area, in quanto questi non verrebbero considerati dal controllo di traiettoria portando il drone a una collisione
- il mondo nel quale il drone opera sia bidimensionale, ovvero si suppone che non sia definita una terza componente z per le tuple rappresentanti la posizione. Nell'implementazione pratica, quest'ipotesi può essere gestita mediante l'utilizzo di un valore costante per la coordinata z (ad esempio ogni drone si trova a 650 m sul livello del mare) oppure tale coordinata può essere determinata in funzione della distanza dal suolo.

La trattazione della funzione **TargetPos** richiede la conoscenza di aspetti teorici legati all'algoritmo di Lloyd, e conseguentemente, al diagramma di Voronoi.

Capitolo 2

Diagramma di Voronoi

2.1 Definizione

Per introdurre la trattazione di questa tesi, è per prima cosa necessario definire il concetto di diagramma di Voronoi.

Si definisce quindi un **diagramma di Voronoi** come un particolare tipo di decomposizione di uno spazio metrico determinata dalle distanze rispetto ad un determinato insieme discreto di elementi dello spazio.

Nel caso più semplice e comune, quello del piano, dato un insieme finito di punti S , il diagramma di Voronoi per S è la partizione del piano che associa una regione $V(p)$ ad ogni punto $p \in S$ in modo tale che tutti i punti all'interno del perimetro di $V(p)$ siano più vicini a p che a ogni altro punto in S .

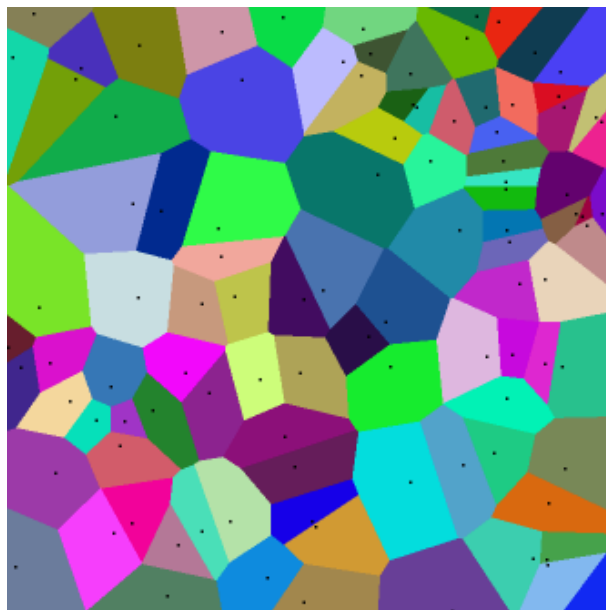


Figura 2.1: Il diagramma di Voronoi di un insieme casuale di punti su un piano

2.2 Tassellazione di Voronoi Centroidale

Si introduce ora il concetto di **Tassellazione di Voronoi Centroidale**.

La tassellazione di Voronoi Centroidale è un particolare tipo di diagramma di Voronoi dove i punti p di ogni regione $V(p)$ corrispondono al centro di massa di tale regione.

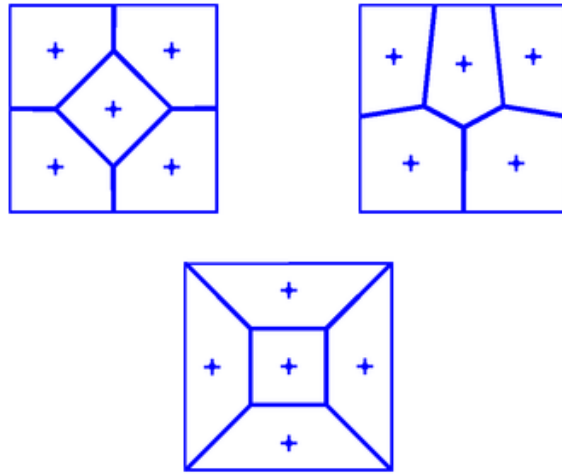


Figura 2.2: Tre esempi di CVT a 5 punti su un area quadrata

Questo tipo di tassellazione, definita anche come *CVT* (dall'inglese *Centroidal Voronoi tessellation*), ci sarà necessaria per comprendere la finalità dell'algoritmo di Lloyd.

In natura sono riscontrabili diversi esempi di CVT, come la struttura macroscopica del *selciato del gigante* oppure le celle della cornea dell'occhio umano.



Figura 2.3: Scala del gigante, Irlanda del Nord

Capitolo 3

L'algoritmo di Lloyd

L'algoritmo di Lloyd, conosciuto anche con il nome di *iterazione di Voronoi*, è un algoritmo che permette di suddividere un'area in celle convesse uniformemente dimensionate, per ottenere quindi una tassellazione centroidale di Voronoi, vista in precedenza.

L'algoritmo, che prende il nome da Stuart P. Lloyd, il suo ideatore, è implementato mediante iterazioni continue dell'algoritmo di Voronoi.

3.1 Descrizione dell'algoritmo

L'algoritmo esegue ripetutamente i seguenti passi:

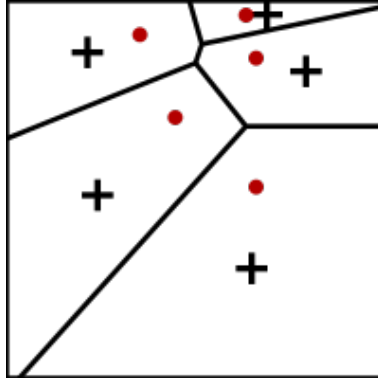
1. Viene generato il diagramma di Voronoi di una determinata area
2. Per ogni cella di Voronoi trovata, viene determinato il centro di massa
3. Ogni punto – in questa applicazione ogni drone – viene spostato in corrispondenza del centro di massa della propria cella di Voronoi

3.2 Esempio di applicazione dell'algoritmo

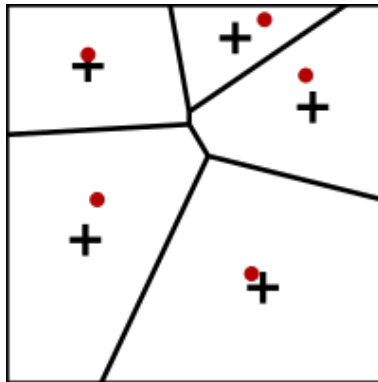
Viene qui presentata l'applicazione dell'algoritmo di Lloyd ad un'area quadrata nella quale sono presenti 5 partizioni.

Le croci rappresentano i *baricentri* delle varie partizioni; i punti rossi sono i droni, e le linee nere delimitano le varie celle dei singoli droni. Il quadrato che racchiude il tutto è l'area entro la quale i droni devono equidisporsi.

