MOwNiT – aproksymacja średniokwadratowa trygonometryczna

Przygotował:

Maksymilian Zawiślak

Dla poniższej funkcji:

$$F(x) = sin(2x) \cdot sin\left(\frac{x^2}{\pi}\right)$$

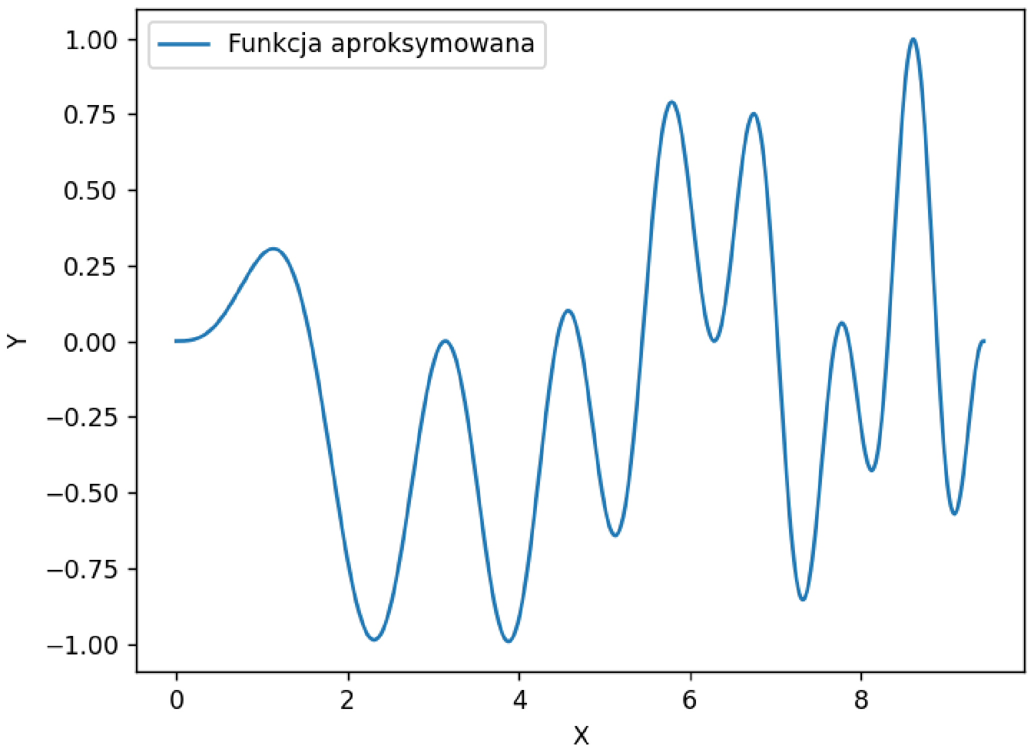
Wzór 1

na przedziale:

$$[0,3\pi]$$

wyznaczyć jej wartości w n dyskretnych punktach. Następnie w oparciu o te punkty wyznaczyć przybliżenie funkcji wykorzystując aproksymację średniokwadratową trymetryczną, Wykonać eksperymenty numeryczne dla różnej liczby punktów dyskretyzacji oraz układów funkcji bazowych zawierających różną liczbę funkcji. Oszacować błędy przybliżenia. Graficznie zilustrować interesujące przypadki.

Wykres głównej funkcji



Wykres 1: Wykres funkcji aproksymowanej

Wyznaczanie aproksymacji

Szukany jest wielomian w uogólnionej postaci:

$$f(x) = \sum_{j=0}^{m} a_j \varphi_j(x)$$

Wzór 2

Aby wyznaczyć aproksymacje trygonometryczna należy założyć że funkcja aproksymowana jest ciągła oraz okresowa na przedziale długości 2π, a wartości węzłów są punktami na przedziale [-π, π], określone wzorem:

$$x_i = \frac{2\pi}{n-1} i - \pi$$

Wzór 3

gdzie: $i \in \{0,1,\ldots,n-1\}$

Jako ciąg funkcji bazowych przyjąć należy:

$$\varphi_j(x) = 1, \sin(x), \cos(x), \ldots, \sin(mx), \cos(m)$$

Wzór 4

gdzie: m to oczekiwany stopień wielomianu.

