

MOwNiT – aproksymacja średniokwadratowa trygonometryczna

Przygotował:

Maksymilian Zawiślak

Dla poniższej funkcji:

$$F(x) = \sin(2x) \cdot \sin\left(\frac{x^2}{\pi}\right)$$

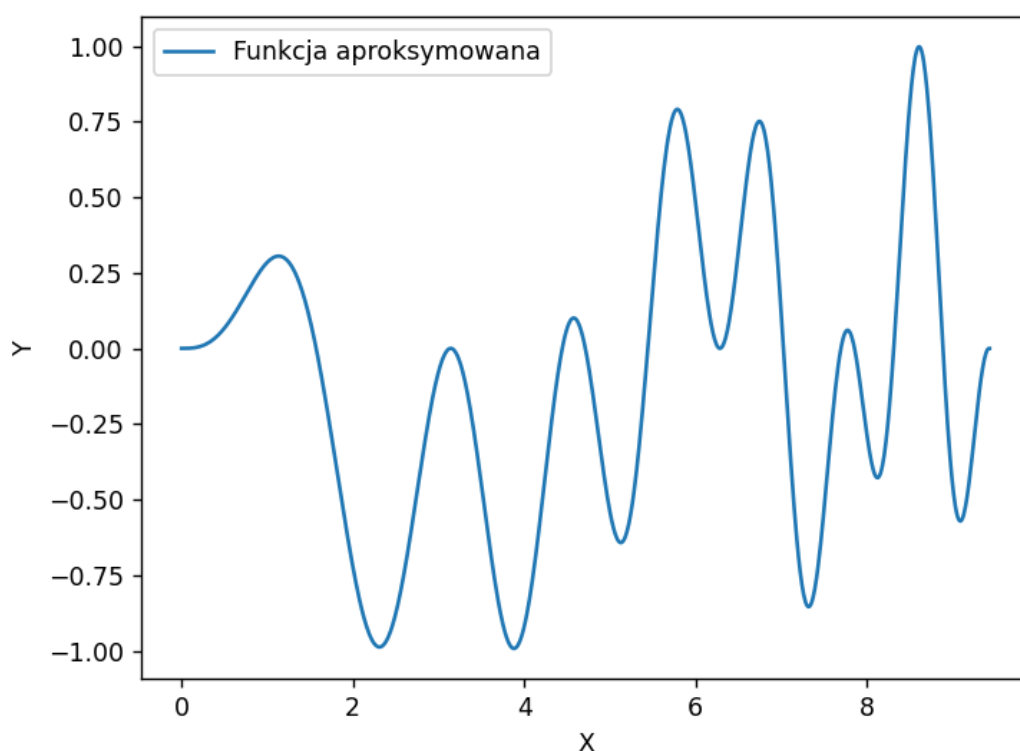
Wzór 1

na przedziale:

$$[0, 3\pi]$$

wyznaczyć jej wartości w n dyskretnych punktach. Następnie w oparciu o te punkty wyznaczyć przybliżenie funkcji wykorzystując aproksymację średniokwadratową trygonometryczną. Wykonać eksperymenty numeryczne dla różnej liczby punktów dyskretyzacji oraz układów funkcji bazowych zawierających różną liczbę funkcji. Oszacować błędy przybliżenia. Graficznie zilustrować interesujące przypadki.

Wykres głównej funkcji



Wykres 1: Wykres funkcji aproksymowanej

Wyznaczanie aproksymacji

Szukany jest wielomian w uogólnionej postaci:

$$f(x) = \sum_{j=0}^m a_j \varphi_j(x)$$

Wzór 2

Aby wyznaczyć aproksymację trygonometryczną należy założyć że funkcja aproksymowana jest ciągła oraz okresowa na przedziale długości 2π , a wartości węzłów są punktami na przedziale $[-\pi, \pi]$, określone wzorem:

$$x_i = \frac{2\pi}{n-1} i - \pi$$

Wzór 3

gdzie: $i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$

Jako ciąg funkcji bazowych przyjąć należy:

$$\varphi_j(x) = 1, \sin(x), \cos(x), \dots, \sin(mx), \cos(mx)$$

Wzór 4

gdzie: m to oczekiwany stopień wielomianu.

