

MOwNiT – Rozwiązanie układów równań liniowych metodami iteracyjnymi

Przygotował:

Maksymilian Zawiślak

Zadanie 1

Metodą Jacobiego należy rozwiązać układ równań liniowych $Ax = b$, gdzie wektor x jest niewiadomą a macierz A zadana jest następującym wzorem:

$$\begin{cases} a_{i,i} = k \\ a_{i,j} = (-1)^j \cdot \frac{m}{j} & \text{dla } j > 1 \\ a_{i,i-1} = \frac{m}{i} \\ a_{i,j} = 0 & \text{dla } j < i - 1 \end{cases} \quad \text{gdzie } i, j = 1, \dots, n$$

Należy przyjąć dwa kryteria stopu:

1. $\|x^{(i+1)} - x^{(i)}\| < \rho$
2. $\|Ax^{(i)} - b\| < \rho$

W obliczeniach należy porównać układy różnych rozmiarów n oraz różne wartości ρ . Wyznaczyć liczbę iteracji, czas oraz dokładność obliczeń dla obu kryteriów stopu.

Jako norma w obliczeniach została przyjęta maksymalna różnica. Obliczenia zostały wykonane dla rozmiarów układu: 3, 4, 7, 10, 15, 20, 30, 50, 70, 100, 200, 500. Sprawdzane wartości ρ to: 1e-1, 1e-03, 1e-7, 1e-9. Wybrane zostały dwa wektory początkowe: $[0,0,0, \dots]$ oraz $[10,10,10, \dots]$. Jako maksymalną liczbę iteracji została przyjęta wartości 10000. Norma została przyjęta jako wartość maksymalna. Czas w tabelach podawany jest w sekundach.

Pomiar błędu

Jako kryterium pomiaru błędu został przyjęta maksymalna wartość różnicy między i -tym elementem wyznaczonej macierzy x , a startową wartością x' .

$$\max_{i=1, \dots, n} \{|x_i - x'_i|\}$$

Wzór 1

gdzie:

- x_i – i -ta współrzędna otrzymanej macierzy
- x'_i – i -ta współrzędna startowej macierzy

Wektor x wyznaczany ze zbioru $\{-1, 1\}$, składał się z elementów tego zbioru występujących na przemian np. $x = [-1, 1, -1, 1, -1, \dots]$. Do obliczeń na macierzach zostały wykorzystane funkcje `add()`, `subtract()`, `dot()` (dodawanie, odejmowanie, mnożenie) z biblioteki NumPy.

Obliczenia dla kryterium 1.

Obliczenia dla wektora startowego [0,0,0, ...]

Rozmiar macierzy (n)	Wartość parametru ρ			
	1e-01	1e-03	1e-07	1e-09
3	6.5918e-03	7.0095e-05	1.1018e-08	1.2190e-10
4	7.5623e-03	6.7594e-05	9.1111e-09	7.4968e-11
7	1.0350e-02	9.6376e-05	1.1413e-08	1.0259e-10
10	1.1932e-02	1.1374e-04	1.3216e-08	1.2182e-10
15	1.3720e-02	1.3363e-04	1.5261e-08	1.4390e-10
20	1.4925e-02	1.4738e-04	1.6639e-08	1.5928e-10
30	1.6600e-02	1.6664e-04	1.8554e-08	1.8086e-10
50	1.8662e-02	5.1429e-05	2.0910e-08	5.4021e-11
70	2.0002e-02	5.6070e-05	2.2439e-08	5.9041e-11
100	2.1412e-02	6.0981e-05	2.4047e-08	6.4358e-11
200	2.4131e-02	7.0509e-05	2.7147e-08	7.4679e-11
500	5.1846e-03	8.3086e-05	5.8121e-09	8.8311e-11

Tabela 1: Wartości błędów dla kryterium 1 oraz wektora startowego [0,0,0,...]

