

chapitre3: les graphes adjoints ou line graphes

Wilfried Ehounou

December 10^e 2017

Contents

| | | |
|-----------|--|----------|
| 1 | Matrice de Correlation : un Line graphe | 5 |
| 1.1 | État de l'art: les line graphes | 5 |
| 1.2 | Proposition d'algorithmes | 5 |
| 1.2.1 | Line-couverture | 5 |
| 1.2.1.1 | Détermination du graphe de corrélation et sa line-couverture | 5 |
| 1.2.2 | Algorithme de couverture | 7 |
| 1.2.2.1 | Impact des pertes par effets joules | 9 |
| 1.2.2.1.1 | expérience 1 | 10 |
| 1.2.2.1.2 | expérience 2 | 10 |
| 1.2.2.2 | Complexité de l'algorithme de couverture | 11 |
| 1.2.3 | Algorithme de correction | 11 |
| 1.3 | Correction de la matrice de corrélation | 11 |
| 1.3.1 | Complexité des algorithmes | 14 |
| 1.4 | Détermination de la topologie du réseau énergétique | 14 |
| 1.5 | Correction particulière de Graphes : Graphes lourdes | 14 |

Chapter 1

Matrice de Correlation : un Line graphe

1.1 État de l'art: les line graphes

1.2 Proposition d'algorithmes

1.2.1 Line-couverture

Considérons un réseau électrique modélisé par un DAG et une matrice μ_c dans laquelle chaque ligne/colonne est associée à un arc du DAG. Une case de $\mu_c[i, j]$ contient le niveau de corrélation de mesures entre l'arc i et l'arc j , une valeur entre 0 et 1. Toutefois des erreurs de mesures peuvent apparaître.

Idéalement, si ces deux arcs partagent une extrémité en commun, soit l'extrémité initiale ou soit l'extrémité finale comme dans la figure 1.1, la valeur est proche de 1 sinon elle est proche de 0.

À partir de μ_c et d'une valeur de seuil choisie $s \in [0, 1]$, on considère la matrice M de même

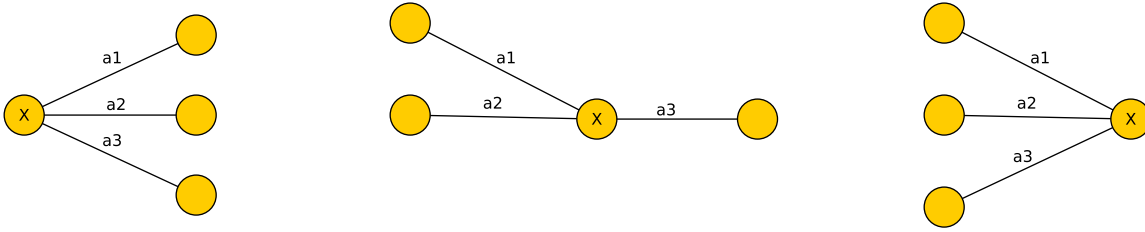


Figure 1.1: Sommet X partagé entre les arêtes. De la gauche vers la droite : sommet entrant, à droite sommet intermédiaire et sommet sortant

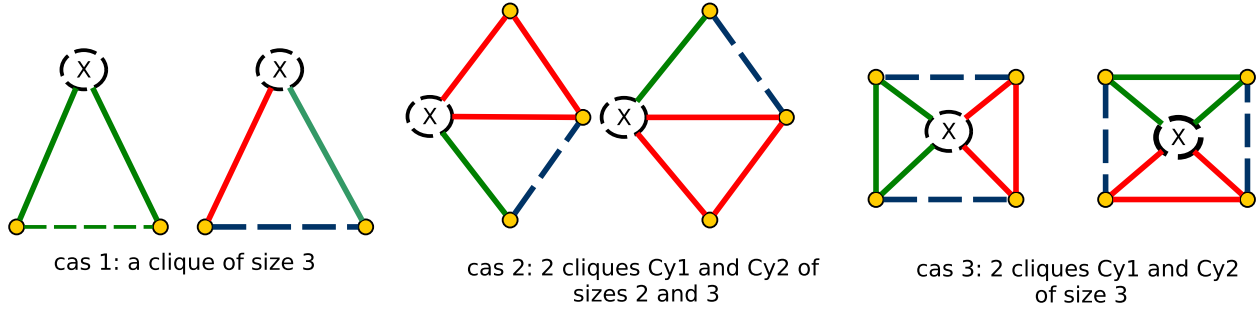
dimension que μ_c dans laquelle $M[i, j] = 1$ ssi $\mu_c[i, j] \geq s$, sinon $M[i, j] = 0$.

Soit $G_C = (V_C, E_C)$ le graphe dont M est la matrice d'adjacence. Idéalement, l'ensemble des liens ayant une extrémité commune forme une clique dans G_C .

