

Unidad 7 - Cálculo de raíces

Dada $f(x)$ y α una raíz buscada, tal que $f(\alpha) = 0$

Se busca un x_n tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \alpha$

O sea, una sucesión que converja a la raíz de la función.

Idealmente, la función converge al valor exacto de la raíz, pero cómo no siempre es factible, se define un criterio de paro, de entre los siguientes:

- $|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon$

Se puede usar solo si la sucesión converge, o sea si la diferencia entre dos aproximaciones sucesivas es cada vez menor, y si esto se da de forma rápida.

Si se trabaja con error relativo, se usa $\frac{|x_{n+1} - x_n|}{|x_n|} < \varepsilon$

- $|f(x_n)| < \varepsilon$

Se puede usar solo si la pendiente de la función es mayor a 1, o sea:
 $f'(x) > \varepsilon$

Teorema de Bolzano

Si f es una función continua en $[a, b]$ y $sg[f(a)] \neq sg[f(b)] \Rightarrow \exists c \in (a, b) / f(c) = 0$

Métodos numéricos para obtener raíces de una función:

Antes que nada, siempre se define un intervalo para cada raíz (tratando de que en cada uno de ellos solo haya una), mediante el teorema de Bolzano. Pueden ser de cualquier longitud, pero preferentemente (en el 99% de los casos) se buscan intervalos de longitud 1.

Orden y radio de convergencia de un método

p es ORDEN de convergencia y R es RADIO de convergencia si y solo si:

$$\exists p \geq 1 \wedge R \neq 0 / \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\alpha - x_{n+1}|}{|\alpha - x_n|^p} = R$$

- $0 < R < 1$.
- R representa cuanto se reduce el error en cada paso. Por ej., si $R = \frac{1}{2}$, en cada paso el error se reduce a la mitad.
- Cuanto menor es R , más rápido converge el método.
- Si $p = 1$ la convergencia es lineal, si $p = 2$ la convergencia es cuadrática.
- Cuanto mayor es p , más rápido converge el método.
- p tiene mayor incidencia que R en la velocidad de convergencia.
- A igualdad de p , para saber qué método es más rápido desempata R .

Método de la cuerda o Regula - Falsi

Condiciones necesarias:

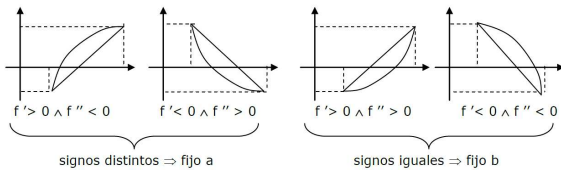
- $f(x)$ continua en $[a, b]$ y $sg[f(a)] \neq sg[f(b)]$.
- Derivada no nula en (a, b) .

Fórmula iterativa

Si el extremo fijo es $a \rightarrow x_{n+1} = a - \frac{x_n - a}{f(x_n) - f(a)} \cdot f(a) \wedge x_0 = b$

Si el extremo fijo es $b \rightarrow x_{n+1} = b - \frac{b - x_n}{f(b) - f(x_n)} \cdot f(b) \wedge x_0 = a$

Elección del punto fijo:



Algoritmo de Regula - Falsi:

- Si los signos de f' y f'' son iguales: $x_0 = a$, $ef = b$ (ef : extremos fijo), ir a c)
- Si los signos de f' y f'' son distintos: $x_0 = b$, $ef = a$
- $n \leftarrow 0$ (asignamos valor 0 a la variable n)
- Si se cumple el criterio de paro establecido, parar.
- Se calcula $x_{n+1} = ef - \frac{ef - x_n}{f(ef) - f(x_n)} f(ef)$
- $n \leftarrow n + 1$
- volver a d)

Radio de convergencia si $ef = a: R = (\alpha - b) \frac{f''(\varphi)}{2f'(\varphi)}$ siendo $\varphi \in (a, b)$

Radio de convergencia si $ef = b: R = (\alpha - a) \frac{f''(\varphi)}{2f'(\varphi)}$ siendo $\varphi \in (a, b)$

Orden de convergencia: $p = 1$

Método de bisección o Bolzano

Condiciones necesarias:

- $f(x)$ continua en $[a, b]$ y $sg[f(a)] \neq sg[f(b)]$.

Algoritmo de Bisección:

- Encontrar un intervalo $[a, b]$ que contenga exactamente una raíz, tal que sus extremos cumplan que $f(a) \cdot f(b) < 0$ (o sea con imágenes de signos distintos).
- $n \leftarrow 1$ (asignamos valor 1 a la variable n)
- Si se cumple el criterio de paro establecido, parar.
- Se deben ir generando los puntos de la sucesión $\{x_n\}$ de acuerdo a la siguiente regla: $x_n = \frac{a+b}{2}$
- Si $sg f(x_n) = sg f(a) \Rightarrow a = x_n$; sino $b = x_n$
- Luego incrementamos la variable: $n \leftarrow n + 1$
- Volvemos al paso c)

Radio de convergencia: $R = \frac{1}{2}$

Orden de convergencia: $p = 1$

Cantidad máxima de iteraciones a realizar (solo para bisección)

$$|x_n - \alpha| \leq \frac{b-a}{2^n} \leq \varepsilon$$

$$\forall n \geq 1$$

(Para bajar y despejar la n , eventualmente se aplica un logaritmo de base conveniente)

