

Лабораторная работа №2.

Изучение способов представления и исследования сетей Петри

Цель работы

Изучение матричных способов представления сетей Петри (СП) и методов исследования СП-моделей на основе матричных уравнений и дерева достижимых разметок (ДДР).

Постановка задачи

Сеть Петри это двудольный, ориентированный мультиграф $N = (P, T, I, O, \mu_0)$, где P - конечное непустое множество элементов, называемых позициями; T - конечное непустое множество элементов, называемых переходами; $I: P \times T \rightarrow \{0, 1, 2, \dots\}$ и $O: T \times P \rightarrow \{0, 1, 2, \dots\}$ функции инцидентности; $\mu_0: P \rightarrow \{0, 1, 2, \dots\}$ - начальная разметка.

СП обычно представляют в виде геометрического объекта. При этом позиции изображаются кружками, переходы – черточками или прямоугольниками. Дуга проводится от позиции pi к переходу tj в том случае, если $I(pi, tj) = > 1$, а от перехода tj к позиции pi если $O(tj, pi) = > 1$.

Если $I(pi, tj) = > 1$, то позицию pi называют входной к переходу tj , а переход tj выходным к позиции pi . Множество входных позиций к переходу tj определяется выражением $pre(tj) = \{p: I(p, tj) = > 1\}$, а множество выходных переходов к позиции pi выражением $post(pi) = \{t: I(pi, t) = > 1\}$. Аналогично определяются множества входных переходов и выходных позиций.

При функционировании СП переходит от одной разметки к другой. Переход t может сработать при разметке μ , если $\forall p \in pre(t): \mu(p) - I(p, t) \geq 0$, где $\mu(p)$ число меток в позиции p . В результате срабатывания перехода t новая разметка μ' возникает в соответствии со следующим правилом:

$$\forall p \in (pre(t) \cup post(t)): \mu'(p) = \mu(p) - I(p, t) + O(t, p).$$

В этом случае говорят, что разметка μ' достижима из разметки μ , а μ предшествует μ' . Данный факт обозначается следующим образом: $\mu \rightarrow^t \mu'$. Сеть останавливается, если при некоторой разметке не может сработать ни один из ее переходов. Такая разметка называется тупиковой. Таким образом, СП моделирует некоторую структуру и динамику ее функционирования.

Если разметка μ' достижима из разметки μ в результате срабатывания последовательности переходов $r=t1, t2, \dots, tk$, где: r - слово из множества T^* всех слов в алфавите T , то это обозначается как $\mu \xrightarrow{t1} \mu'' \xrightarrow{t2} \dots \rightarrow \mu'' \xrightarrow{tk} \mu'$ или $\mu \xrightarrow{r} \mu'$. Разметка μ достижима в сети N , если $\mu \emptyset \rightarrow \mu$. Множество всех достижимых разметок в сети N обозначим через $R(N)$. Переход t достижим от разметки μ ($\mu \rightarrow t$) в сети N , если:

$$\exists \mu' \exists \mu'' (\{\mu', \mu''\} \in R(N) \& \mu \rightarrow \mu'): \mu' \xrightarrow{T} \mu''.$$

Переход t достижим в сети N , если $\mu \emptyset \rightarrow t$. В приложении к моделированию систем проблема достижимости разметки μ' из $\mu \emptyset$ интерпретируется как возможность достижения определенного состояния системы.

Переход t живой, если:

$$\forall \mu \in R(N): \mu \rightarrow t.$$

СП живая, если:

$$\forall t \forall \mu (t \in T \& \mu \in R(N)): \mu(p) \rightarrow t.$$

Позиция p ограничена, если существует такое наперед заданное K , для которого $\forall \mu \in R(N): \mu(p) \leq K$.

СП ограничена, если:

$$\forall p \forall \mu (p \in P \& \mu \in R(N)): \mu(p) \leq K.$$

Если $K=1$, то СП называется безопасной.

Для моделей реальных ВС анализ на ограниченность (безопасность) позволит проверить возможность функционирования системы в некотором стационарном режиме без перехода заданного предела по числу объектов в отдельных подсистемах. При анализе на это свойство, в частности, могут быть выявлены требования к внутренним буферным накопителям в ВС. В настоящее

время наиболее широко используются два метода анализа СП: построение дерева достижимых разметок и решение матричных уравнений, построенных на основе уравнения СП.

