

Soit la matrice de corrélation  $M_c$  désignant les probabilités de corrélation entre les arcs d'un graphe  $G$ . Chaque case de la matrice  $M_c$  définit le pourcentage de corrélation entre deux arcs. Une corrélation, proche de 1, indique que les arcs partagent un sommet tandis qu'une valeur, qui tend vers 0, signifie qu'il existe aucun sommet en commun entre ces arcs.

### Erreurs de corrélation

Dans la figure 1, les arcs  $a_2$  et  $a_3$  partagent le sommet d'extrémité initiale et leur valeur de corrélation est de 0.85. De même, il n'existe aucun sommet commun aux arcs  $a_1$  et  $a_6$  impliquant que leur corrélation tend vers 0 (corrélation égale à 0.21). Toutefois, certains arcs n'ayant aucun sommet en commun, ont des valeurs de corrélations très élevées (proche de 1). C'est le cas des arcs  $a_5$  et  $a_7$  dont leur valeur de corrélation est de 0.89 (figure 1.b).

Ce type de corrélations, appelé *erreurs de corrélation*, est dû aux lissages des signaux électriques causés par la présence d'onduleurs ou des équipements, dans des branches différentes, ont des profils de consommation identiques sur la période de temps. En général, ces profils de consommation sont quasi-constants avec des variations très faibles.

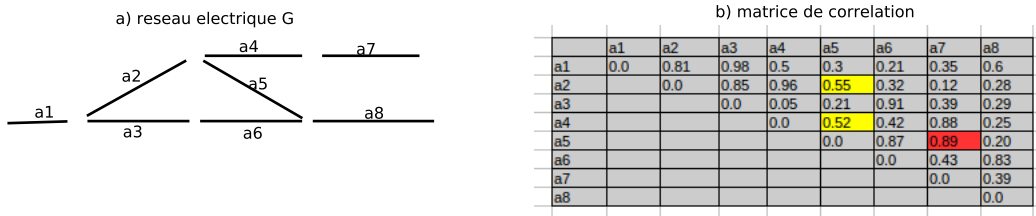


Figure 1: Le réseau électrique  $G$  et sa matrice de corrélation  $M_c$ . a) réseau électrique, b) matrice de corrélation associée. Les cases en jaunes et en rouges sont les corrélations erronées.

### Matrice de corrélation : un graphe adjoint

Soient la valeur de seuil  $s$  et la matrice de corrélation  $M_{c,s}$  appliquée avec ce seuil. Cette matrice  $M_{c,s}$  est binaire avec 0 et 1 désignant respectivement aucune corrélation entre arcs (dont pas de sommets en commun) et l'existence d'un sommet entre ces arcs.

Chaque arc peut être représenté par un sommet et deux arcs ayant un sommet en commun (quelque soit son extrémité) ont leurs sommets respectifs adjacents. Cela implique que la matrice  $M_{c,s}$  peut être considérée comme la matrice d'adjacence d'un graphe adjoint et ce graphe adjoint est celui sous-jacent au graphe non orienté du réseau électrique  $G$ .

Dans la littérature, le graphe adjoint est désigné par *linegraph*. Nous utilisons *line graphe* dans la suite du document pour indiquer un graphe adjoint.

#### Définition 1. Line graphe

Soit un graphe non orienté  $G$ . Le line-graphe  $H$  d'un graphe  $G$  est un graphe dont chaque sommet correspond à une arête de  $G$  et deux sommets de  $H$  sont adjacents si et seulement si leurs arêtes respectives dans  $G$  ont un sommet en commun.

Avec  $G$  ayant  $n$  sommets et  $m$  arêtes, le graphe  $H$  a  $m$  sommets et  $E$  arêtes dont

$$E = \sum_{i=1}^n d_i(d_i - 1)/2$$

,  $d_i$  étant le degré de chaque sommet  $i$  de  $G$ .

