

## MOwNiT – aproksymacja średniokwadratowa wielomianami algebraicznymi

Przygotował:

Maksymilian Zawiślak

Dla poniższej funkcji:

$$F(x) = \sin(2x) \cdot \sin\left(\frac{x^2}{\pi}\right)$$

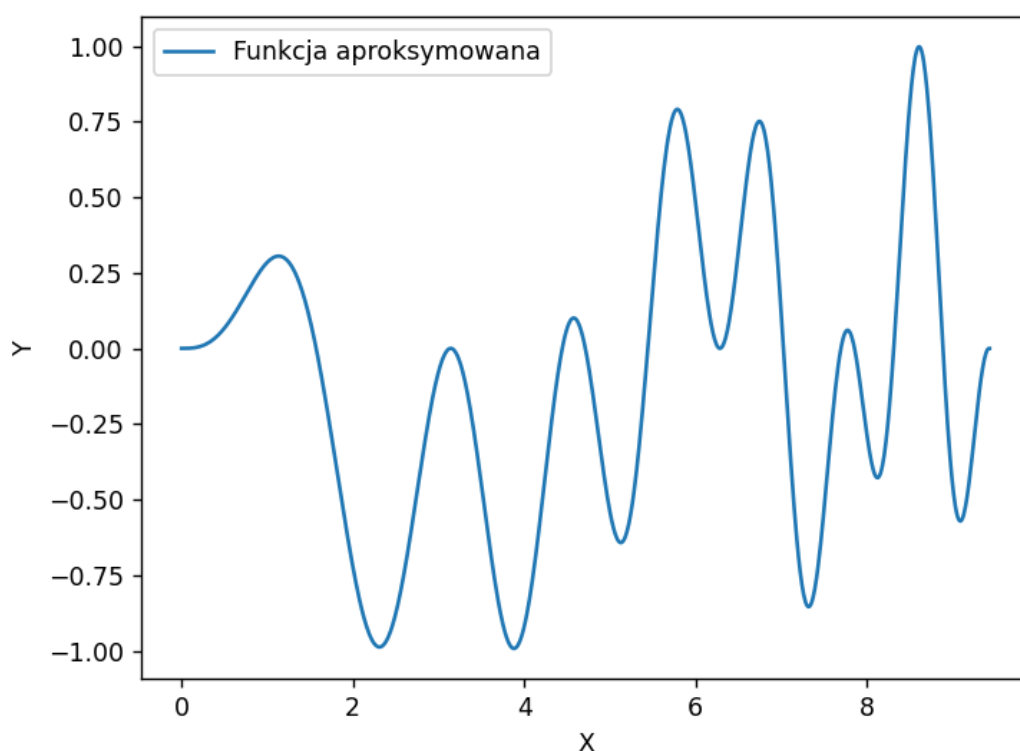
Wzór 1

na przedziale:

$$[0, 3\pi]$$

wyznaczyć jej wartości w  $n$  dyskretnych punktach. Następnie w oparciu o te punkty wyznaczyć przybliżenie funkcji wykorzystując aproksymację średniokwadratową wielomianami algebraicznymi, Wykonać eksperymenty numeryczne dla różnej liczby punktów dyskretyzacji oraz układów funkcji bazowych zawierających różną liczbę funkcji. Oszacować błędy przybliżenia. Graficznie zilustrować interesujące przypadki.

### Wykres głównej funkcji



Wykres 1: Wykres funkcji aproksymowanej

### Wyznaczenie aproksymacji

Posiadane dane:

- $n$  punktów dyskretyzacji,  $x_i, y_i = F(x_i)$ , gdzie  $i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$
- Układ funkcji bazowych do składania funkcji aproksymacyjnej  $\varphi_j(x)$ ,  $j \in \{0, 1, \dots, m\}$ , oraz  $m \leq n$