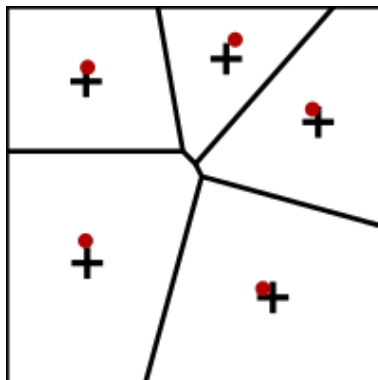
Iterazione 1 I droni sono mediamente distanti dal centro di massa della propria cella.



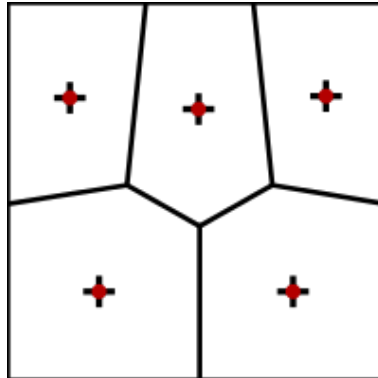
Iterazione 2 La distanza media tra i droni e il centro di massa delle rispettive celle è ridotta. Si noti come si è modificata la forma delle varie celle, in conseguenza del movimento dei vari droni.



Iterazione 3 La distanza media tra i droni ed il centro di massa è quasi nulla. L'algoritmo è prossimo alla convergenza.



Iterazione 4 Ogni drone si trova ora posizionato sopra il centro di massa della propria cella, di conseguenza l'algoritmo ha raggiunto la convergenza.



3.3 Concezione intuitiva della convergenza dell'algoritmo

Intuitivamente, si può dire che l'algoritmo converge in quanto i punti che si trovano a minor distanza tra loro tendono a compiere un movimento più alto, mentre i punti che si trovano a distanze elevate tendono a muoversi meno.

3.4 Esecuzione dell'algoritmo

L'algoritmo, anziché essere eseguito centralmente, viene distribuito tra i centri di calcolo dei vari droni.

Ripetutamente, vengono quindi eseguiti questi step:

1. Attendi le coordinate relative alla posizione degli altri droni, comunica via radio
2. Ottieni dal *controllo di volo* le proprie coordinate
3. Esegui la funzione **TargetPos**, che restituisce le coordinate del punto da raggiungere (vedi la sezione 5.16 per i dettagli)
4. Comunica l'output al controllo di volo

Capitolo 4

Prototipazione

Al fine di realizzare l'algoritmo, si è reso necessario attraversare una prima fase di prototipazione.

Le specifiche del linguaggio di prototipazione erano le seguenti: un linguaggio dinamico che permettesse una concisa scrittura del codice e una rapida compilazione; strumenti di *testing* integrati per verificare l'effettiva correttezza delle funzioni implementate; la disponibilità di un framework grafico per effettuare simulazioni in modo rapido e dinamico.

La scelta è ricaduta quindi sul linguaggio Python¹ e sul framework *Pygame*²



4.1 Codifica

Il codice dell'implementazione Python non viene qui riportato, in quanto viene successivamente illustrato e commentato il porting dei prototipi nel linguaggio *OpenModelica*.

È comunque possibile prendere visione del codice di prototipazione presso il repository GitHub del progetto³.

4.2 Testing

Al fine di implementare un meccanismo di testing rapido e completo si è optato per il framework *doctest*.

¹<https://www.python.org/>

²<https://www.pygame.org/>

³<https://github.com/zapateo/Tesi-Gianluca-Mondini-UNIP>

Esempio di testing tramite *doctest* Prendiamo, ad esempio, l'implementazione di una funzione triviale *somma* che, dati due numeri *a* e *b*, restituisca la loro somma.
La libreria *doctest* ci permette di definire, all'interno della documentazione della funzione, alcuni test che fungono inoltre da codice di esempio.

```
1 def somma(a, b):  
2     """  
3         Restituisce la somma di a e b  
4  
5         >>> somma(4, 5)  
6         9  
7  
8         >>> somma(0, -3)  
9         -3  
10        """  
11    return a + b
```

È adesso necessario richiamare all'interno *main* del codice sorgente l'esecuzione dei vari test, tramite

```
1 if __name__ == "__main__":  
2     import doctest  
3     doctest.testmod()
```

Eseguendo quindi il codice sorgente, verranno eseguiti i test presenti nella documentazione delle varie funzioni e l'output verrà confrontato con quello atteso. Nel caso in cui tutti i test vengano superati non verrà mostrato alcun output a schermo, in caso contrario un messaggio d'errore indicherà il test non superato, l'output atteso e l'output ottenuto.

Capitolo 5

Implementazione in *OpenModelica*

L'implementazione dell'algoritmo di Lloyd richiede una funzione che effettui la tassellazione di Voronoi, la quale a sua volta utilizza una serie di funzioni geometriche che operano nello spazio bidimensionale.

Nell'implementazione che verrà illustrata successivamente, si è scelto di implementare in primo luogo l'algoritmo utilizzando il linguaggio Python per avere a disposizione una maggior quantità di strumenti di debugging e testing; successivamente è stato effettuato il porting del codice in *OpenModelica*

5.1 OpenModelica



OpenModelica è un'implementazione *open source* del linguaggio di modellazione *Modelica*, che permette la modellazione, simulazione, ottimizzazione e analisi di complessi sistemi dinamici. *OpenModelica* viene utilizzato sia in ambito accademico sia in ambito industriale.

L'ambiente *OpenModelica*, implementato nei linguaggi C e C++, fornisce una serie di strumenti di lavoro, tra cui:

omc compila un file sorgente *OpenModelica* generando la rispettiva *classe*

OMEdit software che permette, tra le varie funzionalità, di “connettere” tramite un'interfaccia grafica le varie classi per comporre sistemi complessi

OMShell shell interattiva che esegue comandi impartiti singolarmente, utile per effettuare una rapida prototipazione

Per ulteriori informazioni si rimanda al sito ufficiale del progetto¹ e al documento di specifica Modelica²

5.2 Un approccio funzionale

Nell'implementazione del codice si è optato per un approccio funzionale. In pratica ogni “modulo” viene implementato tramite una funzione che abbia un determinato dominio di input e codominio di output e viene codificata in modo tale da evitare *effetti collaterali* al di fuori di se stessa. Questo garantisce che, data una funzione e un insieme di input, si possa determinare univocamente l'output, indipendentemente dal valore di parametri esterni alla funzione. Il tutto può essere chiarito con un esempio:

```
1 A = 0
2 B = 20
3
4 func F(C, D) {
5     A = A + 10
6     return C + D + A
7 }
8
9 output = F(30, 40)
```

Figura 5.1: Un implementazione non-funzionale di F

La funzione F restituisce la somma di C, D ed A. In questo caso il valore `output` sarà $30 + 40 + 10 = 80$.

La funzione presenta però un problema: eseguendo nuovamente la funzione con gli stessi argomenti, l'output sarà $30 + 40 + 20 = 90$ in quanto il valore di A è variato, ovvero ha subito un *effetto collaterale* dalla chiamata della funzione.