Ostatecznie aproksymacje można wyznaczyć z następującego wzoru:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{m} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)$$

Wzór 5

gdzie:

$$a_k = \frac{2}{n} \sum_{i=0}^{n-1} F(x_i) \cos(kx_i)$$

Wzór 6

$$b_k = \frac{2}{n} \sum_{i=0}^{n-1} F(x_i) \sin(kx_i)$$

Wzór 7

Aby wyznaczyć wielomian aproksymacyjny dobrze uwarunkowany (liczba funkcji bazowych nie przekraczająca liczby węzłów), miedzy stopniem wielomianu (m), a liczba węzłów (n) powinno zachodzić:

$$m \leq \left| \frac{n-1}{2} \right|$$

Wzór 8

Zadana funkcja jest na przedziale $[0,3\pi]$, węzły należy przekształcić aby były na przedziale [-π, π], przy pomocy takiego wzoru:

$$x_i' = \frac{x_i - 0}{3\pi - 0}\left(\pi - (-\pi)\right) + (-\pi)$$

Wzór 9

gdzie:

- x_i' to węzeł po przekształceniu
- x_i to węzeł przed przekształceniem

Błędy obliczeniowe przy aproksymacji

Błąd maksymalny:

$$max_i\{|F(x_i) - f(x_i)|\}$$

Wzór 10

Błąd średniokwadratowy:

$$\frac{1}{N}\sqrt{\sum_{i=1}^{N}\left(F(x_i) - f(x_i)\right)^2}$$

Wzór 11

$$i \in \{1,2,\ldots,N\}$$

gdzie:

$F(x)$ – funkcja interpolująca

$f(x)$ – funkcja interpolowana

N – liczba punktów użytych do rysowania wykresów

Błędy obliczeniowe

Wyliczenia błędów zostały wykonane dla błędu maksymalnego oraz średniokwadratowego. Liczby węzłów jakie były testowane to: 10, 15, 20, 30, 40, 60, 80, 100, 200, a stopnie wielomianu to: 2, 3, 5, 7, 8, 9. W obliczeniach pamiętano o zasadzie $m \leq \left|\frac{n-1}{2}\right|$.

- n to liczba węzłów
- m to stopień wielomianu

n \ m	2	3	5	7	8	9
10	1.18026	1.05194	-	-	-	-
20	1.03376	1.03878	0.66126	0.6819	0.8349	0.81963
30	1.03073	1.02818	0.61618	0.59771	0.62385	0.47593
40	1.0307	1.0276	0.61095	0.60134	0.62155	0.4753
60	1.03089	1.02762	0.60712	0.60581	0.62318	0.47158
80	1.03102	1.02772	0.60539	0.60814	0.62413	0.46944
100	1.03111	1.02779	0.60438	0.61237	0.62591	0.46813
200	1.03128	1.02794	0.60238	0.60955	0.62471	0.46547