Szukany jest wielomian w uogólnionej postaci:

$$f(x) = \sum_{j=0}^m a_j \varphi_j(x)$$

Wzór 2

Przyjmując że funkcje bazowe mają postać  $\varphi_j(x) = x^j$ , gdzie  $j \in \{0, 1, \dots, m\}$  to wzór 2 przyjmie formę:

$$f(x) = \sum_{j=0}^m a_j x^j$$

Wzór 3

Brakuje współczynników  $a_j$ , dla których spełniony musi być wzór 4:

$$\min \|F(x) - f(x)\| = \min \sum_{i=0}^n w(x_i) \left[ F(x_i) - \sum_{j=0}^m (a_j \varphi_j(x_i)) \right]^2$$

Wzór 4

gdzie:

- $F(x) - f(x)$  jest odchyleniem wartości funkcji aproksymowanej od wartości funkcji aproksymującej
- $w(x_i)$  jest to waga dla danego węzła

Obliczając pochodne cząstkowe 1. rzędu dla współczynników  $a_j$  i następnie przyrównując je do zera, otrzymujemy układ  $m+1$  równań liniowych w postaci:

$$\frac{\partial H}{\partial a_k} = -2 \sum_{i=0}^n w(x_i) \left[ F(x_i) - \sum_{j=0}^m (a_j \varphi_j(x_i)) \right] \varphi_k(x_i) = 0$$

Wzór 3

dla  $k = \{0, 1, \dots, m\}$

W przypadku aproksymowania funkcji o zbiorze dyskretnym o rozmiarze  $n$  oraz łącząc wzory 3 i 5 dochodzi do:

$$\sum_{i=0}^n w(x_i) \left[ F(x_i) - \sum_{j=0}^m a_j x_i^j \right] x_i^k = 0$$

Wzór 4

dla  $k = \{0, 1, \dots, m\}$

Po dalszych przekształceniach wzoru 6 powstaje:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n w(x_i) F(x_i) x_i^k &= \sum_{i=0}^n w(x_i) x_i^k \sum_{j=0}^m a_j x_i^j \\ \sum_{i=0}^n w(x_i) F(x_i) x_i^k &= \sum_{j=0}^m a_j \left( \sum_{i=0}^n w(x_i) x_i^{k+j} \right) \end{aligned}$$

Wzór 5

Korzystając ze wzoru 7, można zapisać układ równań w postaci macierzowej

$$\begin{bmatrix} \sum w_i & \sum w_i x_i & \sum w_i x_i^2 & \dots & \sum w_i x_i^m \\ \sum w_i x_i & \sum w_i x_i^2 & \sum w_i x_i^3 & \dots & \sum w_i x_i^{m+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sum w_i x_i^m & \sum w_i x_i^{m+1} & \sum w_i x_i^{m+2} & \dots & \sum w_i x_i^{2m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum w_i F_i \\ \sum w_i F_i x_i \\ \vdots \\ \sum w_i F_i x_i^m \end{bmatrix}$$

W dalszych obliczeniach aproksymacji wartość  $w_i$  zawsze była równa 1.

### Błędy obliczeniowe przy aproksymacji

Błąd maksymalny:

$$\max_i \{|F(x_i) - f(x_i)|\}$$

Błąd średniokwadratowy:

$$\frac{1}{N} \sqrt{\sum_{i=1}^N (F(x_i) - f(x_i))^2}$$

$$i \in \{1, 2, \dots, N\}$$

gdzie:

$F(x)$  – funkcja interpolująca

$f(x)$  – funkcja interpolowana

$N$  – liczba punktów użytych do rysowania wykresów

### Błędy obliczeniowe

Wyliczenia błędów zostały wykonane dla błędu maksymalnego oraz średniokwadratowego. Liczby węzłów jakie były testowane to: 10, 15, 20, 30, 40, 60, 80, 100, 200, a liczba funkcji bazowych to: 2, 3, 5, 7, 8, 9. W obliczeniach pamiętano o zasadzie  $m < n$ .

