

MOwNiT – Interpolacja Hermit'a

Przygotował:

Maksymilian Zawiślak

Dla poniższej funkcji:

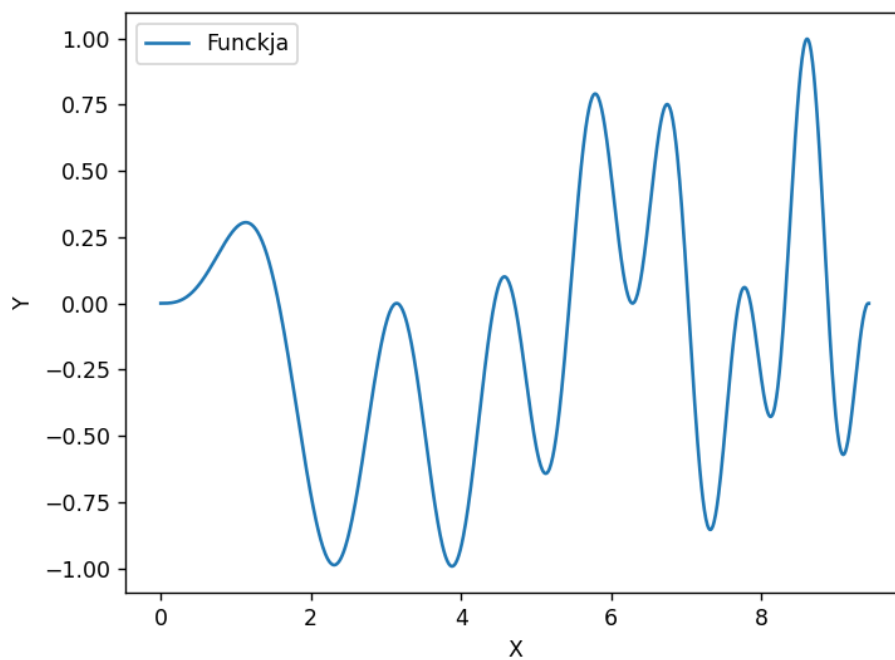
$$f(x) = \sin(mx) \cdot \sin\left(\frac{kx^2}{\pi}\right)$$

gdzie:

$$k = 1, \quad m = 2, \quad [0, 3\pi]$$

wyznaczyć interpolację Hermit'a. Interpolację przeprowadzić dla różnej liczby węzłów (np. $n = 3, 4, 5, 7, 10, 15, 20$). Dla każdego przypadku interpolacji porównaj wyniki otrzymane dla różnego rozmieszczenia węzłów: równoodległe oraz Czebyszewa.