Método iterativo o de punto fijo

Análisis gráfico:

- Si $0 < g'(x) < 1$ en $(a, b) \Rightarrow$ converge en forma escalonada (g es creciente)
- Si $-1 < g'(x) < 0$ en $(a, b) \Rightarrow$ converge en forma de espiral (g es decreciente)
- Si $g'(x) > 1$ en $(a, b) \Rightarrow$ diverge en forma escalonada (g es creciente)
- Si $g'(x) < -1$ en $(a, b) \Rightarrow$ diverge en forma de espiral (g es decreciente)
- Si $g'(x) = 1$ en (a, b) nada se puede asegurar
- Si $g'(x) = 0$

O sea: para que la sucesión converja a la raíz, debe cumplirse $|g'(x)| < 1$

Condiciones de existencia del punto fijo:

Si $x = g(x)$ continua en $[a, b]$ tal que $g(x) \in [a, b]$ y además $|g'(x)| \leq K$ con $K < 1 \forall x \in (a, b)$, entonces g tiene un único punto fijo en $[a, b]$

En definitiva, para asegurar que g tenga un punto fijo en $[a, b]$, es suficiente que:

- g sea continua en $[a, b]$.
- $\forall x \in [a, b]: g(x) \in [a, b]$ (el máximo y el mínimo de g en $[a, b]$ pertenezcan a $[a, b]$).
- $\forall x \in [a, b]: |g'(x)| < 1$

Condición de convergencia del método de punto fijo:

Si $x = g(x)$ continua en $[a, b]$ tal que $g(x) \in [a, b] \forall x \in [a, b]$ y además $|g'(x)| \leq K$ con $K < 1 \forall x \in (a, b)$. Si $x_0 \in [a, b]$ entonces la sucesión definida por $x_n = g(x_{n-1})$ converge al único punto fijo α de g en $[a, b]$

Importante: si se toma un intervalo demasiado grande, a veces puede ocurrir que no se cumpla la condición $\forall x \in [a, b]: g(x) \in [a, b]$ pero sin embargo si $|g'(x)| < 1$ cerca de la raíz, el método puede converger a dicha raíz.

Concepto:

Dada una función $f(x)$ con raíz en un intervalo $[a, b]$, para hallarla se escribe la expresión $f(x) = 0$ como $g(x) = x$.

Algoritmo de Punto fijo:

- Tomar un valor inicial $x_0 \in [a, b]$, o sea cercano a la raíz buscada.
- $n \leftarrow 0$ (asignamos valor 0 a la variable n)
- Si se cumple el criterio de paro establecido, parar.
- Se calcula $x_{n+1} = g(x_n)$
- $n \leftarrow n + 1$
- volver a c)

Radio de convergencia: $R = |g'(\alpha)|$

Orden de convergencia: $p = 1$

Método de Newton Raphson

Condiciones necesarias:

- $f(x)$ continua en $[a, b]$ y $sg[f(a)] \neq sg[f(b)]$.
- Derivada no nula en (a, b) .

Condiciones suficientes de Fourier:

- x_0 cercana a α para asegurar convergencia a esta raíz.
- $f' \neq 0$ en (a, b)
- $f'' \neq 0$ (para que no haya cambios de concavidad).
- f'' no muy grande en (a, b)
- Elegir el extremo en que f y f'' coincidan en signo.
- Que alguna o algunas de estas condiciones no se cumplan, no implica que no se pueda aplicar el método.

Teorema Kasten:

Dada $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que:

- f continua.
- $f'(x) \neq 0 \forall x \in (a, b)$.
- $f''(x) \neq 0 \forall x \in (a, b)$.
- $f(a) \cdot f(b) < 0$.

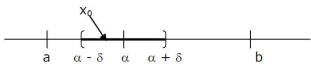
Tomando un $x_0 \in [a, b]$ tal que $f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0$:

la sucesión $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ converge a la raíz.

Fórmula iterativa: $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

CONVERGENCIA DEL MÉTODO DE NEWTON - RAPHSON

Sea $y = f(x) / x \in \mathbb{C} [a, b] \wedge \exists \alpha \in [a, b] / f(\alpha) = 0 \wedge f'(\alpha) \neq 0$
entonces el método de Newton - Raphson genera una sucesión $\{x_n\}$ que converge a α
para cualquier aproximación inicial x_0 perteneciente a un entorno de α , o sea:
 $\{x_n\} \rightarrow \alpha \quad \forall x_0 \in [\alpha - \delta, \alpha + \delta]$ con $\delta > 0$



Radio de convergencia: $R = K = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\alpha - x_{n+1}|}{|\alpha - x_n|^2} = \left| \frac{f''(\varphi)}{2f'(\varphi)} \right|$ con $\varphi \in [a, b]$

Orden de convergencia: $p = 2$

Unidad 8 - Sistemas de ecuaciones

Matriz singular: determinante igual a 0

Matriz Inversa: $A^{-1}A = I$. En una matriz diagonal, si todos sus componentes son distintos de 0, la inversa es la misma matriz con todos sus componentes invertidos ($x \rightarrow 1/x$). Se calcula como:
 $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{adj}(A)$

Matriz dominante diagonalmente: para cada fila, el módulo de la componente perteneciente a la diagonal es mayor o igual a la suma de los módulos de las restantes componentes. Para que sea estrictamente diagonal dominante, en vez de mayor o igual se usa mayor.

