Podsumowanie metod przybliżania zadanej funkcji

Przygotował:

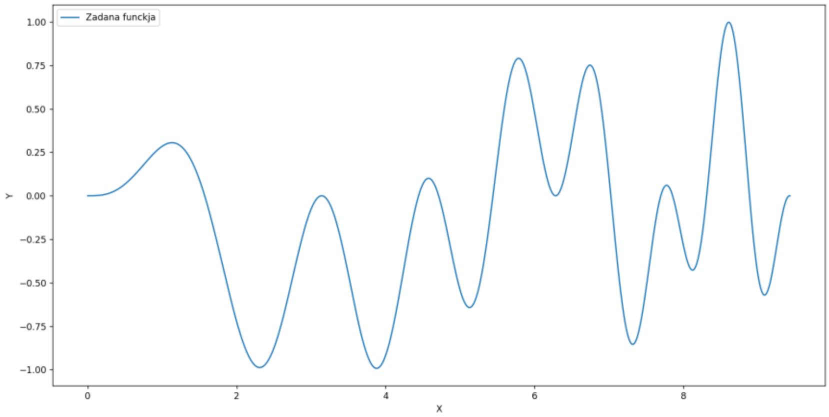
Maksymilian Zawiślak

$$F(x) \ = \ sin(2x) \cdot sin\left(\frac{x^2}{\pi}\right)$$

Wzór 1

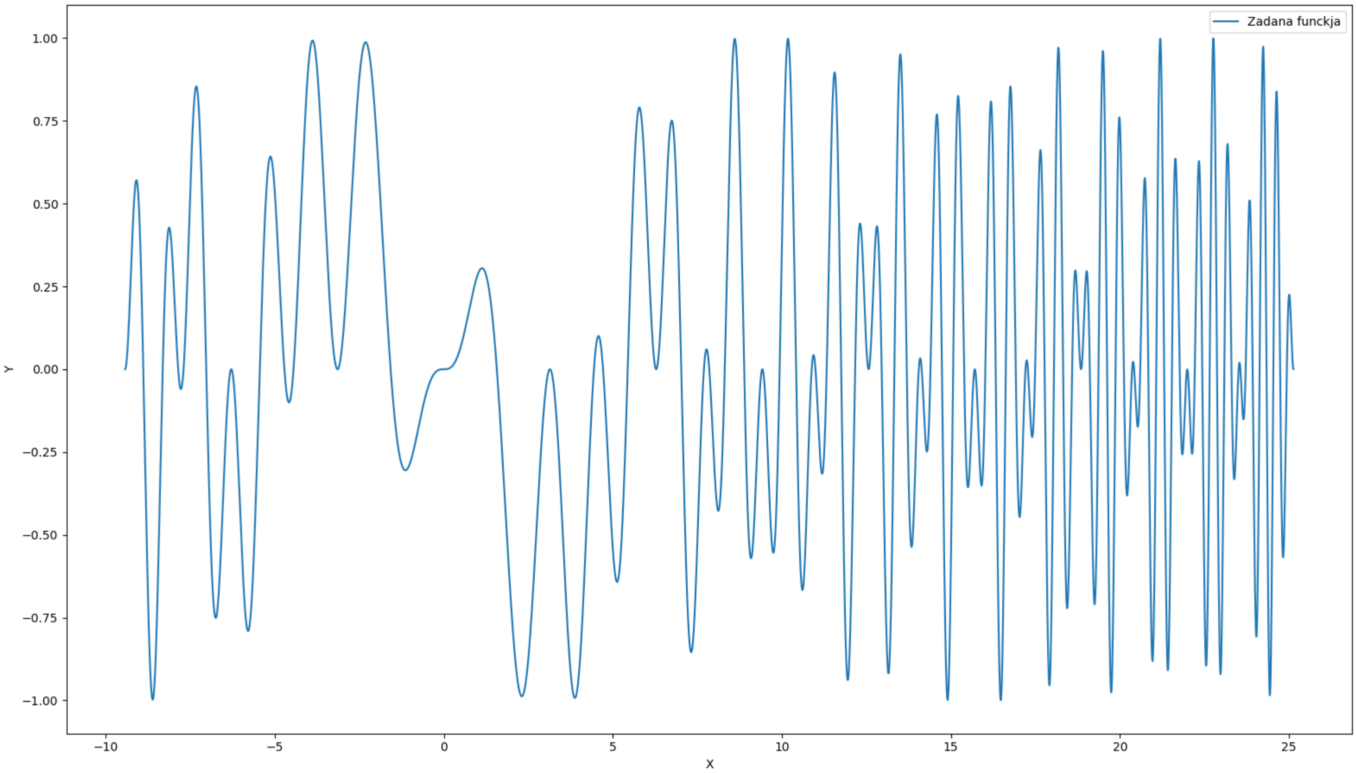
na przedziale:

$$[0,3\pi]$$



Wykres 1: Zadana funkcja na przedziale $[0,3\pi]$

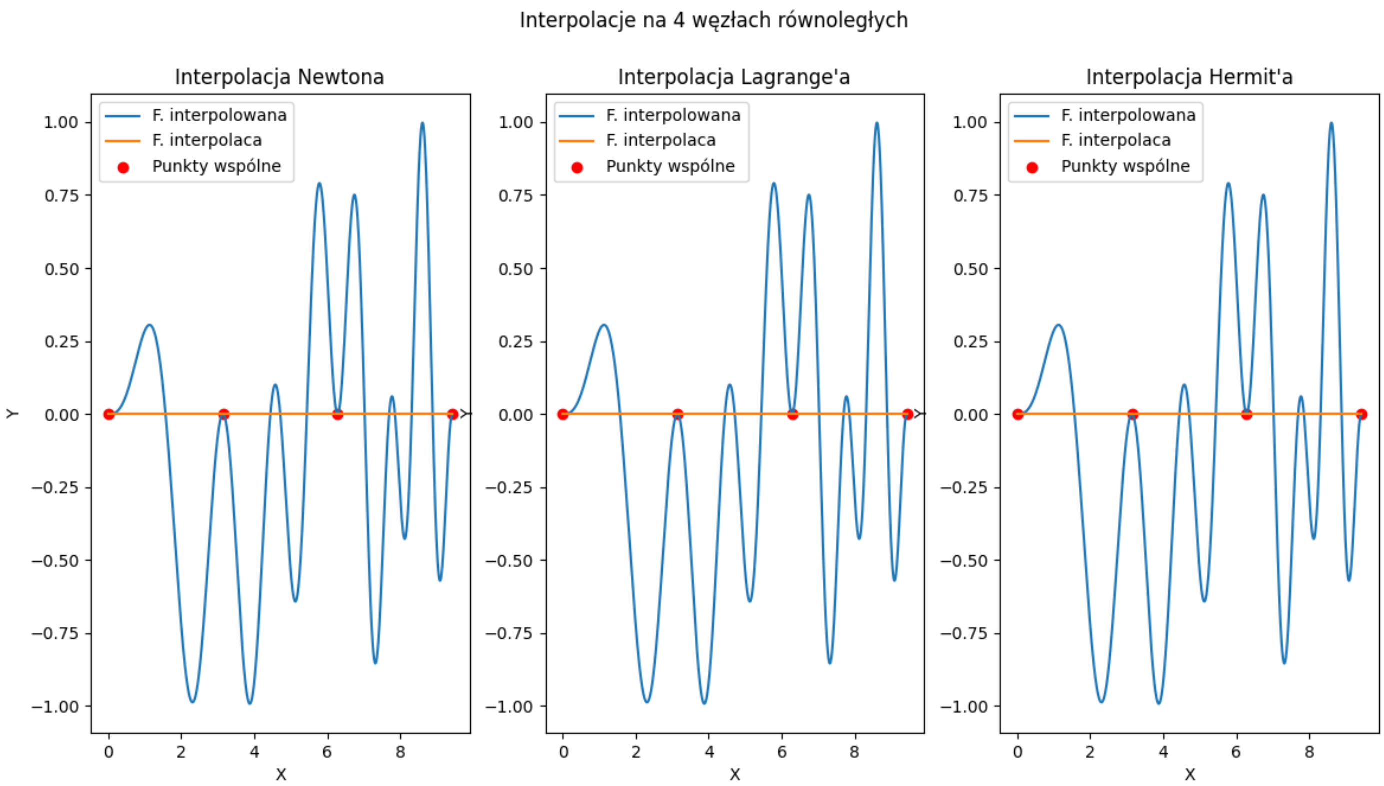
Zadana funkcja na przedziale $[-3\pi, 8\pi]$