Wyniki w tabeli 1 przedstawiają wartości błędów obliczeniowych dla różnych wartości parametru n . Można zaobserwować, że wartości wyliczone dla mniejszych ρ są dokładniejsze.

Rozmiar macierzy (n)	Wartość parametru ρ			
	1e-01	1e-03	1e-07	1e-09
3	4	7	13	16
4	4	7	13	16
7	4	7	13	16
10	4	7	13	16
15	4	7	13	16
20	4	7	13	16
30	4	7	13	16
50	4	8	13	17
70	4	8	13	17
100	4	8	13	17
200	4	8	13	17
500	5	8	14	17

Tabela 2: Liczba iteracji dla kryterium 1 oraz wektora startowego [0,0,0,...]

Wyniki tabeli 2 potwierdzają wcześniejszą obserwację. Dokładniejsze wyniki dla mniejszych ρ , otrzymywane są z powodu wykonania większej liczby iteracji.

Rozmiar macierzy (n)	Wartość parametru ρ			
	1e-01	1e-03	1e-07	1e-09
3	5.3800e-05	4.4900e-05	6.4000e-05	7.5200e-05
4	3.9600e-05	4.4500e-05	6.8100e-05	8.0300e-05
7	4.1000e-05	4.8000e-05	7.6500e-05	9.1200e-05
10	3.7800e-05	5.1800e-05	8.4900e-05	1.0140e-04
15	5.1600e-05	6.0700e-05	1.0070e-04	1.1970e-04
20	5.2500e-05	6.9200e-05	1.1440e-04	1.3970e-04
30	6.3500e-05	8.6600e-05	1.4610e-04	1.7310e-04
50	8.7600e-05	1.9190e-04	2.1530e-04	2.6920e-04
70	1.1350e-04	1.7730e-04	2.7710e-04	3.5450e-04
100	5.1360e-04	1.0388e-03	1.5341e-03	2.0185e-03
200	1.1445e-03	1.3379e-03	2.1687e-03	2.6140e-03
500	2.8898e-03	3.5581e-03	4.7742e-03	5.6679e-03

Tabela 3: Czas (s) obliczeń dla kryterium 1 oraz wektora startowego [0,0,0,...]

Obliczenia dla wektora startowego [10,10,10, ...].

Rozmiar macierzy (n)	Wartość parametru ρ			
	1e-01	1e-03	1e-07	1e-09
3	7.8430e-03	9.1732e-05	1.2689e-08	1.5583e-10
4	1.0323e-02	8.6594e-05	1.2116e-08	9.2025e-11
7	9.2146e-03	8.4236e-05	1.0149e-08	8.9175e-11
10	1.0927e-02	9.3728e-05	1.1822e-08	9.7492e-11
15	1.0604e-02	9.2861e-05	1.1529e-08	9.7179e-11
20	1.1511e-02	9.7517e-05	1.2412e-08	1.0106e-10
30	1.1872e-02	9.9538e-05	1.2770e-08	1.0283e-10
50	1.2337e-02	1.0194e-04	1.3226e-08	1.0483e-10
70	1.2647e-02	1.0347e-04	1.3528e-08	1.0606e-10
100	1.2978e-02	1.0505e-04	1.3850e-08	1.0730e-10
200	1.3626e-02	1.0806e-04	1.4477e-08	1.0962e-10
500	1.4485e-02	1.1195e-04	1.5309e-08	1.1256e-10

Tabela 4: Wartości błędu dla kryterium 1 oraz wektora startowego [10,10,10,...]

Gdy obliczenia zaczęto od wektora, który był dalej od poprawnego rozwiązania, błędy obliczeń miały większe wartości niż dla wektora [0,0,0, ...]. Były jednak one dalej na zadawalającym poziomie.

