



МИНИСТЕРСТВО НАУКИ
И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»



**НГТУ
НЭТИ** | **Факультет прикладной
математики и информатики**

Кафедра прикладной математики
Практическое задание № 2
по дисциплине «Численные методы»

ИТЕРАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ СЛАУ

Группа ПМ-25 ТАДЖИБАЕВ ЗАВКИДДИН
НАЗИРОВ ДЖАСУР

Преподаватели ЗАДОРОВ А. Г.
ЛЕОНОВИЧ Д. А.

Новосибирск, 2024

1. Задание

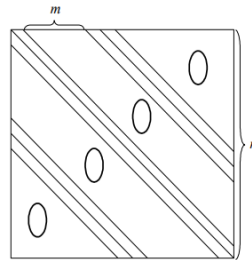
Создать программы для решения систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) с использованием методов Якоби, Гаусса-Зейделя и блочной релаксации, при этом хранить матрицу в диагональном формате. Провести исследование сходимости этих методов на различных тестовых матрицах и определить, как она зависит от параметра релаксации. Рассмотреть возможность оценки порядка числа обусловленности матрицы через вычислительные эксперименты.

2. Математическая модель

Пусть дана система линейных алгебраических уравнений следующего вида:

$$Ax = F \quad (0.1)$$

С матрицей следующего вида: 9-диагональная матрица m – количество нулевых диагоналей, n – размерность матрицы. Размер блока в реализации блочной релаксации фиксированный.



Выбирается начальное приближение $x^{(0)} = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ (при отсутствии априорных данных для выбора приближения в качестве начального приближения можно выбрать нулевой вектор).

Метод Якоби. Каждое следующее приближение в методе Якоби рассчитывается по формуле:

$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + \frac{1}{a_{ii}} \left[f_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j^{(k)} \right], \quad i = 1, \dots, n \quad (0.2)$$

где k – номер текущей итерации.

Метод Гаусса-Зейделя. Каждое последующее приближение рассчитывается по формуле:

$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + \frac{1}{a_{ii}} \left[f_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^{(k)} \right], \quad i = 1, \dots, n \quad (0.3)$$

Для ускорения сходимости итерационного процесса можно использовать параметр релаксации.

Итерационный процесс в методе Якоби с параметром релаксации выглядит следующим образом:

$$\hat{x}_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + \frac{1}{a_{ii}} \left[f_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j^{(k)} \right], \quad (0.4)$$

$$x_i^{(k+1)} = \omega \hat{x}_i^{(k+1)} + (1 - \omega) x_i^{(k)}, \quad 0 < \omega \leq 1. \quad (0.5)$$

Подставляя (1.4) и (1.5) в (1.2), получаем:

$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + \frac{\omega}{a_{ii}} \left[f_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j^{(k)} \right], 0 < \omega \leq 1. \quad (0.6)$$

В методе Гаусса-Зейделя с параметром релаксации (другое название – метод релаксации) итерационный процесс описывается следующим образом:

$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + \frac{\omega}{a_{ii}} \left[f_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i}^n a_{ij} x_j^{(k)} \right], 0 < \omega \leq 2 \quad (0.7)$$

Условия выхода из итерационного процесса для рассмотренных методов:

- выход по относительной невязке:

$$\frac{\|F - Ax^{(k)}\|}{\|F\|} < \varepsilon \quad (0.8)$$

- защита от закливания: $k > \maxiter$, \maxiter – максимальное количество итераций.

3. Исследование на матрице с диагональным числом обусловленности

$$A = \begin{pmatrix} 11 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & -3 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 13 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & -2 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 13 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & -2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 12 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 9 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 10 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 6 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 14 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -4 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 12 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 11 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 13 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -4 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 8 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} -54 \\ -66 \\ -64 \\ -51 \\ -31 \\ -22 \\ 5 \\ 44 \\ 49 \\ 44 \\ 50 \\ 51 \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \end{pmatrix}$$

Метод Якоби					
w	x	x* - x	Число итераций	Отн. невязка	Число обусловленности
0.1	0,99999999990257	9,743E-11	64325	1,00E-13	148,353799
	1,99999999989193	1,081E-10			
	2,99999999988952	1,105E-10			
	3,99999999988747	1,125E-10			
	4,99999999988692	1,131E-10			
	5,99999999988768	1,123E-10			
	6,99999999989309	1,069E-10			
	7,99999999989436	1,056E-10			
	8,99999999989302	1,070E-10			
	9,99999999989006	1,099E-10			
	10,99999999988780	1,122E-10			
	11,99999999988680	1,132E-10			
0.2	0,99999999990268	9,732E-11	32155	9,99E-14	148,346350
	1,99999999989205	1,080E-10			
	2,99999999988964	1,104E-10			
	3,99999999988759	1,124E-10			
	4,99999999988705	1,129E-10			
	5,99999999988781	1,122E-10			
	6,99999999989321	1,068E-10			
	7,99999999989448	1,055E-10			
	8,99999999989314	1,069E-10			
	9,99999999989018	1,098E-10			
	10,99999999988790	1,121E-10			
	11,99999999988690	1,131E-10			
0.3	0,99999999990278	9,722E-11	22172	9,99E-14	148,128556
	1,99999999989217	1,078E-10			
	2,99999999988976	1,102E-10			
	3,99999999988771	1,123E-10			
	4,99999999988717	1,128E-10			
	5,99999999988793	1,121E-10			
	6,99999999989332	1,067E-10			
	7,99999999989459	1,054E-10			
	8,99999999989326	1,067E-10			
	9,99999999989030	1,097E-10			