Autovalores (λ): se calculan mediante $|A - \lambda I| = 0$

Radio espectral: $\rho(A) = \max |\lambda_i|$

Normas vectoriales:

- **Norma-p:** $\left\| \vec{x} \right\|_p = \sqrt[p]{|x_1|^p + |x_2|^p + \dots + |x_n|^p}$
La más usada es la **norma 2**.
- **Norma-infinito:** $\left\| \vec{x} \right\|_{\infty} = \max(|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|)$
- **Distancia entre dos vectores:** $d(\vec{x}; \vec{y}) = \left\| \vec{x} - \vec{y} \right\|$
La distancia entre dos vectores es un escalar.

Normas matriciales:

- **Norma 1:** el máximo entre las sumas de los módulos de los elementos de cada columna de la matriz.
- **Norma infinito:** el máximo entre las sumas de los módulos de los elementos de cada fila de la matriz.
- **Norma 2:** $\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^* \cdot A)}$
 A^* es la matriz traspuesta conjugada de A . En la materia A es real $\Rightarrow A^* = A^T$

Sistemas de ecuaciones lineales cuadrados e Inversibles:

Se plantean siempre sistemas del estilo $AX=B$, donde A es la matriz de coeficientes, X la matriz de incógnitas y B la matriz de términos independientes. En la materia se ven matrices A cuadradas e inversibles, tales que $\det(A) \neq 0$.

Propiedades de estos sistemas:

- Existe $A^{-1} / AA^{-1} = I$ (A^{-1} se denomina matriz inversa de A).
- El rango de A es n .
- El sistema $AX = B$ tiene solución única.
- Las filas y columnas de A son vectores linealmente independientes.
- El sistema $AX = 0$ tiene solución nula $X = 0$.

Variante de Von Mises

Es más lento que Newton Raphson en la convergencia, pero más ágil en los cálculos.

Fórmula iterativa: $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

Método de Newton Raphson para raíces múltiples

Fórmula iterativa: $x_{n+1} = x_n - m \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$
El problema es que debo conocer la multiplicidad m de la raíz buscada

Otra forma: $u(x) = \frac{f(x)}{f'(x)} \Rightarrow$ se aplica Newton Raphson a $u \Rightarrow x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)f'(x_n)}{(f'(x_n))^2 - f(x_n)f''(x_n)}$

Método	Ventajas	Desventajas
Bisección	Sencillo de aplicar	Convergencia muy lenta, y no se puede acelerar ya que tiene radio de convergencia fijo (0,5).
Regula falsi Punto fijo	-	-
Newton Raphson	Si converge, es más rápido que bisección. Es el más eficiente debido a su $p=2$	No siempre converge. Una mala elección del punto inicial puede desaprovechar la eficiencia del método, e incluso de la convergencia.

Para todas las unidades:

Error absoluto: $e_x = |\text{Valor exacto} - \text{valor aproximado}| = |X - x|$

Error relativo: $er_x = \frac{|\text{Error absoluto}|}{|\text{Valor exacto}|} = \frac{|e_x|}{|X|} = \frac{|X - x|}{|X|}$

El error relativo da una mejor percepción que el error absoluto

Métodos indirectos o iterativos

Sirven para resolver estas ecuaciones.

- Se generan sucesiones $\{X^k\}_{k=0}^{\infty}$ que convergen a la solución del sistema.
- Se parte generalmente de un vector inicial $X^{(0)}$
- Se van generando vectores $X^k = TX^{(k-1)} + C$ donde T es una matriz y C un vector.

Método de Jacobi

- 1) Se evalúa si la matriz de coeficientes A es diagonalmente dominante.
 - Si lo es, el método va a converger a una solución.
 - Si no lo es, chequeamos si para alguna permutación de filas si lo es.
 - Si es así, se trabaja con la combinación que cumplió la condición, y convergerá a una solución.
 - Si no es así, no se puede asegurar nada sobre la convergencia.
- 2) Se despeja la incógnita correspondiente a cada fila (de la primera ecuación se despeja la incógnita 1, de la segunda ecuación la incógnita 2, etc.)
- 3) Las componentes del vector X^k se obtienen reemplazando en estas ecuaciones con las componentes del vector X^{k-1} según corresponda.
- 4) Se evalúa el criterio de paro, y si coincide, el vector calculado será la solución.

Método de Gauss Seidel

Es similar al de Jacobi con la diferencia de que en cada paso se utilizan, de ser posible, los valores calculados en el mismo paso para las variables anteriores. Requiere aproximadamente el 50% de las iteraciones que requeriría Jacobi.

Teoremas

- Para sistemas no homogéneos ($C \neq 0$) las sucesiones convergen para cualquier X_0 si y solo si $\rho(T) < 1$
- Si $\|T\| < 1$ para cualquier norma matricial entonces los métodos convergen para cualquier X_0 .
- Si A es diagonalmente dominante los métodos convergerán a una solución para cualquier X_0 .