Ostatecznie aproksymację można wyznaczyć z następującego wzoru:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^m a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)$$

Wzór 5

gdzie:

$$a_k = \frac{2}{n} \sum_{i=0}^{n-1} F(x_i) \cos(kx_i)$$

Wzór 6

$$b_k = \frac{2}{n} \sum_{i=0}^{n-1} F(x_i) \sin(kx_i)$$

Wzór 7

Aby wyznaczyć wielomian aproksymacyjny dobrze uwarunkowany (liczba funkcji bazowych nie przekraczająca liczby węzłów), między stopniem wielomianu (m), a liczbą węzłów (n) powinno zachodzić:

$$m \leq \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$$

Wzór 8

Zadana funkcja jest na przedziale $[0, 3\pi]$, węzły należy przekształcić aby były na przedziale $[-\pi, \pi]$, przy pomocy takiego wzoru:

$$x'_i = \frac{x_i - 0}{3\pi - 0}(\pi - (-\pi)) + (-\pi)$$

Wzór 9

gdzie:

- x'_i to węzeł po przekształceniu
- x_i to węzeł przed przekształceniem

Błędy obliczeniowe przy aproksymacji

Błąd maksymalny:

$$\max_i \{|F(x_i) - f(x_i)|\}$$

Wzór 10

Błąd średniokwadratowy:

$$\frac{1}{N} \sqrt{\sum_{i=1}^N (F(x_i) - f(x_i))^2}$$

Wzór 11

$$i \in \{1, 2, \dots, N\}$$

gdzie:

$F(x)$ – funkcja interpolująca

$f(x)$ – funkcja interpolowana

N – liczba punktów użytych do rysowania wykresów

Błędy obliczeniowe

Wyliczenia błędów zostały wykonane dla błędu maksymalnego oraz średniokwadratowego. Liczby węzłów jakie były testowane to: 10, 15, 20, 30, 40, 60, 80, 100, 200, a stopnie wielomianu to: 2, 3, 5, 9, 15, 20. W

obliczeniach pamiętano o zasadzie $m \leq \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$.

- n to liczba węzłów
- m to stopień wielomianu

$n \backslash m$	2	3	5	9	15	20
10	1.18026	1.05194	-	-	-	-
20	1.03376	1.03878	0.66126	0.81963	-	-
30	1.03073	1.02818	0.61618	0.47593	-	-
40	1.0307	1.0276	0.61095	0.4753	0.05246	-
60	1.03089	1.02762	0.60712	0.47158	0.04778	0.02175
80	1.03102	1.02772	0.60539	0.46944	0.04785	0.02065
100	1.03111	1.02779	0.60438	0.46813	0.04809	0.02044
200	1.03128	1.02794	0.60238	0.46547	0.04876	0.02059