Définition 1. Un graphe $G_C = (V_C, E_C)$ est un graphe de corrélation ssi il est le line graphe d'un DAG. L'ensemble \mathcal{C} est dit une **couverture de corrélation** de G_C

1.2.1.1 Détermination du graphe de corrélation et sa line-couverture

Définition 2. Une ambiguïté est un graphe isomorphe à l'un des graphes de la figure 1.2. Le sommet X est appelé le **point d'ambiguïté**.

Figure 1.2: Configurations possibles d'une ambiguïté au sommet X

Lemma 1. *Si un graphe de corrélation G_C admet deux couvertures de corrélation, alors il existe au moins un sommet u de G_C tel que $G_C[\{u\} \cup \Gamma_{G_C}(u)]$ est une ambiguïté dont u est le point.*

Proof. Considérons deux line-couvertures C et C' de G_C . Il existe au moins un sommet $v \in G_C[V]$ qui n'est pas couvert par la (ou les) même(s) clique(s) dans C and C' . Soient deux cliques c_1 et c_2 (potentiellement vide) partitionnant $\{v\} \cup \Gamma_{G_C}(v)$ dans \mathcal{C} . Considérons deux autres cliques c_3 et c_4 différentes de c_1 et c_2 partitionnant également $\{v\} \cup \Gamma_{G_C}(v)$ dans \mathcal{C} .

Notons $c_{i,j}$ l'intersection de c_i et c_j pour tout $i \in \{1, 2\}$ et $j \in \{3, 4\}$. Chaque sommet $w \in c_{i,j}$ est couvert par au plus deux cliques de G dans \mathcal{C} , dont la clique c_i . Puisque c_j est une clique alors ce sommet w est voisin de tous les sommets de $c_{i',j}$, pour $i' \neq i$. Les arêtes entre ces sommets sont dans $c_{i'}$, donc chaque arête $[w, z]$ pour tout sommet $z \in c_{i',j}$ forme une clique correspondant dans le réseau de flots. Ainsi, le cardinal de chaque ensemble $c_{i,j}$ est égal à 1.

Appelons $v_{i,j}$ le seul sommet présent dans $c_{i,j}$. Il est possible d'avoir $v_{1,3} = v_{1,4}$ ou $v_{2,3} = v_{2,4}$. Si les deux égalités sont vérifiées, le sommet v est alors couvert non pas par deux cliques mais par une seule de cardinalité 3. Ainsi, les seuls cas possibles sont alors résumés par la figure 1.3. Le sommet v est bien le point d'une ambiguïté isomorphe à $G_C[\{u\} \cup \Gamma_{G_C}(u)]$. \square

On peut déduire le corollaire suivant :

Corollary 2. *Si un graphe de corrélation admet deux couvertures de corrélation, alors il est isomorphe à l'un des graphes de la figure 1.3.*

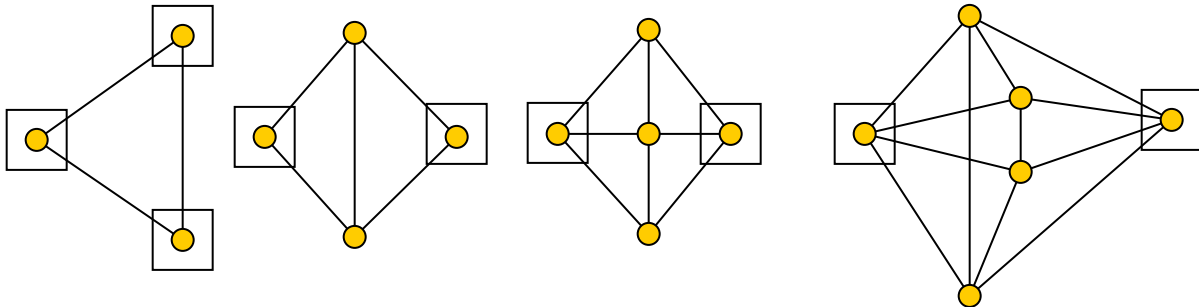


Figure 1.3: Graphes possibles avec deux couvertures avec les points d'ambiguïtés

En Effet, si $G_C[u \cup \Gamma_{G_C}(u)]$ est une ambiguïté, chaque arête, qui n'est pas liée au point d'ambiguïté, doit être une arête d'une et une seule autre ambiguïté de G_C . Et chaque sommet d'une ambiguïté, qui n'est pas un point d'ambiguïté, doit appartenir à une et une seule autre

ambiguïté de G_C dont il n'est pas non plus le point d'ambiguïté. De plus, chaque arête, n'étant pas couvert par les deux configurations de cliques possibles dans une ambiguïté (les arêtes en pointillées dans la figure 1.3), doivent être dans la même situation dans une autre ambiguïté à laquelle elles appartiennent. Ces contraintes font que si un graphe contient une ambiguïté induite, alors il ne peut être que dans un cas de la figure 1.3.

Définition 3. Soit G un graphe et u un sommet de G . Une partition de $\Gamma_G(v)$ en deux cliques C_{u1}, C_{u2} est **cohérente** ssi chaque sommet v de C_{u1} (resp C_{u2}) a au plus un voisin dans C_{u2} (resp C_{u1}).

