Teoria Współbieżności - Współbieżna eliminacja Gaussa

Maksymilian Zawiślak

1 Wstęp

Zadanie polega na współbieżnym rozwiązaniu macierzy NxN wraz z wektorem wyrazów wolnych rozmiaru N metodą eliminacji Gaussa.

2 Część teoretyczna

2.1 Operacje na macierzy

Dla rozwiązywanej macierzy

$$\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

trzeba zdefiniować 3 operacje, które zapewnią poprawne działanie eliminacji Gaussa:

- $A_{i,k}$ - znalezienie mnożnika dla wiersza i, do odejmowania go od k -tego wiersza
  $m_{k,i} = M_{k,i}/M_{i,i}$
- $B_{i,j,k}$ - pomnożenie j-tego elementu wiersza i przez mnożnik - do odejmowania od k-tego wiersza,
  $n_{k,i,j} = M_{i,j} * m_{k,i}$
- $C_{i,j,k}$ - odjęcie j-tego elementu wiersza i od wiersza k,
  $M_{k,j} = M_{k,j} - n_{k,i,j}$

Aby móc współbieżnie rozwiązać układ równań trzeba wyznaczyć alfabet teorii śladów, relacje zależności oraz niezależności i klasy Foaty.

2.2 Alfabet w sensie teorii śladów

$$\sum = \{A_{i,k}, B_{i,j,k}, C_{i,j,k}\}$$

gdzie w miejsca $\{k,i,j\}$ są wstawione odpowiednie wartości

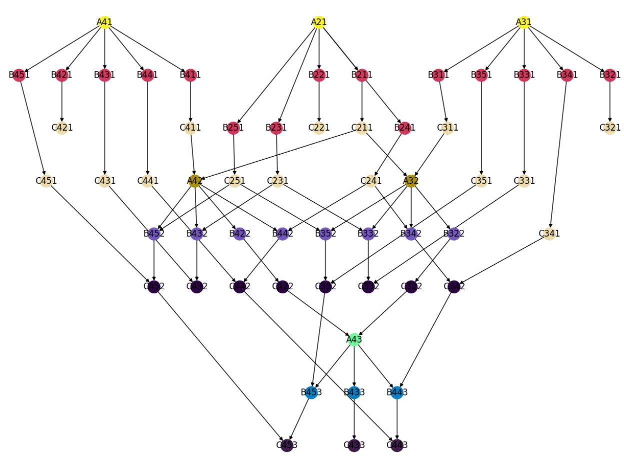
2.3 Relacje zależności

Jest 5 zależności w algorytmie:

- Trzeba wyznaczyć mnożnik dla danego wierszu przed przemnażaniem tego wiersza
  Operacja B zależna od A
- Przed odejmowaniem wierszy należy przemnożyć go przez obliczony mnożnik
  Operacja C zależna od B
- Aby wyznaczyć nowy mnożnik dla kolejnych wierszy macierzy, należy poczekać aż zostaną zakończone wcześniejsze odejmowania na potrzebnych wierszach
  Operacja A zależna od C
- Aby można było wymnażać elementy wiersza przez kolejny mnożnik, należy poczekać aż zostanie zakończone wykonywanie wcześniejszych obliczeń
  Operacja B zależna od C
- Przed rozpoczęciem odejmowania na danym wierszu należy poczekać aż skończą się na nim wcześniejsze operacje odejmowania
  Operacja C zależna od C

2.4 Graf Dikerta

Zbudowany i wyznaczony na podstawie zależności. Przykładowy graf dla rozmiaru N = 4.



Graf 1: Przykładowy graf Diekerta

2.5 Klasa Foaty

Klasy Foaty mają prostą postać. Są 3 grupy, do których odpowiednio należy jeden rodzaj operacji. Dobrze będzie to widać na grafie Dikerta.