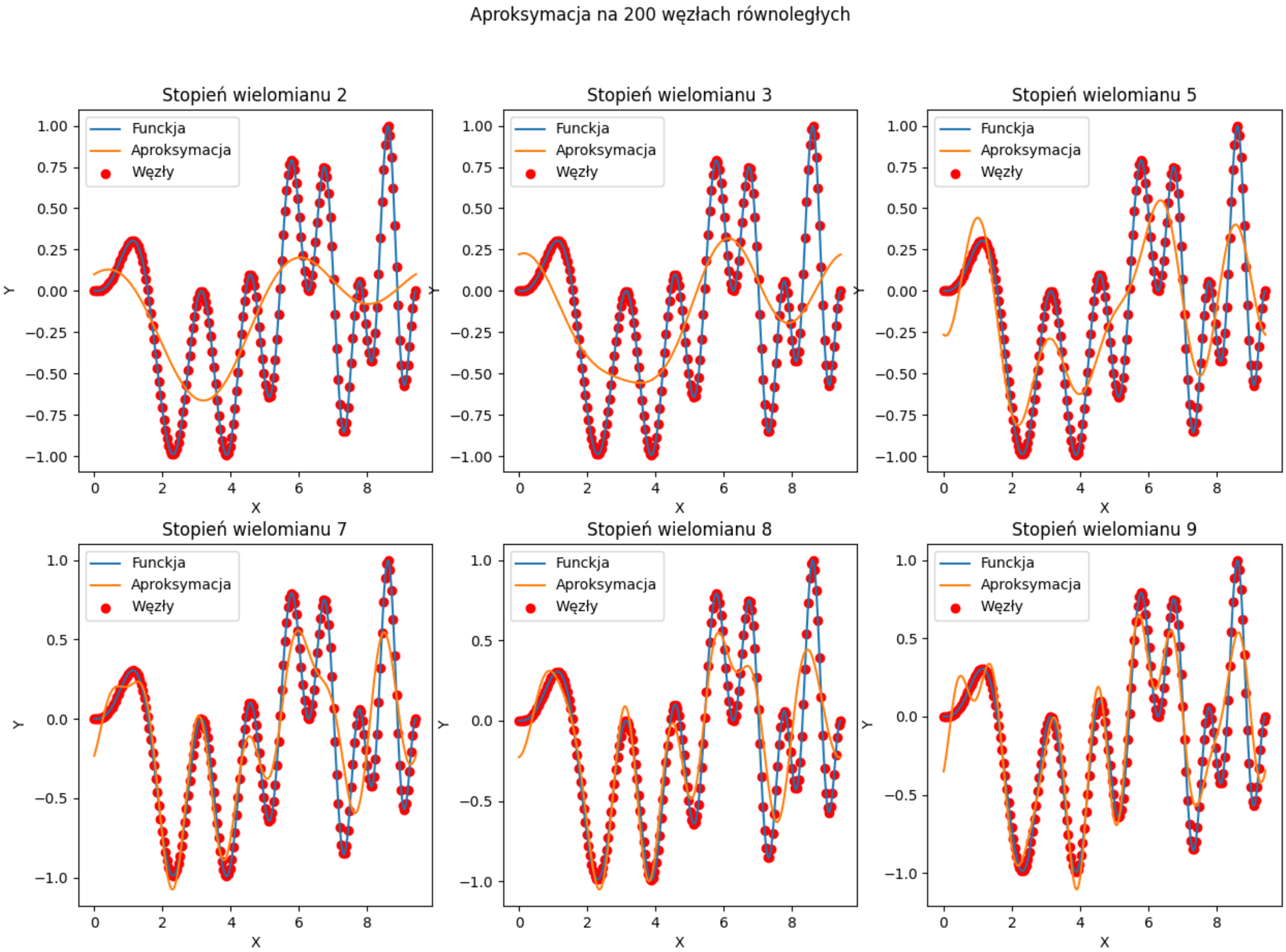
Tabela 1: Błąd maksymalny

m / n	2	3	5	7	8	9
10	1.50417	1.49866	-	-	-	-
20	0.61459	0.60064	0.46481	0.38839	0.39247	0.38504
30	0.40959	0.40023	0.30854	0.25155	0.2385	0.18409
40	0.30715	0.30013	0.23131	0.18853	0.17871	0.13786
60	0.20475	0.20006	0.15416	0.12562	0.11906	0.0918
80	0.15356	0.15004	0.11561	0.0942	0.08928	0.06883
100	0.12284	0.12003	0.09248	0.07535	0.07142	0.05505
200	0.06142	0.06001	0.04624	0.03767	0.0357	0.02752

Tabela 2: Błąd średniokwadratowy

Analizując tabelę 1 oraz 2, można zauważyć, że najmniejsze wartości błędów występują niezależnie stopnia wielomianu (m), dla 200 węzłów. Ponadto, w przypadku tej samej liczby węzłów (n), wartość parametru $m = 9$ daje najmniejsze wartości błędów, po za błędem maksymalnym dla $n = 20$.