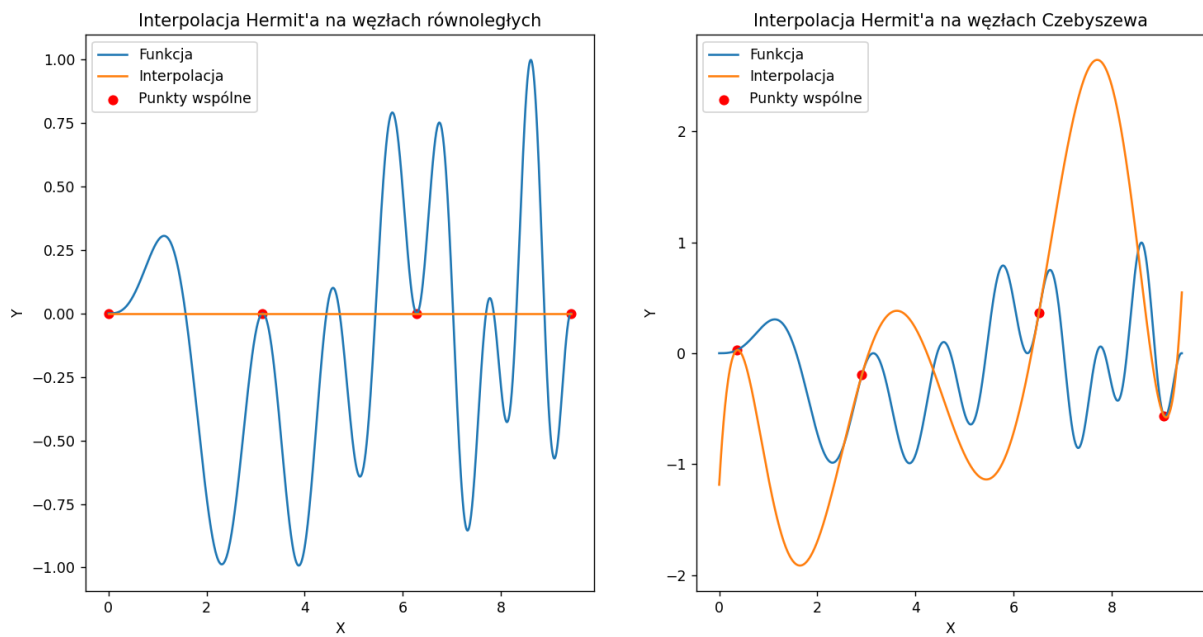
Wykres głównej funkcji



Wykres 1: Wykres głównej funkcji

Interpolacja Hermit'a

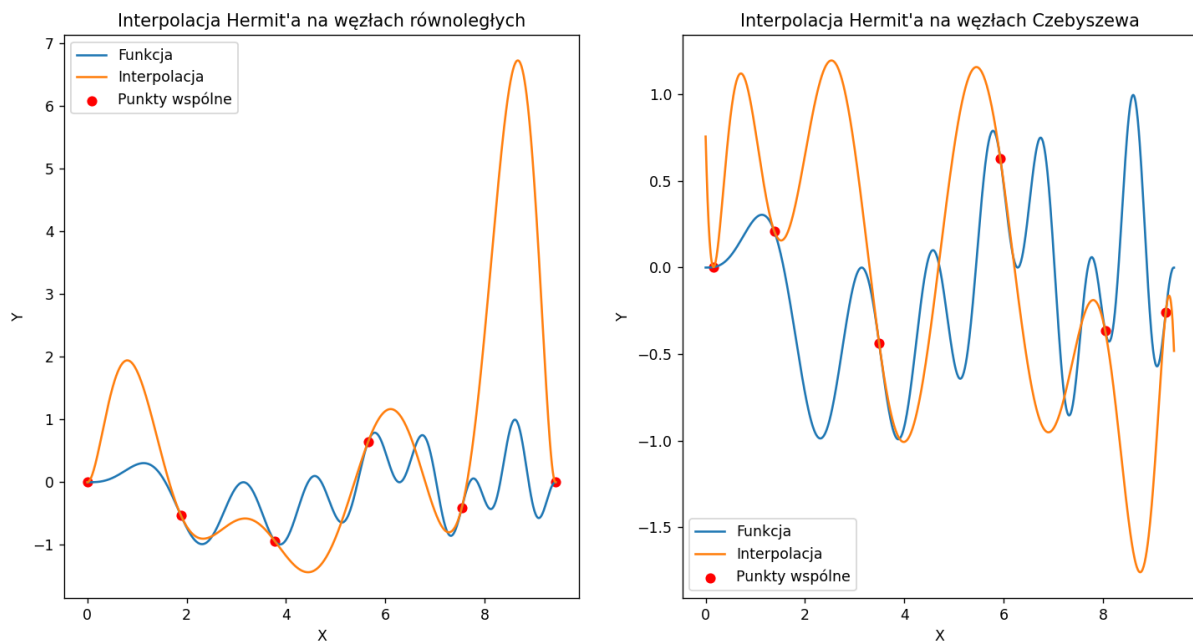
Interpolacja Hermit'a na obu rodzajach węzłów z 4 węzłami