	10,9999999988800	1,120E-10			
	11,9999999988700	1,130E-10			
0.4	0,9999999990269	9,731E-11	16071	1,00E-13	148,101251
	1,9999999989207	1,079E-10			
	2,9999999988966	1,103E-10			
	3,9999999988762	1,124E-10			
	4,9999999988707	1,129E-10			
	5,9999999988783	1,122E-10			
	6,9999999989323	1,068E-10			
	7,9999999989450	1,055E-10			
	8,9999999989317	1,068E-10			
	9,9999999989021	1,098E-10			
	10,9999999988790	1,121E-10			
	11,9999999988690	1,131E-10			
0.5	0,9999999990285	9,715E-11	12855	9,98E-14	148,126195
	1,9999999989224	1,078E-10			
	2,9999999988984	1,102E-10			
	3,9999999988779	1,122E-10			
	4,9999999988725	1,127E-10			
	5,9999999988801	1,120E-10			
	6,9999999989340	1,066E-10			
	7,9999999989466	1,053E-10			
	8,9999999989333	1,067E-10			
	9,9999999989038	1,096E-10			
	10,9999999988810	1,119E-10			
	11,9999999988710	1,129E-10			
0.6	0,9999999990296	9,704E-11	10711	9,99E-14	147,911944
	1,9999999989236	1,076E-10			
	2,9999999988996	1,100E-10			
	3,9999999988792	1,121E-10			
	4,9999999988738	1,126E-10			
	5,9999999988814	1,119E-10			
	6,9999999989352	1,065E-10			
	7,9999999989478	1,052E-10			
	8,9999999989345	1,065E-10			
	9,9999999989050	1,095E-10			
	10,9999999988820	1,118E-10			
	11,9999999988720	1,128E-10			
0.7	0,9999999990294	9,706E-11	9179	9,99E-14	147,880105
	1,9999999989234	1,077E-10			
	2,9999999988994	1,101E-10			
	3,9999999988789	1,121E-10			
	4,9999999988735	1,127E-10			
	5,9999999988811	1,119E-10			
	6,9999999989349	1,065E-10			
	7,9999999989476	1,052E-10			
	8,9999999989343	1,066E-10			
	9,9999999989048	1,095E-10			
	10,9999999988820	1,118E-10			
	11,9999999988720	1,128E-10			
0.8	0,9999999990321	9,679E-11	8031	9,95E-14	147,979073
	1,9999999989265	1,073E-10			
	2,9999999989025	1,097E-10			
	3,9999999988822	1,118E-10			
	4,9999999988767	1,123E-10			
	5,9999999988843	1,116E-10			
	6,9999999989380	1,062E-10			

	7,9999999989506	1,049E-10			
	8,9999999989374	1,063E-10			
	9,9999999989079	1,092E-10			
	10,9999999988850	1,115E-10			
	11,9999999988750	1,125E-10			
0,9	0,9999999990312	9,688E-11	7137	9,98E-14	147,790628
	1,9999999989255	1,075E-10			
	2,9999999989015	1,098E-10			
	3,9999999988811	1,119E-10			
	4,9999999988756	1,124E-10			
	5,9999999988832	1,117E-10			
	6,9999999989370	1,063E-10			
	7,9999999989496	1,050E-10			
	8,9999999989363	1,064E-10			
	9,9999999989069	1,093E-10			
	10,9999999988840	1,116E-10			
	11,9999999988740	1,126E-10			
1,0	0,9999999990311	9,690E-11	6487	9,98E-14	147,658346
	1,9999999989253	1,075E-10			
	2,9999999989013	1,099E-10			
	3,9999999988809	1,119E-10			
	4,9999999988755	1,124E-10			
	5,9999999988831	1,117E-10			
	6,9999999989368	1,063E-10			
	7,9999999989495	1,051E-10			
	8,9999999989362	1,064E-10			
	9,9999999989067	1,093E-10			
	10,9999999988840	1,116E-10			
	11,9999999988740	1,126E-10			
1,1	0,9999999990308	9,692E-11	5837	9,99E-14	147,715696
	1,9999999989250	1,075E-10			
	2,9999999989010	1,099E-10			
	3,9999999988806	1,119E-10			
	4,9999999988752	1,125E-10			
	5,9999999988827	1,117E-10			
	6,9999999989365	1,063E-10			
	7,9999999989491	1,051E-10			
	8,9999999989359	1,064E-10			
	9,9999999989064	1,094E-10			
	10,9999999988840	1,116E-10			
	11,9999999988740	1,126E-10			
1,2	0,9999999990328	9,672E-11	5350	9,96E-14	147,731811
	1,9999999989272	1,073E-10			
	2,9999999989033	1,097E-10			
	3,9999999988829	1,117E-10			
	4,9999999988775	1,122E-10			
	5,9999999988851	1,115E-10			
	6,9999999989388	1,061E-10			
	7,9999999989514	1,049E-10			
	8,9999999989381	1,062E-10			
	9,9999999989087	1,091E-10			
	10,9999999988860	1,114E-10			
	11,9999999988760	1,124E-10			
1,3	0,9999999990353	9,648E-11	4938	9,95E-14	147,540425
	1,9999999989299	1,070E-10			
	2,9999999989061	1,094E-10			
	3,9999999988858	1,114E-10			

	4,99999999988804	1,120E-10			
	5,99999999988879	1,112E-10			
	6,99999999989414	1,059E-10			
	7,99999999989540	1,046E-10			
	8,99999999989408	1,059E-10			
	9,99999999989114	1,089E-10			
	10,99999999988890	1,111E-10			
	11,99999999988790	1,121E-10			
1,31	0,99999999990342	9,658E-11	4900	9,96E-14	147,575272
	1,99999999989288	1,071E-10			
	2,99999999989049	1,095E-10			
	3,99999999988846	1,115E-10			
	4,99999999988791	1,121E-10			
	5,99999999988867	1,113E-10			
	6,99999999989403	1,060E-10			
	7,99999999989529	1,047E-10			
	8,99999999989396	1,060E-10			
	9,99999999989103	1,090E-10			
	10,99999999988880	1,112E-10			
	11,99999999988780	1,122E-10			
1,32	0,99999999990353	9,648E-11	4863	9,94E-14	147,743074
	1,99999999989300	1,070E-10			
	2,99999999989061	1,094E-10			
	3,99999999988858	1,114E-10			
	4,99999999988804	1,120E-10			
	5,99999999988879	1,112E-10			
	6,99999999989415	1,059E-10			
	7,99999999989540	1,046E-10			
	8,99999999989408	1,059E-10			
	9,99999999989114	1,089E-10			
	10,99999999988890	1,111E-10			
	11,99999999988790	1,121E-10			