Inoltre, variando A al di fuori della funzione il suo output cambierà di conseguenza

¹<https://openmodelica.org/>

²<https://www.modelica.org/documents/ModelicaSpec34.pdf>

```

1  A = 0
2  B = 20
3
4  func F(C, D) {
5      A = A + 10
6      return C + D + A
7  }
8
9  output = F(30, 40)
10
11 A = 100
12
13 output = F(30, 40)

```

Figura 5.2: La stessa funzione F, chiamata con gli stessi argomenti in momenti diversi, restituisce output diversi

Non è quindi possibile stabilire, a priori, l'output della funzione dati gli argomenti se non si conosce anche, per intero, l'ambiente nel quale la funzione viene eseguita.

L'approccio funzionale prevede quindi di implementare la funzione F nel seguente modo:

```

1  A = 0
2  B = 20
3
4  func F(C, D, A) {
5      A = A + 10
6      return C + D + A, A
7  }
8
9  output, A = F(30, 40)

```

Figura 5.3: Un implementazione funzionale della funzione F

In questo caso la funzione non accetta più 2 argomenti, bensì 3, come era implicitamente codificato nella versione precedente. Si noti inoltre che la funzione non restituisce soltanto un valore di output ma 2, il risultato della somma (assegnato qui a `output`) e il nuovo valore di A, che ha subito un incremento.

Questo nuovo modello semplifica notevolmente lo sviluppo, in quanto la funzione F è ora svincolata dall'ambiente che la circonda ed è liberamente eseguibile all'interno di altro codice.

Un altro aspetto da considerare è quello del *testing*; come si vedrà più avanti nella sezione 5.17, è indispensabile realizzare un meccanismo di testing che garantisca l'effettiva correttezza delle funzioni implementate. A questo riguardo l'approccio funzionale scelto semplifica notevolmente questa fase

di sviluppo, in quanto è sufficiente effettuare chiamate singole alle varie funzioni per ottenerne l'output da confrontare con un valore di riferimento. Nel nostro esempio la funzione `F` come mostrata nella figura 5.2 chiamata con argomenti costanti restituirà sempre lo stesso valore di output.

5.3 Diagramma delle dipendenze

Viene qui illustrato un diagramma contenenti le varie funzioni dell'implementazione *OpenModelica*. Le frecce \longrightarrow rappresentano una dipendenza; ad esempio $A \longrightarrow B$ indica che A effettua una chiamata a B durante la sua esecuzione, e di conseguenza A *dipende da* B .

Sono state omesse le funzioni di supporto al testing e al debugging in quanto non strettamente legate all'implementazione di per sé.

In alto è presente la funzione `TargetPos`, la quale dipende da `CenterOfMass`, `VoronoiCell` e `EdgesToVertices`.

In basso troviamo `CompareReal`, che dipende esclusivamente da funzioni integrate in *OpenModelica*.

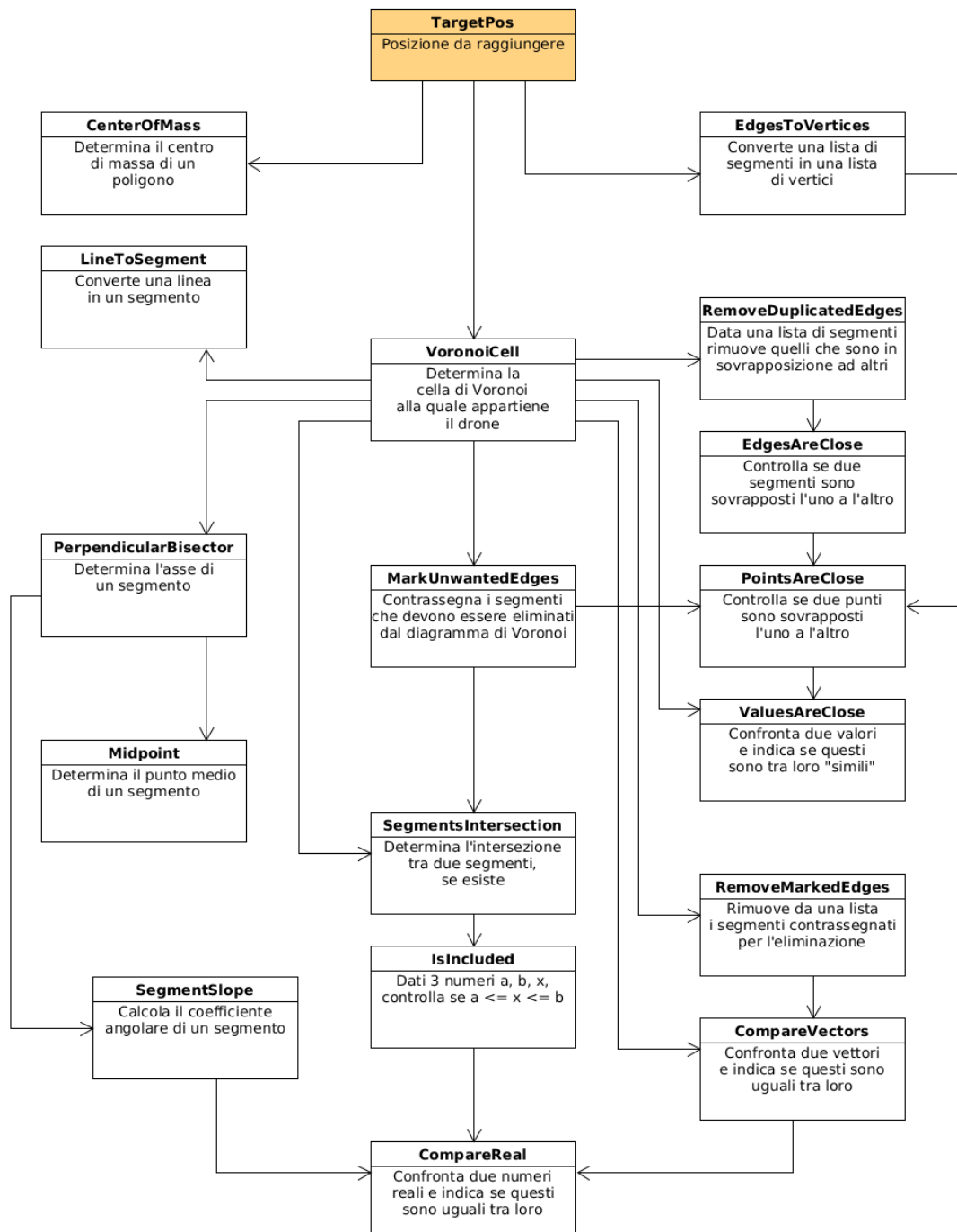


Figura 5.4: Diagramma delle dipendenze delle varie funzioni

5.4 Scelte implementative

Come si vedrà in seguito, anzichè definire *tipi* personalizzati si è deciso di ricorrere alle strutture dati già presenti in *OpenModelica*.