Wykres 2: Wykresy interpolacji na 4 węzłach dla obu typów węzłów

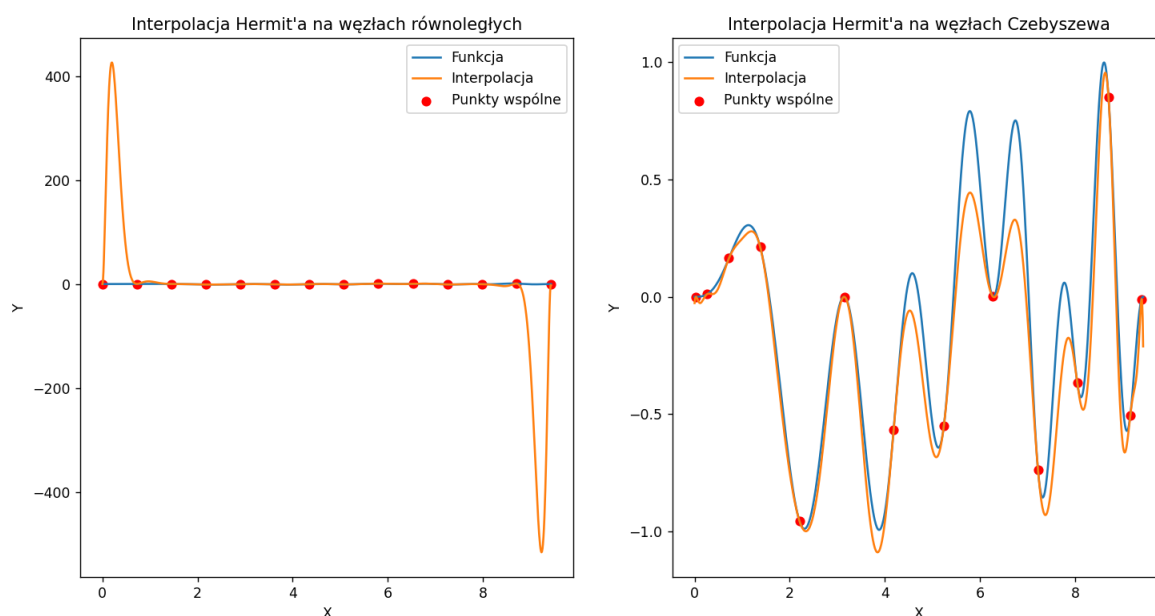
Na wykresie 2 interpolacja jest prostą linią, dzieje się tak gdy węzły trafiają w wartości związane z liczbą π , tutaj węzły są na wartościach $[0, \pi, 2\pi, 3\pi]$

Interpolacja Hermit'a na obu rodzajach węzłów z 6 węzłami



Wykres 3: Wykresy interpolacji na 6 węzłach dla obu typów węzłów

Interpolacja Hermit'a na obu rodzajach węzłów z 14 węzłami



Wykres 4: Wykresy interpolacji na 14 węzłach dla obu typów węzłów

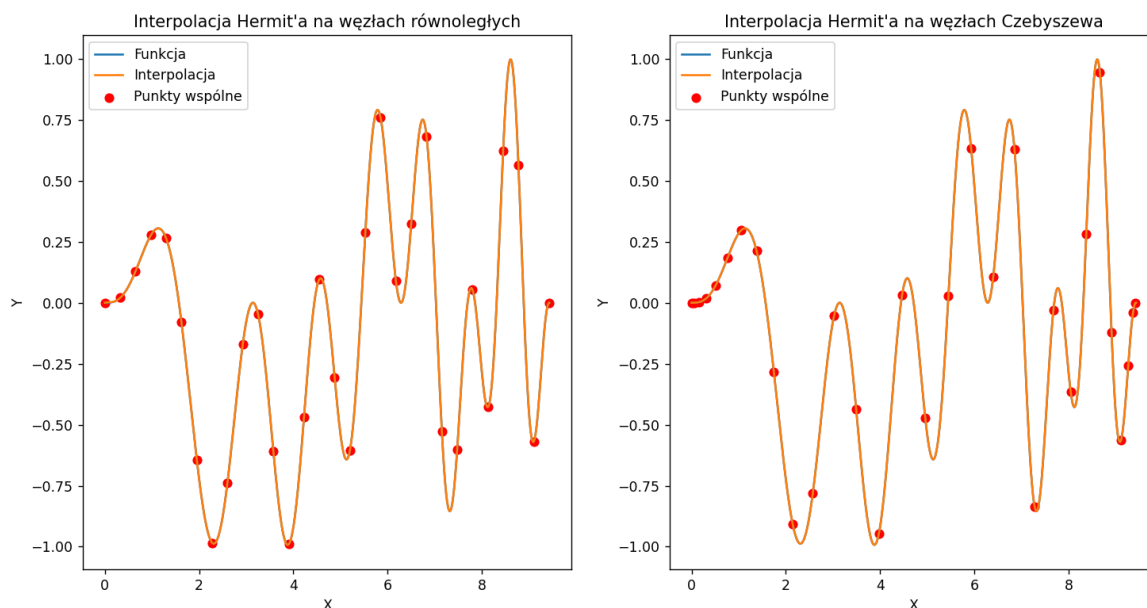
Na przedstawionych powyżej wykresach widać że wraz ze zwiększaniem ilości węzłów dla równoległych wyniki interpolacji się pogarszają a dla Czebyszewa polepszają.