Forma matricial - matrices T y C

Teniendo en cuenta $AX=B$, se plantea $A = D - L - U$, donde D es la matriz diagonal, L la triangular inferior cambiada de signo y U la triangular superior cambiada de signo.

En Jacobi: $X = D^{-1}(L + U)X + D^{-1}B$

$T_{\text{Jacobi}} = D^{-1}(L + U)$

$C_{\text{Jacobi}} = D^{-1}B$

En Gauss Seidel: $X = (D - L)^{-1}UX + (D - L)^{-1}B$

$T_{\text{GS}} = (D - L)^{-1}U$

$C_{\text{GS}} = (D - L)^{-1}B$

Numero de condición de la matriz A : $K(A) = \|A\| \|A^{-1}\|$ para cualquier norma matricial

Unidad 9 - Interpolación

Dada una tabla de puntos con su respectiva imagen, se busca obtener una función interpolante que pase por todos esos puntos. Para cada conjunto de valores hay infinitas funciones que cumplen esto, pero en la materia se buscan solamente funciones polinómicas por simplicidad.

Teorema: existencia y unicidad del polinomio interpolante

Dados x_0, x_1, \dots, x_n un conjunto de $n + 1$ puntos en $[a; b]$ y sus imágenes $f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_n)$
 \Rightarrow existe un único polinomio de grado menor o igual a n que interpola a f en $[a; b]$

Método de Lagrange

FÓRMULA DE INTERPOLACIÓN DE LAGRANGE

Se puede usar tanto para puntos equiespaciados como no equiespaciados, aunque arroja menor error si los puntos son equiespaciados. Sean x_0, x_1, \dots, x_n

$$P(x) = \sum_{i=0}^n L_i(x) f(x_i) \quad \text{con} \quad L_i(x) = \frac{(x-x_0)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_n)}{(x_1-x_0)\dots(x_1-x_{i-1})(x_1-x_{i+1})\dots(x_1-x_n)}$$

Estimación del error en el Método de Lagrange:

$$E = |f(x) - P(x)| \leq |(x-x_0)(x-x_2)\dots(x-x_n)| \cdot |f^{(n)}(\varphi)| / n! \quad \text{con } \varphi \in [a, b]$$

Observación: solamente será posible estimar el error en el caso de conocer la verdadera función $f(x)$, ya que para acotar el error se necesita la derivada n -ésima de f .

Método de Newton Gregory

Diferencias finitas

Diferencia finita progresiva de orden $n + 1$:

$$\Delta^{n+1}f_i = \Delta^n f_{i+1} - \Delta^n f_i$$

Diferencia finita progresiva de orden $n + 1$:

$$\nabla^{n+1}f_i = \nabla^n f_i - \nabla^n f_{i-1}$$

Diferencia finita dividida progresiva de orden k :

$$f[x_i; x_{i+1}; \dots; x_{i+k}] = \frac{f[x_{i+1}; x_{i+2}; \dots; x_{i+k}] - f[x_i; x_{i+1}; \dots; x_{i+k-1}]}{x_{i+k} - x_i}$$

Diferencia finita dividida progresiva de orden k :

$$f[x_i; x_{i-1}; \dots; x_{i-k}] = \frac{f[x_i; x_{i-1}; \dots; x_{i-k+1}] - f[x_{i-1}; x_{i-2}; \dots; x_{i-k}]}{x_i - x_{i-k}} \quad (\text{revisar})$$

Unidad 10 – Diferenciación e integración

Cálculo numérico de derivadas:

Diferencia progresiva:

$$f'(x_i) \cong \frac{f(x_i + h) - f(x_i)}{h}$$

$$f''(x_i) \cong \frac{f(x_i + 2h) - 2f(x_i + h) + f(x_i)}{h^2}$$

Diferencia regresiva:

$$f'(x_i) \cong \frac{f(x_i) - f(x_i - h)}{h}$$

$$f''(x_i) \cong \frac{f(x_i) - 2f(x_i - h) + f(x_i - 2h)}{h^2}$$

Diferencia central:

$$f'(x_i) \cong \frac{f(x_i + h) - f(x_i - h)}{2h}$$

$$f''(x_i) \cong \frac{f(x_i + h) - 2f(x_i) + f(x_i - h)}{h^2}$$

Siempre que se puede se utiliza la centrada por ser más precisa

Aproximación de integral (area) mediante trapezios:

$$A = \frac{1}{2} \cdot h \cdot \left[f_0 + f_n + 2 \cdot \sum_{i=1}^{n-1} f_i \right]$$

$$\text{Error} = E = \frac{a-b}{12} \cdot h^2 \cdot f''(\varepsilon), \quad \text{con } \varepsilon \in [a, b]$$

Si $f''(x) < 0$ en $[a, b]$ entonces la función es cóncava (hacia abajo) y por trapezios se obtendrá un valor más bajo que el exacto.

Si $f''(x) > 0$ en $[a, b]$ entonces la función es convexa (hacia arriba) y por trapezios se obtendrá un valor más alto que el exacto.