Ad esempio, un punto dello spazio può essere rappresentato sia come *record* tramite

```
1 record Point
2     Real x, y;
3 end Point;
```

sia come vettore

```
1 Real [2] point;
```

La scelta ricade su quest'ultima implementazione in quanto è possibile utilizzare una serie di funzioni primitive (principalmente per lavorare su liste) già definite in *OpenModelica* che avrebbero richiesto altrimenti richiesto l'implementazione manuale tramite un linguaggio di più basso livello.

I punti a sfavore dell'utilizzo di un vettore al posto di una struttura dati personalizzata sono:

- L'impossibilità di accedere ai membri tramite il loro nome bensì tramite l'indice legato alla loro posizione. Ad esempio, per accedere alla coordinata y di un punto non è possibile utilizzare `point.y` ma `point[2]`, perdendo quindi di leggibilità
- L'impossibilità di aggiungere ulteriori campi contenenti informazioni. A questo riguardo si veda la sezione 5.14

5.5 Rappresentazione del punto geometrico

Per poter indicare un punto nello spazio bidimensionale, è necessario definire una struttura dati rappresentante una tupla x, y . A questo fine viene utilizzato un vettore bidimensionale definito tramite

```
1 Real [2] point;
```

Nel caso in cui debba essere dichiarato un vettore di punti, si dichiara una matrice tramite

```
1 Real[:, 2] some_points;
```

Il carattere `:` posto in prima posizione tra le parentesi quadre indica che la prima dimensione della matrice `some_points` non è conosciuta a priori.

5.6 Verifica della sovrapposizione di due punti

Può verificarsi che, in seguito a ..., ci si trovi nella situazione in cui due punti sovrapposti non superino il test di equalità. Ad esempio:

$$P_1 = (4.0, 2.0)$$

$$P_2 = (4.00001, 1.999999)$$

I punti P_1 e P_2 , pur potendo essere considerati sovrapposti in relazione allo spazio metrico in cui si trovano, sono considerati diversi da loro per via di errori di approssimazione del calcolatore.

Si è quindi implementata una funzione che discrimini i punti diversi tra loro da quelli “apparentemente diversi”, ovvero una funzione che verifichi se due punti sono tra loro *vicini*.

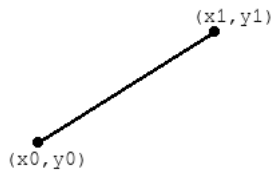
```
1  function PointsAreClose
2      input Real [2] p1;
3      input Real [2] p2;
4      output Boolean are_close;
5  algorithm
6      if ValuesAreClose(p1[1], p2[1]) then
7          if ValuesAreClose(p1[2], p2[2]) then
8              are_close := true;
9          else
10             are_close := false;
11         end if;
12     else
13         are_close := false;
14     end if;
15 end PointsAreClose;
```

5.7 Rappresentazione del segmento geometrico

Per rappresentare un segmento, si considera un vettore di 4 elementi, nella forma

$$(x_0, y_0, x_1, y_1)$$

dove (x_0, y_0) è il punto iniziale del segmento e (x_1, y_1) è il punto finale.



Questo si traduce, in ambiente *OpenModelica*, in:

```
1 Real [4] edge;  
2  
3 edge[1] := x_1;  
4 edge[2] := y_1;  
5 edge[3] := x_2;  
6 edge[4] := y_2;
```

5.8 Verifica della sovrapposizione di due segmenti

La verifica della sovrapposizione di due segmenti viene effettuata in modo analogo a quella della sovrapposizione di due punti, e fa uso proprio di quest'ultima funzione.

Formalmente, due segmenti sono considerati sovrapposti se il punto iniziale del primo si sovrappone al punto iniziale del secondo e contemporaneamente il punto finale del primo si sovrappone al punto finale del secondo.

```
1 function EdgesAreClose  
2  
3   input Real [4] e1, e2;  
4  
5   output Boolean are_close;  
6  
7   algorithm  
8  
9     are_close :=  
10      (PointsAreClose({e1[1], e1[2]}, {e2[1], e2[2]}) and  
11       PointsAreClose({e1[3], e1[4]}, {e2[3], e2[4]}))  
12      or  
13      (PointsAreClose({e1[1], e1[2]}, {e2[3], e2[4]}) and  
14       PointsAreClose({e1[3], e1[4]}, {e2[1], e2[2]}));  
15 end EdgesAreClose;
```

5.9 Linea

Una *linea* è matematicamente identificata da una tupla di 3 elementi a , b e c tali che

$$ax + by + c = 0$$

In *OpenModelica*, si rappresenterà quindi come un vettore di 3 elementi

```
1 Real [3] line;  
2  
3 line[1] := a;  
4 line[2] := b;
```

```
5 line[3] := c;
```

5.10 Conversione da linea a segmento

Può essere necessario convertire una linea, priva di un punto di inizio e fine, in un segmento, ben delimitato. Per fare ciò è stata implementata la funzione

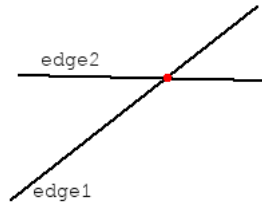
$$\text{LineToSegment} : R[3] \longrightarrow R[4]$$

```
1 function LineToSegment
2   input Real [3] line;
3   output Real [4] segment;
4   protected
5     parameter Real big = 10000;
6     Real a, b, c;
7     Real [2] p1, p2;
8     Real m, q;
9     Real y1, y2;
10  algorithm
11    a := line[1];
12    b := line[2];
13    c := line[3];
14
15    if b == 0 and (not (a == 0)) then // Retta verticale
16      p1 := {-c, big};
17      p2 := {-c, -big};
18      segment := {p1[1], p1[2], p2[1], p2[2]};
19      return;
20    else
21      m := -a/b;
22      q := -c/b;
23      y1 := m * (-big) + q;
24      y2 := m * (+big) + q;
25      segment := {-big, y1, big, y2};
26    end if;
27 end LineToSegment;
```

5.11 Intersezione tra segmenti

Una delle funzioni principalmente utilizzate dall'algoritmo di tassellazione di Voronoi è quella responsabile di determinare l'eventuale punto di intersezione tra due segmenti.

È necessario notare che, avendo a che fare con segmenti di lunghezza finita e non con delle rette, è possibile che due segmenti non si intersechino tra loro pur non essendo paralleli.