Le résultat suivant est un corollaire direct de la preuve du lemme 3

Lemma 3. Soit G_C un line graphe, u un sommet de G_C et une partition cohérente de $u \cup \Gamma_{G_C}(v)$ en deux cliques C_{u1}, C_{u2} . Si l'une de ces deux cliques est de cardinal supérieur ou égal à 4, alors cette partition cohérente est unique.

Étant donné une partition cohérente C_{u1}, C_{u2} pour un sommet u de G_C , la fiabilité de cette cohérence est $F(C_{u1}, C_{u2}) = \min_{[x,y] \in E(C_{u1} \cup E(C_{u2}))} \mu_C([x, y])$

Définition 4. Une **line-couverture** d'un graphe non orienté connexe G_C est un ensemble de cliques maximales de G_C telles que chaque sommet de G_C appartient à une ou deux de ces cliques et que chaque arête de G_C soit couverte par exactement une de ces cliques.

Il a été montré qu'un graphe G_C est un line graphe si et seulement si il admet une line-couverture. Basée sur cette idée et sur des sous-graphes exclus, un algorithme linéaire en fonction du nombre d'arêtes a été proposé pour vérifier si un graphe est un line graphe et si oui en fournir la line-couverture. Cette algorithme est l'**algorithme de couverture**.

1.2.2 Algorithme de couverture

Étant donné un graphe $G_C = (V_C, E_C)$, l'algorithme suivant a pour but de déterminer la line-couverture si elle existe (notamment si la matrice de corrélation est sans erreur). Dans le cas contraire, l'algorithme couvrira autant que possible des sommets de G_C par une ou deux cliques. Considérons C un ensemble de cliques de G_C initialement vide et chaque sommet $v \in V_C$ a un état $Cliq(v)$ initialisé à 0.

Chaque sommet v a cinq états possibles:

- 0 : il n'est couvert par aucune clique. Il correspond aussi à l'état initial des sommets.
- 1 : le sommet v est couvert par une clique ou deux cliques. Dans le cas où il est couvert par deux cliques, l'intersection de ces cliques donne le sommet v .
- 2 : le sommet est couvert par une clique et peut être couvert par une seconde clique.
- 3 : le sommet v est un sommet ambigu.
- -1 : le sommet v est couvert par plus de deux cliques. Il doit être corrigé par l'algorithme de correction.

Pour tout sommet v de degré minimum tel qu'il n'appartient à aucune clique ou qu'il est un sommet ambigu, S'il existe une partition cohérente de ce sommet et son voisinage $\{v\} \cup \Gamma_G(v)$ en deux cliques C_1, C_2 , alors ces deux cliques sont contenues dans la line-couverture. Les sommets v et u (avec $u \neq v$), appartenant à C_1 ou C_2 , a son état modifié de tel sorte que:

- $Cliq(v) = 1$ si son état précédent est égal à 0 et la clique C_2 est vide.
- $Cliq(v) = 3$ si son état précédent est égal à 0 et la clique C_2 est non vide.
- $Cliq(v) = 2$ si son état précédent est différent de 0.
- $Cliq(u) = 1$ si son état précédent est égal à 0 et l'ensemble des arêtes incidentes à u est vide.
- $Cliq(u) = 2$ si son état précédent est égal à 3 et l'ensemble des arêtes incidentes à u est vide.
- $Cliq(u) = 3$ si son état précédent est égal à 0 et l'ensemble des arêtes incidentes à u est non vide.
- $Cliq(u) = -1$ si son état précédent est égal à 3 et l'ensemble des arêtes incidentes à u est non vide.

Dans le cas ou il n'existe aucune partition cohérente au sommet v , son état est à $Cliq(v) = -1$.

DEBUT

1. **Si** G est isomorphe à un graphe double (voir figure 1.3), **alors** le traiter avec Verif.correl⁽¹⁾
- Sinon**
2. **Tant que** il existe un sommet u t.q $Cliq(u) \in \{0, 3\}$
- Faire**
3. choisir u de degré minimum
4. **Si** $\{u\} \cup \Gamma_G(u)$ peut être couvert par deux cliques C_1 et C_2 cohérentes,
 C_1 maximale et $C_2 = \emptyset$ si $Cliq(u) = 3$ ⁽²⁾
- alors**
5. **Si** $Cliq(u) = 0$ et $C_2 \neq \emptyset$ **Alors** $Cliq = 3$
6. **Sinon Si** $Cliq = 0$ et $C_2 = \emptyset$ **Alors** $Cliq(u) = 1$
7. **Sinon** $Cliq(u) = 2$
8. **FinSi**
9. **FinSi**
10. $\epsilon_u = E(G[C_1]) \cup E(G[C_2])$
11. **Pour tout** $w \in \Gamma_G(u)$ **Faire**
12. $\alpha(w) = \text{card}\{[w, x] \in E - \epsilon_u\}$
13. **Si** $\alpha_w > 0$ **Alors**
14. **Si** $Cliq(w) = 0$ **Alors** $Cliq(w) = 3$
15. **Sinon Si** $Cliq(w) = 3$ **Alors** $Cliq(w) = -1$
16. **FinSi**
17. **Sinon Si** $Cliq(w) = 0$ **Alors** $Cliq(w) = 1$
18. **Sinon Si** $Cliq(w) = 3$ **Alors** $Cliq(w) = 2$
19. **FinSi**
20. **FinPourTout**
21. $E = E - \epsilon_u$
22. **Sinon** $Cliq(u) = -1$
- FinSi**