Aproximación de integral (area) mediante Simpson:

$$A = \frac{h}{3} [E + 4I + 2P]$$

Siendo E los f de los extremos, I los f impares y P los f pares

$$\text{Error} = E = \frac{a-b}{180} \cdot h^4 \cdot f''''(\varepsilon), \quad \text{con } \varepsilon \in [a, b]$$

Simpson solo puede aplicarse si la cantidad de intervalos (n) es PAR

En ambos casos: cantidad de intervalos $= n = \frac{b-a}{h}$; siendo h la distancia entre las x

MÉTODO DE NEWTON GREGORY PARA PUNTOS EQUIESPACIADOS

POLINOMIO DE NEWTON GREGORY PROGRESIVO:

Si conocemos **$n+1$** puntos x_0, x_1, \dots, x_n y sus respectivas imágenes f_0, f_1, \dots, f_n , Newton propone el polinomio:

$$P(x) = a_0 + a_1 (x-x_0) + a_2 (x-x_0)(x-x_1) + \dots + a_n (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1})$$



Ejercicio: Deduce la formula de los coeficientes:

$$a_i = \frac{\Delta^i f_0}{i! h^i}$$

POLINOMIO DE NEWTON GREGORY REGRESIVO (PARA PUNTOS EQUIESPACIADOS):

$$P(x) = b_0 + b_1 (x-x_n) + b_2 (x-x_n)(x-x_{n-1}) + \dots + b_n (x-x_n)(x-x_{n-1})\dots(x-x_1)$$

$$\text{Siendo los coeficientes:} \quad b_i = \frac{\nabla^i f_n}{i! h^i}$$

FÓRMULA GENERAL DE NEWTON GREGORY (PARA PUNTOS NO NECESARIAMENTE EQUIESPACIADOS)

POLINOMIO DE NEWTON GREGORY PROGRESIVO:

Si conocemos **$n+1$** puntos x_0, x_1, \dots, x_n y sus respectivas imágenes f_0, f_1, \dots, f_n , Newton propone el polinomio:

$$P(x) = a_0 + a_1 (x-x_0) + a_2 (x-x_0)(x-x_1) + \dots + a_n (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1})$$

Para que sea interpolante, deberá cumplir que: $P(x_i) = f(x_i) \quad \forall i=0, \dots, n$

$$f_0 = f(x_0) = P(x_0) = a_0 \quad \Rightarrow a_0 = f_0 = f[x_0]$$

$$f_1 = f(x_1) = P(x_1) = a_0 + a_1 (x_1 - x_0) \quad \Rightarrow a_1 = \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0} = f[x_0; x_1]$$
 a esta expresión la

llamaremos diferencia finita dividida progresiva de orden 1 de x_0 y x_1 .

POLINOMIO DE NEWTON GREGORY REGRESIVO:

Con un análisis equivalente se puede deducir la fórmula del polinomio interpolante de Newton Gregory regresivo, teniendo en cuenta las diferencias divididas regresivas y el polinomio escrito de atrás hacia adelante:

$$\text{Diferencia finita dividida regresiva de orden 1:} \quad f[x_i; x_{i+1}] = \frac{f_i - f_{i+1}}{x_i - x_{i+1}}$$

El polinomio regresivo se obtiene:

$$P(x) = b_0 + b_1 (x-x_n) + b_2 (x-x_n)(x-x_{n-1}) + \dots + b_n (x-x_n)(x-x_{n-1})\dots(x-x_1)$$

Unidad 11 – Ecuaciones diferenciales

Se ven problemas de valor inicial, del estilo:

$$y' = f(t, y) \text{ con } y(t_0) = y_0 \wedge y(t_a) = ?$$

TEOREMA de existencia y unicidad de solución de problemas de valor inicial

$$\text{Dado:} \quad y' = f(t, y) \text{ con } y(t_0) = y_0 \quad (*)$$

Si $f(t, y)$ es continua en $R = \{(t, y) / a \leq t \leq b \wedge c \leq y \leq d\}$ tal que $(t_0, y_0) \in R$ y además $f(t, y)$ verifica la condición de Lipschitz en R , entonces el problema de valor inicial $(*)$ tiene solución única en un entorno $t_0 \leq t \leq t_0 + \delta$

CONDICIÓN DE LIPSCHITZ

Sea la función $f(t, y)$, se dice que verifica la condición de Lipschitz $\Leftrightarrow \exists L > 0$ tal que

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq L |y_1 - y_2|$$

Propiedad:

Sea la función $f(t, y)$, si $|f'_y(t, y)| \leq L$ entonces L es la constante de Lipschitz.

Nota: si no me dan los intervalos en los que están t e y , puedo deducirlo mediante la condición inicial y el valor que me piden aproximar. O sea, si $y(t_0) = y_0$ y $y(t_a) = w_0$, entonces $t_0 < t < t_a$ y $y_0 < y < w_0$.

Métodos numéricos para resolver una ED

De paso simple: el valor de y_{i+1} se calcula a partir de la ecuación dada y de información únicamente del punto anterior (t_i, y_i) .

De paso múltiple o multipaso: requieren información de varios puntos anteriores.

En todos los casos, la primera aproximación coincide con el valor exacto:

$$w_0 = y_0 = y(t_0)$$

El error de truncamiento local:

$$|y_i - w_i|$$

Métodos de paso simple

- 1) Método de Euler: es un método sencillo, fácil de aplicar, pero no tiene buena precisión. Se utiliza para obtener una primera aproximación.