Błędy obliczeniowe

Liczba węzłów	Węzły równoległe		Węzły Czebyszewa	
	Błąd maksymalny	Błąd sumy kwadratów	Błąd maksymalny	Błąd sumy kwadratów
3	2.855157e+00	1.592625e+01	5.198136e+00	1.714222e+01
4	9.976615e-01	3.837342e+00	3.206970e+00	1.004612e+01
5	8.867092e+00	1.750511e+01	3.298266e+00	7.870690e+00
7	8.601104e+00	1.312927e+01	1.942293e+00	3.095244e+00
9	1.333870e+02	1.264772e+02	1.429931e+00	1.921103e+00
10	2.224655e+02	1.834783e+02	2.101536e+00	1.877383e+00
11	2.200570e+02	1.109571e+02	1.749869e+00	1.616291e+00
12	6.237700e+02	2.721600e+02	1.001145e+00	1.058470e+00
15	2.813607e+02	9.065690e+01	1.896374e-01	1.004684e-01
20	2.430817e+01	4.567875e+00	1.847218e-04	1.344199e-04
30	1.945793e-03	2.498135e-04	6.488292e-04	4.884574e-05
40	5.813195e+03	2.571815e+02	7.316692e+03	3.152652e+02
50	1.090800e+13	3.469598e+11	5.508851e+13	2.107508e+12
60	5.241989e+21	1.685165e+20	2.565975e+22	8.815015e+20
75	6.844196e+36	1.124158e+35	7.364031e+37	2.227294e+36

Tabela 1: Wyniki błędów interpolacji Hermit'a

Interpolacja Hermit'a na obu rodzajach węzłów z 30 węzłami



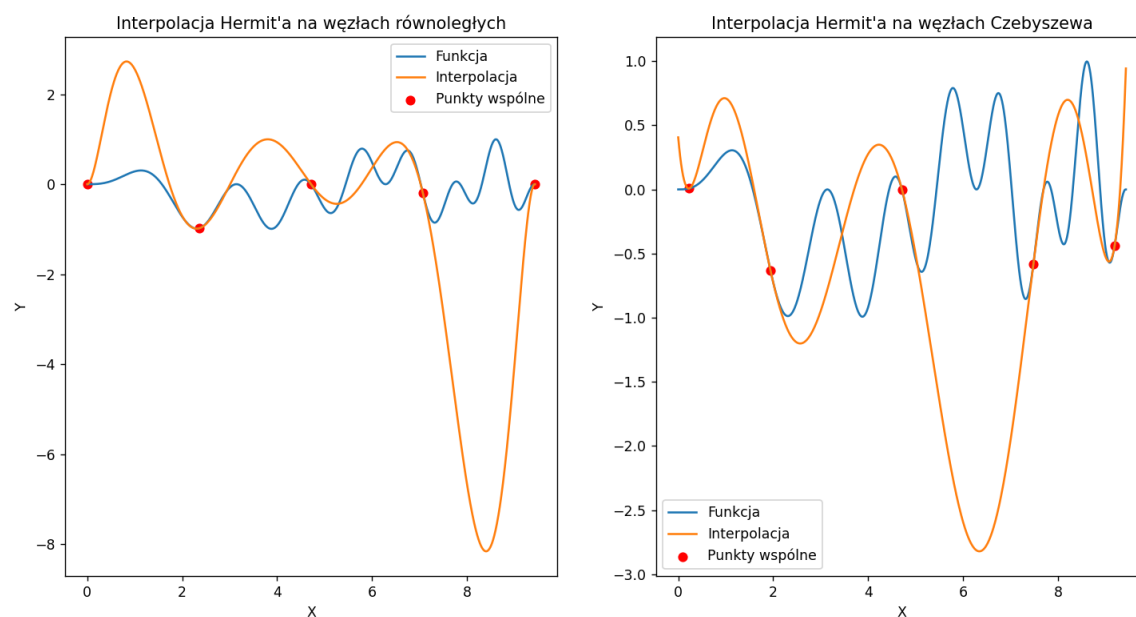
Wykres 5: Wykresy interpolacji na 30 węzłach dla obu typów węzłów

Tabela 1 pokazuje że dla testowanych ilości węzłów najmniejsze błędy interpolacji występują dla 30 węzłów dla obu rodzajów błędów co pokazuje wykres 5.