23. **FinTant** que

24. **Fin Si**

FIN

¹ : chaque graphe de la figure 1.3 admet deux line-couvertures, souvent isomorphes, mais (au plus) une seule de ces line-couvertures correspond au DAG du réseau électrique sous-jacent. Dans ce cas, on utilise les mesures de corrélation de la matrice de mesures μ_C afin de déterminer la plus probable entre les deux.

² : le sommet u choisi (s'il existe) ne sera pas prioritairement un sommet tel que $Cliq(u) = 0$ et u est un point d'ambiguïté. Si lors d'une étape, seul un tel choix est possible et qu'il n'y a aucun sommet u tel que $Cliq(u) = -1$, c'est que chaque sommet du graphe initial G est un point d'ambiguïté. Dans ce cas, G_C est une union de composantes connexes isomorphes à un des graphes de la figure 1.3. Dans ce cas, n'importe quel choix conduit à une décomposition correcte. Dans tous les autres cas de sommet choisi u , le lemme 3 montre que le choix de décomposition est unique si G est un line graphe.

La partition cohérente se détermine au moyen des mesures physiques selon la loi de conservation des noeuds. En effet, tous les sommets d'une clique dans un line graphe sont des arêtes qui concourent un sommet du réseau électrique. Par les lois d'électricités, la différence entre les flots entrant et sortant dans ce sommet correspond aux pertes par effets joules EJ . Ainsi les deux cliques s'obtiennent si cette différence est inférieure aux pertes joules. Dans notre algorithme de couverture, nous supposons que la partition cohérente proposée est toujours exacte. Cela signifie que nous connaissons la valeur des pertes par effets joules dans le réseau électrique. Dans le cas où ce paramètre est inconnu, quel est la valeur minimum de ces pertes notée ϵ à partir duquel la partition est toujours exacte? En d'autres termes, quel est la valeur ϵ pour laquelle la décision de l'ORACLE est un *vrai positif*, L'ORACLE étant la fonction retournant les partitions cohérentes. La décision de l'ORACLE est la valeur ϵ .

1.2.2.1 Impact des pertes par effets joules

Nous considérons que le réseau électrique est connu et que sa matrice de corrélation est correcte. Dans le but d'étudier le taux minimum des pertes par effets joules notée *epsilon* dans le réseau afin que la partition cohérente proposée (appelée ORACLE) soit toujours correcte, nous réalisons deux expériences:

- La première expérience consiste à fixer la décision de l'ORACLE $\epsilon = cte$ tout en générant des mesures dans le graphe. Ces mesures subissent les variations des pertes par effets joules de 0 à 1 par pas de 0.125 $EJ = [0, 1]$. Nous étudions l'évolution de la distance de Hamming (ou coefficient de similarité) en fonction de pertes joules EJ .
- La deuxième expérience consiste à faire varier la décision de l'ORACLE. Nous étudions les variations des pertes en fonctions de la décision de l'ORACLE. Les pertes par effets joules EJ de 0 à 1 par pas de 0.125.

Rappelons que $EJ = 0.1$ signifie qu'il existe une différence de flot par grandeurs entre les arcs extérieures (sortantes) et intérieures (entrantes) à chaque sommet. Ainsi $EJ = 0$ signifiant qu'il n'existe aucune perte tandis que $EJ = 1$ signifiant qu'il n'existe aucuns flots entre les arcs entrants et sortants d'un sommet du réseau de flots.

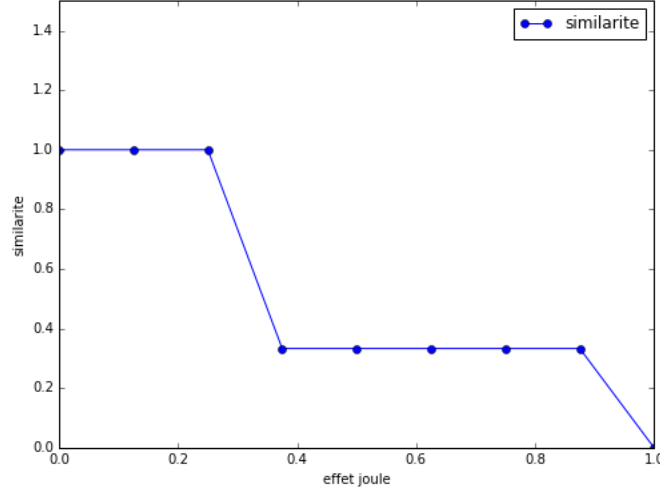


Figure 1.4: La distance de Hamming en fonction des pertes par *effets joules* pour $\epsilon = 0.75$

1.2.2.1.1 expérience 1 : On fixe la décision de l'ORACLE à $\epsilon = 0.75$. La figure 1.4 resume les variations de l'ORACLE. Le fait que la courbe de décision de l'ORACLE est décroissante conforte notre hypothèse selon laquelle il n'existe aucuns flots entre les arcs entrants et sortants d'un sommet lorsque les pertes par effets joules sont égales à 1. En effet, pour toute valeur de pertes par effets joules $EJ = [0, 0.3]$, le graphe proposé est identique au graphe du réseau électrique. Par contre, l'ORACLE se trompe deux sur trois sur les cliques fournies pour $EJ =]0.3, 0.9]$ parce que la distance de Hamming est de 0.38.