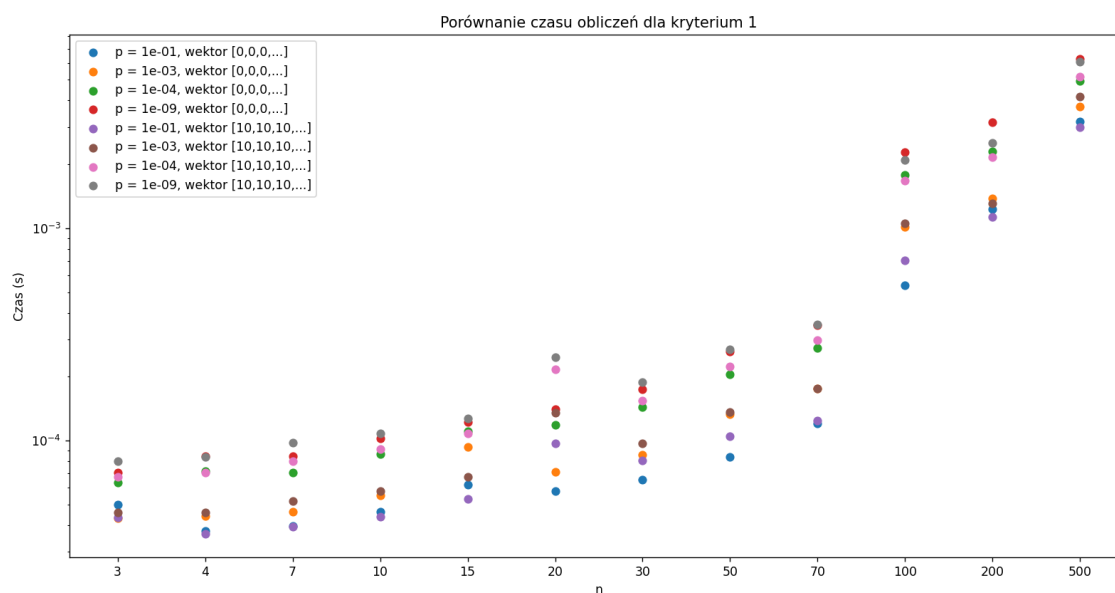
Rozmiar macierzy (n)	Wartość parametru ρ			
	1e-01	1e-03	1e-07	1e-09
3	5	8	14	17
4	5	8	14	17
7	5	8	14	17
10	5	8	14	17
15	5	8	14	17
20	5	8	14	17
30	5	8	14	17
50	5	8	14	17
70	5	8	14	17
100	5	8	14	17
200	5	8	14	17
500	5	8	14	17

Tabela 5: Liczba iteracji dla kryterium 1 oraz wektora startowego [10,10,10,...]

Dla obliczeń dla wektora $[10,10,10,\dots]$ liczba iteracji była taka sama lub o jeden większa względem obliczeń startujących od $[0,0,0, \dots]$.

Rozmiar macierzy (n)	Wartość parametru ρ			
	1e-01	1e-03	1e-07	1e-09
3	5.1600e-05	4.7900e-05	6.9100e-05	8.1900e-05
4	4.7200e-05	5.0900e-05	7.3300e-05	8.5400e-05
7	4.0800e-05	5.3000e-05	9.9200e-05	9.7100e-05
10	4.5500e-05	5.9200e-05	9.1300e-05	1.0830e-04
15	4.9700e-05	6.7600e-05	1.0640e-04	1.2770e-04
20	5.6400e-05	7.8300e-05	1.2250e-04	1.4530e-04
30	7.7200e-05	1.0090e-04	1.5960e-04	1.8740e-04
50	1.0290e-04	1.3670e-04	2.2190e-04	2.6960e-04
70	1.3050e-04	1.8370e-04	3.0260e-04	3.6670e-04
100	6.6960e-04	1.0328e-03	1.8075e-03	2.1792e-03
200	1.1907e-03	1.4264e-03	2.2586e-03	2.5628e-03
500	2.9742e-03	3.4751e-03	5.3483e-03	5.4296e-03

Tabela 6: Czas (s) obliczeń dla kryterium 1 oraz wektora startowego $[10,10,10,\dots]$



Wykres 1: Porównanie czasów obliczeń przy kryterium 1 dla obu wektorów początkowych

Na wykresie 1 widać, że czas obliczeń dla wektora startowego $[0,0,0, \dots]$ dla wszystkich wartości parametru ρ jest mniejszy niż dla $[10,10,10, \dots]$.