Метод Зейделя					
w	x	$x^* - x$	Число итераций	Относительная невязка	Число обусловленности
0.1	0,99999999907378	9,262E-11	61305	1,00E-13	140,970811
	1,99999999897270	1,027E-10			
	2,99999999894990	1,050E-10			
	3,99999999893040	1,070E-10			
	4,99999999892530	1,075E-10			
	5,99999999893260	1,067E-10			
	6,99999999898390	1,016E-10			
	7,99999999899600	1,004E-10			
	8,99999999898330	1,017E-10			
	9,99999999895530	1,045E-10			
	10,99999999893400	1,066E-10			
	11,99999999892400	1,076E-10			
0.2	0,99999999912225	8,778E-11	29130	1,00E-13	133,542887
	1,99999999902650	9,735E-11			
	2,99999999900500	9,950E-11			
	3,99999999898660	1,013E-10			
	4,99999999898190	1,018E-10			
	5,99999999898880	1,011E-10			
	6,99999999903730	9,627E-11			
	7,99999999904880	9,512E-11			
	8,99999999903680	9,632E-11			
	9,99999999901030	9,897E-11			
	10,99999999899000	1,010E-10			
	11,99999999898100	1,019E-10			
0.3	0,99999999917139	8,286E-11	18404	1,00E-13	126,069269
	1,99999999908110	9,189E-11			
	2,99999999906080	9,392E-11			
	3,99999999904360	9,564E-11			
	4,99999999903920	9,608E-11			
	5,99999999904580	9,542E-11			
	6,99999999909150	9,085E-11			
	7,99999999910230	8,977E-11			
	8,99999999909110	9,089E-11			
	9,99999999906620	9,338E-11			
	10,99999999904700	9,530E-11			
	11,99999999903900	9,610E-11			
0.4	0,99999999922053	7,795E-11	13039	9,98E-14	118,705630
	1,99999999913570	8,643E-11			
	2,99999999911670	8,833E-11			
	3,99999999910060	8,994E-11			
	4,99999999909650	9,035E-11			
	5,99999999910280	8,972E-11			
	6,99999999914560	8,544E-11			
	7,99999999915580	8,442E-11			
	8,99999999914530	8,547E-11			
	9,99999999912210	8,779E-11			
	10,99999999910400	8,960E-11			
	11,99999999909600	9,040E-11			
0.5	0,99999999926799	7,320E-11	9817	9,99E-14	111,291458
	1,99999999918840	8,116E-11			
	2,99999999917070	8,293E-11			
	3,99999999915560	8,444E-11			
	4,99999999915190	8,481E-11			

	5,99999999915780	8,422E-11			
	6,99999999919790	8,021E-11			
	7,99999999920750	7,925E-11			
	8,99999999919770	8,023E-11			
	9,99999999917600	8,240E-11			
	10,99999999915900	8,410E-11			
	11,99999999915200	8,480E-11			
0.6	0,99999999931696	6,830E-11	7668	9,99E-14	103,846671
	1,99999999924280	7,572E-11			
	2,99999999922630	7,737E-11			
	3,99999999921230	7,877E-11			
	4,99999999920900	7,910E-11			
	5,99999999921460	7,854E-11			
	6,99999999925190	7,481E-11			
	7,99999999926080	7,392E-11			
	8,99999999925170	7,483E-11			
	9,99999999923160	7,684E-11			
	10,99999999921600	7,840E-11			
	11,99999999920900	7,910E-11			
0.7	0,99999999936538	6,346E-11	6131	9,99E-14	96,435102
	1,99999999929660	7,034E-11			
	2,99999999928140	7,186E-11			
	3,99999999926840	7,316E-11			
	4,99999999926550	7,345E-11			
	5,99999999927070	7,293E-11			
	6,99999999930520	6,948E-11			
	7,99999999931360	6,864E-11			
	8,99999999930520	6,948E-11			
	9,99999999928670	7,133E-11			
	10,99999999927200	7,280E-11			
	11,99999999926600	7,340E-11			
0.8	0,99999999941514	5,849E-11	4977	9,98E-14	88,942387
	1,99999999935180	6,482E-11			
	2,99999999933790	6,621E-11			
	3,99999999932610	6,739E-11			
	4,99999999932350	6,765E-11			
	5,99999999932840	6,716E-11			
	6,99999999936010	6,399E-11			
	7,99999999936770	6,323E-11			
	8,99999999936010	6,399E-11			
	9,99999999934320	6,568E-11			
	10,99999999932900	6,710E-11			
	11,99999999932400	6,760E-11			
0.9	0,99999999946227	5,377E-11	4077	9,99E-14	81,573649
	1,99999999940420	5,958E-11			
	2,99999999939150	6,085E-11			
	3,99999999938080	6,192E-11			
	4,99999999937850	6,215E-11			
	5,99999999938310	6,169E-11			
	6,99999999941200	5,880E-11			
	7,99999999941910	5,809E-11			
	8,99999999941210	5,879E-11			
	9,99999999939680	6,032E-11			
	10,99999999938400	6,160E-11			
	11,99999999938000	6,200E-11			
1,0	0,99999999951218	4,878E-11	3356	9,97E-14	74,089364
	1,99999999945960	5,404E-11			
	2,99999999944830	5,517E-11			

	3,99999999943860	5,614E-11			
	4,99999999943670	5,633E-11			
	5,99999999944090	5,591E-11			
	6,99999999946700	5,330E-11			
	7,99999999947340	5,266E-11			
	8,99999999946710	5,329E-11			
	9,99999999945350	5,465E-11			
	10,99999999944200	5,580E-11			
	11,99999999943800	5,620E-11			
1,1	0,99999999956078	4,392E-11	2764	9,97E-14	66,676810
	1,99999999951360	4,864E-11			
	2,99999999950350	4,965E-11			
	3,99999999949490	5,051E-11			
	4,99999999949340	5,066E-11			
	5,99999999949730	5,027E-11			
	6,99999999952060	4,794E-11			
	7,99999999952640	4,736E-11			
	8,99999999952070	4,793E-11			
	9,99999999950870	4,913E-11			
	10,99999999949800	5,020E-11			
	11,99999999949500	5,050E-11			
1,2	0,99999999961076	3,892E-11	2269	9,94E-14	59,154587
	1,99999999956910	4,309E-11			
	2,99999999956030	4,397E-11			
	3,99999999955280	4,472E-11			
	4,99999999955170	4,483E-11			
	5,99999999955520	4,448E-11			
	6,99999999957560	4,244E-11			
	7,99999999958080	4,192E-11			
	8,99999999957590	4,241E-11			
	9,99999999956550	4,345E-11			
	10,99999999955600	4,440E-11			
	11,99999999955300	4,470E-11			
1,3	0,99999999966099	3,390E-11	1848	9,90E-14	51,650098
	1,99999999962490	3,751E-11			
	2,99999999961740	3,826E-11			
	3,99999999961100	3,890E-11			
	4,99999999961030	3,897E-11			
	5,99999999961340	3,866E-11			
	6,99999999963090	3,691E-11			
	7,99999999963540	3,646E-11			
	8,99999999963130	3,687E-11			
	9,99999999962250	3,775E-11			
	10,99999999961400	3,860E-11			
	11,99999999961200	3,880E-11			
1,31	0,99999999966462	3,354E-11	1809	9,92E-14	50,994647
	1,99999999962890	3,711E-11			
	2,99999999962150	3,785E-11			
	3,99999999961530	3,847E-11			
	4,99999999961450	3,855E-11			
	5,99999999961760	3,824E-11			
	6,99999999963490	3,651E-11			
	7,99999999963940	3,606E-11			
	8,99999999963530	3,647E-11			
	9,99999999962670	3,733E-11			
	10,99999999961900	3,810E-11			
	11,99999999961700	3,830E-11			
1,32	0,99999999967033	3,297E-11	1771	9,90E-14	50,217245