Wykres 2: Zadana funkcja na przedziale $[-3\pi, 8\pi]$

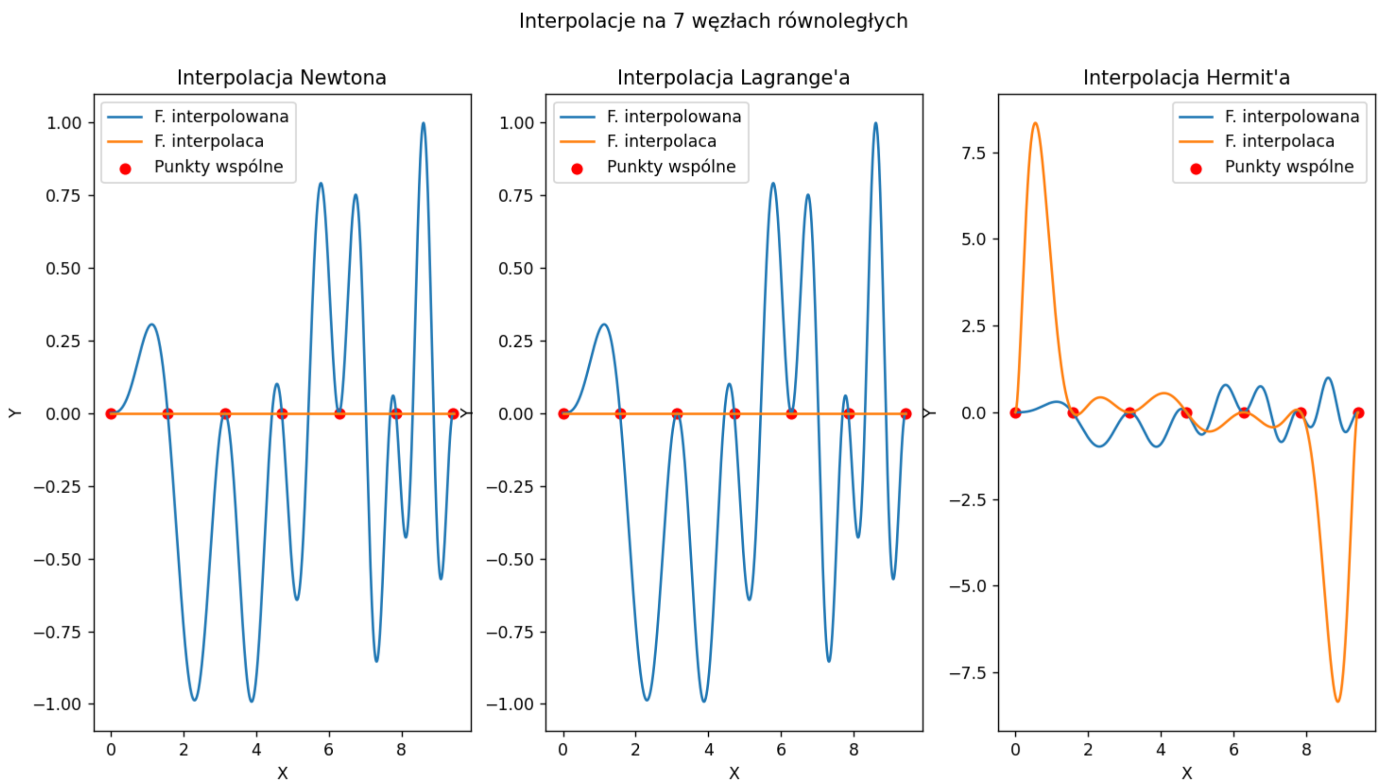
Wykresy były generowane przy użyciu 944 punktów. Do obliczeń wykorzystywany był Python z bibliotekami NumPy oraz matplotlib. Układy równań liniowych były rozwiązywane przy użyciu funkcji linalg.solve() z biblioteki NumPy.