Дерево достижимых разметок представляет собой ориентированный граф, множество вершин которого образовано множеством $R(N)$, причем из вершины μ в вершину μ' ведет дуга, помеченная символом перехода t , если и только если $\mu \xrightarrow{t} \mu'$. В общем случае дерево достижимых разметок может иметь бесконечное число вершин. Для превращения дерева в полезный инструмент анализа опишем алгоритм построения конечного дерева достижимости.

Каждая i -я вершина дерева связывается с расширенной разметкой $\mu(i)$. В расширенной разметке число меток в позиции может быть либо неотрицательным целым, либо бесконечно большим. Бесконечное число меток обозначим символом ω . Каждая вершина классифицируется или как граничная, терминальная, дублирующая вершина, или как внутренняя. Граничными являются вершины, которые еще не обработаны алгоритмом. После обработки граничные вершины становятся либо терминальными, либо дублирующими, либо внутренними. Алгоритм начинает свою работу с определения начальной разметки. До тех пор, пока имеются граничные вершины, они обрабатываются алгоритмом.

Пусть x – граничная вершина, которую необходимо обработать, и с которой связана разметка $\mu(x)$.

1. Если в дереве имеется другая вершина y , не являющаяся граничной, и с ней связана разметка $\mu(y) = \mu(x)$, то вершина x дублируется.
2. Если для разметки $\mu(x)$ на один из переходов неразрешим, т.е. $\mu(x)$ тупиковая разметка, то x терминальная вершина.
3. Для любого перехода t_j , из множества T разрешенного в разметке $\mu(x)$, создать новую вершину z дерева достижимости. Разметка $\mu(z)$, связанная с этой вершиной, определяется для каждой позиции p_i следующим образом:
 - а) если $\mu(x)_i = \omega$, то $\mu(z)_i = \omega$;
 - б) если на пути от корневой вершины к x существует вершина y такая, что

$\mu(y) \rightarrow^i \mu(x)$, $\mu(y) < \mu(x)$ и $\mu(y)i < \mu(x)i$, то $\mu(z)i = \omega$;

в) в противном случае $\mu(z)i = \mu(x)i$.

Дуга, помеченная t_j , направлена от вершины x к вершине z . Вершина x переопределяется как внутренняя, вершина z становится граничной. Когда все вершины дерева становятся терминальными, дублирующими или внутренними, алгоритм останавливается.

С помощью матричных методов можно показать, что если СП живая и ограниченная, то она должна быть последовательной и инвариантной. Данные свойства недостаточны для утверждения живости и ограниченности СП. Однако их полезно проверить исходя из матриц инцидентности, так как если одно из этих свойств не подтверждается, то можно заключить, что описываемая система содержит некоторые недоработки.

Введем в рассмотрение матрицу C , которая получается следующим образом:

$C = O^T - I$, где O^T - транспонированная матрица O .

Пусть размерность C равна $n \times m$, где m и n - мощности множеств P и T .

Рассмотрим матричные уравнения:

$$y * C = 0, \quad (1)$$

$$C * x = 0, \quad (2)$$

где y и x - векторы, размерность которых равна n и m соответственно.

Вектор y , удовлетворяющий решению уравнения (1), все элементы которого положительны, называется p -цепью; p -цепь, все элементы которой больше нуля, называется полной p -цепью. Аналогично на основе уравнения (2) определяются понятия t -цепи и полной t -цепи. СП, для которой существует полная p -цепь, называется инвариантной. СП, для которой существует полная t -цепь, называется последовательной.