	1,999999999963530	3,647E-11			
	2,999999999962800	3,720E-11			
	3,999999999962190	3,781E-11			
	4,999999999962120	3,788E-11			
	5,999999999962420	3,758E-11			
	6,999999999964120	3,588E-11			
	7,999999999964560	3,544E-11			
	8,999999999964160	3,584E-11			
	9,999999999963310	3,669E-11			
	10,999999999962500	3,750E-11			
	11,999999999962300	3,770E-11			
1,40	0,999999999970827	2,917E-11	1484	9,94E-14	44,199045
	1,999999999967740	3,226E-11			
	2,999999999967120	3,288E-11			
	3,999999999966590	3,341E-11			
	4,999999999966540	3,346E-11			
	5,999999999966820	3,318E-11			
	6,999999999968300	3,170E-11			
	7,999999999968690	3,131E-11			
	8,999999999968350	3,165E-11			
	9,999999999967620	3,238E-11			
	10,999999999966900	3,310E-11			
1,50	11,999999999966800	3,320E-11	1166	9,84E-14	36,648244
	0,999999999975968	2,403E-11			
	1,999999999973450	2,655E-11			
	2,999999999972960	2,704E-11			
	3,999999999972540	2,746E-11			
	4,999999999972530	2,747E-11			
	5,999999999972770	2,723E-11			
	6,999999999973970	2,603E-11			
	7,999999999974290	2,571E-11			
	8,999999999974020	2,598E-11			
	9,999999999973460	2,654E-11			
1,60	10,999999999972900	2,710E-11	883	9,80E-14	29,032770
	11,999999999972800	2,720E-11			
	0,999999999980942	1,906E-11			
	1,999999999978970	2,103E-11			
	2,999999999978610	2,139E-11			
	3,999999999978300	2,170E-11			
	4,999999999978330	2,167E-11			
	5,999999999978530	2,147E-11			
	6,999999999979440	2,056E-11			
	7,999999999979700	2,030E-11			
	8,999999999979500	2,050E-11			
1,70	9,999999999979100	2,090E-11	626	9,83E-14	21,291060
	10,999999999978600	2,140E-11			
	11,999999999978600	2,140E-11			
	0,999999999985868	1,413E-11			
	1,999999999984440	1,556E-11			
	2,999999999984210	1,579E-11			
	3,999999999984010	1,599E-11			
	4,999999999984080	1,592E-11			
	5,999999999984240	1,576E-11			
	6,999999999984870	1,513E-11			
	7,999999999985060	1,494E-11			
	8,999999999984930	1,507E-11			
	9,999999999984700	1,530E-11			
	10,999999999984300	1,570E-11			

	11,99999999984400	1,560E-11			
1,74	0,99999999987887	1,211E-11	528	9,85E-14	18,104667
	1,99999999986700	1,330E-11			
	2,99999999986520	1,348E-11			
	3,99999999986370	1,363E-11			
	4,99999999986440	1,356E-11			
	5,99999999986590	1,341E-11			
	6,99999999987100	1,290E-11			
	7,99999999987270	1,273E-11			
	8,99999999987170	1,283E-11			
	9,99999999987000	1,300E-11			
	10,99999999986700	1,330E-11			
	11,99999999986700	1,330E-11			
1,75	0,99999999988747	1,125E-11	504	9,95E-14	16,838373
	1,99999999987410	1,259E-11			
	2,99999999987320	1,268E-11			
	3,99999999987190	1,281E-11			
	4,99999999987280	1,272E-11			
	5,99999999987370	1,263E-11			
	6,99999999987830	1,217E-11			
	7,99999999988070	1,193E-11			
	8,99999999987940	1,206E-11			
	9,99999999987820	1,218E-11			
	10,99999999987400	1,260E-11			
	11,99999999987600	1,240E-11			
1,76	0,99999999999035	9,650E-13	589	9,90E-14	0,500111
	2,000000000000410	-4,099E-13			
	2,99999999999940	5,995E-14			
	3,99999999999880	1,199E-13			
	4,99999999999800	1,998E-13			
	6,000000000000180	-1,803E-13			
	7,000000000000210	-2,096E-13			
	7,99999999999750	2,496E-13			
	8,99999999999970	3,020E-14			
	9,99999999999780	2,203E-13			
	11,000000000000300	-3,002E-13			
	11,99999999999600	3,997E-13			
1,8	1,000000000000980	-9,801E-13	17724	9,97E-14	0,518447
	1,99999999999540	4,601E-13			
	3,000000000000030	-3,020E-14			
	4,000000000000100	-1,004E-13			
	5,000000000000190	-1,901E-13			
	5,99999999999780	2,203E-13			
	6,99999999999750	2,496E-13			
	8,000000000000240	-2,398E-13			
	9,000000000000010	0,000E+00			
	10,000000000000200	-2,007E-13			
	10,99999999999600	3,997E-13			
	12,000000000000300	-3,002E-13			

В силу того, что у данной матрицы СЛАУ имеет строгое диагональное преобладание, то этого свойства достаточно для сходимости методов Якоби и Зейделя.

К тому же стоит заметить, что из-за того, что матрица обладает данным свойством метод Зейделя сходится быстрее чем, метод Якоби

$$A = \begin{pmatrix} 11 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 13 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 13 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 12 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 9 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 10 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 6 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 14 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 12 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 11 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 13 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 8 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 76 \\ 118 \\ 142 \\ 147 \\ 121 \\ 142 \\ 79 \\ 180 \\ 167 \\ 176 \\ 236 \\ 141 \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \end{pmatrix}$$