Interpolacje Newtona, Lagrange'a oraz Hermit'a



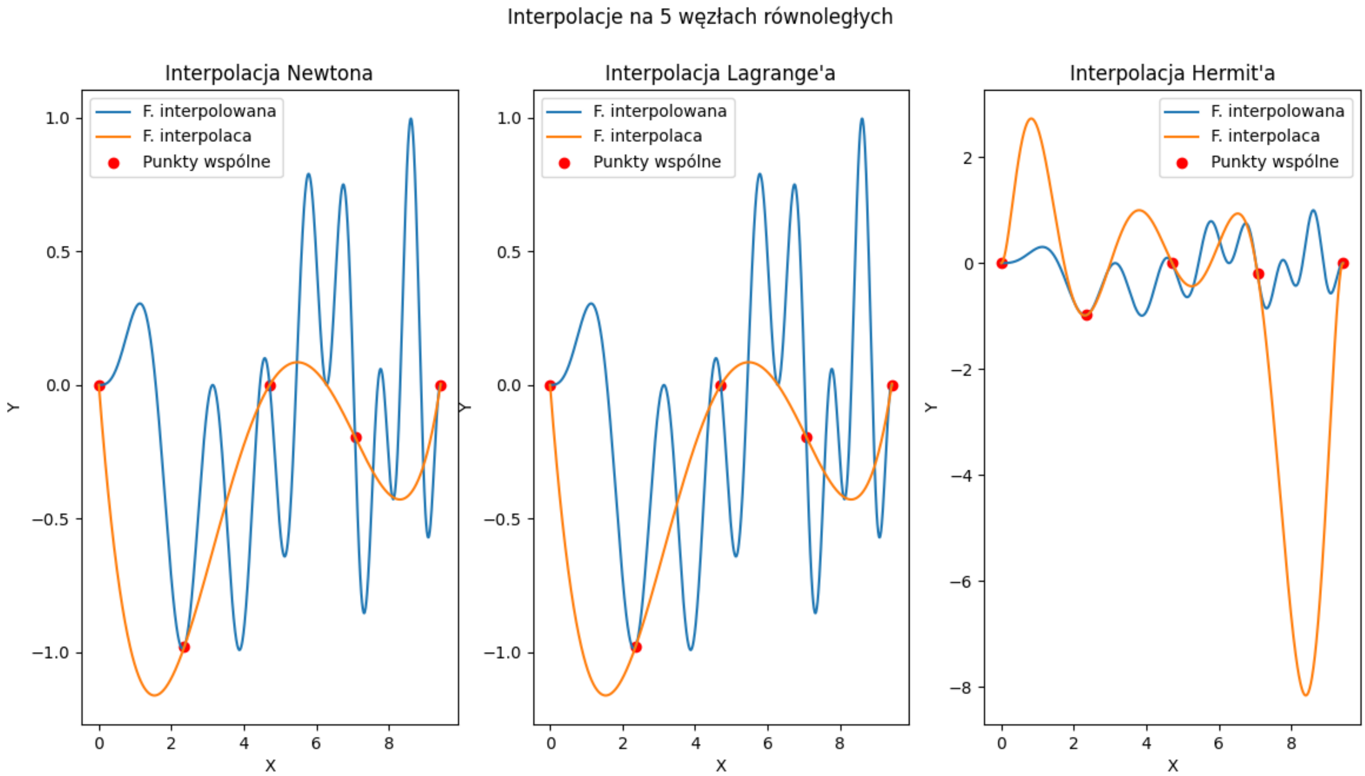
Wykres 3: Interpolacje na 4 węzłach równoległych

Dla każdego rodzaju interpolacji przez to że 4 węzły równoległe idealnie trafiają w wartości $[0, \pi, 2\pi, 3\pi]$, funkcja interpolująca jest prostą.

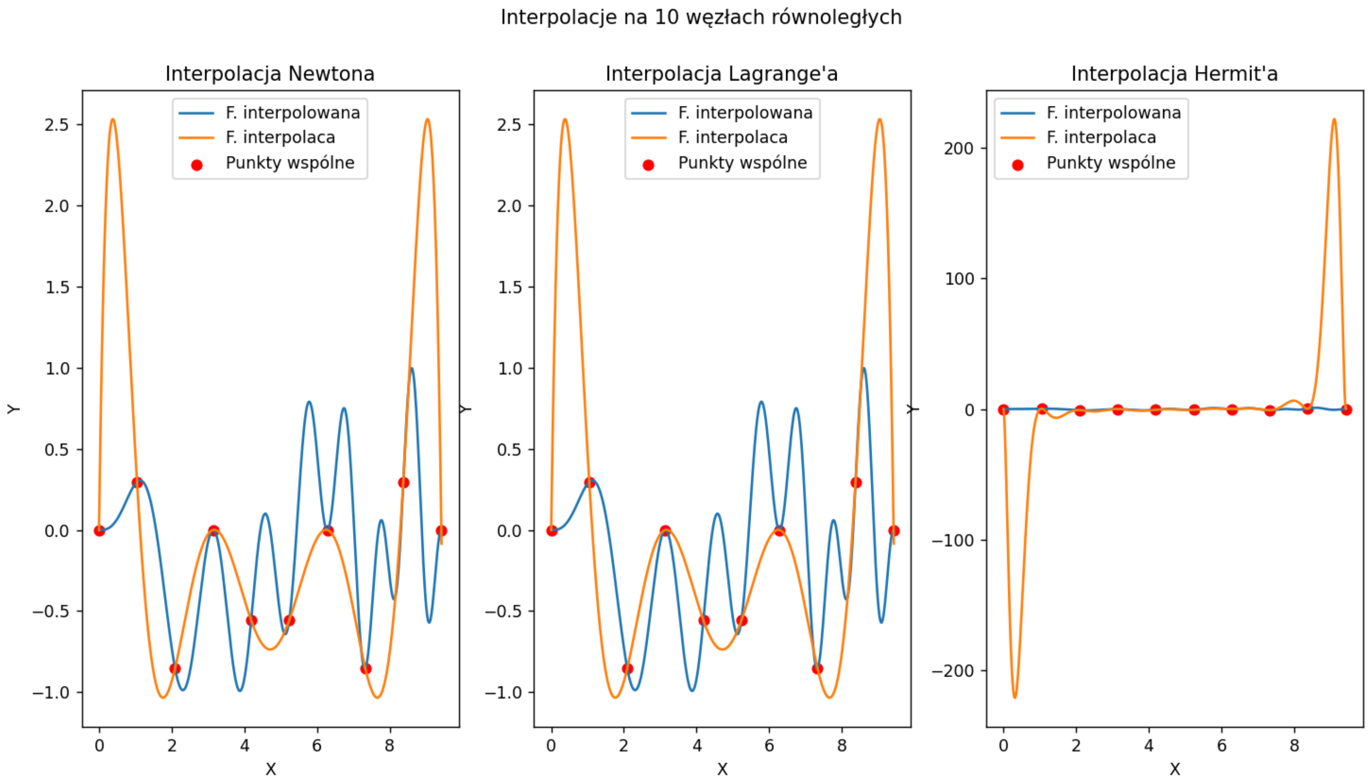


Wykres 4: Interpolacje na 7 węzłach równoległych

Przy 7 węzłach równoległych czyli $\left[0, \frac{1}{2}\pi, \pi, \frac{3}{2}\pi, 2\pi, \frac{5}{2}\pi, 3\pi\right]$, dla interpolacji Lagrange'a oraz Newtona dzieje się to samo. Jedynie interpolacja Hermit'a nie jest już linia prostą.