Efekt Rungego

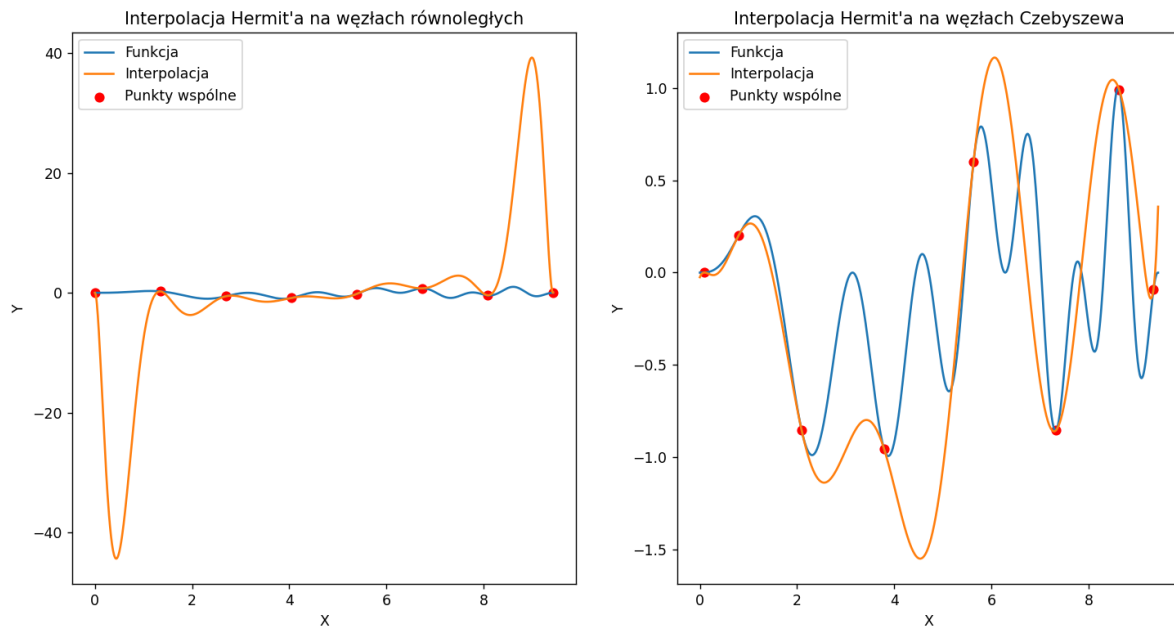
Efekt Rungego jest to pogorszenie jakości interpolacji mimo zwiększania ilości węzłów interpolacji. Przy zwiększaniu liczby węzłów przybliżenie się poprawia, lecz przy ciągłym wzroście jakości interpolacji zaczyna się pogarszać szczególnie na końcach przedziałów. Dla danej funkcji omawiany efekt zaczyna się pojawiać przy 5 węzłach. Aby przeciw działać efektowi Rungego można stosować węzły Czebyszewa.

Interpolacja Hermit'a na obu rodzajach węzłów z 5 węzłami



Wykres 6: Wykresy interpolacji na 5 węzłach dla obu typów węzłów

Interpolacja Hermit'a na obu rodzajach węzłów z 8 węzłami



Wykres 7: Wykresy interpolacji na 8 węzłach dla obu typów węzłów

Dla zwiększającej się liczby węzłów efekt Rungego się potęguje na interpolacji z węzłami równoległymi. Widać również jak węzły Czebyszewa przeciw działają temu efektowi, interpolacja w środku może nie jest tak dokładna lecz na końcach jest o wiele bliżej prawdziwej funkcji. Widać także że interpolacja na węzłach równoległych zależy też bardzo na jakich wartościach są węzły. Dla 6 węzłów interpolacja jest w miarę poprawna dla 14 się psuje a potem dla 30 znowu jest poprawna.

Do obliczeń oraz wizualizacji został wykorzystany język programowania Python wraz z bibliotekami NumPy, math, pandas oraz matplotlib. Wszystko zostało wykonane pod system Windows 10 na procesorze i5-1135G7 2.40GHz oraz 16GB pamięci operacyjnej. Wykresy były generowane przy użyciu 944 punktów. Punkty były co 0.01 na całym przedziale.