w	Метод Якоби				
	x	x* - x	Число итераций	Отн. невязка	
0.1	1,00000000000438	-4,380E-12	514	9,83E-14	4,050466
	1,9999999999701	2,990E-12			
	3,00000000000172	-1,720E-12			
	4,00000000000003	-3,020E-14			
	5,00000000000012	-1,199E-13			
	6,000000000000319	-3,190E-12			
	6,9999999999312	6,880E-12			
	8,00000000000338	-3,380E-12			
	8,9999999999884	1,160E-12			
	10,00000000000050	-4,992E-13			
	10,9999999999920	7,994E-13			
	11,9999999999920	7,994E-13			
0.2	1,00000000000409	-4,090E-12	251	9,25E-14	3,841535
	1,9999999999721	2,790E-12			
	3,00000000000161	-1,610E-12			
	4,00000000000003	-3,020E-14			
	5,00000000000010	-1,004E-13			
	6,000000000000298	-2,980E-12			
	6,9999999999357	6,430E-12			
	8,00000000000315	-3,149E-12			
	8,9999999999892	1,080E-12			
	10,00000000000050	-4,992E-13			
	10,9999999999920	7,994E-13			
	11,9999999999930	6,999E-13			
0.3	1,00000000000396	-3,960E-12	163	9,91E-14	3,630505
	1,9999999999730	2,700E-12			
	3,00000000000156	-1,560E-12			
	4,00000000000004	-3,997E-14			
	5,00000000000009	-8,971E-14			
	6,000000000000289	-2,890E-12			
	6,9999999999378	6,220E-12			
	8,00000000000305	-3,050E-12			
	8,9999999999895	1,050E-12			
	10,00000000000050	-4,992E-13			
	10,9999999999920	7,994E-13			
	11,9999999999930	6,999E-13			

0.4	1,000000000000303	-3,030E-12	120	8,04E-14	3,420731
	1,99999999999794	2,060E-12			
	3,00000000000119	-1,190E-12			
	4,00000000000003	-3,020E-14			
	5,00000000000006	-6,040E-14			
	6,00000000000221	-2,210E-12			
	6,99999999999524	4,760E-12			
	8,00000000000233	-2,331E-12			
	8,99999999999920	7,994E-13			
	10,00000000000030	-3,002E-13			
	10,99999999999940	6,004E-13			
	11,99999999999950	4,992E-13			
0.5	1,000000000000314	-3,140E-12	93	8,89E-14	3,209332
	1,99999999999786	2,140E-12			
	3,00000000000124	-1,240E-12			
	4,00000000000004	-3,997E-14			
	5,00000000000006	-6,040E-14			
	6,00000000000229	-2,290E-12			
	6,99999999999507	4,930E-12			
	8,00000000000242	-2,419E-12			
	8,99999999999917	8,296E-13			
	10,00000000000030	-3,002E-13			
	10,99999999999940	6,004E-13			
	11,99999999999940	6,004E-13			
0.6	1,000000000000321	-3,210E-12	75	9,70E-14	3,163526
	1,99999999999782	2,180E-12			
	3,00000000000127	-1,270E-12			
	4,00000000000005	-4,974E-14			
	5,00000000000005	-4,974E-14			
	6,00000000000234	-2,340E-12			
	6,99999999999497	5,030E-12			
	8,00000000000247	-2,469E-12			
	8,99999999999915	8,509E-13			
	10,00000000000040	-3,997E-13			
	10,99999999999930	6,999E-13			
	11,99999999999940	6,004E-13			
0.7	1,000000000000223	-2,230E-12	63	7,26E-14	3,000586
	1,99999999999848	1,520E-12			
	3,00000000000088	-8,802E-13			
	4,00000000000003	-3,020E-14			
	5,00000000000003	-3,020E-14			
	6,00000000000162	-1,620E-12			
	6,99999999999650	3,500E-12			
	8,00000000000171	-1,711E-12			
	8,99999999999941	5,898E-13			
	10,00000000000020	-2,007E-13			
	10,99999999999950	4,992E-13			
	11,99999999999960	3,997E-13			
0,77	1,000000000000208	-2,080E-12	56	7,19E-14	2,630843
	1,99999999999858	1,420E-12			
	3,00000000000082	-8,198E-13			
	4,00000000000003	-3,020E-14			
	5,00000000000002	-2,043E-14			
	6,00000000000151	-1,510E-12			
	6,99999999999672	3,280E-12			
	8,00000000000160	-1,600E-12			
	8,99999999999944	5,596E-13			
	10,00000000000020	-2,007E-13			

	7,99999999999943	5,702E-13			
	8,99999999999943	5,702E-13			
	9,99999999999941	5,898E-13			
	10,99999999999940	6,004E-13			
	11,99999999999930	6,999E-13			
0,95	1,000000000000051	-5,100E-13	275	9,60E-14	0,815697
	2,000000000000057	-5,702E-13			
	3,000000000000058	-5,800E-13			
	4,000000000000059	-5,898E-13			
	5,000000000000059	-5,898E-13			
	6,000000000000059	-5,898E-13			
	7,000000000000056	-5,604E-13			
	8,000000000000055	-5,507E-13			
	9,000000000000056	-5,596E-13			
	10,000000000000050	-4,992E-13			
	11,000000000000050	-4,992E-13			
	12,000000000000050	-4,992E-13			
1,00	0,99999999999941	5,950E-13	7738	9,99E-14	0,906633
	1,99999999999934	6,599E-13			
	2,99999999999932	6,799E-13			
	3,99999999999931	6,901E-13			
	4,99999999999931	6,901E-13			
	5,99999999999931	6,901E-13			
	6,99999999999934	6,599E-13			
	7,99999999999935	6,501E-13			
	8,99999999999934	6,608E-13			
	9,99999999999932	6,803E-13			
	10,99999999999930	6,999E-13			
	11,99999999999930	6,999E-13			

w	Метод Зейделя				
	x	$x^* - x$	Число итераций	Отн. невязка	
0.1	1,000000000004350	-4,350E-12	503	9,64E-14	3,953993
	1,99999999997180	2,820E-12			
	3,000000000001600	-1,600E-12			
	4,000000000000090	-8,971E-14			
	4,999999999999990	9,770E-15			
	6,000000000003170	-3,170E-12			
	6,99999999993440	6,560E-12			
	8,000000000003080	-3,080E-12			
	8,99999999998900	1,100E-12			
	10,000000000000500	-4,992E-13			
	10,9999999999200	7,994E-13			
	11,9999999999300	6,999E-13			
0.2	1,00000000004280	-4,280E-12	239	9,91E-14	3,637964
	1,99999999997380	2,620E-12			
	3,000000000001460	-1,460E-12			
	4,000000000000160	-1,599E-13			
	4,99999999999850	1,501E-13			
	6,000000000003110	-3,110E-12			
	6,99999999993840	6,160E-12			
	8,000000000002760	-2,760E-12			
	8,99999999998960	1,039E-12			
	10,000000000000400	-3,997E-13			
	10,9999999999300	6,999E-13			
	11,9999999999400	6,004E-13			
0.3	1,000000000003900	-3,900E-12	151	9,52E-14	3,315200
	1,99999999997750	2,250E-12			
	3,000000000001230	-1,230E-12			
	4,000000000000220	-2,203E-13			
	4,99999999999740	2,602E-13			
	6,000000000002820	-2,820E-12			
	6,99999999994670	5,330E-12			
	8,000000000002260	-2,260E-12			
	8,99999999999090	9,095E-13			
	10,000000000000300	-3,002E-13			
	10,9999999999400	6,004E-13			
	11,9999999999600	3,997E-13			
0.4	1,000000000003190	-3,190E-12	107	8,32E-14	2,979451
	1,99999999998290	1,710E-12			
	3,000000000000920	-9,202E-13			
	4,000000000000250	-2,496E-13			
	4,99999999999670	3,304E-13			
	6,000000000002290	-2,290E-12			
	6,99999999995880	4,120E-12			
	8,000000000001640	-1,640E-12			
	8,99999999999290	7,105E-13			
	10,000000000000200	-2,007E-13			
	10,9999999999500	4,992E-13			
	11,9999999999700	3,002E-13			
0.5	1,000000000002720	-2,720E-12	80	7,68E-14	2,633637
	1,99999999998650	1,350E-12			
	3,000000000000710	-7,101E-13			
	4,000000000000290	-2,904E-13			
	4,99999999999620	3,801E-13			