Le graphe  $G$  est appelé le *graphe racine* de  $H$ . Un exemple de graphe racine et son line graphe est présenté dans la figure 2

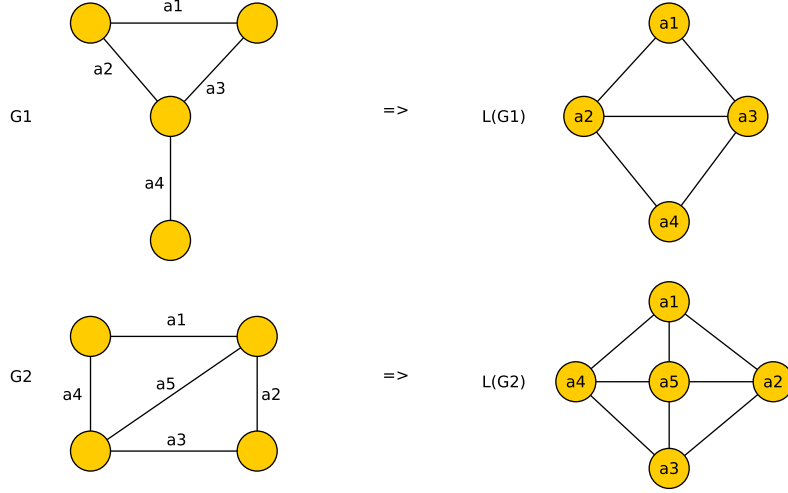


Figure 2: Le graphe racine  $G$  et son line graphe  $L(G)$

Ce concept a été introduit par *Whitney* [?] qui montra que l'isomorphisme des arêtes implique l'isomorphisme pour des graphes connexes à l'exception des graphes  $K_3$  (graphe triangle) et  $K_{1,3}$  (graphe étoile).

**Théorème 1.** *Si deux line graphes  $L(G_1)$  et  $L(G_2)$  sont isomorphes et connexes alors leurs graphes racines  $G_1$  et  $G_2$  sont aussi isomorphes sauf si  $G_1 = K_3$  et  $G_2 = K_{1,3}$ .*

**Proposition 2.** *Le graphe étoile  $K_{1,3}$  n'est pas un line graphe.*

*Proof.* Supposons que  $K_{1,3}$  est le line graphe de  $H$  ( $K_{1,3} = L(H)$ ). Alors  $H$  est un graphe connexe de quatre arêtes. Tous les graphes connexes de quatre arêtes sont représentés dans la figure 3. Comme  $L(C_4) = C_4$  par le théorème 1 et  $L(K_{1,3} + e) = K_4 + e$  (voir figure 2),  $L(H)$  ne peut être que l'un des trois arbres  $P_4$ ,  $K_{3,2}$  et  $K_{1,4}$ . Ce qui est contraire à notre hypothèse de départ ( $K_{1,3} = L(H)$ ).  $\square$

Beineke et Hemminger [?] affichent les neufs sous-graphes ne pouvant pas avoir de line graphes.

**Théorème 3.** *Aucun des neufs sous-graphes de la figure 4 ne peut être un sous graphe d'un line graphe  $G$ .*

**Théorème 4.** *Les arêtes d'un line graphe  $G$  sont partitionnées en sous graphes complets (Cliques) de tel sorte que chaque arête ne peut appartenir qu'à un seul sous graphe.*

*Proof.* Soit  $G$  le line graphe de  $H$ .

\* de line graphe à des sous graphes : nous supposons que  $H$  est connexe. Alors les arêtes dans le graphe étoile de chaque sommet de  $H$  induit un clique dans  $G$ . Et chaque arête de  $G$  est couverte par exactement une clique. Pour chaque arête de  $H$  appartenant à deux graphes étoiles de deux sommets de  $H$ , aucun sommet de  $G$  est contenu dans plus de deux cliques.