Лабораторное задание

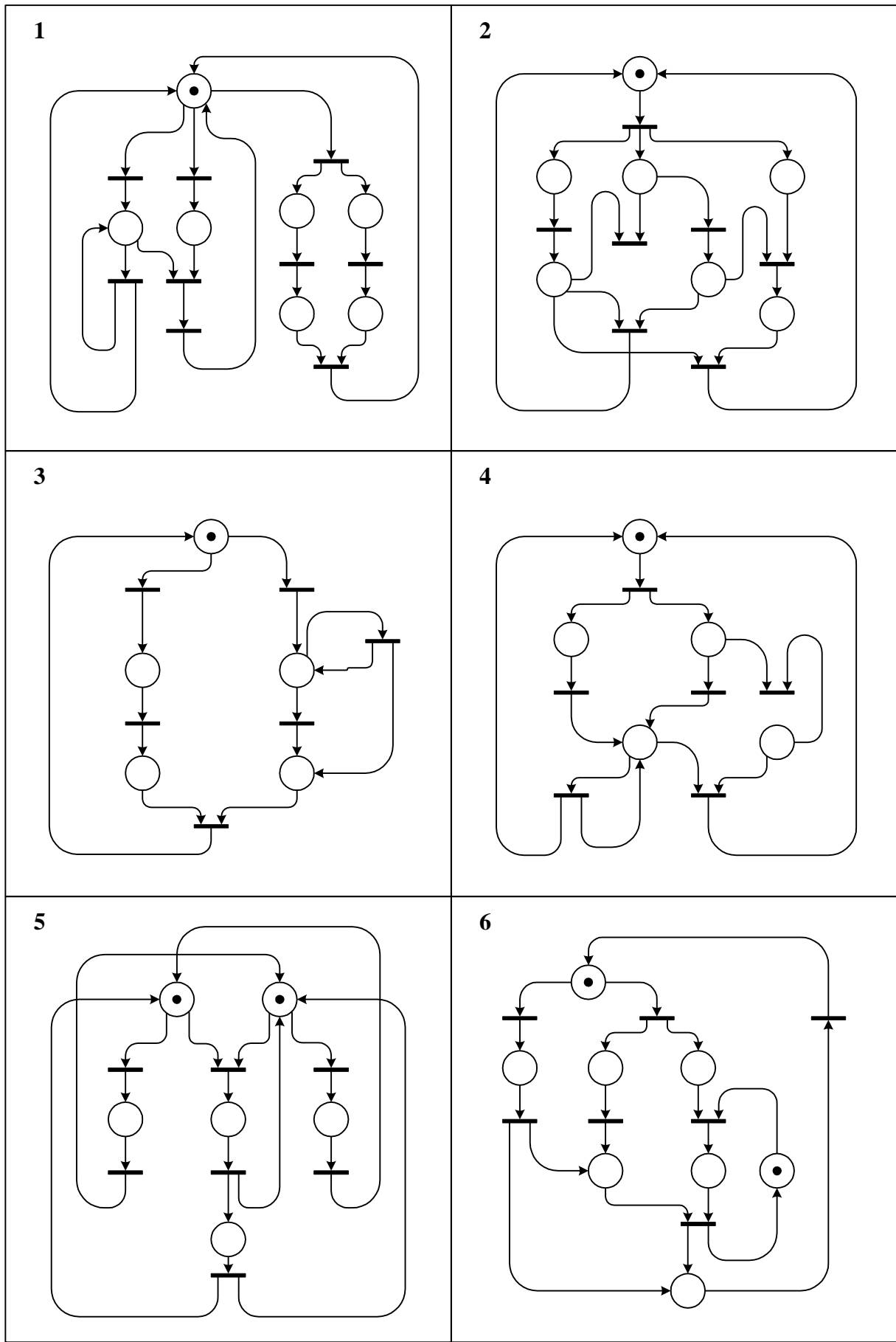
1. Выбрать структуру СП в соответствии с номером варианта из Таблицы 1.

2. Описать заданную СП-модель с помощью матриц I, O, μ .
3. Провести исследование СП-модели на основе матричных методов.
Сделать заключение о живости и безопасности сети.
4. Провести исследование СП-модели путем построения дерева достижимых разметок (ДДР).
5. На основе проведенных исследований оценить корректность СП-модели и предложить варианты устранения недостатков в случае их обнаружения. Допустимо добавлять новые элементы и ограниченно видоизменять топологию сети. Полученная модель должна отвечать требованиям живости и безопасности.
6. Провести исследование полученной сети с помощью матричных методов и ДДР.
7. Сравнить изученные способы анализа СП и сформулировать методику их совместного использования для исследования СП-моделей вычислительных систем.

