

# Teoria Współbieżności

## Ćwiczenie 8

### 1 Cel ćwiczenia

Celem ćwiczenia jest zapoznanie studentów z zastosowaniem teorii śladów do szeregowania wątków z zastosowaniem w klasycznych algorytmach algebry liniowej. Jako przykład omawiany jest algorytm współbieżnej eliminacji Gaussa. Ćwiczenie zakłada znajomość podstaw programowania współbieżnego oraz podstaw z algebry liniowej (poznanych na pierwszym semestrze studiów).

### 2 Plan ćwiczenia

Teoria śladów [1, 2] służy głównie do modelowania zachowania systemów współbieżnych. Opisuje zależności pomiędzy elementami predefiniowanego zbioru niepodzielnych zadań obliczeniowych. Podstawowym pojęciem teorii śladów jest alfabet będący skończonym zbiorem niepodzielnych zadań obliczeniowych (tasków) - to znaczy niepodzielnych i składających się jedynie z instrukcji wykonywanych sekwencyjnie. Teoria śladów jest szeroko stosowanym formalizmem pozwalającym wyprowadzić optymalne zrównoleglenie dla zadanej grupy tasków.

W trakcie ćwiczenia studenci:

- Definiują alfabet w sensie teorii śladów dla zadanego problemu obliczeniowego
- Definiują relacje pomiędzy elementami alfabetu
- Obliczają postać normalną Foaty oraz budują graf Diekerta
- Wyprowadzają formalny model równoległości zadanego problemu obliczeniowego
- Implementują wyprowadzony wyżej model równoległy

## 2.1 Współbieżna eliminacja Gaussa

Wykład do przedmiotu Teoria Współbieżności [4] zawiera wprowadzenie teoretyczne (razem z przykładem - poniżej) do tego zadania.

Rozważmy problem rozwiązywania układów równań liniowych metodą Gaussa dla poniższych wartości. Problem można przedstawić jako  $M \times x = y$ , gdzie  $M$  jest macierzą kwadratową, natomiast  $x$  oraz  $y$  są wektorami. Elementy macierzy  $M$  będziemy indeksować jako  $M_{i,j}$ . Elementy wektora  $y$  będziemy indeksować jako  $y_i$ .

$$\begin{bmatrix} M_{1,1} & M_{1,2} & M_{1,3} \\ M_{2,1} & M_{2,2} & M_{2,3} \\ M_{3,1} & M_{3,2} & M_{3,3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \quad (1)$$

Mamy następujące niepodzielne zadania obliczeniowe za pomocą których można rozwiązać w.w. układ

- $A_{i,k}$  - znalezienie mnożnika dla wiersza  $i$ , do odejmowania go od  $k$ -tego wiersza,  
 $m_{k,i} = M_{k,i}/M_{i,i}$
- $B_{i,j,k}$  - pomnożenie  $j$ -tego elementu wiersza  $i$  przez mnożnik - do odejmowania od  $k$ -tego wiersza,  
 $n_{k,i} = M_{i,j} * m_{k,i}$
- $C_{i,j,k}$  - odjęcie  $j$ -tego elementu wiersza  $i$  od wiersza  $k$ ,  
 $M_{k,j} = M_{k,j} - n_{k,i}$ .

Mamy zadany następujący układ równań

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 8 \\ 6 & 5 & 16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 15 \\ 27 \end{bmatrix} \quad (2)$$

Dla uproszczenia zapisu będziemy stosować poniższą notację.

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 6 \\ 4 & 3 & 8 & 15 \\ 6 & 5 & 16 & 27 \end{array} \right] \quad (3)$$

Używamy pierwszego wiersza do „wyprodukowania” zer w pierwszej kolumnie.

Drugi wiersz = drugi wiersz - 2 \* pierwszy wiersz

$$A_{1,2}, B_{1,1,2}, C_{1,1,2}, B_{1,2,2}, C_{1,2,2}, B_{1,3,2}, C_{1,3,2}, B_{1,4,2}, C_{1,4,2} \quad (4)$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 6 & 5 & 16 & 27 \end{array} \right] \quad (5)$$

Trzeci wiersz = trzeci wiersz - 3 \* pierwszy wiersz

$$A_{1,3}, B_{1,1,3}, C_{1,1,3}, B_{1,2,3}, C_{1,2,3}, B_{1,3,3}, C_{1,3,3}, B_{1,4,3}, C_{1,4,3} \quad (6)$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 7 & 9 \end{array} \right] \quad (7)$$