\*\* de sous graphes à un line graphe: étant donné une décomposition des arêtes de  $G$  en cliques  $C_1, C_2, \dots, C_n$  satisfaisant le théorème ci dessus, nous construisons le graphe  $H$  dont le line graphe est  $G$ . Les sommets de  $H$  correspondent à l'ensemble  $C$  de cliques de la décomposition avec l'ensemble  $U$  de sommets de  $G$  appartenant à une clique  $C_i$  uniquement. Alors  $C \cup U$  est l'ensemble de sommets de  $H$  et deux de ses sommets sont adjacents s'il y a une intersection non vide. Alors  $H$  est un graphe d'intersection  $\Omega(C \cup U)$ .  $\square$

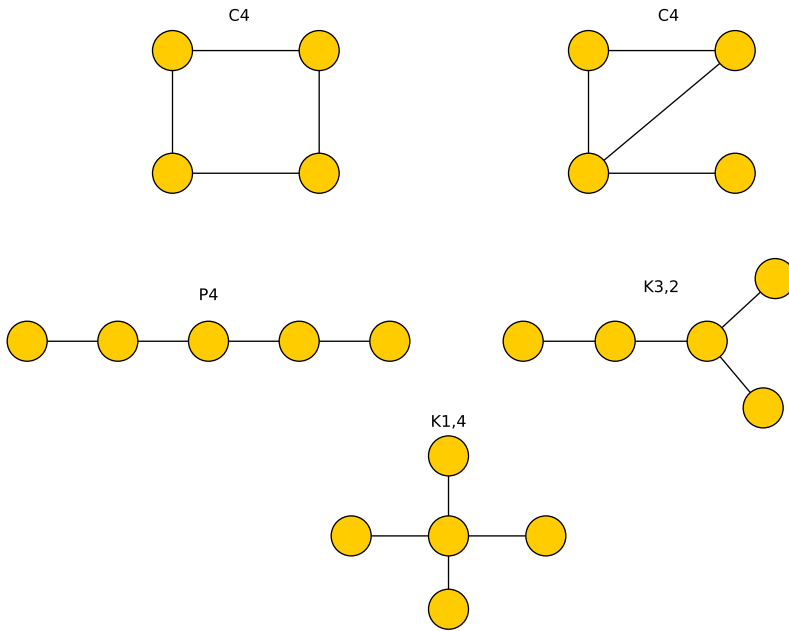


Figure 3: Les graphes racines possibles de  $K_{1,3}$  de quatres arêtes

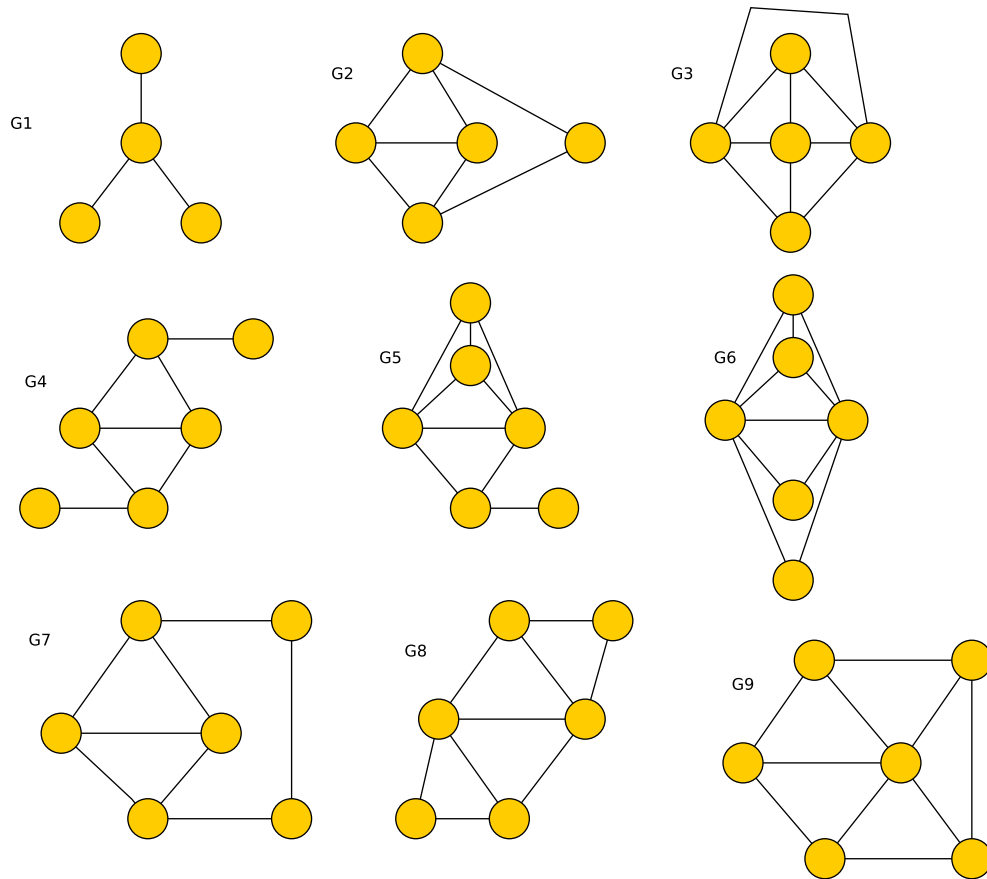


Figure 4: Line graphes et sous graphes interdits

Divers travaux existent dans la reconnaissance de line graphes et son graphe racine associé. Le premier algorithme proposé est celui de LEHOT [?]. Il utilise la propriété définie par VAN

ROOIJ and WILF [?] énoncant qu'un graphe  $G$  est un line graphe si  $G$  ne contient pas de sous graphe induit  $K_{1,3}$  and si deux graphes triangles "Odd" ont une arête commune, le sous graphe induit par ces sommets est une clique  $K_4$ . Son algorithme n'effectue que la reconnaissance de line graphe et la complexité est en  $O(n) + E$  avec  $n$  le nombre de sommets de  $G$  et  $E$  le nombre d'arêtes de  $L(G)$ . Rappelons qu'une graphe triangle  $\{e1, e2, e3\} \subseteq V(L(G))$  est "Odd" s'il existe un sommet  $e \in V(G)$  incident à au moins un des sommets  $\{e1, e2, e3\}$ . Ce triangle est "Even" dans le cas contraire.