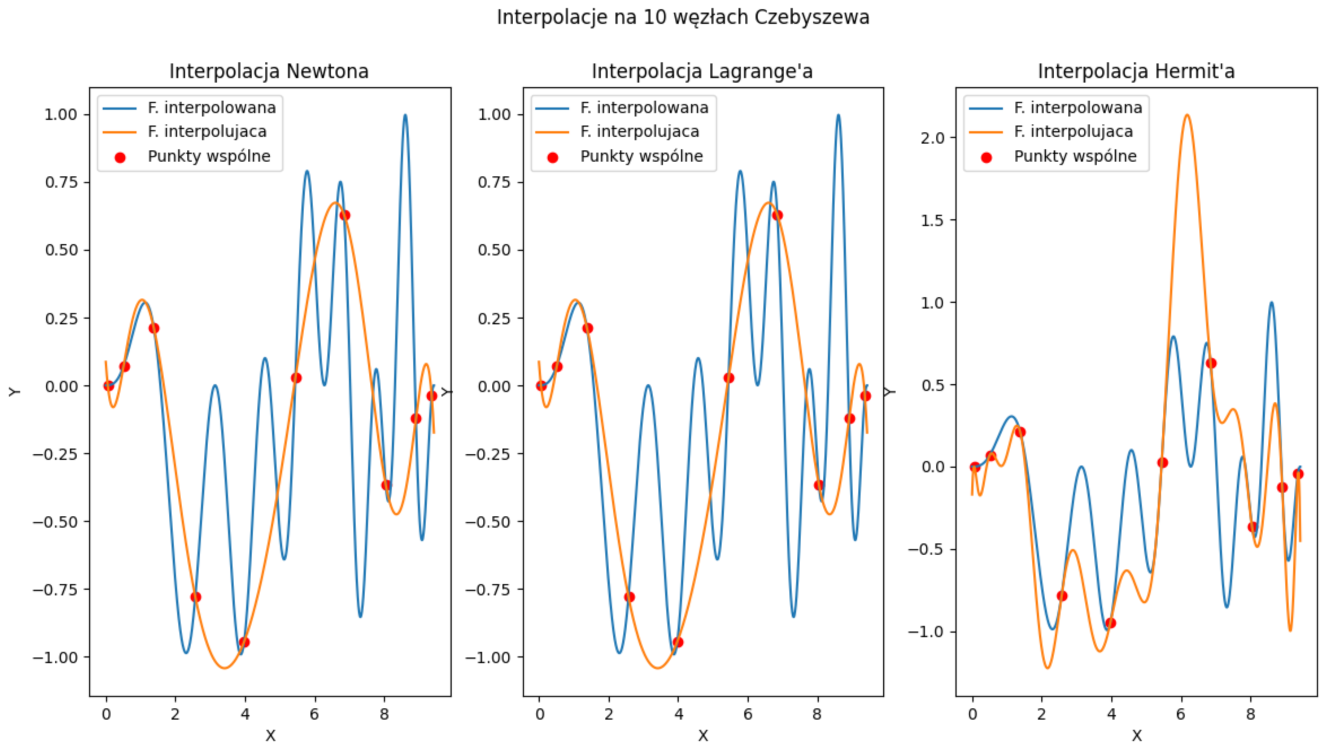


Wykres 5: Interpolacje na 5 węzłach równoległych



Wykres 6: Interpolacje na 10 węzłach równoległych

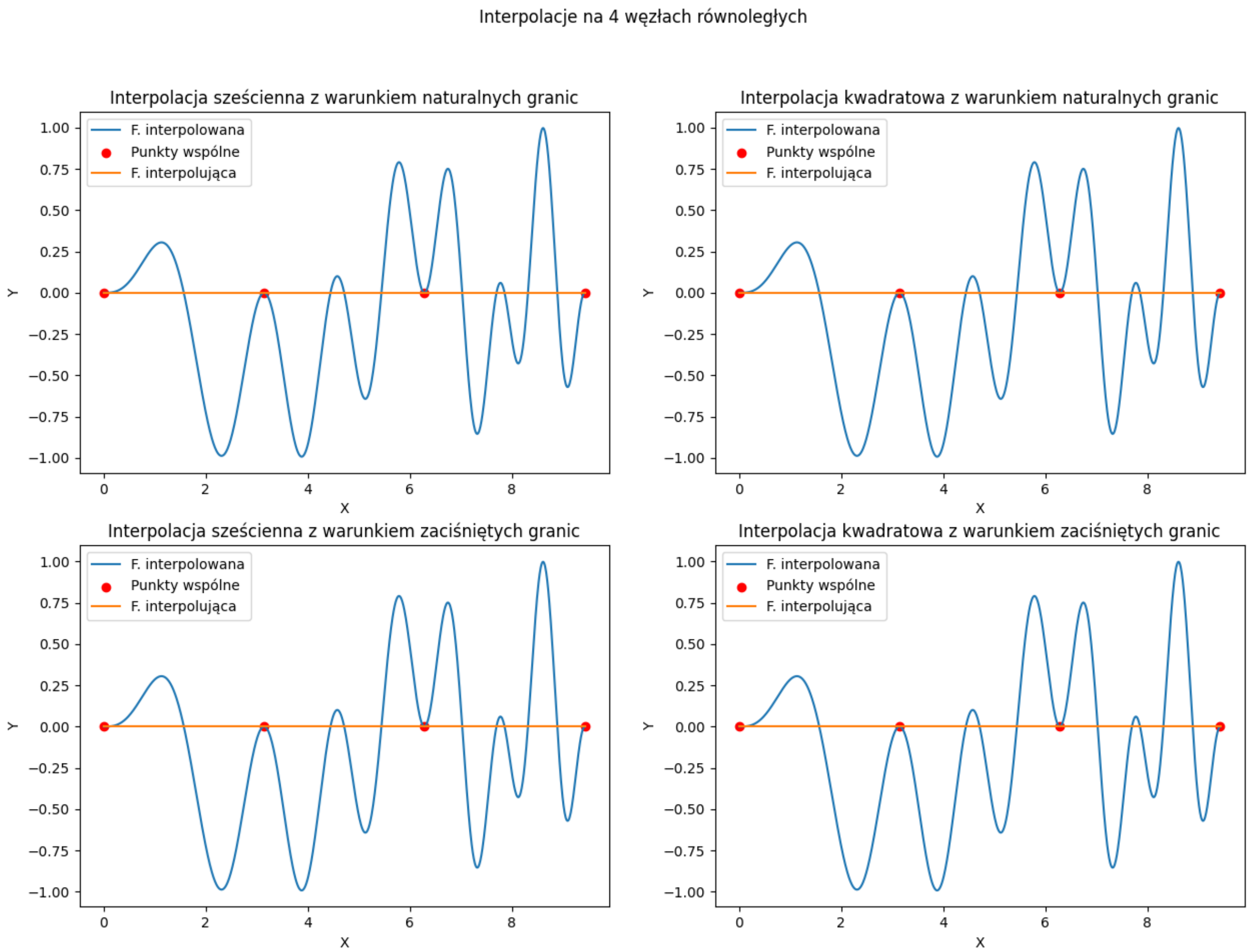
W interpolacji Hermit'a efekt Rungego pojawia się już dla 5 węzłów równoległych, a przy dwóch pozostałych interpolacjach można go zaobserwować dopiero dla 10.