- operacje znalezienia mnożników
- operacje przemnażania wierszy przed odejmowaniem
- operacje odejmowania wierszy

3 Rozwiązanie przykładu

Przykładowa macierz będzie wyglądać następująco:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 8 \\ 6 & 5 & 16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 15 \\ 27 \end{bmatrix}$$

Wyznaczony dla tej macierzy alfabet wygląda w następujący sposób:

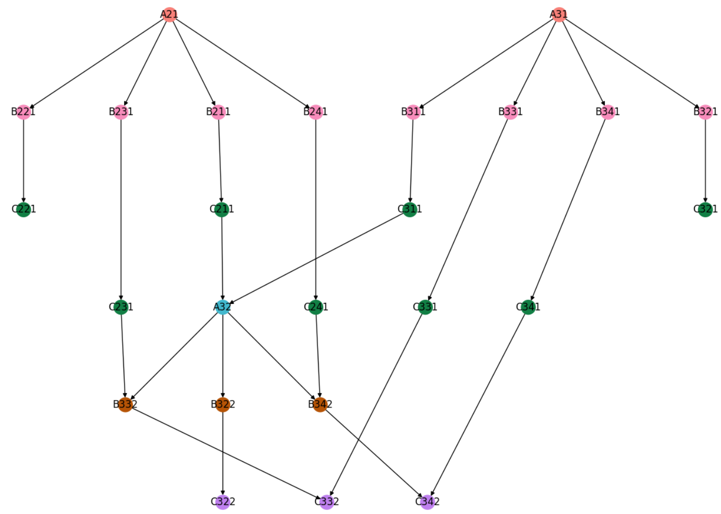
$C_{3,4,2}$ $B_{3,3,1}$ $C_{3,2,2}$ $B_{3,2,1}$ $C_{2,4,1}$ $C_{2,1,1}$ $B_{3,2,2}$ $B_{3,3,2}$ $B_{2,4,1}$ $B_{3,4,2}$ $B_{3,4,1}$ $B_{2,2,1}$ $C_{2,3,1}$ $A_{3,1}$ $C_{3,3,2}$ $A_{2,1}$ $B_{2,3,1}$ $C_{3,2,1}$ $C_{2,2,1}$ $B_{2,1,1}$ $A_{3,2}$ $C_{3,1,1}$ $C_{3,3,1}$ $C_{3,3,3}$ $B_{3,1,1}$

Z alfabetu wyznaczone zostały zależności:
$(B_{2,4,1}, C_{2,4,1})$ $(B_{2,3,1}, C_{2,3,1})$ $(A_{3,1}, B_{3,4,1})$ $(A_{3,2}, B_{3,2,2})$ $(A_{3,2}, B_{3,4,2})$ $(A_{2,1}, B_{2,4,1})$ $(A_{2,1}, B_{2,1,1})$ $(A_{3,1}, B_{3,1,1})$ $(A_{3,1}, B_{3,2,1})$ $(C_{2,4,1}, B_{3,4,2})$ $(C_{3,1,1}, A_{3,2})$ $(A_{2,1}, B_{2,3,1})$ $(C_{2,1,1}, A_{3,2})$ $(A_{2,1}, B_{2,2,1})$ $(A_{3,1}, B_{3,3,1})$ $(B_{3,2,2}, C_{3,2,2})$ $(B_{3,3,1}, C_{3,3,1})$ $(A_{3,2}, B_{3,3,2})$ $(B_{3,4,2}, C_{3,4,2})$ $(C_{3,3,1}, C_{3,3,2})$ $(B_{3,2,1}, C_{3,2,1})$ $(C_{2,3,1}, B_{3,3,2})$ $(B_{3,1,1}, C_{3,1,1})$ $(B_{3,3,2}, C_{3,3,2})$ $(B_{2,1,1}, C_{2,1,1})$ $(B_{3,4,1}, C_{3,4,1})$ $(C_{3,4,1}, C_{3,4,2})$ $(B_{2,2,1}, C_{2,2,1})$ $(B_{3,4,2}, C_{3,4,2})$ $(C_{3,3,1}, C_{3,3,2})$ $(B_{2,1,1}, C_{2,1,1})$

Dla omawianego przykładu jest 6 klas Foaty:

1. $A_{3,1}, A_{2,1}$
2. $B_{2,4,1}, B_{2,3,1}, B_{3,4,1}, B_{2,1,1}, B_{3,1,1}, B_{3,2,1}, B_{2,2,1}, B_{3,3,1}$
3. $C_{2,4,1}, C_{2,3,1}, C_{3,1,1}, C_{2,1,1}, C_{3,3,1}, C_{3,2,1}, C_{3,4,1}, C_{2,2,1}$
4. $A_{3,2}$
5. $B_{3,2,2}, B_{3,4,2}, B_{3,3,2}$
6. $C_{3,2,2}, C_{3,4,2}, C_{3,3,2}$

Graf Diekerta dla przykładu:



Graf 2: Graf Diekerta

Po obliczeniach wynik wygląda następująco:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$