- $n$  to liczba węzłów
- $m$  to liczba funkcji bazowych

$n \backslash m$	2	3	5	7	8	9
10	1.21358	1.21358	1.23023	1.32666	3.09115	3.09013
20	0.97877	0.96704	1.14554	0.95555	0.94632	0.9339
30	0.97738	0.97793	1.12849	0.90717	0.89649	0.88305
40	0.97738	0.98183	1.1262	0.89414	0.87943	0.86957
60	0.97748	0.98561	1.12489	0.88172	0.85997	0.85389
80	0.97754	0.98752	1.12431	0.87496	0.84814	0.84399
100	0.97759	0.98868	1.12395	0.87061	0.84013	0.83713
200	0.97767	0.99104	1.12316	0.86116	0.8216	0.82082

Tabela 1: Błąd maksymalny

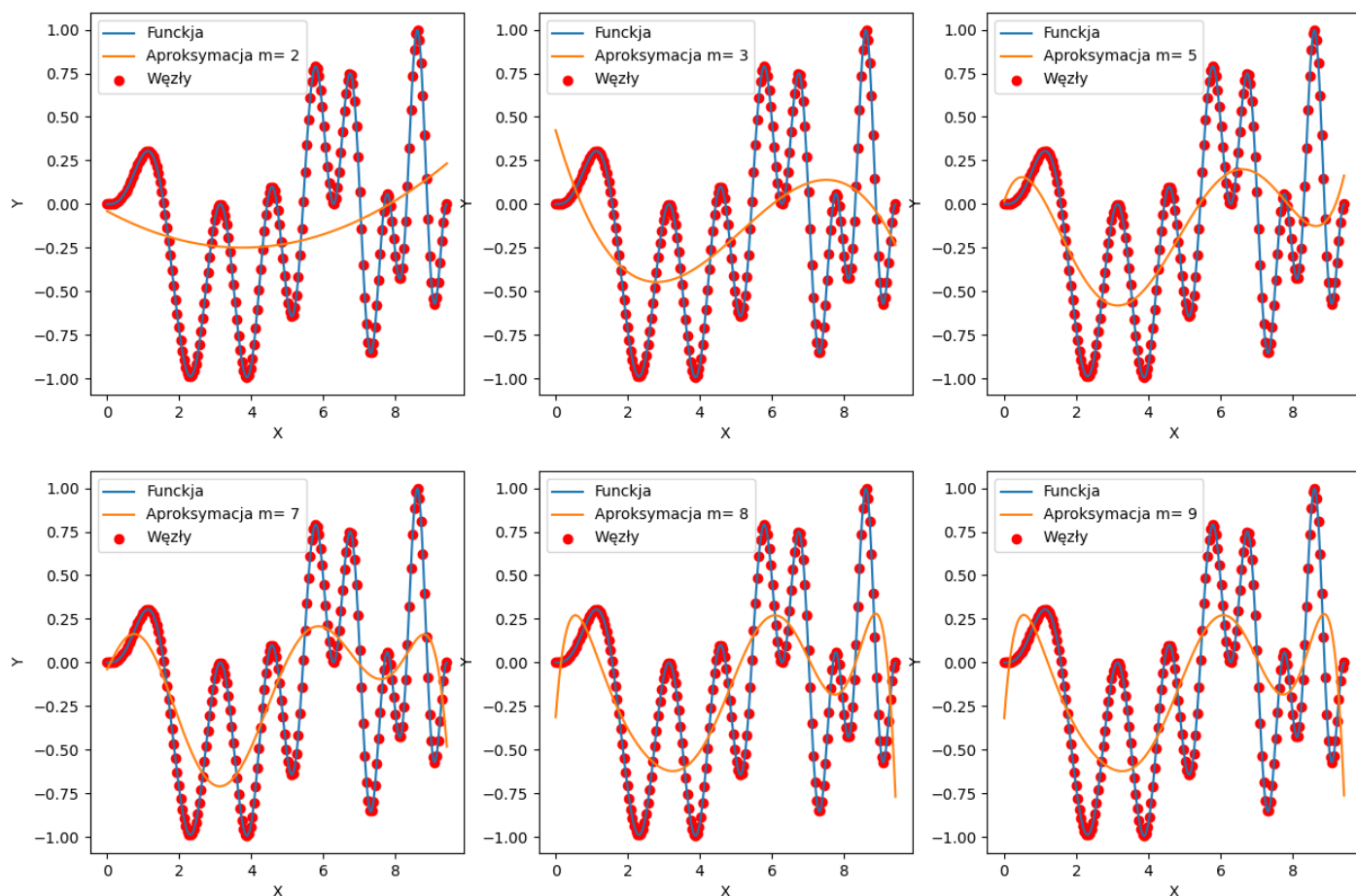
$n \backslash m$	2	3	5	7	8	9
10	1.53153	1.53153	1.53344	1.56124	3.01694	3.01696
20	0.71743	0.6645	0.631	0.60221	0.5977	0.59711
30	0.47821	0.44157	0.42064	0.39879	0.39397	0.39389
40	0.35862	0.33081	0.31543	0.29845	0.29389	0.29388
60	0.23906	0.22036	0.21026	0.19859	0.1948	0.19481
80	0.17929	0.16522	0.15768	0.14882	0.14568	0.14569
100	0.14343	0.13216	0.12614	0.11901	0.11636	0.11636
200	0.07172	0.06607	0.06307	0.05947	0.05804	0.05803