Wykres 7: Interpolacje na 10 węzłach Czebyszewa

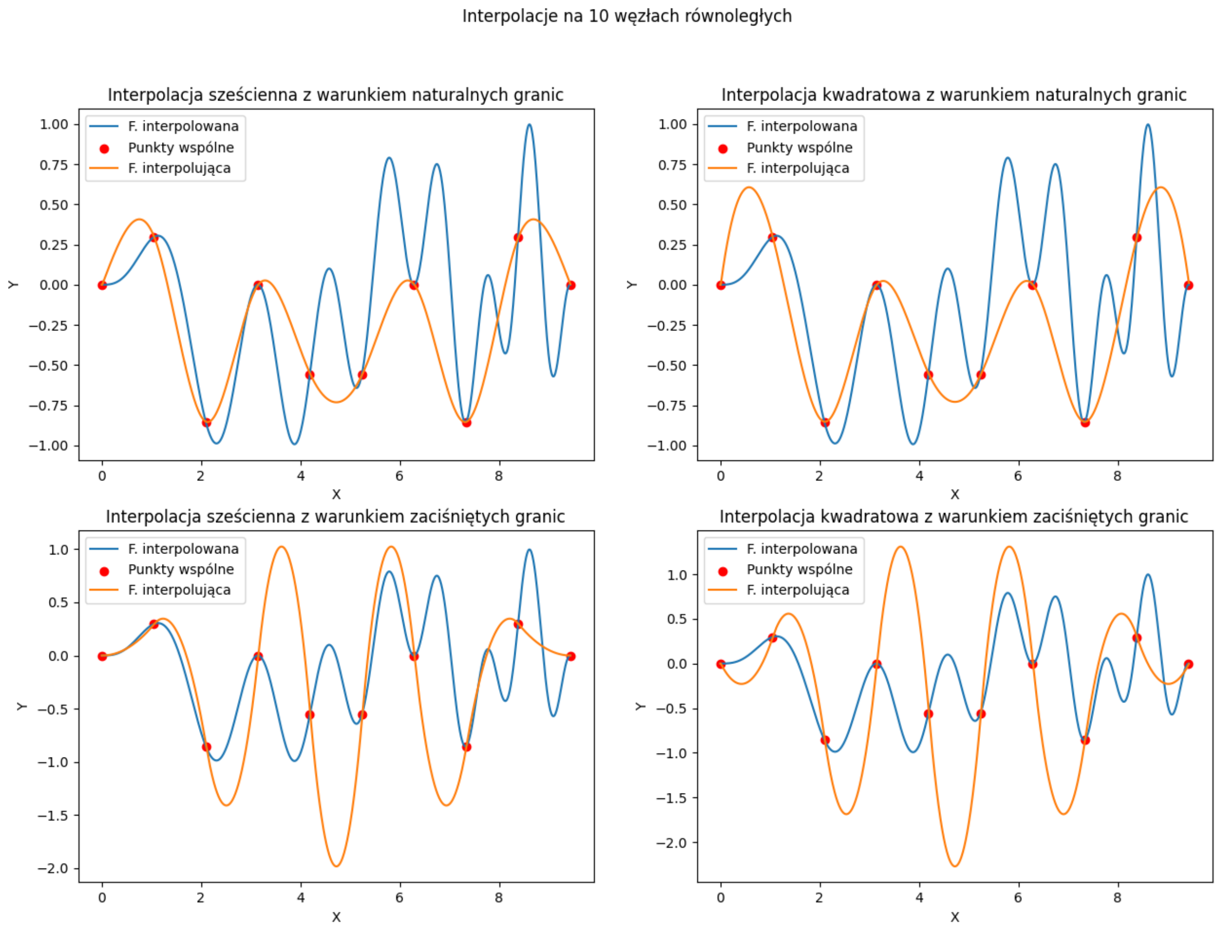
Oczywiście wykorzystanie węzłów Czebyszewa pomagało w zniwelowaniu efektu Rungego.

Funkcje sklejane



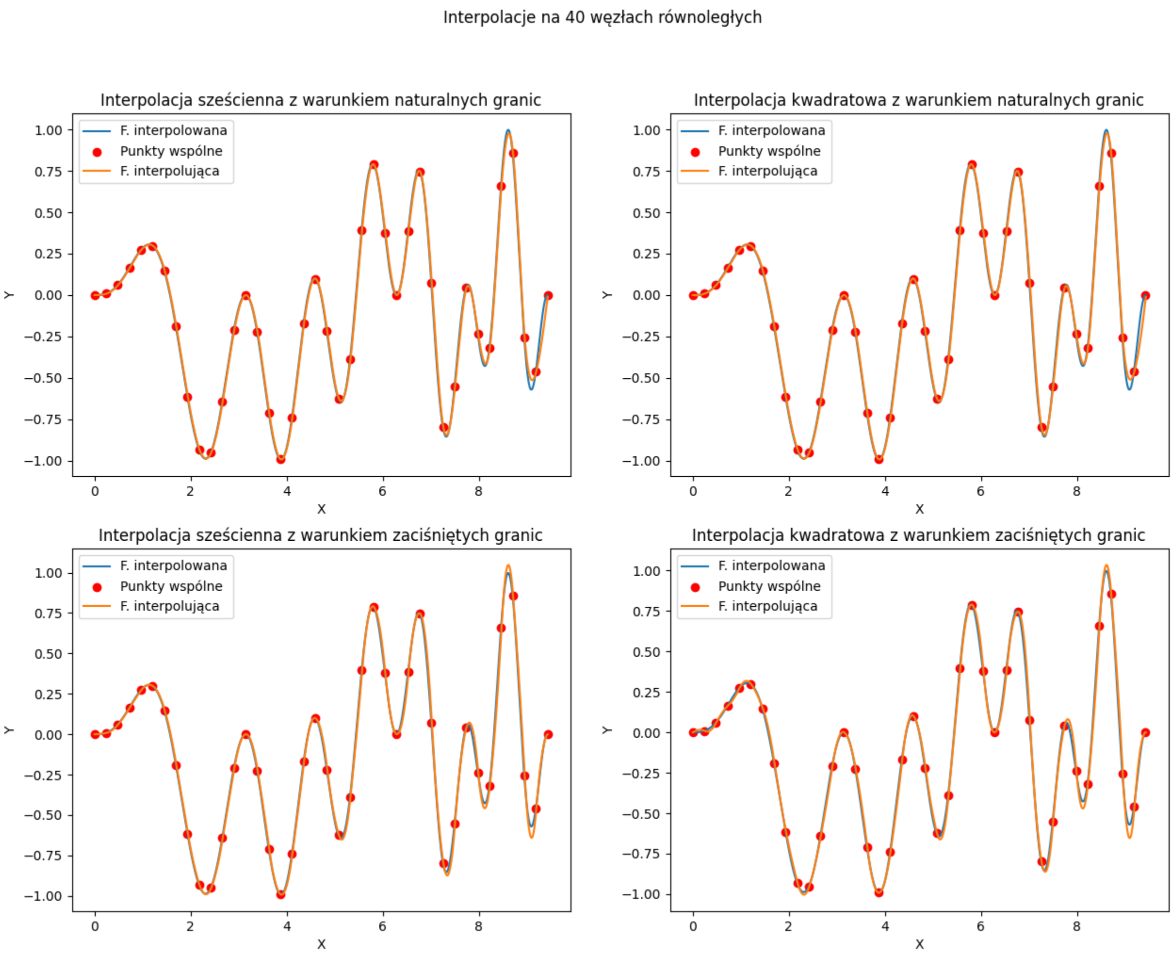
Wykres 8: Interpolacje na 4 węzłach równoległych