Porównanie aproksymacji dla stałej liczby węzłów



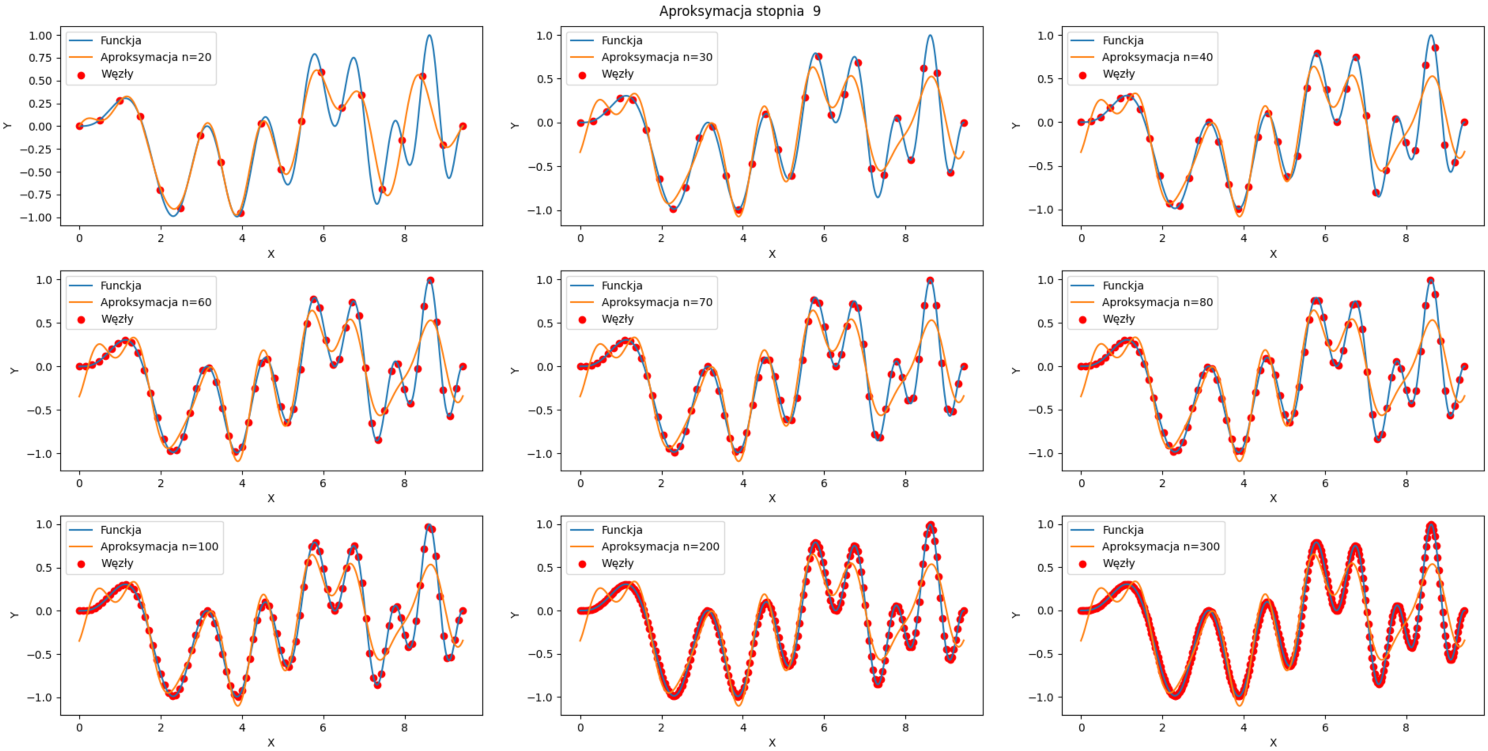
Wykresy 1: Wykresy aproksymacji dla n = 200

Wykresy 1 przedstawiają aproksymacje dla stałej liczby węzłów $(n = 200)$, lecz dla różnych stopni wielomianu. Wraz ze wzrostem liczby funkcji bazowych w funkcji aproksymującej przybywa ekstremów lokalnych. Wzrost parametru m powoduje również zwiększenie dokładności aproksymacji oraz zmniejszenie wartości obu błędów co pokazuje tabel 3.