Tabela 1: Błąd maksymalny

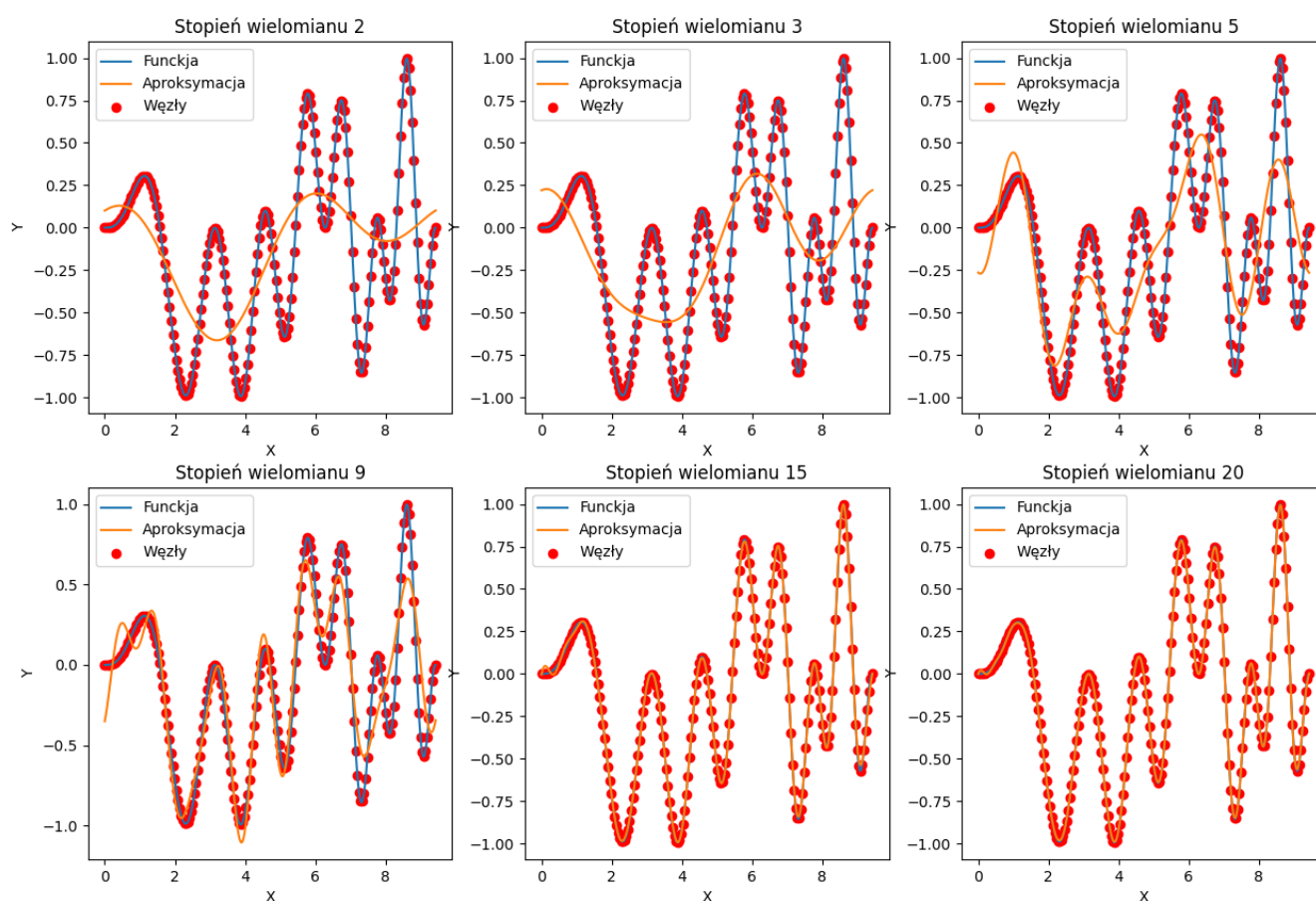
$n \backslash m$	2	3	5	9	15	20
10	1.50417	1.49866	-	-	-	-
20	0.61459	0.60064	0.46481	0.38504	-	-
30	0.40959	0.40023	0.30854	0.18409	-	-
40	0.30715	0.30013	0.23131	0.13786	0.01332	-
60	0.20475	0.20006	0.15416	0.0918	0.00744	0.00475
80	0.15356	0.15004	0.11561	0.06883	0.00516	0.00286
100	0.12284	0.12003	0.09248	0.05505	0.00397	0.00198
200	0.06142	0.06001	0.04624	0.02752	0.00187	0.00074

Tabela 2: Błąd średniokwadratowy

Analizując tabelę 1 oraz 2, można zauważyć, że najmniejsze wartości błędu średniokwadratowego występują niezależnie od stopnia wielomianu (m), dla 200 węzłów. Przy błędzie maksymalnym dla $n = 200$ wartość błędu nie zawsze jest najmniejsza, lecz różni się od najlepszego wyniku nie więcej niż 0.01. W przypadku różnej liczby węzłów (n), wartość parametru $m = 20$ daje najmniejsze wartości błędów, jeżeli spełniony jest warunek $m \leq \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$.