1.2.2.1.2 expérience 2 : Ici, on suppose la similarité égale à 1 et on cherche les variations de l'ORACLE ϵ en fonction des pertes par *effets joules*. Les pertes par *effets joules* varient de $[0, 1]$ par pas de 0.125 et nous distinguons 8 intervalles $[0, 0.125]$, $]0.125, 0.250]$, $]0.250, 0.375]$, $]0.375, 0.5]$, $]0.5, 0.625]$, $]0.625, 0.75]$, $]0.75, 0.875]$, $]0.875, 1]$. Pour chaque valeur ϵ , on compte les intervalles $EJ_x, x \in [1, 8]$ dans lesquelles la distance de Hamming est égale à 1 noté $X(\epsilon)$. Ainsi $X(\epsilon = 0.3) = 8$ signifie que les pertes par effets joules varient de 0 à 1 ($EJ = [0, 1]$) et $X(\epsilon = 0.3) = 2$ correspond à une variation de EJ sur l'intervalle $[0, 0.250]$. On crée ainsi la distribution des décisions de l'ORACLE en fonction des pertes par effets joules. La figure 1.5 résume cette distribution qui varie de 1 (correspondant à une variation sur $[0, 0.125]$) à 8 (correspondant à une variation sur $[0, 1]$). la courbe de cette distribution est constante de l'intervalle $\epsilon = [0, 0.125]$ puis décroissante de l'intervalle $\epsilon = [0.125, 1]$ et cette pente est très accentuée dans l'intervalle $\epsilon = [0.8, 1]$. Au delà de $\epsilon > 0.8$, les pertes EJ varient dans l'intervalle $EJ = [0, 0.2]$. On en conclut que le meilleur intervalle est $\epsilon = [0.8, 1]$ pour produire des graphes de distances de Hamming égale à 1 en présence de pertes par *effets joules* de 20%.

Ces deux expériences montrent que la décision de l'ORACLE (ϵ) a une relation inverse avec les pertes par effets joules (EJ). En effet, plus epsilon est petit plus les pertes par effets joules sont grandes et plus les decisions de l'ORACLE sont erronées.

$$\epsilon > 1 - EJ \quad (1.1)$$

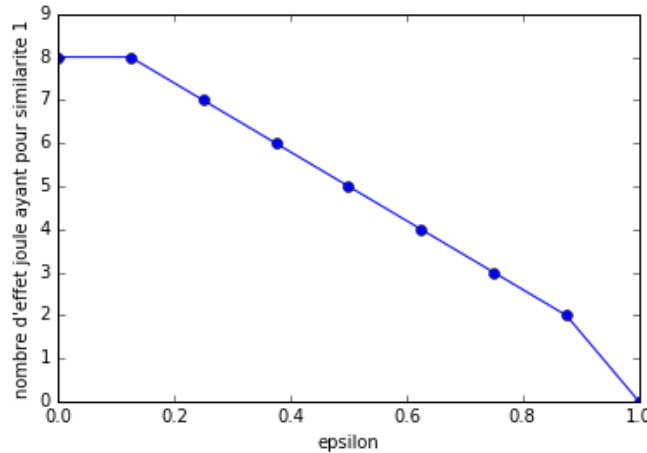


Figure 1.5: relation inverse entre epsilon et EJ: 8 en ordonné correspond à $[0,1]$, 7 à $[0, 0.875]$

1.2.2.2 Complexité de l'algorithme de couverture

La complexité de l'algorithme est au pire en $O(m \times \Delta(G_C))$ avec m le nombre d'arêtes et $\Delta(G_C)$ le degré maximum du graphe. On rappelle que l'algorithme de Lehot [?] a une complexité en $O(m)$. Le facteur $\Delta(G_C)$ dans notre algorithme, du à la recherche de la decomposition en deux cliques C_1 et C_2 est nécessaire à la determination de l'ensemble des sommets v tels que $Cliq(v) = -1$, en nombre le plus petit possible.

En conclusion, si le graphe G_C est bien un line graphe, l'algorithme trouvera une décomposition du voisinage d'un sommet en une ou deux cliques de façon unique (voir les lemmes précédents). Une fois ce sommet supprimé, le graphe restant est toujours un line graphe, et la propriété se propage. Donc, si G_C est un line graphe, l'algorithme en trouvera toujours la couverture de corrélation unique.