La precisión puede mejorarse disminuyendo h (o sea, tomando más subintervalos de una menor longitud) pero esto lleva a cometer más errores operativos.

$$w_{i+1} = w_i + h \cdot f(t_i, w_i)$$

- 2) Método de Taylor: es muy preciso, pero tiene mucha complejidad de cálculo, por lo que es difícil de aplicar.

$$y_{i+1} = y_i + y'(t_i) \cdot h + \frac{y''(t_i)}{2} \cdot h^2 + \frac{y'''(t_i)}{6} \cdot h^3 + \dots$$

- 3) Runge-Kutta de segundo orden:

Caso 1 - Método de Runge-Kutta de segundo orden:

$$w_{i+1} = w_i + h \cdot f\left(t_i + \frac{h}{2}, w_i + \frac{h}{2} \cdot f(t_i, w_i)\right)$$

Caso 2 - Fórmula de Heun:

$$w_{i+1} = w_i + \frac{h}{2} \cdot [f(t_i, w_i) + f(t_i + h, w_i + h \cdot f(t_i, w_i))]$$

- 4) Runge-Kutta de cuarto orden (precisión de Taylor orden 4):

$$w_{i+1} = w_i + \frac{1}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

CON:

$$\begin{cases} k_1 = h f(t_i, w_i) \\ k_2 = h f\left(t_i + \frac{h}{2}, w_i + \frac{k_1}{2}\right) \\ k_3 = h f\left(t_i + \frac{h}{2}, w_i + \frac{k_2}{2}\right) \\ k_4 = h f(t_i + h, w_i + k_3) \end{cases}$$

R-K 4^{to} orden

Formatos para las tablas

Cálculo de raíces

n	x_n	$ x_n - x_{n-1} $ o $ f(x_n) $
0	Valor inicial	-
1		
2		
...

El valor de x_0 se calcula en base a la fórmula propia del método usado (bisección, Newton-Raphson, etc.), y se itera hasta que se cumple el criterio de paro elegido: el x_0 en el que esto se cumpla será la aproximación de la raíz calculada. Siempre hay un valor inicial x_0 seleccionado según el método.

Sistemas de ecuaciones lineales

n	x_1	x_2	x_i	$ X^n - X^{n-1} $
0	Valor inicial	Valor inicial	Valor inicial	-
1				
2				
...

Luego de validada la matriz de coeficientes, de los sistemas de ecuaciones se despejan EN ORDEN las incógnitas correspondientes a cada fila (o sea, en la fila 1 se despeja x_1 , en la fila 2 se despeja x_2 , etc.). El valor de cada x se calcula utilizando estas fórmulas resultantes, reemplazando con los valores de las x anteriores. Se itera hasta que se cumple el criterio de paro, que suele ser alguna norma de la diferencia entre el vector actual y el anterior.

Interpolación

Tabla de diferencias finitas progresivas

x_i	$f(x_i) = f_i$	$\Delta^1 f_i$	$\Delta^2 f_i$	$\Delta^3 f_i$	$\Delta^4 f_i$
x_0	f_0				
x_1	f_1	$\Delta^1 f_0 = f_1 - f_0$			
x_2	f_2	$\Delta^1 f_1 = f_2 - f_1$	$\Delta^2 f_0 = \Delta^1 f_1 - \Delta^1 f_0$		
x_3	f_3	$\Delta^1 f_2 = f_3 - f_2$	$\Delta^2 f_1 = \Delta^1 f_2 - \Delta^1 f_1$	$\Delta^3 f_0 = \Delta^2 f_1 - \Delta^2 f_0$	
x_4	f_4	$\Delta^1 f_3 = f_4 - f_3$	$\Delta^2 f_2 = \Delta^1 f_3 - \Delta^1 f_2$	$\Delta^3 f_1 = \Delta^2 f_2 - \Delta^2 f_1$	$\Delta^4 f_0 = \Delta^3 f_1 - \Delta^3 f_0$
x_5	f_5				
x_6	f_6				

Tabla de diferencias finitas regresivas

x_i	$f(x_i) = f_i$	$\nabla^1 f_i$	$\nabla^2 f_i$	$\nabla^3 f_i$	$\nabla^4 f_i$
x_6	f_6				
x_5	f_5	$\nabla^1 f_6 = f_6 - f_5$			
x_4	f_4	$\nabla^1 f_5 = f_5 - f_4$	$\nabla^2 f_6 = \nabla^1 f_5 - \nabla^1 f_4$		
x_3	f_3	$\nabla^1 f_4 = f_4 - f_3$	$\nabla^2 f_5 = \nabla^1 f_4 - \nabla^1 f_3$	$\nabla^3 f_6 = \nabla^2 f_5 - \nabla^2 f_4$	
x_2	f_2	$\nabla^1 f_3 = f_3 - f_2$	$\nabla^2 f_4 = \nabla^1 f_3 - \nabla^1 f_2$	$\nabla^3 f_5 = \nabla^2 f_4 - \nabla^2 f_3$	$\nabla^4 f_6 = \nabla^3 f_5 - \nabla^3 f_4$
x_1	f_1				
x_0	f_0				

Tabla de diferencias divididas

x_i	$f[x_i] = f_i$	$f[x_i; x_{i+1}]$	$f[x_i; x_{i+1}; x_{i+2}]$
x_0		$f[x_0; x_1] = \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0}$			
x_1	f_1	$\frac{f_2 - f_1}{x_2 - x_1}$...		
x_2	f_2	$f[x_2; x_3] = \frac{f_3 - f_2}{x_3 - x_2}$			
x_3	f_3	$f[x_3; x_4] = \frac{f_4 - f_3}{x_4 - x_3}$			
x_4	f_4				

Métodos de paso múltiple:

Explícitos: en la fórmula no aparece el elemento a obtener (w_{i+1}).