L'algoritmo implementato è il seguente ³

```

1  function SegmentsIntersection
2      input Real [4] edge1, edge2;
3      output Boolean valid;
4      output Real [2] intersection;
5  protected
6      Real x1, x2, y1, y2, dx1, dy1, x, y, xB, yB, dx, dy, DET,
          DETinv, r, s, xi, yi;
7      parameter Real DET_TOLERANCE = 0.00000001;
8  algorithm
9      x1 := edge1[1];
10     y1 := edge1[2];
11     x2 := edge1[3];
12     y2 := edge1[4];
13
14     x := edge2[1];
15     y := edge2[2];
16     xB := edge2[3];
17     yB := edge2[4];
18
19     dx1 := x2 - x1;
20     dy1 := y2 - y1;
21
22     dx := xB - x;
23     dy := yB - y;
24
25     DET := ((-dx1 * dy) + (dy1 * dx));
26
27     if abs(DET) < DET_TOLERANCE then
28         valid := false;
29         return;
30     end if;
31
32     DETinv := 1.0/DET;
33
34     r := DETinv * (-dy * (x-x1) + dx * (y-y1));
35     s := DETinv * (-dy1 * (x-x1) + dx1 * (y-y1));
36     xi := (x1 + r*dx1 + x + s*dx)/2.0;
37     yi := (y1 + r*dy1 + y + s*dy)/2.0;
38
39     if (IsIncluded(0, 1, r)) and (IsIncluded(0, 1, s)) then

```

³Il codice è un adattamento di <https://www.cs.hmc.edu/ACM/lectures/intersections.html>

```

40     intersection := {xi, yi};
41     valid := true;
42     return;
43   else
44     valid := false;
45     return;
46   end if;
47 end SegmentsIntersection;

```

Oltre a restituire un vettore bidimensionale **intersection** viene anche restituito un booleano **valid**, che sta ad indicare se il valore contenuto in **intersection** è valido o meno.

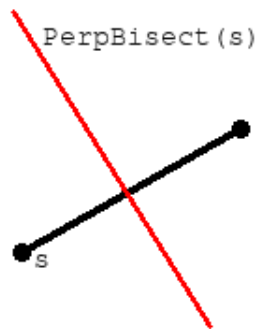
5.12 Asse di un segmento

La funzione **VoronoiCell** fa ampio uso della funzione **PerpendicularBisector**, che restituisce l'asse del segmento passato come argomento.

$\text{PerpendicularBisector} : \text{Segmento} \longrightarrow \text{Linea}$

Vengono discriminati i 3 casi in cui:

- Il segmento sia verticale; in tal caso l'asse sarà orizzontale;
- Il segmento sia orizzontale; in tal caso l'asse sarà verticale;
- Il segmento non sia nè verticale nè orizzontale: caso più frequente



```

1 function PerpendicularBisector
2   input Real [4] edge;
3   output Real [3] perp_bisect;
4 protected
5   Boolean vertical;
6   Real [2] p;
7   Real a, b, c, neg_c, m1, m2, q;

```

```

8  algorithm
9      p := Midpoint(edge);
10     (m1, vertical) := SegmentSlope(edge);
11     if vertical then
12         neg_c := (edge[2] + edge[4])/2;
13         perp_bisect := {0, 1, -neg_c};
14         return;
15     elseif m1 == 0 then
16         a := 1;
17         b := 0;
18         c := -(edge[1] + edge[3])/2;
19         perp_bisect := {a, b, c};
20         return;
21     else
22         m2 := -1/m1;
23         q := - m2 * p[1] + p[2];
24         perp_bisect := {-m2, 1, -q};
25         return;
26     end if;
27 end PerpendicularBisector;

```

5.13 Centro di massa

Al fine di implementare l'algoritmo di Lloyd è necessario definire una funzione che, presa in ingresso una lista di vertici, ne calcoli il centro di massa. Dato un poligono di n vertici $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_{n-1}, y_{n-1})$ il centro di massa ha coordinate (C_X, C_Y) definite come

$$C_x = \frac{1}{6A} \sum_{i=0}^{n-1} (x_i + x_{i+1})(x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i)$$

$$C_y = \frac{1}{6A} \sum_{i=0}^{n-1} (y_i + y_{i+1})(x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i)$$

dove A è l'area del poligono *con segno*

$$A = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-1} (x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i)$$

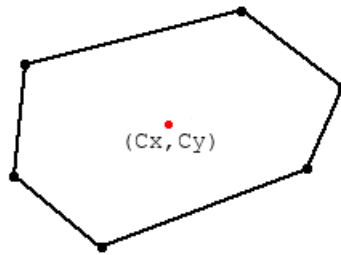


Figura 5.5: Il punto p viene restituito dalla chiamata a `CenterOfMass` che ha come argomento la lista delle coordinate dei vari vertici del poligono

Ne deriva quindi la seguente codifica:

```

1  function CenterOfMass
2
3      input PointsArray points;
4
5      output Real [2] out;
6
7  protected
8
9      PointsArray vertices, v_local;
10     Real [0, 2] empty_vertices;
11     Real x_cent, y_cent, area, factor;
12
13  algorithm
14
15     if points.len < 3 then
16         out := {-1,-1};
17     end if;
18
19     // Adattato da https://stackoverflow.com/a/46937541
20
21     vertices.len := 0;
22     for i in 1:points.len loop
23         vertices := PointsArrayAppend(vertices,
24             points.elements[i]);
25     end for;
26
27     x_cent := 0;
28     y_cent := 0;
29     area := 0;
30
31     v_local.len := 0;
32     for i in 1:vertices.len loop
33         v_local := PointsArrayAppend(v_local,
34             vertices.elements[i]);
35     end for;
36     v_local := PointsArrayAppend(v_local, vertices.elements
37         [1]);

```

```

35
36     for i in 1:(v_local.len - 1) loop
37         factor := v_local.elements[i,1] * v_local.elements[i
            +1, 2] - v_local.elements[i+1,1] *
            v_local.elements[i,2];
38         area := area + factor;
39         x_cent := x_cent + (v_local.elements[i, 1] +
            v_local.elements[i+1,1]) * factor;
40         y_cent := y_cent + (v_local.elements[i, 2] +
            v_local.elements[i+1, 2]) * factor;
41     end for;
42
43     area := area / 2.0;
44     x_cent := x_cent / (area * 6);
45     y_cent := y_cent / (area * 6);
46
47     out := {x_cent, y_cent};
48
49 end CenterOfMass;

```

5.14 Ricerca ed eliminazione dei segmenti in eccesso

Durante l'esecuzione dell'algoritmo di Voronoi si presenta la necessità di rimuovere dei segmenti che non fanno più parte del diagramma. Si presenta il problema di come effettuare questa operazione senza arrecare danno all'iterazione in corso proprio sulla lista dalla quale vanno rimossi gli elementi.

Inoltre, come precedentemente detto, non è possibile aggiungere un campo ad ogni segmento indicando l'effettiva necessità di eliminazione.