Używamy drugiego wiersza do „wyprodukowania” zer w drugiej kolumnie

Trzeci wiersz = trzeci wiersz - 2 \* drugi wiersz

$$A_{2,3}, B_{2,1,3}, C_{2,1,3}, B_{2,2,3}, C_{2,2,3}, B_{2,3,3}, C_{2,3,3}, B_{2,4,3}, C_{2,4,3} \quad (8)$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{array} \right] \quad (9)$$

$$\Sigma = \{A_{1,2}, B_{1,1,2}, C_{1,1,2}, B_{1,2,2}, C_{1,2,2}, B_{1,3,2}, C_{1,3,2}, B_{1,4,2}, C_{1,4,2}, \\ A_{1,3}, B_{1,1,3}, C_{1,1,3}, B_{1,2,3}, C_{1,2,3}, B_{1,3,3}, C_{1,3,3}, B_{1,4,3}, C_{1,4,3}, \\ A_{2,3}, B_{2,2,3}, C_{2,2,3}, B_{2,3,3}, C_{2,3,3}, B_{2,4,3}, C_{2,4,3}\} \quad (10)$$

$$\begin{aligned}
D = \text{sym}\{ & \{(A_{1,2}, B_{1,1,2}), (A_{1,2}, B_{1,2,2}), (A_{1,2}, B_{1,3,2}), (A_{1,2}, B_{1,4,2}), \\
& (B_{1,1,2}, C_{1,1,2}), (B_{1,2,2}, C_{1,2,2}), (B_{1,3,2}, C_{1,3,2}), (B_{1,4,2}, C_{1,4,2}), \\
& (A_{1,3}, B_{1,1,3}), (A_{1,3}, B_{1,2,3}), (A_{1,3}, B_{1,3,3}), (A_{1,3}, B_{1,4,3}), \\
& (B_{1,1,3}, C_{1,1,3}), (B_{1,2,3}, C_{1,2,3}), (B_{1,3,3}, C_{1,3,3}), (B_{1,4,3}, C_{1,4,3}), \\
& (A_{2,3}, B_{2,2,3}), (A_{2,3}, B_{2,3,3}), (A_{2,3}, B_{2,4,3}), \\
& (B_{2,2,3}, C_{2,2,3}), (B_{2,3,3}, C_{2,3,3}), (B_{2,4,3}, C_{2,4,3}), \\
& (C_{1,2,2}, A_{2,3}), (C_{1,2,3}, A_{2,3}), (C_{1,2,2}, B_{2,2,3}), (C_{1,2,3}, B_{2,2,3}), \\
& (C_{1,3,2}, B_{2,3,3}), (C_{1,3,3}, C_{2,3,3}), (C_{1,4,2}, B_{2,4,3}), (C_{1,4,3}, C_{2,4,3})\}^+ \cup I_\Sigma
\end{aligned} \tag{11}$$

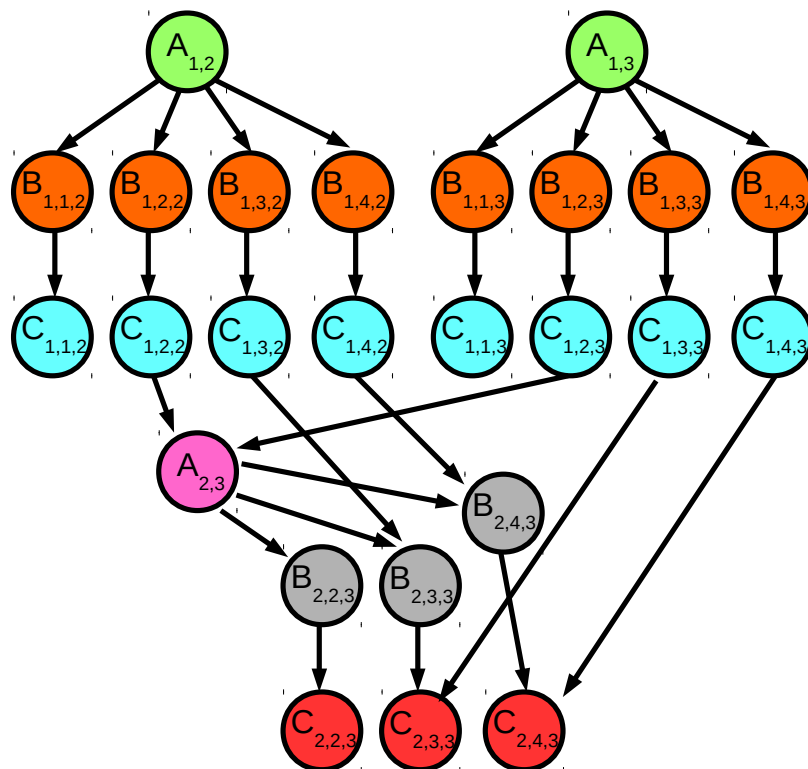
$$\begin{aligned}
t = [w]_{\equiv_I^+} = & [\langle A_{1,2}, B_{1,1,2}, C_{1,1,2}, B_{1,2,2}, C_{1,2,2}, B_{1,3,2}, C_{1,3,2}, B_{1,4,2}, C_{1,4,2}, \\
& A_{1,3}, B_{1,1,3}, C_{1,1,3}, B_{1,2,3}, C_{1,2,3}, B_{1,3,3}, C_{1,3,3}, B_{1,4,3}, C_{1,4,3}, \\
& A_{2,3}, B_{2,2,3}, C_{2,2,3}, B_{2,3,3}, C_{2,3,3}, B_{2,4,3}, C_{2,4,3} \rangle]_{\equiv_I^+}
\end{aligned} \tag{12}$$