Obliczenia dla kryterium 2.

Obliczenia dla wektora startowego [0,0,0, ...]

Rozmiar macierzy (n)	Wartość parametru ρ			
	1e-01	1e-03	1e-07	1e-09
3	2.1484e-02	7.0095e-05	1.1018e-08	1.2190e-10
4	2.5101e-02	6.7594e-05	3.0432e-08	7.4968e-11
7	1.0350e-02	9.6376e-05	1.1413e-08	1.0259e-10
10	1.1932e-02	1.1374e-04	1.3216e-08	1.2182e-10
15	1.3720e-02	1.3363e-04	1.5261e-08	1.4390e-10
20	1.4925e-02	1.4738e-04	1.6639e-08	1.5928e-10
30	1.6600e-02	1.6664e-04	1.8554e-08	1.8086e-10
50	1.8662e-02	1.9062e-04	2.0910e-08	2.0780e-10
70	2.0002e-02	2.0629e-04	2.2439e-08	2.2543e-10
100	3.9898e-03	2.2283e-04	2.4047e-08	2.4406e-10
200	4.5062e-03	2.5483e-04	5.0433e-09	2.8014e-10
500	5.1846e-03	2.9699e-04	5.8121e-09	3.2770e-10

Tabela 7: Wartości błędu dla kryterium 1 oraz wektora startowego [0,0,0,...]

Przy obliczeniach dla kryterium 2 wartości błędu znowu malały wraz ze spadkiem parametru ρ . Utrzymywały one podobny poziom jak dla kryterium 1.

Rozmiar macierzy (n)	Wartość parametru ρ			
	1e-01	1e-03	1e-07	1e-09
3	3	7	13	16
4	3	7	12	16
7	4	7	13	16
10	4	7	13	16
15	4	7	13	16
20	4	7	13	16
30	4	7	13	16
50	4	7	13	16
70	4	7	13	16
100	5	7	13	16
200	5	7	14	16
500	5	7	14	16

Tabela 8: Liczba iteracji dla kryterium 1 oraz wektora startowego [0,0,0,...]

Liczba iteracji potrzebna do otrzymania wyniku była na podobnym poziomie jak dla wcześniejszych obliczeń.

Rozmiar macierzy (n)	Wartość parametru ρ			
	1e-01	1e-03	1e-07	1e-09
3	5.4600e-05	5.0900e-05	7.8100e-05	9.3300e-05
4	3.8300e-05	4.9700e-05	7.3700e-05	9.4300e-05
7	3.6900e-05	4.9600e-05	8.0800e-05	9.6100e-05
10	4.3900e-05	5.2900e-05	8.3300e-05	9.9300e-05
15	3.8800e-05	5.2800e-05	8.5300e-05	1.0340e-04
20	4.3400e-05	5.5100e-05	8.9900e-05	1.4900e-04
30	5.8300e-05	6.3100e-05	9.9100e-05	1.1830e-04
50	6.5500e-05	7.3600e-05	1.2070e-04	1.4220e-04
70	8.0100e-05	8.8600e-05	1.4370e-04	1.7630e-04
100	8.0740e-04	1.1433e-03	2.0167e-03	2.4704e-03
200	1.4818e-03	1.7620e-03	3.3249e-03	3.2965e-03
500	3.1792e-03	3.7486e-03	4.8372e-03	5.3520e-03

Tabela 9: Czas (s) obliczeń dla kryterium 1 oraz wektora startowego [0,0,0,...]