	6,0000000000001940	-1,940E-12			
	6,999999999996700	3,300E-12			
	8,0000000000001230	-1,229E-12			
	8,99999999999420	5,809E-13			
	10,000000000000200	-2,007E-13			
	10,99999999999600	3,997E-13			
	11,99999999999800	2,007E-13			
0.6	1,0000000000002870	-2,870E-12	61	8,98E-14	2,277455
	1,999999999998690	1,310E-12			
	3,0000000000000670	-6,701E-13			
	4,0000000000000400	-3,997E-13			
	4,99999999999470	5,302E-13			
	6,0000000000002020	-2,020E-12			
	6,999999999996760	3,240E-12			
	8,0000000000001130	-1,130E-12			
	8,99999999999400	6,004E-13			
	10,000000000000100	-9,948E-14			
	10,99999999999600	3,997E-13			
	11,99999999999900	9,948E-14			
0.7	1,0000000000002650	-2,650E-12	47	9,54E-14	1,917268
	1,999999999998870	1,130E-12			
	3,0000000000000590	-5,902E-13			
	4,0000000000000530	-5,302E-13			
	4,99999999999390	6,102E-13			
	6,0000000000001820	-1,820E-12			
	6,999999999997210	2,790E-12			
	8,0000000000000920	-9,202E-13			
	8,99999999999480	5,205E-13			
	10,000000000000100	-9,948E-14			
	10,99999999999600	3,997E-13			
	11,99999999999900	9,948E-14			
0,77	1,0000000000001640	-1,640E-12	39	6,79E-14	1,659493
	1,99999999999230	7,701E-13			
	3,0000000000000410	-4,099E-13			
	4,0000000000000500	-5,000E-13			
	4,99999999999640	3,597E-13			
	6,0000000000001070	-1,070E-12			
	6,999999999998320	1,680E-12			
	8,0000000000000540	-5,400E-13			
	8,99999999999760	2,398E-13			
	10,0000000000000000	0,000E+00			
	10,99999999999600	3,997E-13			
	11,99999999999900	9,948E-14			
0,78	1,0000000000001290	-1,290E-12	38	5,53E-14	1,608260
	1,99999999999360	6,399E-13			
	3,0000000000000340	-3,402E-13			
	4,0000000000000430	-4,299E-13			
	4,99999999999760	2,398E-13			
	6,0000000000000820	-8,198E-13			
	6,999999999998680	1,320E-12			
	8,0000000000000420	-4,192E-13			
	8,99999999999850	1,492E-13			
	10,0000000000000000	0,000E+00			
	10,99999999999700	3,002E-13			
	11,99999999999900	9,948E-14			
0,79	1,0000000000001670	-1,670E-12	36	8,41E-14	1,511881
	1,999999999998900	1,100E-12			

	3,0000000000000680	-6,799E-13			
	4,0000000000000820	-8,198E-13			
	4,999999999999760	2,398E-13			
	6,0000000000000960	-9,601E-13			
	6,999999999998110	1,890E-12			
	8,0000000000000680	-6,803E-13			
	8,99999999999890	1,101E-13			
	9,99999999999920	7,994E-14			
	10,99999999999400	6,004E-13			
	11,99999999999900	9,948E-14			
	11,99999999999900	9,948E-14			
0,80	1,0000000000000750	-7,501E-13	35	6,63E-14	1,134839
	1,999999999999150	8,500E-13			
	3,0000000000000550	-5,498E-13			
	4,0000000000000650	-6,501E-13			
	5,0000000000000130	-1,297E-13			
	6,0000000000000310	-3,100E-13			
	6,999999999998970	1,030E-12			
	8,0000000000000400	-3,997E-13			
	9,0000000000000140	-1,403E-13			
	9,99999999999840	1,599E-13			
	10,99999999999500	4,992E-13			
	11,99999999999800	2,007E-13			
	11,99999999999800	2,007E-13			
0,90	0,999999999998990	1,010E-12	30	5,37E-14	1,094722
	2,0000000000000240	-2,398E-13			
	3,0000000000000010	-1,021E-14			
	3,99999999999770	2,300E-13			
	5,0000000000000180	-1,803E-13			
	5,99999999999280	7,203E-13			
	7,0000000000000720	-7,203E-13			
	7,99999999999900	1,004E-13			
	9,0000000000000110	-1,101E-13			
	9,99999999999960	4,086E-14			
	10,99999999999900	9,948E-14			
	12,0000000000000000	0,000E+00			
	12,0000000000000000	0,000E+00			
	12,0000000000000000	0,000E+00			
0,94	0,99999999999923	7,705E-14	28	3,82E-14	0,481761
	1,99999999999840	1,601E-13			
	3,0000000000000000	0,000E+00			
	4,0000000000000000	0,000E+00			
	5,0000000000000330	-3,304E-13			
	5,99999999999910	8,971E-14			
	7,0000000000000050	-4,974E-14			
	7,99999999999900	1,004E-13			
	9,0000000000000150	-1,492E-13			
	9,99999999999970	3,020E-14			
	11,0000000000000000	0,000E+00			
	11,99999999999800	2,007E-13			
	11,99999999999800	2,007E-13			
0,95	1,0000000000000280	-2,800E-13	27	7,42E-14	0,532124
	1,999999999999650	3,499E-13			
	2,99999999999880	1,199E-13			
	4,0000000000000000	0,000E+00			
	5,0000000000000640	-6,404E-13			
	6,0000000000000160	-1,599E-13			
	6,99999999999900	1,004E-13			
	7,99999999999740	2,602E-13			
	9,0000000000000240	-2,398E-13			
	10,0000000000000000	0,000E+00			
	11,0000000000000200	-2,007E-13			
	11,99999999999500	4,992E-13			
	11,99999999999500	4,992E-13			