1.2.3 Algorithme de correction

1.3 Correction de la matrice de corrélation

Si le graphe $G_C = (V_C, E_C)$ est un graphe de corrélation alors l'algorithme de couverture determine sa line couverture \mathcal{C} . En effet, par récurrence sur l'ensemble des sommets, on montre à chaque étape qu'il existe un sommet non encore couvert qui soit :

- est couvert par une clique appartenant à \mathcal{C} et son voisinage restant et lui peuvent être convertis par une nouvelle clique.
- n'est couvert par aucune clique de \mathcal{C} et son voisinage restant et lui peuvent être couverts par une ou deux nouvelles cliques.

Dans le cas où la line-couverture de G_C ne peut être fournie à cause des erreurs de corrélations, nous avons des sommets couverts par soit aucune clique ou soit par plus de deux cliques. Ces sommets, labellisés à -1 , forment l'ensemble $sommets_1 = \{\exists z \in V, Cliq(z) = -1\}$ et sont appelés

sommets à corriger.

Nous proposons l'*algorithme de correction* qui va modifier l'ensemble initial E_C par ajout et suppression d'arêtes dans le but d'obtenir un *line graphe*. Nous allons considérer un ordre $O_z = [z_1, z_2, \dots, z_t]$ de sommets de *sommets.1* qui correspond au mode de sélection de ceux-ci pendant la phase de correction. Il en suit que l'ordre a une influence sur le line graphe fourni parce que la correction modifie le voisinage des sommets. Il est montré dans la chapitre ??.

Soit E_C^i l'ensemble des arêtes de G_C après le traitement des $i - 1$ premiers sommets dans l'ordre O_z . De même, on note \mathcal{C}^i l'ensemble des cliques de G_C à l'étape i et donc $E_C^1 = E_C$ et $\mathcal{C} = \mathcal{C}^1$.

Soient $z = z_i$ le i -ième sommet et $\mathcal{C}(z) = \{C_1, \dots, C_k\}$ l'ensemble des cliques de \mathcal{C}^i de taille supérieure ou égale à 3 auxquelles le sommet z appartient. Notons que, par définition et par construction, chaque paire de cliques dans $\mathcal{C}(z)$ n'a que z comme sommet commun et que $S(z)$ est l'union des voisins v de z dans des cliques $\{v, z\} \in \mathcal{C}^i$ de taille 2 et des voisins v de z tels que l'arête $[z, v]$ n'est couverte par aucune clique de \mathcal{C}^i .

$$\mathcal{C}(z) = \{C_i, i \in [1, k] \mid |C_i| \geq 3 \ \& \ C_i \in \mathcal{C}^i\} \quad (1.2)$$

$$S(z) = \{v \in \Gamma_G(z) \mid \{v, z\} \in \mathcal{C}^i\} \cup \{v \in \Gamma_G(z) \mid \nexists C \in \mathcal{C}^i, [z, v] \in E_C(C)\} \quad (1.3)$$

Définition 5. Deux cliques C et C' de $\mathcal{C}(z)$ sont contractables si aucune arête $[u, v]$ de E_C^i telle que $u \in C$ et $v \in C'$ n'est couverte par une clique (autre que u, v) dans \mathcal{C} . Un ensemble de cliques de \mathcal{C} est contractable si tous les cliques sont deux à deux contractables.

Définition 6. Une clique $C \in \mathcal{C}_i$ est voisine de z si $C \notin \mathcal{C}(z)$ et $\text{card}(C \cap S(z)) \geq 2$. La dépendance d'une clique C voisine de z est l'ensemble $D_z(C) \subset \mathcal{C}(z)$ tel que $C' \in D_z(C)$ si et seulement si $C' \cap C \cap \Gamma_G(z) \neq \emptyset$.

Une clique C est augmentante pour le sommet z si et seulement si elle est voisine de z et $D_z(C)$ est vide ou $D_z(C) \cup \{C\}$ est contractable.

$$\text{voisine}(z) = \{C \in \mathcal{C}^i \mid C \notin \mathcal{C}(z) \ \& \ \text{card}(C \cap S(z)) \geq 2\} \quad (1.4)$$

$$D_z(C) = \{C' \in \mathcal{C}(z) \mid C' \cap C \cap \Gamma_G(z) \neq \emptyset\} \quad (1.5)$$

On appelle *augmentation* du sommet z l'union d'une clique augmentante C pour z et d'une contraction de cliques de $D_z(C)$.

Un exemple de clique augmentante $C1$ pour le sommet z est donné dans la figure 1.6, avec $D_z(C1) = \{C2\}$. Par contre, la clique $C6$ ne peut pas être augmentante à cause de l'appartenance de l'arête $[u, v]$ à la clique $C7$ de \mathcal{C}^i . Ce qui rend impossible toute contraction entre $C6$ et $C4$

Définition 7. On appelle compression du sommet z un triplet $(\pi_1, \pi_2 \text{ et } \pi_s)$ défini par :

- π_1 (resp. π_2) peut être chacun d'une des formes suivantes :

1. l'union de z , d'un sous-ensemble C_1 (resp. C_2) de cliques de $\mathcal{C}(z)$ tel que toute paire C et C' de C_1 (resp. C_2) est contractable et d'un sous-ensemble S_1 (resp. S_2) de sommets $v \in S(z)$ n'appartenant à aucune clique de C_1 (resp. C_2) tel que

$$\forall v \in S_1, \forall x \in C_1, \nexists C' \in \mathcal{C} \text{ t.q. } \text{card}(C') > 2 \text{ et } \{v, x\} \subset C'$$

(ce qui fait que $\{v, x\}$ peut être une clique de \mathcal{C}^i).