La scelta cade quindi sull'assegnare il valore -1 ad ogni componente del segmento, considerandolo quindi un segmento nullo, da eliminare.

```

1 edge := {-1, -1, -1, -1};

```

Successivamente, utilizzando la funzione `CompareVector` si controlla se il segmento è contrassegnato per l'eliminazione

```

1 if CompareVector(edge, {-1, -1, -1, -1}) then
2     // Considera 'edge' come un segmento da eliminare
3 else
4     // Considera 'edge' come un segmento valido
5 end if;

```

La funzione `MarkUnwantedEdges` contrassegna tutti i segmenti che devono essere rimossi dalla lista di segmenti. In particolare, se un segmento si trova

dietro ad un altro quello “nascosto” deve essere eliminato in quanto non può più far parte dell’insieme.

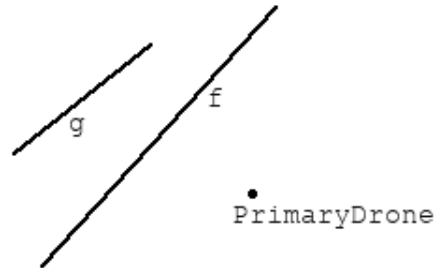


Figura 5.6: Esempio nel quale il segmento g deve essere rimosso, in quanto il segmento f si pone tra esso e il *PrimaryDrone*. La funzione `MarkUnwantedEdges` contrassegnerà g per l’eliminazione, mentre `RemoveMarkedEdges` lo cancellerà definitivamente.

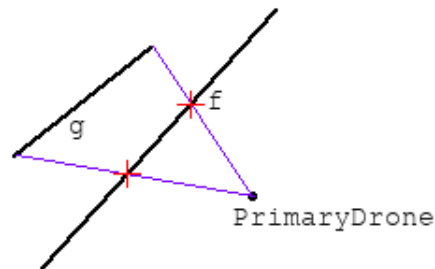


Figura 5.7: I segmenti di unione tra *PrimaryDrone* e gli estremi di g collidono con il segmento f ; questo fa sì che g venga contrassegnato per l’eliminazione.

```

1  function MarkUnwantedEdges
2
3      input  EdgesArray edges;
4      input  Real [2]   primary_drone;
5      output EdgesArray marked_edges;
6
7  protected
8
9      Real [2] point, intersection;
10     Real [4] inner_edge, join_edge;
11     Boolean valid;

```

```

12
13 algorithm
14
15     marked_edges.len := 0;
16     for i in 1:edges.len loop
17         marked_edges := EdgesArrayAppend(marked_edges,
18             edges.elements[i]);
19     end for;
20
21     // Scorro tra tutti i bordi
22     for outer_i in 1:edges.len loop
23         if not CompareVectors(edges.elements[outer_i],
24             {-101010, -101010, -101010, -101010}) then
25             // Per ogni bordo, seleziono prima un estremo e
26             // poi l'altro
27             for point_index in 0:1 loop
28                 if point_index == 1 then
29                     point := {edges.elements[outer_i,1],
30                         edges.elements[outer_i,2]};
31                 else // point_index == 2
32                     point := {edges.elements[outer_i,3],
33                         edges.elements[outer_i,4]};
34                 end if;
35
36                 // Scorro tutti i bordi e vedo se la
37                 // congiunzione
38                 // tra l'estremo trovato e il primary_drone
39                 // crea una collisione, in tal caso
40                 // contrassegno il bordo esterno
41                 // per l'eliminazione
42                 for inner_edge_index in 1:edges.len loop
43
44                     inner_edge := edges.elements[
45                         inner_edge_index];
46                     join_edge := {primary_drone[1],
47                         primary_drone[2], point[1], point[2]};
48
49                     (valid, intersection) :=
50                         SegmentsIntersection(inner_edge,
51                             join_edge);
52
53                     if valid and (not PointsAreClose(
54                         intersection, point)) then
55                         marked_edges.elements[outer_i] :=
56                             {-1, -1, -1, -1};
57                     end if;
58                 end for;
59             end for;
60         end if;
61     end for;
62 end MarkUnwantedEdges;

```

La funzione `RemoveMarkedEdges` restituisce una lista di segmenti dalla quale sono stati rimossi tutti i segmenti contrassegnati per l'eliminazione.

```
1  function RemoveMarkedEdges
2
3      input EdgesArray edges;
4      output EdgesArray clean_edges;
5
6  algorithm
7
8      clean_edges.len := 0;
9
10     for i in 1:edges.len loop
11         if not CompareVectors(edges.elements[i], {-1, -1, -1,
12             -1}) then
13             clean_edges := EdgesArrayAppend(clean_edges,
14                 edges.elements[i]);
15         end if;
16     end for;
17 end RemoveMarkedEdges;
```

5.15 La funzione `VoronoiCell`

Come precedentemente detto, l'algoritmo di Lloyd è implementato tramite iterazioni successive dell'algoritmo di Voronoi.

La funzione `VoronoiCell` restituisce esclusivamente la cella di appartenenza di un drone specificato, anziché la tassellazione dell'intera area; considerato che l'algoritmo è distribuito ogni drone necessita di conoscere esclusivamente la propria posizione *target*, e soltanto la posizione attuale dei restanti droni. L'idea è quindi quella di implementare la seguente funzione:

$\text{VoronoiCell} : (\text{drone stesso, altri droni, bordi}) \longrightarrow \text{cella drone stesso}$

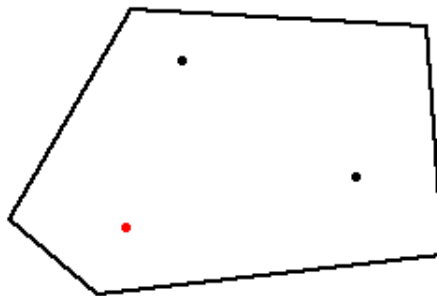
I passaggi fondamentali dell'algoritmo implementato sono i seguenti:

1. Per ogni **drone** contenuto in **other drones** (ovvero la lista degli altri droni)
 - (a) viene creato un segmento **union edge** che unisce il drone stesso (**primary drone**) con **drone**
 - (b) viene determinato l'asse di **union edge**, che prende il nome di **perp bisect**
 - (c) viene inizializzata una lista vuota **intersections** che andrà a contenere i punti di intersezione trovati
 - (d) Per ogni bordo **edge** contenuto in **edges**

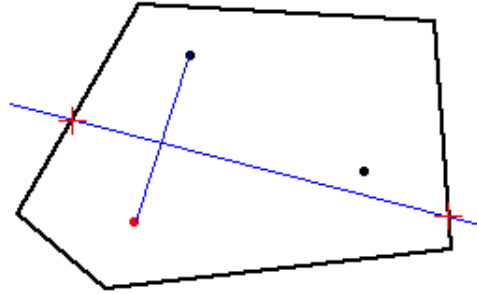
- i. viene cercato l'eventuale punto di intersezione tra **perp bisect** ed **edge**
- ii. se il punto di intersezione esiste
 - A. contrassegno **edge** per la cancellazione, in quanto verrà sostituito da un nuovo bordo
 - B. determino quale estremo di **edge** conservare per la creazione del nuovo bordo
 - C. aggiunto il punto di intersezione trovato alla lista **intersections**
- (e) se **intersections** contiene 2 punti, creo un nuovo bordo che abbia come estremi i 2 punti
- 2. tolgo da **edges** i bordi duplicati e quelli contrassegnati per l'eliminazione

5.15.1 Esempio grafico di applicazione dell'algoritmo di Voronoi

Vediamo adesso l'applicazione dell'algoritmo di Voronoi alla seguente situazione: l'area è delimitata da un poligono a 5 lati; in rosso è visibile quello che viene chiamato **PrimaryDrone**, ovvero il drone che effettua la chiamata a **VoronoiCell** e per il quale si intende calcolare la cella associata; i restanti 2 puntini neri rappresentano gli altri due droni.