1,00	0,99999999999835	1,650E-13	27	5,17E-14	0,544727
	1,99999999999700	3,000E-13			
	3,000000000000220	-2,198E-13			
	4,000000000000360	-3,597E-13			
	5,000000000000170	-1,696E-13			
	5,99999999999830	1,696E-13			
	6,99999999999760	2,398E-13			
	8,000000000000090	-9,059E-14			
	9,000000000000170	-1,705E-13			
	9,99999999999920	7,994E-14			
	10,99999999999700	3,002E-13			
	11,99999999999800	2,007E-13			
1,03	1,000000000000360	-3,599E-13	27	7,59E-14	0,595526
	2,000000000000410	-4,099E-13			
	2,99999999999620	3,801E-13			
	3,99999999999420	5,800E-13			
	4,99999999999770	2,300E-13			
	6,000000000000300	-3,002E-13			
	7,000000000000350	-3,499E-13			
	7,99999999999830	1,696E-13			
	8,99999999999720	2,807E-13			
	10,000000000000100	-9,948E-14			
	11,000000000000300	-3,002E-13			
	12,000000000000100	-9,948E-14			
1,04	0,99999999999661	3,390E-13	28	2,32E-14	0,935955
	2,000000000000010	-1,021E-14			
	3,0000000000000180	-1,799E-13			
	4,0000000000000110	-1,101E-13			
	4,99999999999900	1,004E-13			
	5,99999999999740	2,602E-13			
	7,000000000000040	-3,997E-14			
	8,0000000000000130	-1,297E-13			
	9,000000000000030	-3,020E-14			
	9,99999999999920	7,994E-14			
	10,99999999999800	2,007E-13			
	12,000000000000000	0,000E+00			
1,10	0,999999999998715	1,285E-12	29	8,16E-14	1,043781
	1,99999999999920	7,994E-14			
	3,0000000000000780	-7,798E-13			
	4,0000000000000610	-6,102E-13			
	4,99999999999760	2,398E-13			
	5,99999999999020	9,797E-13			
	6,99999999999990	9,770E-15			
	8,0000000000000530	-5,294E-13			
	9,0000000000000280	-2,807E-13			
	9,99999999999650	3,499E-13			
	10,99999999999200	7,994E-13			
	12,000000000000000	0,000E+00			
1,20	1,0000000000000270	-2,700E-13	36	4,37E-14	0,827822
	2,0000000000000290	-2,900E-13			
	2,99999999999740	2,598E-13			
	3,99999999999540	4,601E-13			
	4,99999999999800	1,998E-13			
	6,0000000000000160	-1,599E-13			
	7,0000000000000400	-3,997E-13			
	7,99999999999910	8,971E-14			
	8,99999999999750	2,505E-13			
	10,000000000000000	0,000E+00			

	11,000000000000100	-9,948E-14			
	12,000000000000200	-2,007E-13			
1,30	1,000000000001260	-1,260E-12	44	9,02E-14	1,169580
	1,99999999999870	1,299E-13			
	2,999999999998990	1,010E-12			
	3,99999999999550	4,499E-13			
	5,000000000000750	-7,496E-13			
	6,000000000001240	-1,240E-12			
	7,000000000000050	-4,974E-14			
	7,99999999999420	5,800E-13			
	8,99999999999720	2,807E-13			
	10,000000000000600	-6,004E-13			
	11,000000000001200	-1,201E-12			
	11,99999999999800	2,007E-13			
1,40	1,000000000001170	-1,170E-12	57	9,25E-14	1,358172
	1,99999999999560	4,401E-13			
	2,999999999998680	1,320E-12			
	3,999999999998650	1,350E-12			
	5,000000000000070	-7,017E-14			
	6,000000000001240	-1,240E-12			
	6,99999999999040	9,601E-13			
	7,99999999999150	8,500E-13			
	8,99999999999530	4,707E-13			
	10,000000000000700	-6,999E-13			
	11,000000000000800	-7,994E-13			
	12,000000000000700	-6,999E-13			
1,50	0,999999999998019	1,981E-12	78	8,51E-14	1,576368
	2,000000000000020	-1,998E-14			
	3,0000000000000540	-5,400E-13			
	3,99999999999400	6,000E-13			
	4,999999999998840	1,160E-12			
	5,999999999998710	1,290E-12			
	6,99999999999590	4,103E-13			
	8,000000000001020	-1,020E-12			
	9,000000000000410	-4,103E-13			
	9,99999999999290	7,105E-13			
	10,999999999998800	1,201E-12			
	12,000000000000900	-9,006E-13			
1,60	0,999999999997026	2,974E-12	115	9,79E-14	2,088675
	1,99999999999220	7,800E-13			
	3,0000000000000240	-2,398E-13			
	3,999999999998610	1,390E-12			
	4,999999999998800	1,200E-12			
	5,999999999998930	1,070E-12			
	6,999999999997650	2,350E-12			
	8,000000000001670	-1,670E-12			
	9,000000000000960	-9,592E-13			
	9,99999999999400	6,004E-13			
	10,999999999998900	1,100E-12			
	12,000000000001500	-1,499E-12			
1,70	1,0000000000003260	-3,260E-12	216	8,76E-14	2,223261
	2,0000000000000570	-5,702E-13			
	2,999999999999990	1,021E-14			
	4,000000000001180	-1,180E-12			
	5,0000000000000050	-4,974E-14			
	6,0000000000000720	-7,203E-13			
	7,000000000001880	-1,880E-12			
	7,999999999997630	2,370E-12			

	8,999999999998870	1,130E-12			
	10,000000000000400	-3,997E-13			
	11,000000000000000	0,000E+00			
	11,999999999998900	1,100E-12			
1,80	0,999999999997734	2,266E-12	1102	8,82E-14	2,791861
	1,999999999998320	1,680E-12			
	3,000000000000420	-4,201E-13			
	3,999999999998880	1,120E-12			
	4,99999999999220	7,798E-13			
	6,000000000000080	-7,994E-14			
	6,999999999995340	4,660E-12			
	8,000000000001810	-1,810E-12			
	9,000000000001460	-1,460E-12			
	9,99999999999510	4,903E-13			
	10,99999999999200	7,994E-13			
	12,000000000001200	-1,201E-12			
1,82	1,000000000002320	-2,320E-12	5313	9,59E-14	2,843768
	2,000000000001870	-1,870E-12			
	2,99999999999470	5,298E-13			
	4,000000000001150	-1,150E-12			
	5,000000000000910	-9,104E-13			
	5,99999999999780	2,203E-13			
	7,000000000005260	-5,260E-12			
	7,999999999998080	1,920E-12			
	8,999999999998380	1,620E-12			
	10,00000000000500	-4,992E-13			
	11,00000000000900	-9,006E-13			
	11,999999999998600	1,400E-12			