Algunos ejemplos de métodos multipaso EXPLÍCITOS:

- a) Método de Adams-Bashforth de 2 pasos ($w_0 = \alpha$ $w_1 = \alpha_1$)

$$w_{i+1} = w_i + \frac{h}{2} [3f(t_i; w_i) - f(t_{i-1}; w_{i-1})] \quad \text{et} | = \frac{5}{12} y''(\xi_i) h^2$$

- b) Método de Adams-Bashforth de 3 pasos ($w_0 = \alpha$ $w_1 = \alpha_1$ $w_2 = \alpha_2$)

$$w_{i+1} = w_i + \frac{h}{12} [23f(t_i; w_i) - 16f(t_{i-1}; w_{i-1}) + 5f(t_{i-2}; w_{i-2})] \quad \text{et} | = \frac{3}{8} y'''(\xi_i) h^3$$

- c) Método de Adams-Bashforth de 4 pasos ($w_0 = \alpha$ $w_1 = \alpha_1$ $w_2 = \alpha_2$ $w_3 = \alpha_3$)

$$w_{i+1} = w_i + \frac{h}{24} [55f(t_i; w_i) - 59f(t_{i-1}; w_{i-1}) + 37f(t_{i-2}; w_{i-2}) - 9f(t_{i-3}; w_{i-3})] \quad \text{et} | = \frac{251}{720} y^{IV}(\xi_i) h^4$$

Implícitos: en la fórmula aparece el elemento a obtener (w_{i+1}).

Algunos ejemplos de métodos multipaso IMPLÍCITOS:

- a) Método de Adams-Moulton de 2 pasos

$$w_{i+1} = w_i + \frac{h}{12} [5f(t_{i+1}; w_{i+1}) + 8f(t_i; w_i) - f(t_{i-1}; w_{i-1})] \quad \text{et} | = \frac{1}{24} y^{IV}(\xi_i) h^3$$

- b) Método de Adams-Moulton de 3 pasos

$$w_{i+1} = w_i + \frac{h}{24} [9f(t_{i+1}; w_{i+1}) + 19f(t_i; w_i) - 5f(t_{i-1}; w_{i-1}) + f(t_{i-2}; w_{i-2})] \quad \text{et} | = -\frac{19}{720} y^{IV}(\xi_i) h^4$$

- c) Método de Adams-Moulton de 4 pasos

$$w_{i+1} = w_i + \frac{h}{720} [25f(t_{i+1}; w_{i+1}) + 646f(t_i; w_i) - 264f(t_{i-1}; w_{i-1}) + 106f(t_{i-2}; w_{i-2}) - 19f(t_{i-3}; w_{i-3})] \\ \text{et} | = -\frac{3}{160} y^{VI}(\xi_i) h^5$$

Los métodos implícitos no pueden aplicarse directamente. Primero se aplica un método explícito para obtener una aproximación de w_{i+1} , y luego se mejora dicha aproximación mediante un método implícito.

A esta combinación de método explícito-implícito se la denomina método predictor-corrector.

Algunos de ellos son:

- Adams - Bashforth - Moulton (4 pasos).
- Milne - Simpson.
- Euler - Heun.

Ecuaciones diferenciales

Euler

i	$f(t_i, w_i)$	t_i	w_i
0	-	t_0	y_0
1			
2

Heun

i	$f(t_i, w_i)$	$f(t_i + h, w_i + h \cdot f(t_i, w_i))$	t_i	w_i
0	-	-	t_0	y_0
1				
2

RK 2º Orden

i	$f(t_i, w_i)$	$f\left(t_i + \frac{h}{2}, w_i + \frac{h}{2} \cdot f(t_i, w_i)\right)$	t_i	w_i
0	-	-	t_0	y_0
1				
2

RK 4º Orden

i	k_1	k_2	k_3	k_4	t_i	w_i
0	-	-	-	-	t_0	y_0
1						
2				

Comparación métodos para ecuaciones diferenciales

Método	Error de t local	Error global	Precisión
Euler	$\frac{h^2}{2} \cdot y''(\varphi)$	Orden h	Poca
Taylor	$\frac{h^{k+1}}{(k+1)!} \cdot y^{(k+1)}(\varphi)$	Orden h^k	Mucha, y mejora al aumentar el orden del polinomio
Runge-Kutta 2ºO.	$\frac{h^3}{3!} \cdot y'''(\varphi)$	Orden h^2	Similar a Taylor de orden 2
Heun	$\frac{h^4}{4!} \cdot y^{IV}(\varphi)$	Orden h^3	Similar a Taylor de orden 3
Runge-Kutta 4ºO.	$\frac{h^5}{5!} \cdot y^{V}(\varphi)$	Orden h^4	Similar a Taylor de orden 4

Temas extras para el recuperatorio

FORMATO DE UN SISTEMA:

De esta forma: $F(t, B, m, M)$ indicamos una máquina siendo:

t : cantidad de dígitos con los que trabaja la máquina.