L'algorithme de ROUSSOPOULOS utilise une autre propriété des line graphes provenant des travaux de KRAUSZ [?]. Il affirme que  $G$  est un line graphe si les arêtes de  $G$  peuvent être partitionnées en cliques de tel sorte qu'aucun sommet ne soit couvert par deux cliques. Cette algorithme non seulement détecte si  $G$  est un line graphe mais fournit son graphe racine en temps linéaire  $O(\max(\{m, n\}))$ , avec  $m$  et  $n$  le nombre de sommets et d'arêtes respectivement.

Cette algorithme, basé sur la preuve de ORE [?] du théorème de Whitney [?] qui stipule que si deux graphes connexes avec plus de quatre sommets sont isomorphes en arêtes alors il existe exactement un isomorphisme en sommets qui induit un isomorphisme en arêtes. Proposé par Klauss Simon et Daniele Degiorgi [?], cette approche est une simplification du problème de reconnaissance de line graphes. Les deux précédents algorithmes utilisent les propriétés globales des line graphes tandis que celui ci utilisent uniquement les propriétés locales permettant une reconnaissance incrementale. Par ailleurs il permet de vérifier en temps linéaire si une modification locale (i.e l'ajout et la suppression) preserve les caractéristiques du line graphe.

Tous les algorithmes existants se limitent à un résultat négatif lorsque le graphe  $G$  n'est pas un line graphe. Les algorithmes, que nous soumettons, retournent la décomposition en cliques de  $G$  si  $G$  est un line graphe ou dans le cas contraire, la décomposition du line graphe le plus proche de  $G$ .