Obliczenia dla wektora startowego [10,10,10, ...].

Rozmiar macierzy (n)	Wartość parametru ρ			
	1e-01	1e-03	1e-07	1e-09
3	7.8430e-03	9.1732e-05	2.5938e-09	4.3120e-11
4	1.0323e-02	8.6594e-05	1.2116e-08	9.2025e-11
7	9.2146e-03	8.4236e-05	1.0149e-08	8.9175e-11
10	1.0927e-02	9.3728e-05	1.1822e-08	9.7492e-11
15	1.0604e-02	9.2861e-05	1.1529e-08	9.7179e-11
20	1.1511e-02	9.7517e-05	1.2412e-08	1.0106e-10
30	1.1872e-02	9.9538e-05	1.2770e-08	1.0283e-10
50	1.2337e-02	1.0194e-04	2.3853e-09	1.0483e-10
70	2.2891e-03	1.0347e-04	2.4372e-09	1.0606e-10
100	2.3488e-03	1.0505e-04	2.4923e-09	1.0730e-10
200	2.4653e-03	1.0806e-04	2.5994e-09	1.0962e-10
500	2.6200e-03	1.1195e-04	2.7411e-09	1.1256e-10

Tabela 10: Wartości błędu dla kryterium 1 oraz wektora startowego [10,10,10,...]

Wyniki błędów obliczeniowych zachowują się analogicznie jak we wcześniejszych przypadkach.

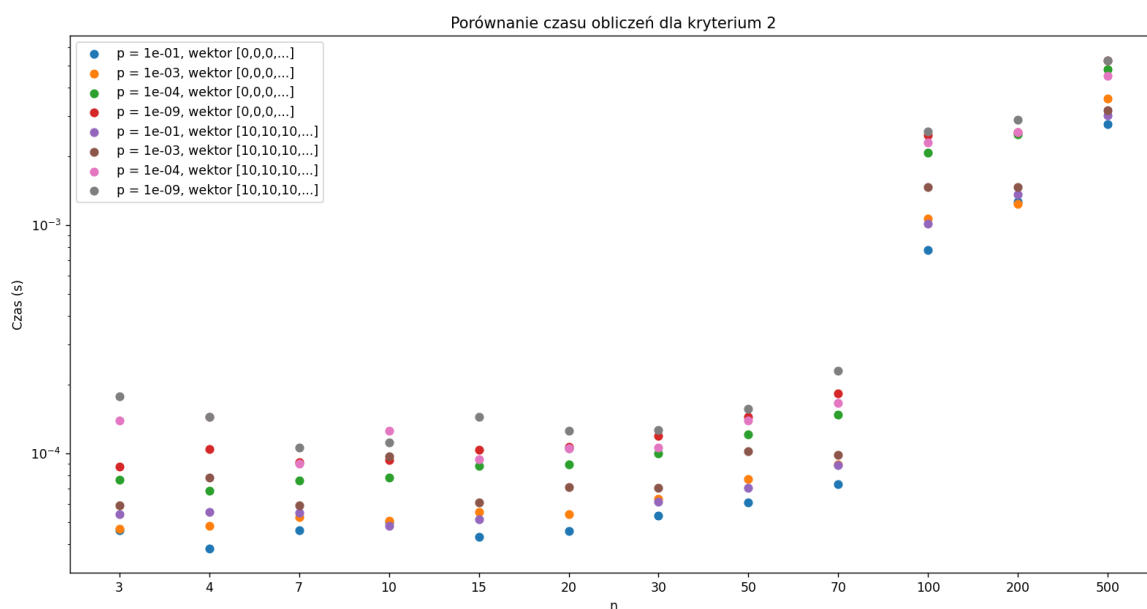
Rozmiar macierzy (n)	Wartość parametru ρ			
	1e-01	1e-03	1e-07	1e-09
3	5	8	15	18
4	5	8	14	17
7	5	8	14	17
10	5	8	14	17
15	5	8	14	17
20	5	8	14	17
30	5	8	14	17
50	5	8	15	17
70	6	8	15	17
100	6	8	15	17
200	6	8	15	17
500	6	8	15	17

Tabela 11: Liczba iteracji dla kryterium 1 oraz wektora startowego [10,10,10,...]