Porównanie aproksymacji dla stałej liczby węzłów

Aproksymacja na 200 węzłach równoległych



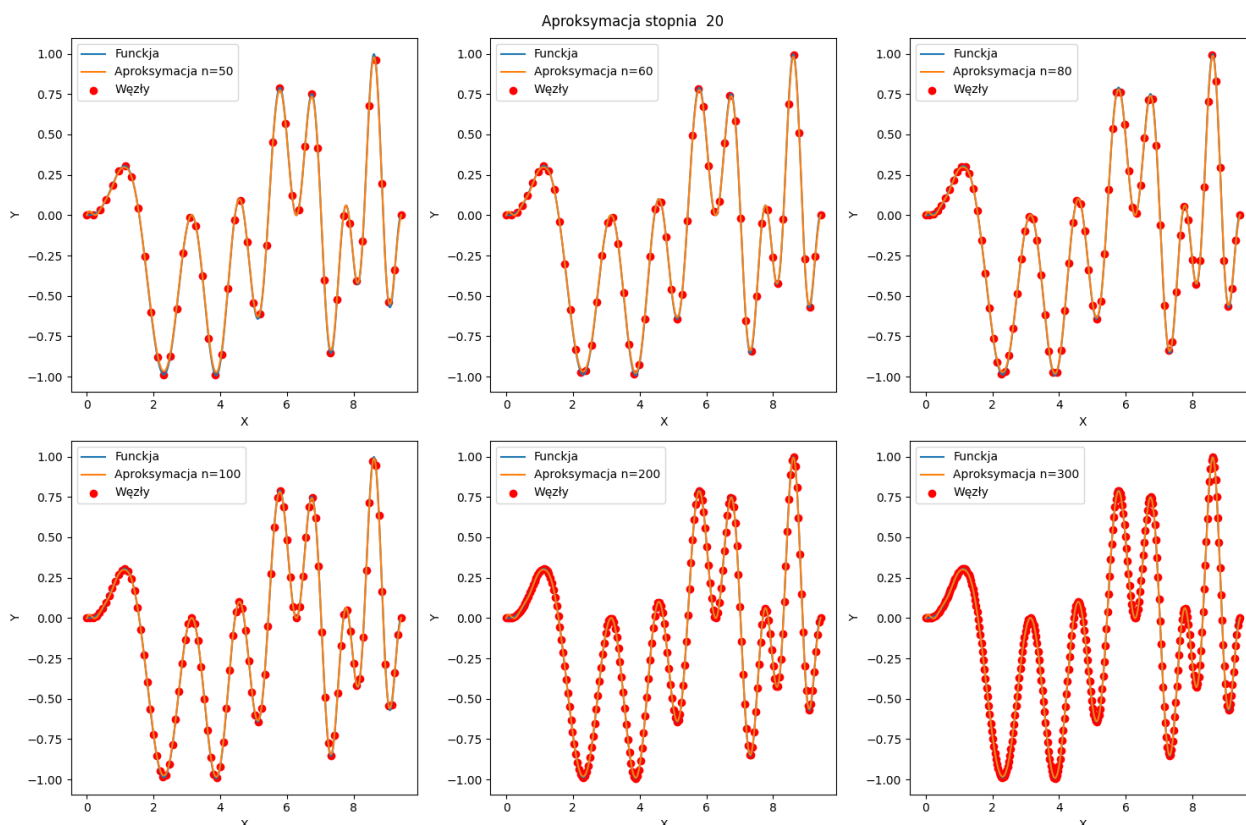
Wykresy 1: Wykresy aproksymacji dla $n = 200$

Wykresy 1 przedstawiają aproksymacje dla stałej liczby węzłów ($n = 200$), lecz dla różnych stopni wielomianu. Wraz ze wzrostem liczby funkcji bazowych w funkcji aproksymującej przybywa ekstremów lokalnych. Wzrost parametru m powoduje również zwiększenie dokładności aproksymacji oraz zmniejszenie wartości obu błędów co pokazuje tabel 3.