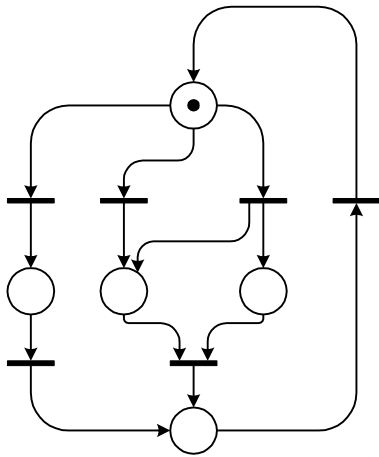
Контрольные вопросы

1. Что такое СП и с помощью каких параметров она задается?
2. Что такое живость, безопасность, ограниченность и достижимость СП?
3. Как интерпретируются для моделируемой ВС живость, ограниченность и достижимость СП?
4. Как выглядит уравнение состояния СП?
5. В чем заключаются матричные методы исследования СП-моделей?
6. Что такое полная p -цепь и полная t -цепь?
7. Что такое дерево достижимых разметок?
8. Какие приемы использованы в алгоритме построения дерева достижимых разметок для ограничения дерева?
9. Какие свойства СП исследуются в процессе анализа?

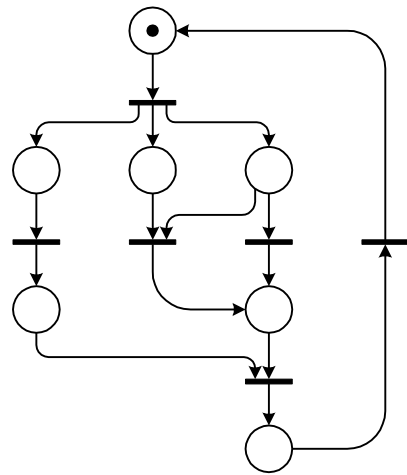
Таблица 1. Варианты заданий



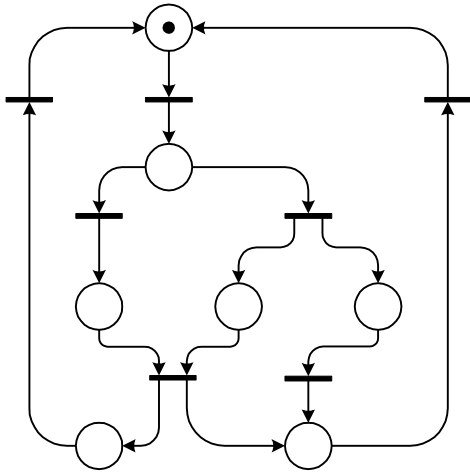
7



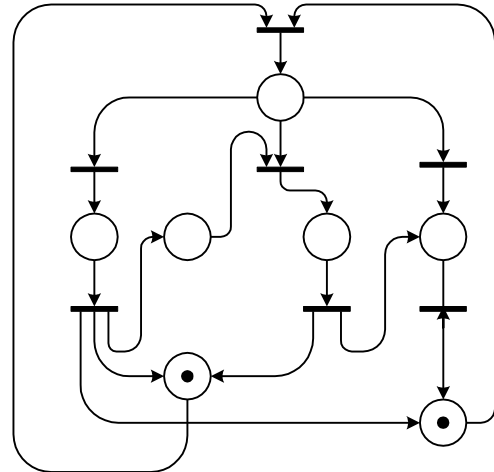
8



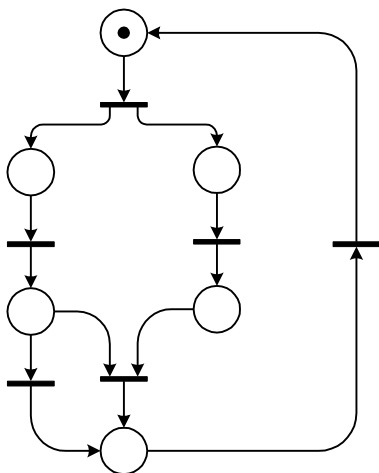
9



10



11



12