Takie jak w wcześniejszym przypadku przy 4 węzłach równoległych, funkcja interpolująca znowu jest linią prostą.



Wykres 9: Interpolacje na 10 węzłach równoległych

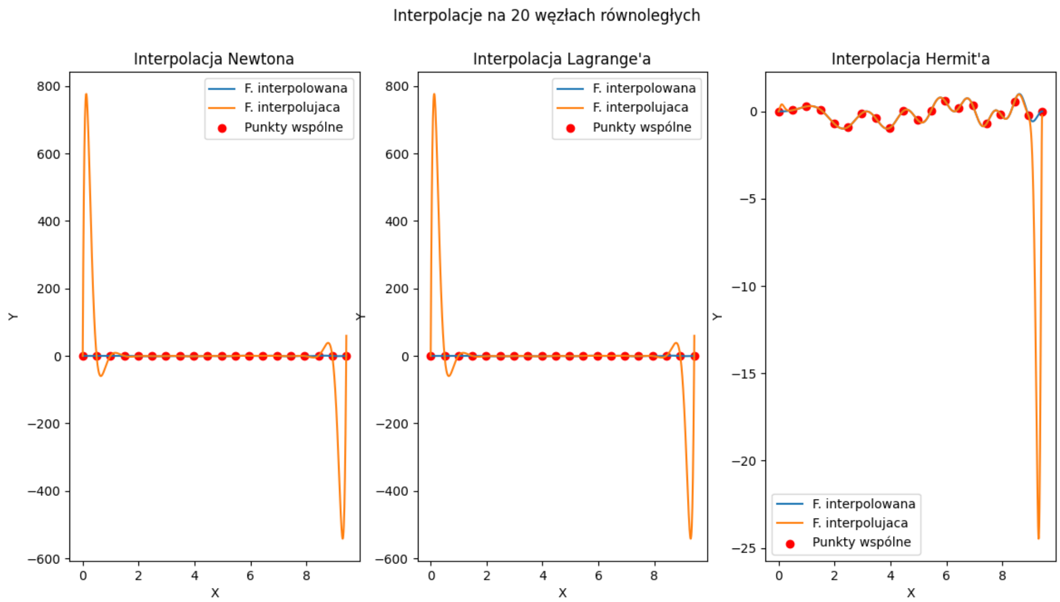
Dzięki wykorzystaniu funkcji sklejanych dla 10 węzłów równoległych nie pojawia się efekt Rungego tak jak wcześniejszych przykładach interpolacji.



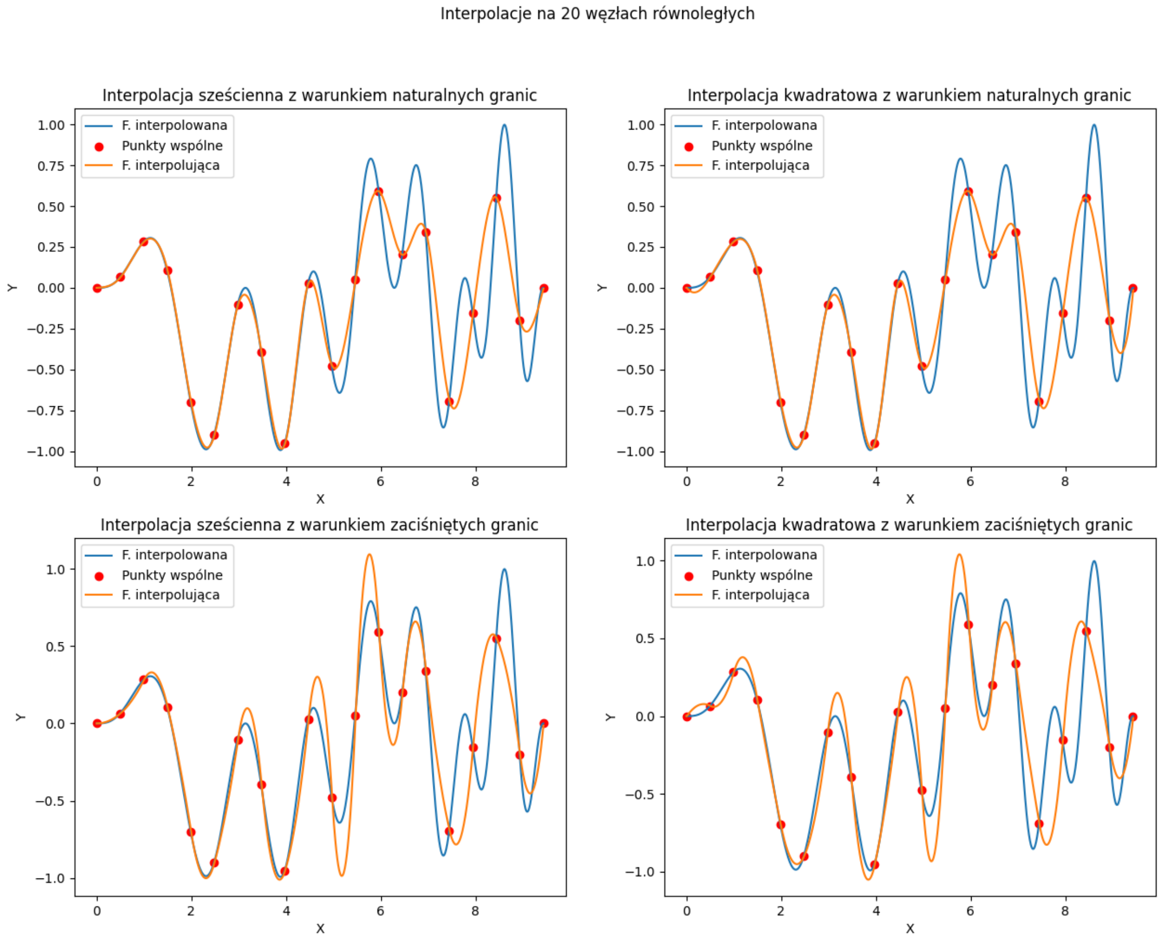
Wykres 10: : Interpolacje na 40 węzłach równoległych

Dla 40 węzłów równoległych funkcje sklejane dają bardzo dobre funkcja aproksymujące.