Stopień wielomianu (m)	Błąd maksymalny	Błąd średniokwadratowy
2	1.03128	0.06142
3	1.02794	0.06001
5	0.60238	0.04624
9	0.46547	0.02752
15	0.04876	0.00187
20	0.02059	0.00074

Tabela 3: Błędy aproksymacji dla $n = 200$

Porównanie aproksymacji dla stałego stopnia wielomianu



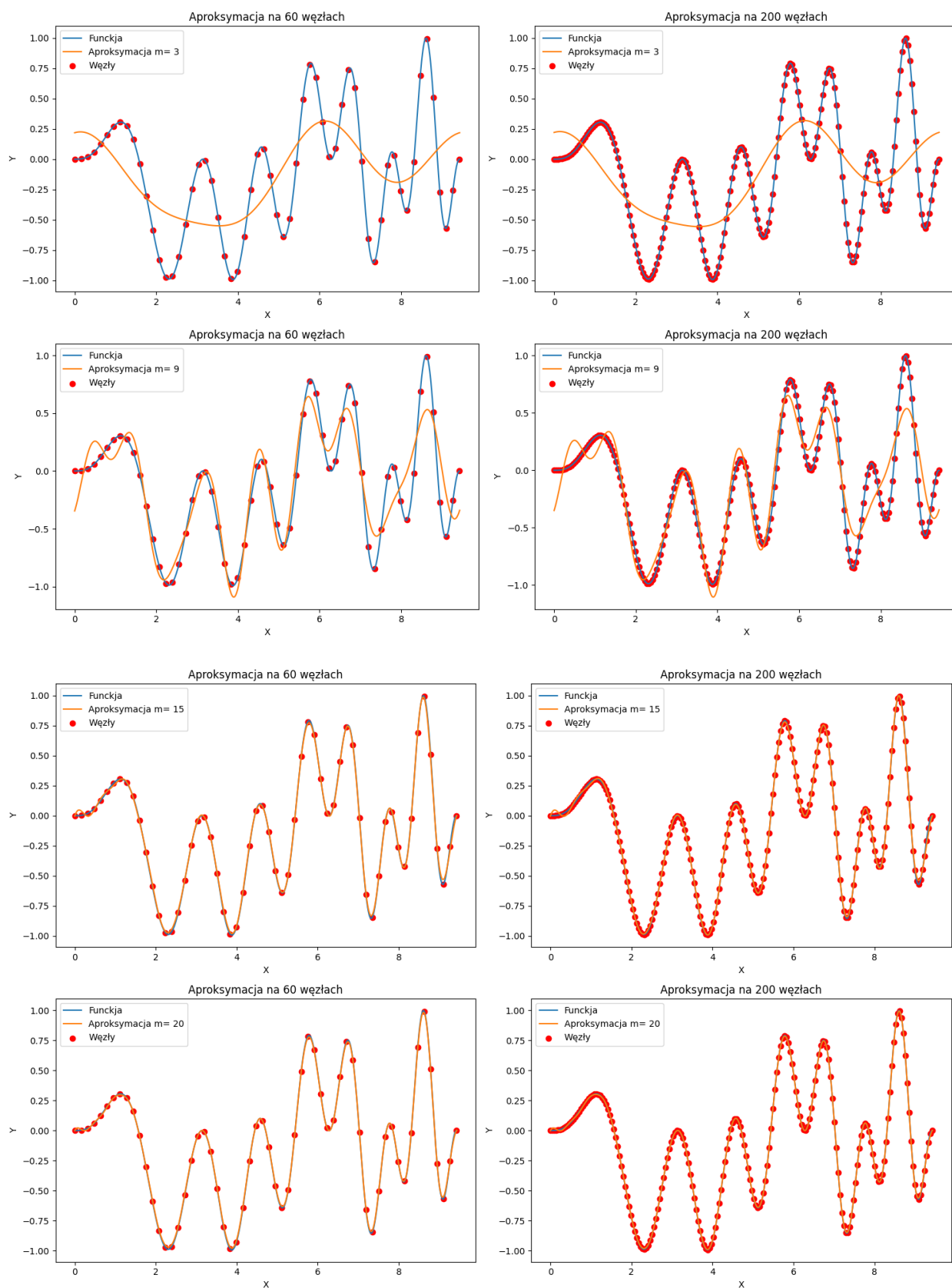
Wykresy 2: Wykresy aproksymacji dla $m = 20$

Wykresy 2 przedstawiają aproksymacje dla stałego stopnia wielomianu, lecz dla różnej liczby węzłów. Wartość parametru $m = 20$ została wybrana na podstawie wcześniejszych analiz tabeli błędów jako najlepiej przybliżająca wartość. Kształt aproksymacji niewiele różni się w zależności od liczby użytych węzłów. Mimo podobieństwa funkcji aproksymującej, w tabeli 4 można zaobserwować że wraz ze wzrostem parametru n stale maleje błąd średniokwadratowy. Błąd maksymalny również maleje lecz nie tak szybko jak błąd średniokwadratowy, można wręcz zaobserwować że utrzymuje się on na poziomie równym 0.02.