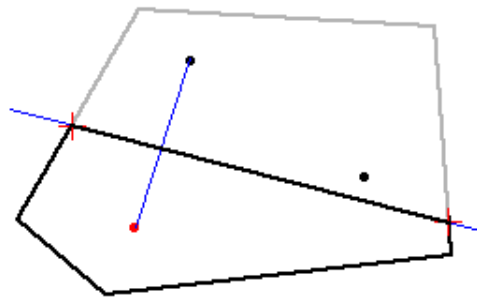


Si determina quindi il segmento che unisce **PrimaryDrone** con uno degli altri droni, in questo caso quello più in alto; si traccia l'asse del segmento trovato e si determinano i punti di intersezione con i bordi dell'area, che nella figura sono contrassegnati da croci rosse.



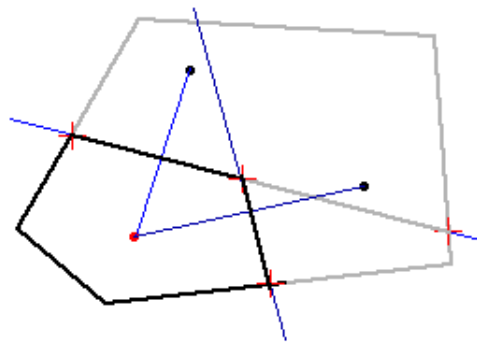
Si crea un nuovo bordo che unisce i due punti di intersezione. Tutti i segmenti che si trovino “dietro” (si veda la sezione 5.14) al nuovo segmento vengono contrassegnati per l’eliminazione.

Si noti inoltre che i due bordi con i quali l’asse intersecava sono stati sostituiti da due nuovi bordi, di lunghezza inferiore.



Si ripete il procedimento anche per l’altro drone, ed essendo in questo caso i droni totali in numero pari a 3 si conclude l’algoritmo.

Il poligono contornato in nero è quindi la cella di Voronoi associata al `PrimaryDrone`



Il codice che ne deriva è il seguente:

```

1  function VoronoiCell
2
3      input  Real [:, 4]   input_edges;
4      input  Real [2]     primary_drone;
5      input  Real [:, 2]  other_drones;
6      output EdgesArray   edges;
7
8  protected
9
10     Real [2]      drone, point, intersect, p1, p2, int1, int2,
        keep;
11     Real [4]      union_edge, edge_p1_primary_drone,
        edge_p2_primary_drone;
12     Real [3]      perp_bisect;
13     PointsArray   intersections;
14     EdgesArray    new_edges;
15     Boolean       have_intersection, int1_valid, int2_valid,
        add_to_intersections;
16
17  algorithm
18
19     edges.len := 0;
20
21     // Copio in edges i segmenti contenuti in input_edges
22     for iei in 1:size(input_edges, 1) loop
23         edges := EdgesArrayAppend(edges, input_edges[iei]);
24     end for;
25
26     for other_drones_index in 1:size(other_drones, 1) loop
27         drone := other_drones[other_drones_index];
28
29         // Determino il segmento che unisce primary_drone e
            drone
30         union_edge := {primary_drone[1], primary_drone[2],
            drone[1], drone[2]};
31
32         // Determino la bisettrice di union_edge
33         perp_bisect := PerpendicularBisector(union_edge);
34
35         // Svuoto intersections
36         intersections.len := 0;
37
38         // Svuoto new_edges
39         new_edges.len := 0;
40
41         // Contrassegno i bordi di edges da cancellare
42         edges := MarkUnwantedEdges(edges, primary_drone);
43
44         for i in 1:edges.len loop
45
46             // Controllo che il segmento non sia gia' stato
                contrassegnato per essere eliminato

```

```

47     if not CompareVectors(edges.elements[i], {-1, -1,
48         -1, -1}) then
49
50         (have_intersection, intersect) :=
51             SegmentsIntersection(
52                 LineToSegment(perp_bisect),
53                 edges.elements[i]
54             );
55
56         if have_intersection then
57
58             // Determino quale estremo del segmento
59             // mantenere
60             p1 := {edges.elements[i, 1],
61                 edges.elements[i, 2]};
62             p2 := {edges.elements[i, 3],
63                 edges.elements[i, 4]};
64             edges.elements[i] := {-1, -1, -1, -1};
65             edge_p1_primary_drone := {
66                 p1[1], p1[2],
67                 primary_drone[1], primary_drone[2]
68             };
69             edge_p2_primary_drone := {
70                 p2[1], p2[2],
71                 primary_drone[1], primary_drone[2]
72             };
73             (int1_valid, int1) :=
74                 SegmentsIntersection(
75                     LineToSegment(perp_bisect),
76                     edge_p1_primary_drone
77                 );
78             (int2_valid, int2) :=
79                 SegmentsIntersection(
80                     LineToSegment(perp_bisect),
81                     edge_p2_primary_drone
82                 );
83             assert(int1_valid or int2_valid, "non
84                 viene creata un intersezione ne con p1
85                 ne con p2. p1 = " + VectorToString(p1
86                 ) + ", p2 = " + VectorToString(p2) + "
87                 , primary_drone = " + VectorToString(
88                     primary_drone));
89             if int1_valid and not int2_valid then
90                 keep := p2;
91             elseif not int1_valid and int2_valid then
92                 keep := p1;
93             elseif int1_valid and int2_valid then
94                 else
95                     assert(false, "errore logico");
96             end if;
97
98             // Costruisco il nuovo bordo
99             new_edges := EdgesArrayAppend(new_edges,
100                 {intersect[1], intersect[2], keep[1],