Porównanie interpolacji Lagrange'a, Newtona oraz Hermit'a z interpolacja funkcjami sklejanymi



Wykres 11: Interpolacje na 20 węzłach równoległych



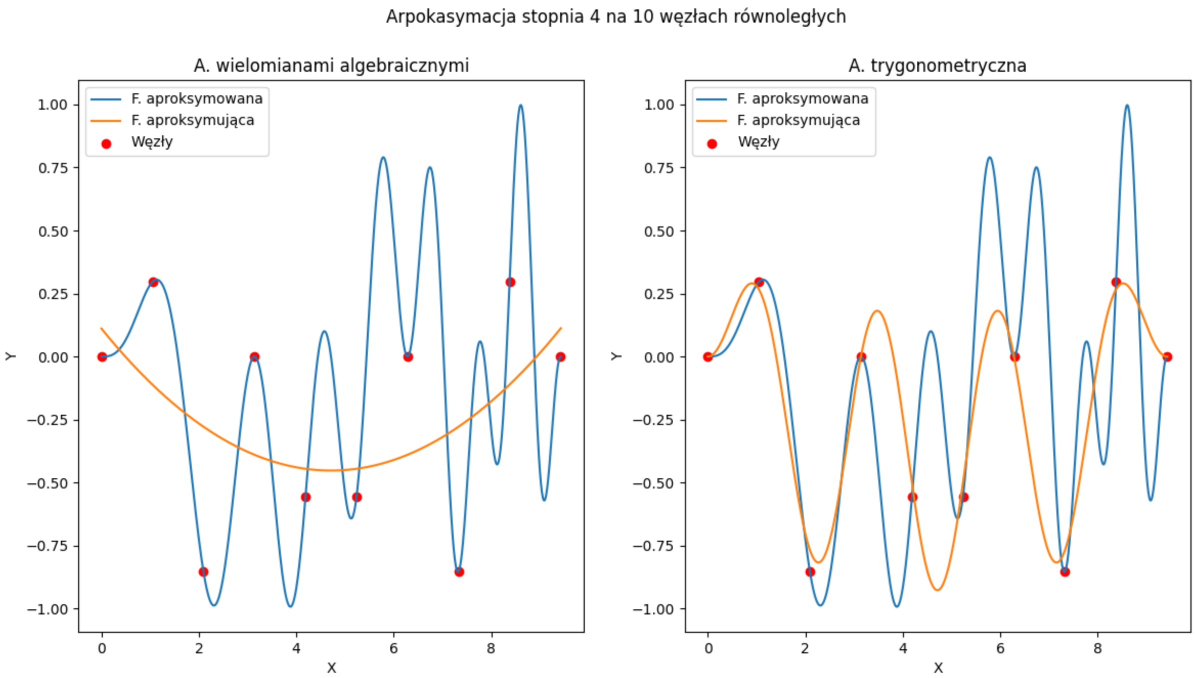
Wykres 12: Interpolacje na 20 węzłach równoległych

Wykorzystanie funkcji sklejanych dla 20 węzłów równoległych daje o wiele lepsze wyniki niż interpolacja Lagrange'a, Newtona czy Hermit'a.

Interpolacja	Błąd maksymalny	Błąd średniokwadratowy
Newtona	776.77380	211.18016
Lagrange'a	776.77380	211.18016
Hermit'a	24.30817	4.56788
Sześcienna z w. naturalnym	0.72391	0.36462
Kwadratowa z w. naturalnym	0.82175	0.37285
Sześcienna z w. zaciśniętym	0.71231	0.35515
Kwadratowa z w. zaciśniętym	0.87574	0.39174

Tabela 1: Wyniki błędów dla 20 węzłów równoległych

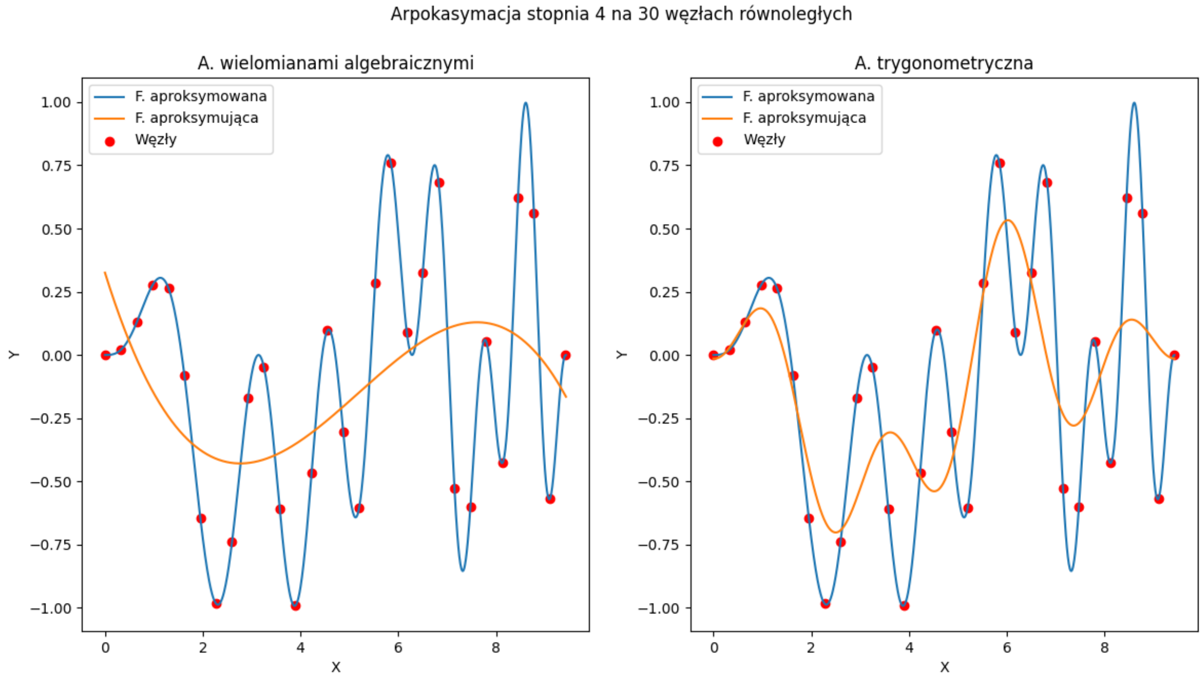
Aproksymacja średniokwadratowa wielomianami algebraicznymi oraz trygonometryczna