Liczba węzłów (n)	Błąd maksymalny	Błąd średniokwadratowy
50	0.02436	0.00667
60	0.02175	0.00475
80	0.02065	0.00286
100	0.02044	0.00198
200	0.02059	0.00074
300	0.02041	0.00045

Tabela 4: Błędy aproksymacji dla $m = 20$

Porównanie kształtów aproksymacji



Wykresy 3: Porównanie kształtów aproksymacji

Wykresy 3 przedstawiają porównanie kształtów aproksymacji na 60 oraz 200 węzłach dla wartości m równych 3, 9, 15 oraz 20. Można zaobserwować że kształt aproksymacji zależy bardziej od liczby funkcji bazowych niż od liczby węzłów. Dla $m = 9$ lub $m = 15$ zaobserwować można problemy z aproksymacją przy lewym końcu przedziału. Podejrzewanym problemem był błąd przy ustalaniu pierwszego i ostatniego węzła. Po weryfikacji okazało się, że wartość pierwszego węzła jest równa początkowi przedziału, a ostatniego końcowi, więc nie to powoduje problemy przy wyznaczaniu funkcji aproksymującej. Innym powodem występowania takiego zjawiska mogą być błędy arytmetyki komputerowej. Widać że dla większego stopnia wielomianu problem maleje. Dla wyższych wartości parametru m , aproksymacja jest bardziej dokładna, co widać po obliczonych błędach w tabeli 5. Mimo braku wyraźnych różnic w kształcie wykresów występują spore różnice w błędzie średniokwadratowym, na korzyść aproksymacji na 200 węzłach. W przypadku błędu maksymalnego takie duże różnice nie występują.

Liczba węzłów (n)	Stopień wielomianu (m)	Błąd maksymalny	Błąd średniokwadratowy
60	3	1.02762	0.20006
60	9	0.47158	0.0918
60	15	0.04778	0.00744
60	20	0.02175	0.00475
200	3	1.02794	0.06001
200	9	0.46547	0.02752
200	15	0.04876	0.00187
200	20	0.02059	0.00074

Tabela 5: Tabela błędy aproksymacji

Wnioski

Dla ustalonego stopnia wielomianu, zwiększanie liczby węzłów od pewnego momentu tylko nieznacznie poprawia dokładność funkcji aproksymującej. W tabeli 1 duży przeskok w wartościach błędu maksymalnego można zaobserwować między $n = 20$ oraz $n = 30$ dla $m = 9$, dalsze zwiększanie parametru n nie znacznie wpływa na wartość tego błędu. Dla ustalonej liczby węzłów, zwiększanie wielomianu, poprawia dokładność. Analogicznie jak przy zwiększaniu wartości n , wzrost parametru m od pewnego momentu nie wpływa znacząco na jakość przybliżenia. Liczba węzłów nie wpływa istotnie na kształt aproksymacji. Przy wyborze parametrów n oraz m należy pamiętać o warunku $m \leq \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$ oraz aby stopień wielomianu nie był za niski aby nie pojawił się wyżej opisywany problem z funkcją aproksymacją na końcach przedziałów. Dla zadanej funkcji aproksymacja trygonometryczna zadziałała lepiej niż aproksymacja wielomianami algebraicznymi.

Do obliczeń oraz wizualizacji został wykorzystany język programowania Python wraz z bibliotekami NumPy, math, pandas oraz matplotlib. Wszystko zostało wykonane pod system Windows 10 na procesorze i5-1135G7 2.40GHz z 16GB pamięci operacyjnej. Wykresy były generowane przy użyciu 944 punktów. Punkty były wyznaczone co 0.01 w całym przedziale.