Postać Normalna Foaty:

$$\begin{aligned}
t = [\langle A \rangle]_{\equiv_I^+} = & [\{A_{1,2}, A_{1,3}\}]_{\equiv_I^+} \\
& \frown [\{B_{1,1,2}, B_{1,2,2}, B_{1,3,2}, B_{1,4,2}, B_{1,1,3}, B_{1,2,3}, B_{1,3,3}, B_{1,4,3}\}]_{\equiv_I^+} \\
& \frown [\{C_{1,1,2}, C_{1,2,2}, C_{1,3,2}, C_{1,4,2}, C_{1,1,3}, C_{1,2,3}, C_{1,3,3}, C_{1,4,3}\}]_{\equiv_I^+} \\
& \frown [\{A_{2,3}\}]_{\equiv_I^+} \frown [\{B_{2,2,3}, B_{2,3,3}, B_{2,4,3}\}]_{\equiv_I^+} \\
& \frown [\{C_{2,2,3}, C_{2,3,3}, C_{2,4,3}\}]_{\equiv_I^+} = \\
& [F_1]_{\equiv_I^+} \frown [F_2]_{\equiv_I^+} \frown [F_3]_{\equiv_I^+} \frown [F_4]_{\equiv_I^+} \frown [F_5]_{\equiv_I^+} \frown [F_6]_{\equiv_I^+}
\end{aligned} \tag{13}$$

Zadanie polega na wykonaniu następujących etapów (dla macierzy o rozmiarze  $N$ ):

1. Proszę zlokalizować niepodzielne czynności wykonywane przez algorytm, nazwać je oraz zbudować alfabet w sensie teorii śladów
2. Proszę skonstruować relacje zależności i niezależności dla alfabetu, opisującego algorytm eliminacji Gaussa.
3. Proszę przedstawić algorytm eliminacji Gaussa w postaci ciągu symboli alfabetu.
4. Proszę wygenerować graf zależności Diekerta.



Rysunek 1: Graf Diekerta wraz z kolorowaniem

5. Proszę przekształcić ciąg symboli opisujący algorytm do postaci normalnej Foaty.

Proszę zaprojektować i zaimplementować równoległy algorytm eliminacji Gaussa bazujący na informacji uzyskanej z grafu zależności. W szczególności proszę zwrócić uwagę na implementację jak najlepiej odwzorowującą graf zależności. Program ma działać dla zadanych rozmiarów macierzy  $N$  oraz macierzy na wejściu/wyjściu w formacie zadanym przez prowadzącego. Rozwiązanie może nie uwzględniać konieczności zamiany miejscami wierszy.

### 3 Sposób oceny

Ocenie podlega część teoretyczna

- Poprawność definiowania podstawowych niepodzielnych zadań obliczeniowych,

- Poprawność identyfikacji ciągu zadań obliczeniowych wykonywanych przez algorytm sekwencyjny,
- Poprawność identyfikacji alfabetu w sensie teorii śladów,
- Poprawność identyfikacji relacji zależności,
- Poprawność wyprowadzenia grafu zależności Diekerta,
- Poprawność obliczania klas Foaty.

Oraz część implementacyjna

- Poprawność implementacji podstawowych operacji macierzowych,
- Poprawność implementacji schedulera dla nowych klas Foaty opisujących algorytm eliminacji Gaussa,
- Poprawność działania eliminacji Gaussa (czy uzyskane rozwiązanie jest poprawne).

## Literatura

- [1] V. Diekert, Y. Métivier – Partial commutation and traces, [w:] Handbook of Formal Languages, Springer, 1997, str. 457-553, dostępne tutaj
- [2] Diekert V., Rozemberg G. - The book of traces, 1995
- [3] Dowolny podręcznik z algebry liniowej lub metod numerycznych z zakresu sekwencyjnego algorytmu eliminacji Gaussa
- [4] Wykład z przedmiotu "Teoria współbieżności" – rozdział dotyczący teorii śladów
- [5] Bruce Eckel, "Thinking in Java" - rozdział o wątkach