W tabeli 11 liczba iteracji znowu rośnie wraz ze spadkiem wartości ρ .

Rozmiar macierzy (n)	Wartość parametru ρ			
	1e-01	1e-03	1e-07	1e-09
3	7.5800e-05	6.6300e-05	1.0510e-04	1.2140e-04
4	4.7700e-05	5.4700e-05	8.4000e-05	1.0040e-04
7	4.9100e-05	5.7100e-05	8.5300e-05	1.0140e-04
10	4.7000e-05	5.5900e-05	8.8400e-05	1.0370e-04
15	4.5000e-05	5.9100e-05	9.2600e-05	1.1020e-04
20	4.5200e-05	6.0900e-05	9.6200e-05	1.1280e-04
30	5.0900e-05	6.7700e-05	1.0570e-04	1.2600e-04
50	6.2300e-05	7.9900e-05	1.3410e-04	1.4980e-04
70	8.5100e-05	9.4800e-05	1.6390e-04	1.8780e-04
100	9.0330e-04	1.1762e-03	2.1466e-03	2.4817e-03
200	1.4917e-03	1.6131e-03	2.7402e-03	3.1540e-03
500	2.5820e-03	3.4600e-03	4.5162e-03	4.9730e-03

Tabela 12: Czas (s) obliczeń dla kryterium 1 oraz wektora startowego [10,10,10,...]



Wykres 2: Porównanie czasów obliczeń przy kryterium 1 dla obu wektorów początkowych

Analogicznie do kryterium 1, obliczenia dla wektora startowego [0,0,0, ...] wykonywały się szybciej.

Zadanie 2

Dowolną metodą należy znaleźć promień spektralny macierzy iteracji z poprzedniego zadania. Obliczenia wykonać dla różnych rozmiarów macierzy. Trzeba sprawdzić czy spełnione jest założenie zbieżności metody dla zdanego układu.

Wyniki obliczeń

Testowane rozmiary macierzy są takie same jak w poprzednim zadaniu. Do wyznaczania promienia spektralnego została wykorzystana metoda `linalg.eigvals()` z biblioteki NumPy. Znajduje ona wartości własne macierzy. Macierz wejściowa mnożona jest przez macierz ortogonalną oraz jej transpozycję.

Rozmiar macierzy	Promień spektralny
3	3.7254e-02
4	4.4062e-02
7	4.0307e-02
10	4.0322e-02
15	4.0322e-02
20	4.0322e-02
30	4.0322e-02
50	4.0322e-02
70	4.0322e-02
100	4.0322e-02
200	4.0322e-02
500	4.0322e-02

Tabela 13: Obliczone promienie spektralne

W tabeli 1 widać że dla testowanych rozmiarów macierzy, promienie spektralne są mniejsze od 1 (w tabeli została przedstawiona maksymalna wartość własna), więc układy są zbieżne.

Wnioski

W metodzie Jacobiego wiele zależy od dobrze wybranego wektora początkowego. Im lepiej zostanie on wybrany tym wartości błędów będą mniejsze. Wpływa to także na czas działania metody. Oba kryteria okazały odpowiednio spełniać swoje zadanie. Ważne też jest aby dobrać odpowiednią wartość parametru ρ . Promień spektralny dla badanych wielkości macierzy jest zawsze mniejszy od 1.

Do obliczeń został wykorzystany język programowania Python wraz z bibliotekami NumPy, math, pandas oraz matplotlib. Wszystko zostało wykonane pod system Windows 10 na procesorze i5-1135G7 2.40GHz z 16GB pamięci operacyjnej.