Stopień wielomianu (m)	Błąd maksymalny	Błąd średniokwadratowy
2	1.03128	0.06142
3	1.03128	0.06001
5	1.03128	0.04624
7	0.61237	0.03767
8	0.62591	0.0357
9	0.46547	0.02752

Tabela 3: Błędy aproksymacji dla n = 200

Porównanie aproksymacji dla stałego stopnia wielomianu



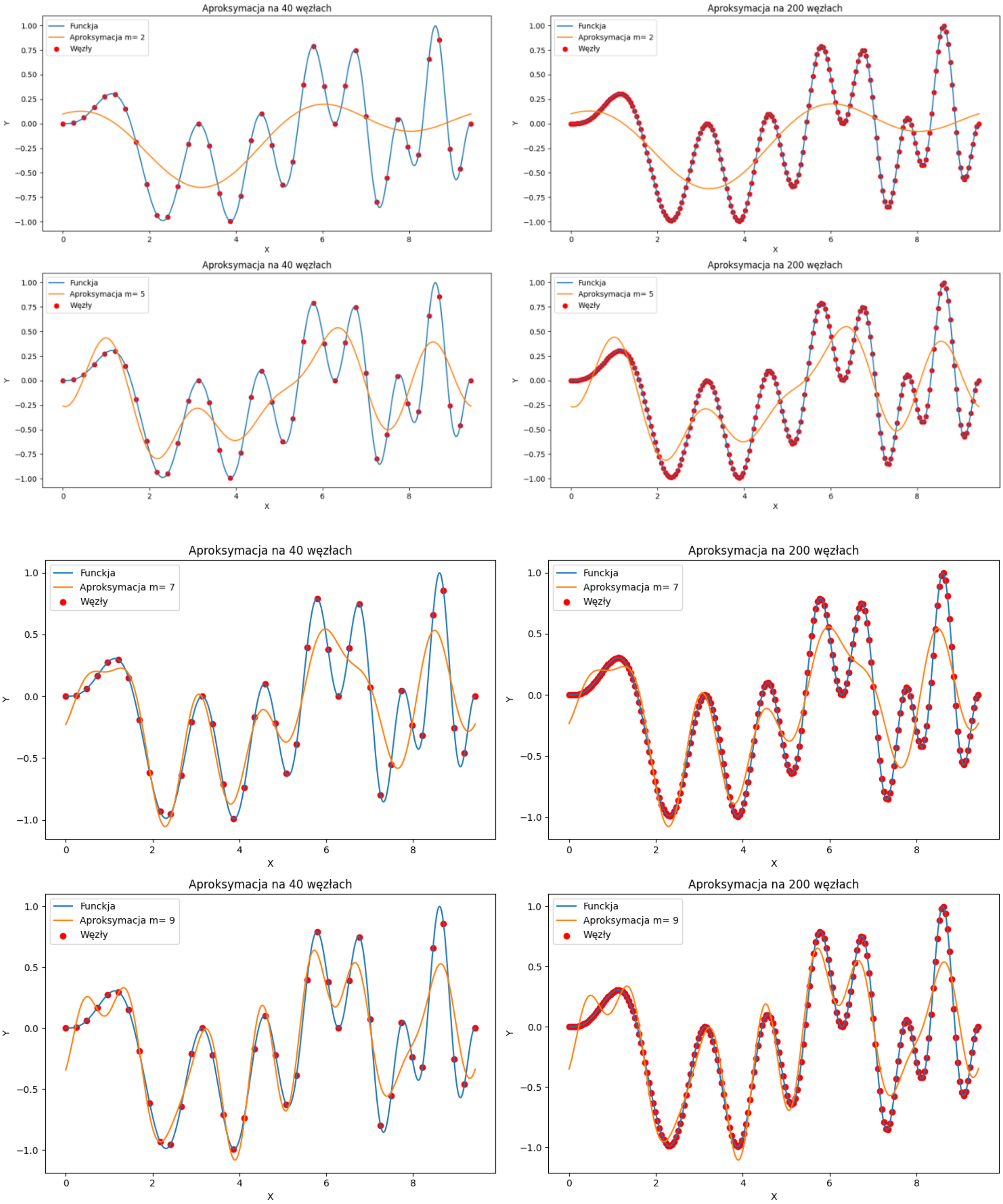
Wykresy 2: Wykresy aproksymacji dla m = 9