Tabela 2: Błąd średniokwadratowy

Analizując tabelę 1 oraz 2, można zauważyć, że najmniejsze wartości błędów występują niezależnie od liczby funkcji bazowych ( $m$ ), dla 200 węzłów. Ponadto, w przypadku tej samej liczby węzłów ( $n$ ), wartość parametru  $m = 7$  daje najmniejsze wartości błędów lub różni się co najwyżej o 0.05 od najmniejszej wartości błędu.

### Porównanie aproksymacji dla stałej liczby węzłów

Aproksymacje na 200 węzłach równoległych



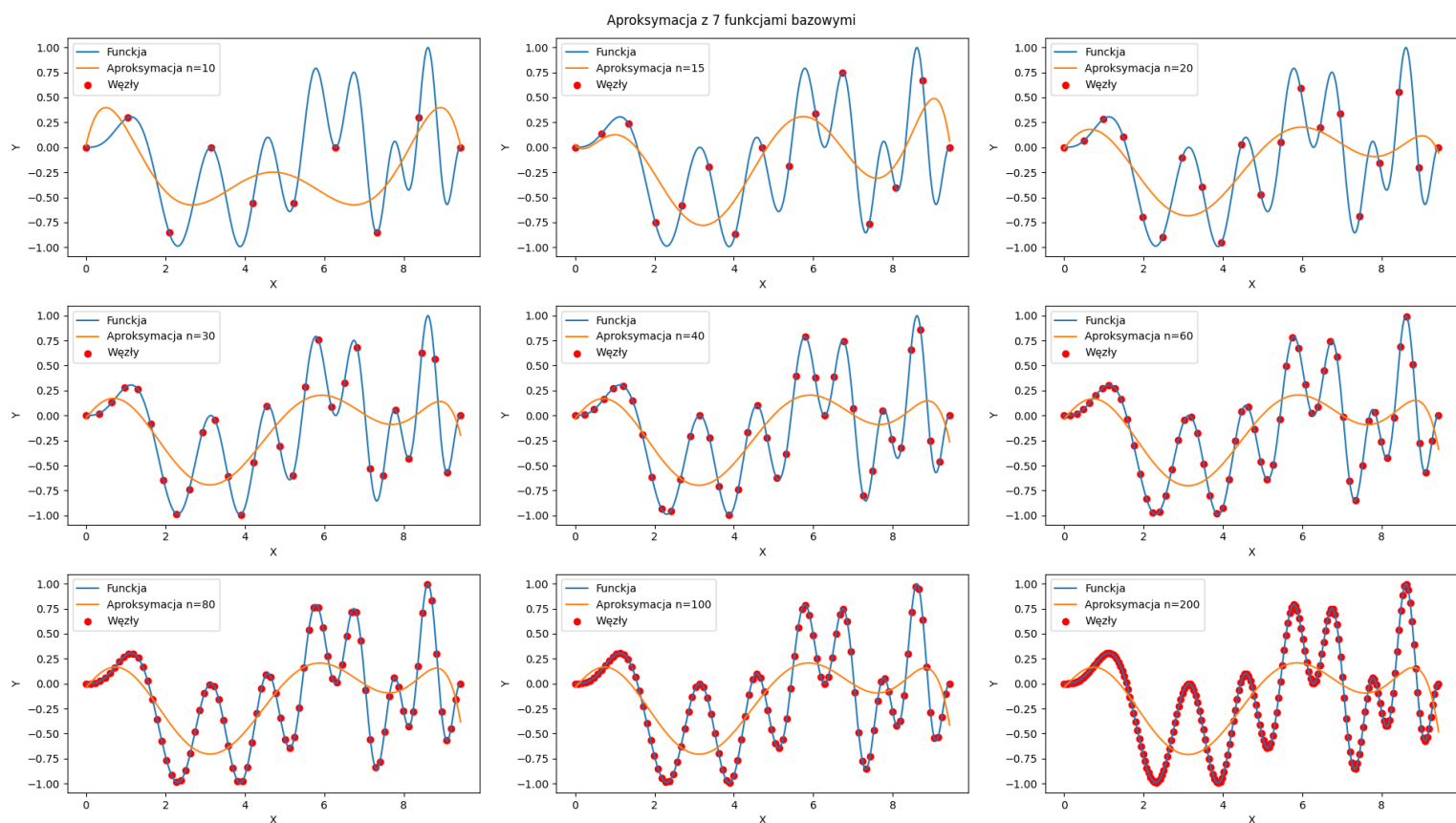
Wykresy 1: Aproksymacje dla  $n = 200$

Wykresy 1 przedstawiają aproksymacje dla stałej liczby węzłów lecz dla różnej liczby funkcji bazowych  $m$ . Wraz ze wzrostem stopnia wielomianu rośnie liczba ekstremów lokalnych aproksymacji. Im mniejszy stopień, tym funkcja aproksymująca jest bardziej gładka. W tabeli 3 można zaobserwować że wraz ze wzrostem parametru  $m$  maleje błąd średniokwadratowy. Dla błędu maksymalnego nie można stwierdzić takiej zależności.

Liczba funkcji bazowych ( $m$ )	Błąd maksymalny	Błąd średniokwadratowy
2	0.97767	0.07172
3	0.99104	0.06607
5	1.12316	0.06307
7	0.86116	0.05947
8	0.8216	0.05804
9	0.82082	0.05803