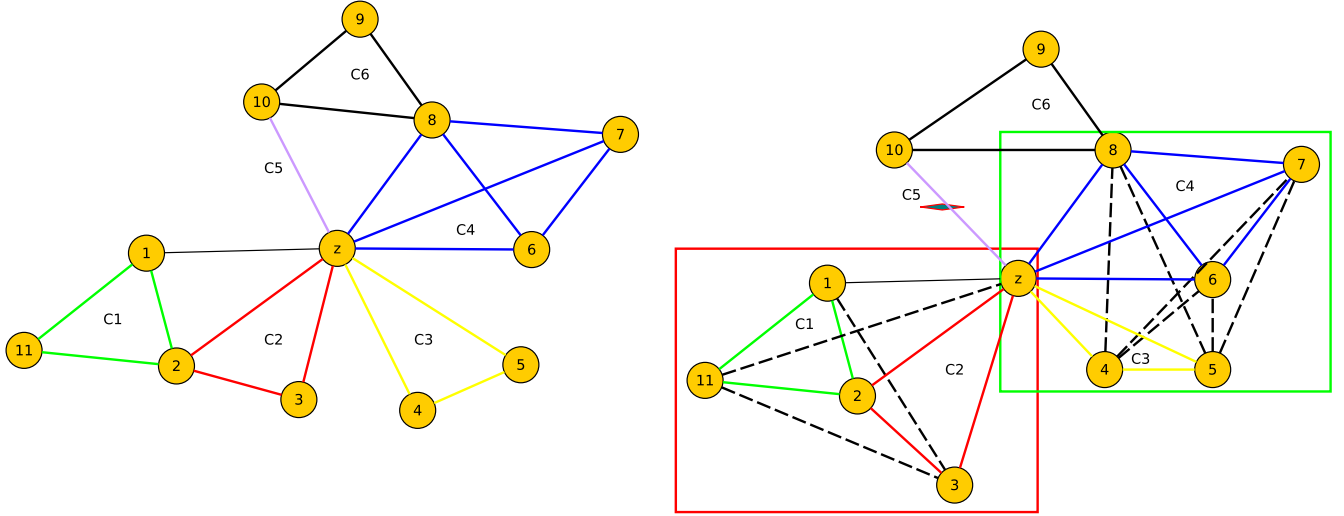


Figure 1.6: un exemple de compression de cliques

2. une augmentation du sommet z

- π_1 et π_2 ne peuvent pas être simultanément réduits à $\{z\}$ et $\pi_1 \cap \pi_2 = \{z\}$,
- $\pi_s = \Gamma_G(z) - ((\pi_1 \cap \Gamma_G(z)) \cup (\pi_2 \cap \Gamma_G(z)))$ tel que l'ensemble des arêtes $\{[z, v] \in E_C^i : v \in \pi_s\}$ n'est pas déconnectant.
- le triplet $\pi_1 \cap \Gamma_G(z), \pi_2 \cap \Gamma_G(z), \pi_s \cap \Gamma_G(z)$ est une 3-partition de $\Gamma_G(z)$

Il existe toujours une telle compression, ne serait-ce que $\pi_1 = \{z\} \cup C_i \in \mathcal{C}(z)$, $\pi_2 = \emptyset$, $\pi_s = \Gamma_G(z) - (\gamma_G(z) \cup C_i)$ si $\mathcal{C}(z)$ n'est pas vide. Sinon, $\pi_1 = \{z\} \cup \{v \in \gamma_G(z)\}$, $\pi_2 = \emptyset$, $\pi_s = \Gamma_G(z) - \{v\}$ est aussi une compression. Un exemple de compression est aussi donné dans la figure 1.6. Le coût $c(T)$ d'une compression π_1, π_2, π_s est défini par :

$$c(T) = |\{\{u, v\} \in \pi_1 : [u, v] \notin E_C^i\}| + |\{\{u, v\} \in \pi_2 : [u, v] \notin E_C^i\}| + |\pi_s|$$

Dans l'exemple de la figure 1.6(a), autour d'un sommet z , l'ensemble $\mathcal{C}(z)$ contient les cliques $C2, C3, C4$ et $C5$. Les cliques $C5$ et $C4$ ne sont pas contractables, à cause de l'existence de $C6$ dans \mathcal{C}_i . La clique $C1$ est voisine de z et $D(C1) = \{C2\}$. L'exemple de compression qui est donné dans la figure 1.6(b) est $\pi_1 = C1 \cup C2$ (une augmentation), $\pi_2 = C3 \cup C4$ (ces deux cliques étant contractables), et $\pi_s = \{x\}$. Le coût de cette compression est 10, 10 étant le nombre d'arêtes en pointillé plus l'arête supprimée $[x, z]$.