I. Метод Якоби сходится к решению системы в том и только в том случае, когда все корни уравнения

$$\begin{vmatrix} a_{11}\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}\lambda \end{vmatrix} = 0$$

По модулю меньше единицы

Удостоверимся в этом:

$$\begin{vmatrix} 11\lambda & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 13\lambda & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 13\lambda & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 12\lambda & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 9\lambda & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 10\lambda & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 6\lambda & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 14\lambda & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 12\lambda & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 11\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 13\lambda & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 8\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= 2315206333440\lambda^{12} - 3113500021632\lambda^{10} + 1027097413056\lambda^9 + 1198752376896\lambda^8 - \\ - 793549986624\lambda^7 + 14073695592\lambda^6 + 121488428388\lambda^5 - 44805959196\lambda^4 + 7305079048\lambda^3 \\ - 654967540\lambda^2 + 45146496\lambda - 2365440 = 0$$

Отсюда:

Действительные корни

Мнимые корни

$$\lambda_1 \approx 0.149916, \quad |\lambda_1| = 0.149916 < 1 \quad \lambda_7 \approx 0.00300 - 0.083912i, \quad |\lambda_7| = 0.0839 < 1$$

$$\lambda_2 \approx -0.417647, \quad |\lambda_2| = 0.417647 < 1 \quad \lambda_8 \approx 0.00300 + 0.083912i, \quad |\lambda_8| = 0.0839 < 1$$

$$\lambda_3 \approx 0.507, \quad |\lambda_3| = 0.507 < 1 \quad \lambda_9 \approx 0.25125 - 0.07190i, \quad |\lambda_9| = 0.2613 < 1$$

$$\lambda_4 \approx -0.549626, \quad |\lambda_4| = 0.549626 < 1 \quad \lambda_{10} \approx 0.25125 + 0.07190i, \quad |\lambda_{10}| = 0.2613 < 1$$

$$\lambda_5 \approx -0.775604, \quad |\lambda_5| = 0.775604 < 1 \quad \lambda_{11} \approx 0.37182 - 0.13906i, \quad |\lambda_{11}| = 0.3969 < 1$$

$$\lambda_6 \approx -0.996137, \quad |\lambda_6| = 0.996137 < 1 \quad \lambda_{12} \approx 0.37182 + 0.13906i, \quad |\lambda_{12}| = 0.3969 < 1$$

Следовательно, для данной матрицы, метод Якоби будет сходиться.

II. Метод Зейделя сходится к решению системы в том и только в том случае, когда все корни уравнения

$$\begin{vmatrix} a_{11}\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21}\lambda & a_{22}\lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}\lambda & a_{n2}\lambda & \dots & a_{nn}\lambda \end{vmatrix} = 0$$

По модулю меньше единицы

Удостоверимся в этом:

$$\begin{vmatrix} 11\lambda & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & 13\lambda & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2\lambda & 13\lambda & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2\lambda & 12\lambda & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3\lambda & 9\lambda & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4\lambda & 10\lambda & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\lambda & 6\lambda & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3\lambda & 4\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 3\lambda & 14\lambda & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 2\lambda & 4\lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\lambda & 12\lambda & 3 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 3\lambda & 2\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 4\lambda & 11\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4\lambda & 2\lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\lambda & 13\lambda & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2\lambda & 4\lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 8\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= 2315206333440\lambda^{12} - 2736906194880\lambda^{11} + 1637712758616\lambda^{10} - 615362722504\lambda^9 +$$

$$153966548456\lambda^8 - 25542529168\lambda^7 + 2432975156\lambda^6 - 33133972\lambda^5 - 20866108\lambda^4 +$$

$$+ 2049816\lambda^3 - 46368\lambda^2 = 0$$

Отсюда:

Действительные корни

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} &\approx 0, \quad |\lambda_{1,2}| = 0 < 1 \\ \lambda_3 &\approx 0.0337379, \quad |\lambda_3| = 0.0337379 < 1 \\ \lambda_4 &\approx -0.086869, \quad |\lambda_4| = 0.086869 < 1 \\ \lambda_5 &\approx 0.159593, \quad |\lambda_5| = 0.159593 < 1 \\ \lambda_6 &\approx 0.255392, \quad |\lambda_6| = 0.255392 < 1 \end{aligned}$$

Мнимые корни

$$\begin{aligned} \lambda_7 &\approx 0.15479 - 0.09825i, \quad |\lambda_7| = 0.1833 < 1 \\ \lambda_8 &\approx 0.15479 + 0.09825i, \quad |\lambda_8| = 0.1833 < 1 \\ \lambda_9 &\approx 0.07741 - 0.21442i, \quad |\lambda_9| = 0.2228 < 1 \\ \lambda_{10} &\approx 0.07741 + 0.21442i, \quad |\lambda_{10}| = 0.2228 < 1 \\ \lambda_{11} &\approx 0.37182 - 0.13906i, \quad |\lambda_{11}| = 0.3969 < 1 \\ \lambda_{12} &\approx 0.37182 + 0.13906i, \quad |\lambda_{12}| = 0.3969 < 1 \end{aligned}$$

Следовательно, для данной матрицы, метод Якоби будет сходиться.

4. Выводы по работе:

Метод Зейделя требует меньшего количества итераций для нахождения решения по сравнению с методом Якоби. Это связано с тем, что в методе Зейделя используются ранее рассчитанные значения компонентов вектора на текущем шаге итерации, что позволяет сразу применять полученные данные для последующих расчетов.

Коэффициент релаксации может существенно ускорить сходимость итерационного метода, иногда в десятки раз, однако его использование усложняется необходимостью поиска оптимального значения w . Если требуется решить одну систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), поиск оптимального w может оказаться избыточным, но для вычисления множества похожих СЛАУ это будет оправдано.

В каждом из методов существуют значения коэффициента релаксации, при которых итерационный метод начинает расходиться несмотря на то, что он все еще находится в допустимых параметрах. Это объясняется тем, что первоначальные границы заданы для нормальных (положительно определенных симметричных) матриц.

При оценке чисел обусловленности матрицы в методах Якоби и Зейделя получены значения меньше 1, что недопустимо. Однако, поскольку проверка представляет собой нижнюю оценку, она может оказаться меньше единицы.