Tabela 3: Błędy aproksymacji dla  $n = 200$

### Porównanie aproksymacji dla stałego stopnia wielomianu



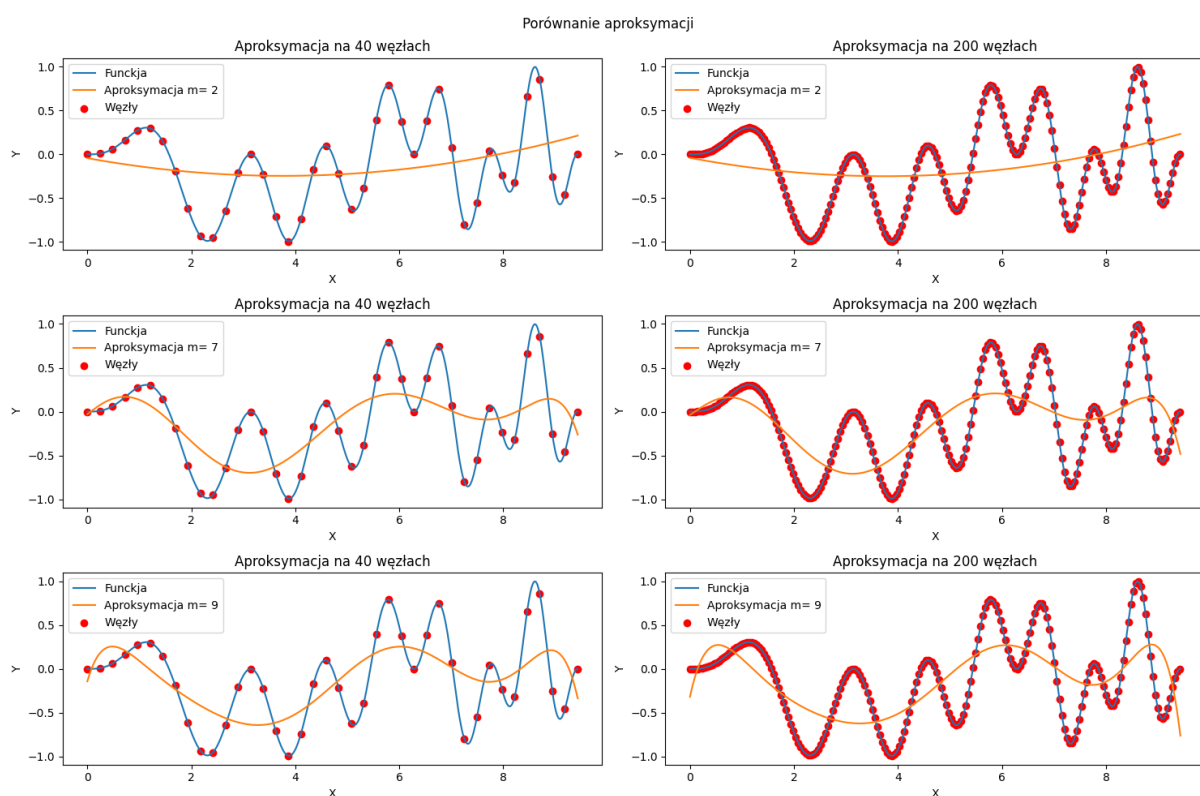
Wykresy 2: Aproksymacje dla  $m = 7$

Wykresy 2 przedstawiają aproksymacje o stałej liczbie wielomianów bazowych, lecz dla różnej liczby węzłów. Na wykresach można zaobserwować że aproksymacje niezależnie od liczby węzłów mają tyle samo ekstremów lokalnych, a ich proste od  $n = 30$  mają wręcz identyczny kształt. Mimo podobieństwa funkcji aproksymujących, można zaobserwować w tabeli 4, że wraz ze wzrostem parametru  $n$ , wartości błędów stale maleją. Nie wpływa to jednak istotnie na kształt aproksymacji.

Liczba węzłów ( $n$ )	Błąd maksymalny	Błąd średniokwadratowy
10	1.32666	1.56124
15	1.05471	0.84878
20	0.95555	0.60221
30	0.90717	0.39879
40	0.89414	0.29845
60	0.88172	0.19859
80	0.87496	0.14882
100	0.87061	0.11901
200	0.86116	0.05947