Soit $Cout(z)$ le coût minimum d'une compression de z . Le but est de modifier G_C afin que z puisse être couvert par une ou deux cliques issues de π_1 et π_2 . Pour cela, le coût de cette modification $c(T)$ tient compte des arêtes à ajouter (liées à π_1 et π_2) et à supprimer (liées à π_s). Ainsi, **appliquer une compression** $T = \pi_1, \pi_2, \pi_s$ consiste à ajouter dans E_C^i les arêtes définies par les ensembles de paires $\{\{u, v\} \in \pi_1 : [u, v] \notin E_C^i\}$ (qui seront couvertes par la clique π_1) et $\{\{u, v\} \in \pi_2 : [u, v] \notin E_C^i\}$ (qui seront couvertes par la clique π_2) et à supprimer les arêtes $\{[z, v] \in E_C^i : v \in \pi_s\}$.

Des lors, le sommet z appartient aux deux cliques π_1 et π_2 . On procède alors aux mises à jour suivantes pour obtenir \mathcal{C}^{i+1} et E_C^{i+1} :

- supprimer toutes les cliques \mathcal{C}_z couvertes par π_1 dans \mathcal{C}^i .
- supprimer toutes les cliques \mathcal{C}_z couvertes par π_2 dans \mathcal{C}^i .
- supprimer toutes les cliques de cardinalité 2 couvertes par π_1 et π_2 dans \mathcal{C}^i .
- ajouter π_1 et π_2 dans \mathcal{C}^i , supprimer de E_C^{i+1} toutes les arêtes $\{[z, v] \in E_C^i : v \in \pi_S\}$.
- Affecter $Cliq(z)$ à 1 (si π_1 ou π_2 est vide) ou 2 (sinon).

Cette procédure a les propriétés suivantes :

Propriété 1. *Considérons une application d'une compression, Soit \mathcal{C}^{i+1} l'ensemble obtenu à partir de \mathcal{C}^i après mise à jour selon cette application.*

- *Tout sommet de G_C couvert par une ou deux cliques dans \mathcal{C}^i le reste dans \mathcal{C}^{i+1} .*
- *Toute arête couverte par une et une seule clique dans \mathcal{C}^i et qui n'est pas supprimée le reste dans \mathcal{C}^{i+1} .*
- *Le sommet z est couvert par une ou deux cliques dans \mathcal{C}^{i+1} (le nombre de sommets ainsi couverts augmente de 1 par rapport à celui dans \mathcal{C}^i).*

Ainsi, pour chaque sommet z_i pris dans l'ordre O_z , on considère une compression de coût minimum c_m^i et on l'applique. La propriété ci-dessus garantit qu'à l'afin du processus, on obtient un graphe de corrélation $G_C^t = (V, E_C^t)$ dont l'ensemble \mathcal{C} modifié est une couverture de corrélation. La distance-line vérifie

$$DL(G_C^0, G_C^t) \leq \sum_{1 \leq i \leq t} c_m^i$$

Notons que lors d'une étape $j > 1$, le sommet z_j et son voisinage se retrouve être couvert par une ou deux cliques suite au traitement des $j - 1$ sommets précédents, aucune compression ne lui est appliquée (on considère la compression identité) et donc $c_m^i = 0$.

1.3.1 Complexité des algorithmes

1.4 Comportement des algorithmes de couverture et de correction

L'algorithme de correction traite au plus une fois chaque sommet du graphe. La complexité de traitement de chaque sommet est exponentiel en fonction du degré de chaque sommet et des cliques auxquelles il appartient, la encore en fonction de son degré en taille et en nombre. L'algorithme global (couverture et correction) est donc pseudo-polynomial en fonction du degré du graphe.

Nous mettons une conjecture sur le comportement de l'algorithme. Etant donné un graphe de départ, une exécution de l'algorithme est un ordre dans lequel seront traités les sommets dans l'algorithme de couverture, puis un ordre dans lequel seront pris les sommets $z \in \text{sommets_1}$. Considérons un graphe de corrélation G n'étant pas isomorphe à un graphe de la figure 1.3. On dira que G est non-ambigu.

Deux arêtes $[u, v]$ et $[u', v']$ de G seront dit **clique-indépendantes** si et seulement si il n'existe pas de cliques C dans la ligne couverture de G telle que $C \cap \{u, v\} \cap \{u', v'\} \neq \emptyset$

Conjecture 4. *Si $G' = (V, E')$ est un graphe obtenu en supprimant un ensemble d'arêtes deux à deux clique-indépendantes d'un graphe de corrélation non-ambigu $G = (V, E)$, alors il existe une exécution de l'algorithme qui transforme G' en G*

1.5 Détermination de la topologie du réseau énergétique

1.6 Correction particulière de Graphes : Graphes Lourdes