B : base del sistema de numeración

m : cota inferior de e (negativa)

M : cota superior de e

O sea: $-m \leq e \leq M$

COMPARACION DE ERRORES

Si se reduce h a la mitad, el error global se reduce a:

Método de EULER:

ETL es de $O(h^2)$ \rightarrow EGT es de $O(h)$ $\rightarrow \frac{1}{2}$

Método de RK de orden 2:

ETL es de $O(h^3)$ \rightarrow EGT es de $O(h^2)$ $\rightarrow \frac{1}{4}$

Método de HEUN:

ETL es de $O(h^4)$ \rightarrow EGT es de $O(h^3)$ $\rightarrow \frac{1}{8}$

Método de RK de orden 4:

ETL es de $O(h^5)$ \rightarrow EGT es de $O(h^4)$ $\rightarrow \frac{1}{16}$

MÉTODO DE EULER PARA SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES:

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t), y(t)) \\ y'(t) = g(t, x(t), y(t)) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} dx = f(t, x, y) dt \\ dy = g(t, x, y) dt \end{cases}$$

Si en vez de tomar los diferenciales, los sustituimos por incrementos:

$$\begin{aligned} dt &= t_{i+1} - t_i \\ dx &= x_{i+1} - x_i \\ dy &= y_{i+1} - y_i \end{aligned} \rightarrow \begin{cases} x_{i+1} - x_i = f(t_i, x_i, y_i) (t_{i+1} - t_i) \\ y_{i+1} - y_i = g(t_i, x_i, y_i) (t_{i+1} - t_i) \end{cases}$$

y como $t_{i+1} - t_i = h$

$$\begin{cases} x_{i+1} = x_i + h \cdot f(t_i, x_i, y_i) \\ y_{i+1} = y_i + h \cdot g(t_i, x_i, y_i) \end{cases}$$

MÉTODO DE EULER

MÉTODO DE RUNGE KUTTA DE 4º ORDEN PARA SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES:

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t), y(t)) \\ y'(t) = g(t, x(t), y(t)) \end{cases} \quad \text{con} \quad x(t_0) = x_0 \wedge y(t_0) = y_0$$

$$\begin{cases} x_{i+1} = x_i + \frac{h}{6} (f_1 + 2f_2 + 2f_3 + f_4) \\ y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6} (g_1 + 2g_2 + 2g_3 + g_4) \end{cases}$$

$$f_1 = f(t_i, x_i, y_i)$$

$$g_1 = g(t_i, x_i, y_i)$$

$$f_2 = f(t_i + \frac{h}{2}, x_i + \frac{h}{2} f_1, y_i + \frac{h}{2} g_1)$$

$$g_2 = g(t_i + \frac{h}{2}, x_i + \frac{h}{2} f_1, y_i + \frac{h}{2} g_1)$$

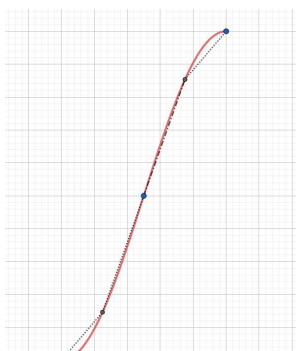
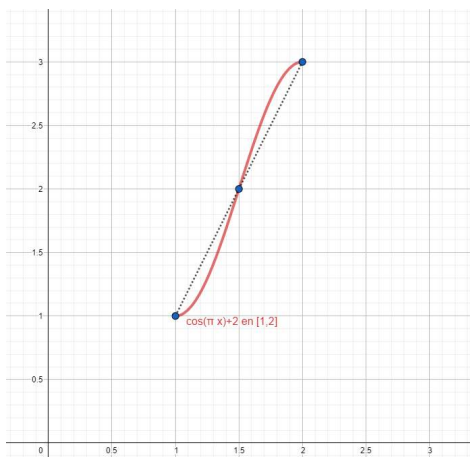
$$f_3 = f(t_i + \frac{h}{2}, x_i + \frac{h}{2} f_2, y_i + \frac{h}{2} g_2)$$

$$g_3 = g(t_i + \frac{h}{2}, x_i + \frac{h}{2} f_2, y_i + \frac{h}{2} g_2)$$

$$f_4 = f(t_i + h, x_i + h f_3, y_i + h g_3)$$

$$g_4 = g(t_i + h, x_i + h f_3, y_i + h g_3)$$

Si en un intervalo donde la función tiene simetría impar se toma una cantidad par de intervalos n (o sea, una cantidad impar de puntos), en cualquiera de los dos métodos se obtendrá un resultado exacto, ya que las áreas sobrantes y faltantes se compensan.



$$a_1 = \frac{1}{2} \int_{-1}^2 \frac{1}{t+3} dt = \frac{1}{2} \int_{-1}^2 \frac{1}{t+3} dt = \frac{1}{2} (4 - 6 \ln(2)) = 6$$