Доказательства свойств теоремы

Таджибаев Завкиддин
Воронков Данил
Хасбалла Стифин
Комилов Хайруллохон

ПМ-25

2=>3

Дано: G – связный граф, $m = n - 1$.

Доказать: G – ациклический граф, $m = n - 1$.

От противного. Допустим, G - связный граф, имеющий цикл, состоящий из $n1$ вершин и $m1$ рёбер (вершины и рёбра не включённые в выбранный цикл обозначим $n2$ и $m2$ соответственно), причём $m1 \geq n1$. Из связности графа следует то, для каждой из этих $n2$ вершин есть минимум одно ребро, соединяющее её с циклом или соединённой с циклом вершиной. Выходит, что $m2 \geq n2$.

$$m = m1 + m2 \geq n1 + n2 = n$$

$$m \geq n$$

Значит, связный циклический граф имеет количество рёбер $m \geq n$, а при $m < n$ является ациклическим. Это противоречит тому, что G – циклический связный граф, так как по дано количество его рёбер $m = n - 1$ ($m < n$). Это значит, что G – ациклический связный граф. Что и требовалось доказать.

3 => 4:

Если G-ациклический граф и m=n-1, то любые две несовпадающие вершины G соединяет единственная, причём простая цепь.

Докажем от противного:

- найдутся две разные вершины, которые соединяет НЕ единственная простая цепь

а) вершины соединяют две несовпадающие простые цепи. Т.к. эти цепи имеют общие точки, между ними будет содержаться цикл (по свойству объединение простых цепей). Это противоречит ацикличности графа G;

б) вершины не соединены ни одной простой цепью. Это значит, что граф G обладает как минимум двумя компонентами связности. Так же по условию, этот граф имеет $m = n - 1$ рёбер. Если граф ацикличен, то при удалении одного ребра, количество компонент связности будет увеличиваться на 1. Таким образом после удаления $m = n - 1$ ребер, получим как минимум $n + 1$ компонент связности. А максимальное количество компонент графа равно количеству его вершин, то есть n. Получаем противоречие.

4=>5

Дано: любые две несовпадающие вершины G соединяет единственная, причём простая цепь;

Доказать: G-ациклический граф, обладающий тем свойством, что если какую-либо пару его смежных вершин соединить ребром, то полученный граф будет содержать ровно один цикл.

Доказательство:
2 несовпадающие вершины графа соединены единственной простой цепью.
Следовательно, в графе нет циклов, т.к. простая цепь при разбиении не дает цикл.
Добавление дополнительного ребра между какими-либо двумя его смежными вершинами образует дополнительную цепь, а 2 цепи образуют цикл.

Докажем теперь, что цикл будет ровно один.

А) Предположим, что если какую-либо пару его смежных вершин соединить ребром, то полученный граф будет содержать два цикла. Тогда, убрав это ребро, граф будет содержать один цикл, что противоречит условию, что G-ациклический граф.
Значит граф G ациклический и обладает тем свойством, что если какую-либо пару его смежных вершин соединить ребром, то полученный граф будет содержать ровно один цикл.

Б) Допустим, что существует две вершины, соединение которых не создаёт цикл, что противоречит условию, следовательно, граф G ациклический и обладает тем свойством, что если какую-либо пару его смежных вершин соединить ребром, то полученный граф будет содержать ровно один цикл.

5=>1:

Дано: G-ациклический граф, обладающий тем свойством, что если какую-либо пару его несмежных вершин соединить ребром, то полученный граф будет содержать ровно один цикл.

Доказать: G-дерево.

Доказательство:

От противного. Пусть данный нам граф не является связным, следовательно, существует две вершины, соединение которых ребром не создает цикла(противоречие). Это значит, что исходный граф является связным. В тоже время он ациклический => граф G – дерево, по определению.