```

```

88         keep[2]});
89
90         // Valuto se aggiungere il nuovo bordo
91         // alla lista
92         // e nel caso lo aggiungo
93         add_to_intersections := true;
94         for intersections_index in 1:
95             intersections.len loop
96                 if ValuesAreClose(
97                     intersections.elements[
98                         intersections_index, 1], intersect
99                         [1])
100                     and ValuesAreClose(
101                         intersections.elements[
102                             intersections_index, 2],
103                             intersect[2]) then
104                         add_to_intersections := false;
105                     end if;
106                 end for;
107                 if add_to_intersections then
108                     intersections := PointsArrayAppend(
109                         intersections, intersect);
110                 end if;
111             end if;
112
113             // Contrassegno tutti i bordi contenuti in
114             // edges
115             // che devono essere cancellati in quanto "
116             // oscurati"
117             // da altri bordi
118             edges := MarkUnwantedEdges(edges,
119                 primary_drone);
120
121             end if;
122         end for;
123
124         // Aggiungo ad edges tutti i bordi contenuti in
125         // new_edges
126         for j in 1:new_edges.len loop
127             edges := EdgesArrayAppend(edges,
128                 new_edges.elements[j]);
129         end for;
130
131         // Svuoto new_edges
132         new_edges.len := 0;
133
134         // Se ho due punti di intersezione, creo un segmento
135         // che li unisce
136         // e lo aggiungo a edges
137         if intersections.len == 2 then
138             edges := EdgesArrayAppend(edges, {
139                 intersections.elements[1,1],
140                 intersections.elements[1,2],

```



```

        intersections.elements[2,1],
        intersections.elements[2,2]}});
124     end if;
125
126   end for;
127
128   assert(edges.len > 1, "edges deve contenere almeno un
      elemento");
129
130   edges := MarkUnwantedEdges(edges, primary_drone);
131   edges := RemoveMarkedEdges(edges);
132   edges := RemoveDuplicatedEdges(edges);
133
134 end VoronoiCell;

```

5.16 La funzione TargetPos

La funzione `TargetPos` effettua una singola iterazione dell'algoritmo di Lloyd, ovvero:

1. Determina la cella di Voronoi relativa al drone stesso
2. Calcola il centro di massa della cella determinata al punto 1

```

1  function TargetPos
2
3     input  Real  [:,4]  area_boundaries;
4     input  Real  [2]    self_position;
5     input  Real  [:,2]  other_drones_positions;
6     output Real  [2]    target_position;
7
8  algorithm
9     target_position := CenterOfMass(
10        EdgesToVertices(
11           VoronoiCell(
12              area_boundaries,
13              self_position,
14              other_drones_positions
15          )
16      )
17  );
18 end TargetPos;

```

5.17 Testing del codice

Attualmente *OpenModelica* non fornisce un meccanismo di testing solido e standardizzato. Per questo motivo è stato necessario realizzare un sistema che automatizzasse la verifica della correttezza delle funzioni implementate.

A questo proposito si è deciso di ricorrere ad uno script Python che:

1. Ottenga la lista delle classi implementate
2. Ottenga la lista dei test da effettuare
3. Compili le classi
4. Crei un file contenente le istruzioni per eseguire tutti i test
5. Esegua, uno dopo l'altro, i vari test
6. Restituisca a schermo un output indicante l'esito dei vari test

```
1  #!/bin/env python
2
3  import os
4  import re
5  import subprocess
6
7
8  def main() -> None:
9
10     # Determine the filenames for the classes and the tests
11     classes_filenames = ["classes/" + name for name in os.
12                          listdir("classes")]
13     tests_filenames = ["test/" + name for name in os.listdir(
14                         "test")]
15
16     filenames = classes_filenames + tests_filenames
17
18     # Read the content and put them in a single file.
19     content = ""
20     for filename in filenames:
21         with open(filename, encoding="utf-8") as f:
22             content += f.read()
23
24     identifiers = re.findall(r"test_\w+", content)
25     identifiers = sorted(list(set(identifiers)))
26
27     with open("tmp_simulate.mos", mode="w+", encoding="utf-8"
28             ) as f:
29         for filename in filenames:
30             f.write(f'loadFile("{filename}"); getErrorString
31                     ();\n')
32             f.write('cd("/tmp");\n')
33         for i in identifiers:
34             f.write(f"simulate({i}); getErrorString();\n")
35             f.write(
36                 f"print(\"{\"-\"*68}\");\n"
37             )
38
39     result = subprocess.run(
```

```

36         ["omc", "--std=3.2", "./tmp_simulate.mos"], stdout=
37         subprocess.PIPE, check=True
38     ).stdout.decode()
39
40     # prettify the output
41     class bcolors:
42         HEADER = "\033[95m"
43         OKBLUE = "\033[94m"
44         OKGREEN = "\033[92m"
45         WARNING = "\033[93m"
46         FAIL = "\033[91m"
47         ENDC = "\033[0m"
48         BOLD = "\033[1m"
49         UNDERLINE = "\033[4m"
50
51     result = "\n".join(
52         line
53         for line in result.split("\n")
54         if not line.startswith("time")
55         and "record SimulationResult" not in line
56         and "end SimulationResult" not in line
57         and line != '""'
58         and line != "true"
59     )
60
61     result = result.replace(
62         "The simulation finished successfully.",
63         bcolors.OKGREEN + "The simulation finished"
64         + "successfully!" + bcolors.ENDC,
65     )
66
67     result = result.replace("assert", bcolors.FAIL + "assert"
68         + bcolors.ENDC)
69
70     for i in identifiers:
71         result = result.replace(i, bcolors.BOLD + i + bcolors
72             .ENDC)
73
74     print(result)
75
76 if __name__ == "__main__":
77     main()

```

Capitolo 6

Conclusioni

Nelle pagine di questo documento si è quindi mostrato come poter implementare l'algoritmo di Lloyd utilizzando le iterazioni continue dell'algoritmo di Voronoi.

L'algoritmo qui esposto è orientato verso il formalismo matematico, sacrificando quindi le performance; in un caso d'applicazione reale sarà necessario implementare l'algoritmo utilizzando un linguaggio di più basso livello rispetto ad OpenModelica, come ad esempio C, C++ oppure Rust, orientando lo sviluppo verso una maggiore efficienza d'esecuzione.

Le due implementazioni, sia quella in Python che quella OpenModelica, funzionano quindi correttamente – come dimostrato dai test – e consentono di ottenere una tassellatura di Voronoi centroidale. L'algoritmo può quindi essere testato in un contesto simulativo più ampio, utilizzando le classi OpenModelica esposte in precedenza, e teoricamente applicato e testato in casi reali all'interno del controllo di volo di droni.

Bibliografia

Centroid (Wikipedia) <https://en.wikipedia.org/wiki/Centroid>

Coverage control for mobile sensing networks Jorge Cortés, Sonia Martinez, Timur Karatas, Francesco Bullo

Diagramma di Voronoi (Wikipedia) https://it.wikipedia.org/wiki/Diagramma_di_Voronoi

Implementation of Voronoi Diagrams <https://cs.brown.edu/courses/cs252/misc/resources/lectures/pdf/notes10.pdf>

LLoyd algorithm (Wikipedia) https://en.wikipedia.org/wiki/Lloyd%27s_algorithm

intersections.py <https://www.cs.hmc.edu/ACM/lectures/intersections.html>