Tabela 4: Błędy aproksymacji dla  $m = 7$

## Porównanie kształtów aproksymacji



Wykresy 3: Porównanie kształtów aproksymacji

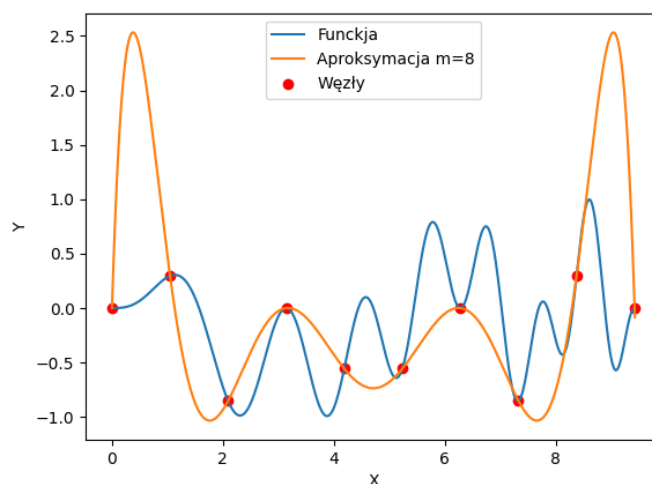
Wykresy 3 przedstawiają porównanie kształtów aproksymacji na 40 oraz 200 węzłach dla 3 różnych wartości parametru  $m$ . Można zobaczyć na wykresach że kształt aproksymacji zależy bardziej od liczby funkcji bazowych niż od liczby węzłów. Funkcja aproksymująca jest bardziej gładka dla niskich wartości  $m$ , natomiast dla wyższych stopni wielomianu zdecydowanie lepiej przybliża funkcję aproksymowaną.

Liczba węzłów ( $n$ )	Liczba funkcji bazowych ( $m$ )	Błąd maksymalny	Błąd średniokwadratowy
40	2	0.97738	0.35862
40	7	0.89414	0.29845
40	9	0.86957	0.29388
200	2	0.97767	0.07172
200	7	0.86116	0.05947
200	9	0.82082	0.05804

Tabela 5: Błędy aproksymacji

Analizując tabelę 5, mimo podobieństwa kształtów wykresów, występują wyraźne różnice w błędzie średniokwadratowym, na korzyść aproksymacji na 200 węzłach. Jednak w przypadku błędu maksymalnego, te różnice nie są już tak wyraźne, dla wartości  $m = 2$ , błąd ten jest mniejszy na 40 węzłach.

Aproksymacja na 10 węzłach równoległych



Wykres 2: Aproksymacja  $n=10$ ,  $m=8$

Błąd maksymalny	Błąd średniokwadratowy
3.09115	3.01694

Tabela 6: Wartości błędów dla  $n=10$ ,  $m=8$

Przy wyznaczaniu aproksymacji należy również pamiętać że najlepsze wyniki dostanie się gdy  $n \gg m$ . Na wykresie 2 widać że gdy wartość  $n$  oraz  $m$  są bliskie sobie, wyznaczona prosta bardziej przypomina interpolację niż wcześniej omawiane funkcje aproksymujące. Może prowadzić to do wystąpienia efektu Rungego, który zaburzy wynik aproksymacji, co można zobaczyć w tabeli 6.

## Wnioski

Podczas dokonywania wyboru parametru  $m$  dla aproksymacji, pamiętając że warunek  $n > m$  musi być spełniony, trzeba brać pod uwagę cel aproksymacji. Dla małej liczby funkcji bazowych, aproksymacja jest bardziej gładka. Zwiększanie parametru  $m$ , powoduje że funkcja aproksymująca ma więcej ekstremów lokalnych i zaczyna lepiej przybliżać zadana funkcje. Nie da się jasno określić zależności między wartościami błędów, a parametrami  $n$  oraz  $m$ . Wraz ze wzrostem liczby węzłów, można zaobserwować różnice w precyzji aproksymacji, jednak po osiągnięciu pewnej wartości stają się one minimalne i nie wpływają istotnie na poprawienie jakości aproksymacji. Największą dokładności przybliżenia otrzyma się gdy zastosuje się warunek  $n \gg m$ .

Do obliczeń oraz wizualizacji został wykorzystany język programowania Python wraz z bibliotekami NumPy, math, pandas oraz matplotlib. Wszystko zostało wykonane pod system Windows 10 na procesorze i5-1135G7 2.40GHz z 16GB pamięci operacyjnej. Wykresy były generowane przy użyciu 944 punktów. Punkty były wyznaczone co 0.01 w całym przedziale. Układy równań liniowych były rozwiązywane przy użyciu funkcji `linalg.solve()` z biblioteki NumPy.