Wykres 13: Aproksymacje stopnia 4 na 10 węzłach równoległych

Aproksymacja	Błąd maksymalny	Błąd średniokwadratowy
Algebraiczna	1.21358	1.53153
Trygonometryczna	1.34004	1.45709

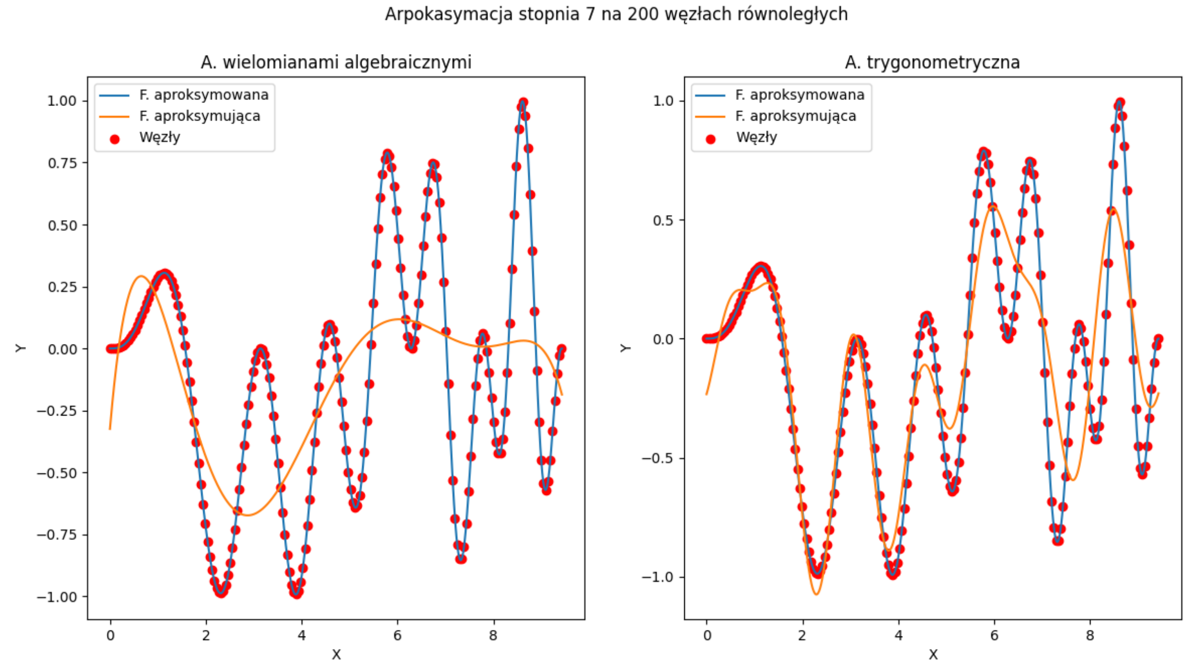
Tabela 2: Wyniki błędów dla aproksymacji stopnia 4 na 10 węzłach równoległych



Wykres 14: Aproksymacje stopnia 4 na 30 węzłach równoległych

Aproksymacja	Błąd maksymalny	Błąd średniokwadratowy
Algebraiczna	0.97793	0.44157
Trygonometryczna	0.85954	0.36010

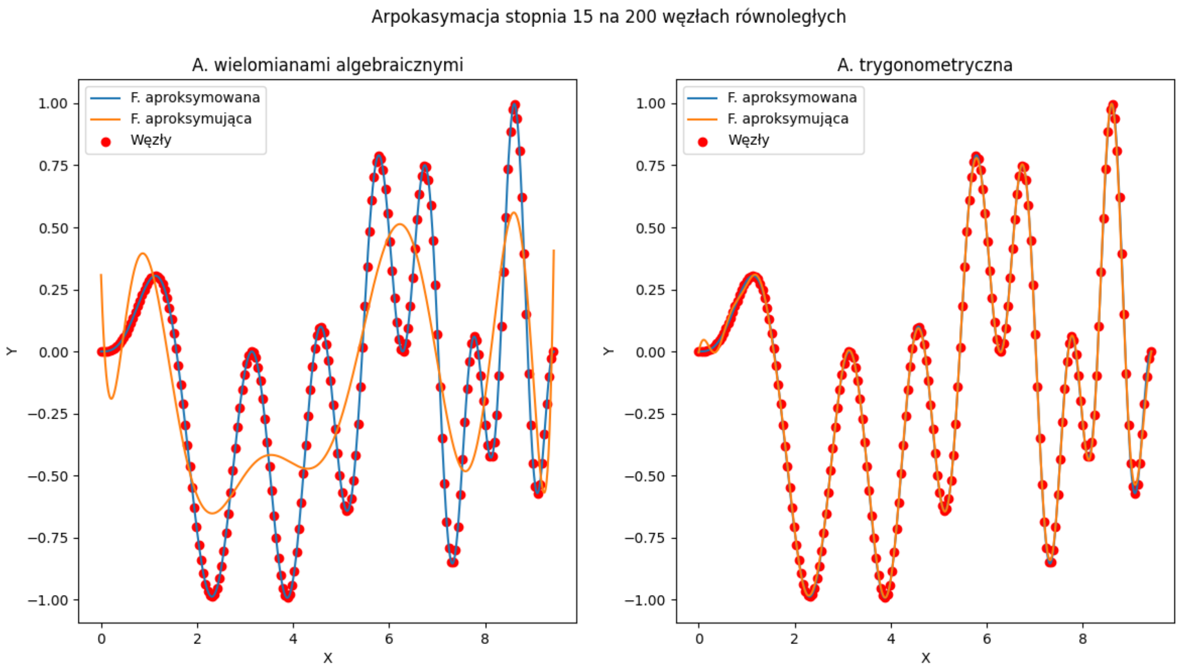
Tabela 3: Wyniki błędów dla aproksymacji stopnia 4 na 30 węzłach równoległych



Wykres 15: Aproksymacje stopnia 7 na 200 węzłach równoległych

Aproksymacja	Błąd maksymalny	Błąd średniokwadratowy
Algebraiczna	0.96621	0.06091
Trygonometryczna	0.61237	0.03767

Tabela 4: Wyniki błędów dla aproksymacji stopnia 7 na 200 węzłach równoległych



Wykres 16: Aproksymacje stopnia 15 na 200 węzłach równoległych

Aproksymacja	Błąd maksymalny	Błąd średniokwadratowy
Algebraiczna	0.55416	0.04722
Trygonometryczna	0.04876	0.00187

Tabela 5: Wyniki błędów dla aproksymacji stopnia 15 na 200 węzłach równoległych

Dla zadanej funkcji aproksymacja średniokwadratowa trygonometryczna daje o wiele lepsze przybliżenie niż aproksymacja średniokwadratowa wielomianami algebraicznymi.