Wykresy 2 przedstawiają aproksymacje dla stałego stopnia wielomianu, lecz dla różnej liczby węzłów. Wartość parametru $m = 9$ została wybrana na podstawie wcześniejszych analiz tabeli błędów jako najlepiej przybliżająca wartość. Kształt aproksymacji niewiele różni się w zależności od liczby użytych węzłów. Mimo podobieństwa, w tabeli 4 można zaobserwować że wraz ze wzrostem parametru n stale maleje błąd średniokwadratowy. Natomiast błąd maksymalny od $n = 30$ utrzymuje się na stałym poziomie.

Liczba węzłów (n)	Błąd maksymalny	Błąd średniokwadratowy
20	0.81963	0.38504
30	0.47593	0.18409
40	0.47530	0.13786
60	0.47158	0.09180
70	0.47037	0.07867
80	0.46944	0.06883
100	0.46813	0.05505
200	0.46547	0.02752
300	0.46470	0.01835

Tabela 4: Błędy aproksymacji dla m = 9

Porównanie kształtów aproksymacji



Wykresy 3: Porównanie kształtów aproksymacji

Wykresy 3 przedstawiają porównanie kształtów aproksymacji na 40 oraz 200 węzłach dla 4 różnych stopni wielomianu. Można zaobserwować że kształt aproksymacji zależy bardziej od liczby funkcji bazowych niż od liczby węzłów. Dla wyższych wartości parametru m, aproksymacja jest bardziej dokładna, co widać po obliczonych błędach w tabeli 5. Mimo braku wyraźnych różnic w kształcie wykresów występują spore różnice w błędzie średniokwadratowym, na korzyść aproksymacji na 200 węzłach. W przypadku błędu maksymalnego takie różnice nie występują.

Liczba węzłów (n)	Stopień wielomianu (m)	Błąd maksymalny	Błąd średniokwadratowy
40	2	1.0307	0.30715
40	5	0.61095	0.23131
40	7	0.60134	0.18853
40	9	0.60134	0.13786
200	2	1.03128	0.06142
200	5	1.03128	0.04624
200	7	0.61237	0.03767
200	9	0.61237	0.02752

Tabela 5: Tabela błędy aproksymacji

Wnioski

Dla ustalonego stopnia wielomianu, zwiększanie liczby węzłów od pewnego momentu tylko nieznacznie poprawia dokładność funkcji aproksymującej. W tabeli 4 duży przeskok w wartościach błędu można zaobserwować miedzy $\mathrm{n} = 20$ oraz $\mathrm{n} = 30$, dalsze zwiększanie parametru n nie znacznie wpływa na wartości błędów. Dla ustalonej liczby węzłów, zwiększanie wielomianu, poprawia dokładność. Analogicznie jak przy zwiększaniu wartości n, wzrost parametru m od pewnego momentu nie wpływa znacząco na jakość przybliżenia. Liczba węzłów nie wypływa istotnie na kształt aproksymacji. Dla zadanej funkcji aproksymacja trygonometryczna zadziałała lepiej niż aproksymacja wielomianami algebraicznymi.

Do obliczeń oraz wizualizacji został wykorzystany język programowania Pyhton wraz z bibliotekami NumPy, math, pandas oraz matplotlib. Wszystko zostało wykonane pod system Windows 10 na procesorze i5-1135G7 2.40GHz z 16GB pamięci operacyjnej. Wykresy były generowane przy użyciu 944 punktów. Punkty były wyznaczone co 0.01 w całym przedziale.