

MOwNiT – kwadratowe oraz sześciennne funkcje sklejane

Przygotował:

Maksymilian Zawiślak

Dla poniższej funkcji:

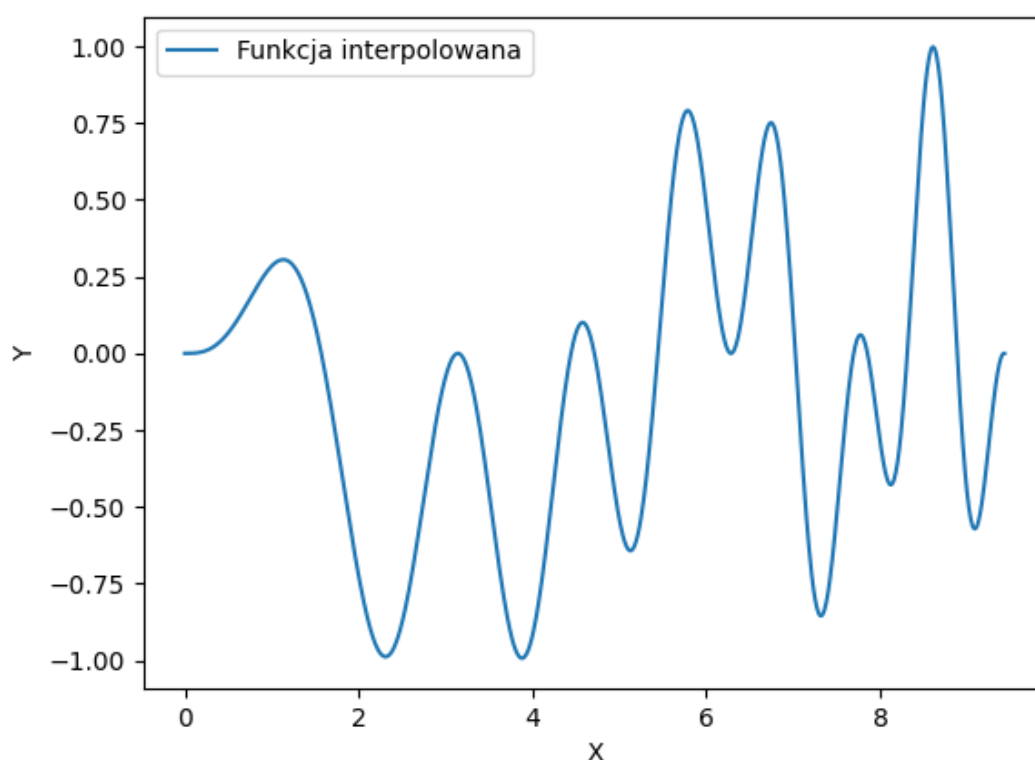
$$f(x) = \sin(2x) \cdot \sin\left(\frac{x^2}{\pi}\right)$$

na przedziale:

$$[0, 3\pi]$$

wyznaczyć interpolacyjną funkcję sklejaną trzeciego stopnia oraz drugiego stopnia. Dla obu rodzajów funkcji (2-go i 3-go stopnia) należy wykonać obliczenia dla co najmniej dwóch różnych warunków brzegowych. Określić dokładność interpolacji – dla różnej liczby przedziałów i dla różnych warunków brzegowych. Porównać interpolację funkcjami sklejanymi drugiego i trzeciego stopnia.

Wykres głównej funkcji



Wykres 1: Wykres funkcji interpolowanej

W zadaniu wykorzystano dwa rodzaje warunków granicznych:

- Naturalne granice (Natural Boundary) - pochodne na krańcach przedziału są równe 0
- Zaciśnięte granice (Clamped Boundary) - pierwsze pochodne na krańcu przedziału są znane, bądź przybliżone są ilorazami różnicowymi

Interpolacja sześcienna

Interpolacja musi spełniać następujące warunki:

- 1) $s_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - x_i)^3$
- 2) $s_i(x_{i+1}) = f_i(x_{i+1}) = y_i$
- 3) $s_i(x_{i+1}) = s_{i+1}(x_{i+1})$
- 4) $s_i'(x_{i+1}) = s_{i+1}'(x_{i+1})$
- 5) $s_i''(x_{i+1}) = s_{i+1}''(x_{i+1})$

Korzystając z warunku 1 można otrzymać:

$$s_i(x_i) = a_i + b_i(x_i - x_i) + c_i(x_i - x_i)^2 + d_i(x_i - x_i)^3$$

Wzór 1

$$s_i(x_i) = a_i = y_i$$

$s_i(x)$ to funkcja sześcienna, więc $s_i''(x)$ jest liniowa na przedziale $[x_i, x_{i+1}]$, dla oznaczenia $h_i = x_{i+1} - x_i$ zachodzi więc takie równanie:

$$s_i''(x) = s_i''(x_i) \frac{x_{i+1} - x_i}{h_i} + s_i''(x_{i+1}) \frac{x - x_i}{h_i}$$

Wzór 2

Całkując dwukrotnie wzór 2 otrzymywana jest funkcja:

$$s_i(x) = \frac{s_i''(x)}{6h_i}(x_{i+1} - x_i)^3 + \frac{s_i''(x_{i+1})}{6h_i}(x - x_i)^3 + C(x - x_i) + D(x_{i+1} - x)$$

Wzór 3

C i D w wzorze 3 to stałe po całkowaniu, które można wyliczyć korzystając z warunku 2, $s_i(x_i) = f_i(x_i) = y_i$ oraz $s_i(x_{i+1}) = f_i(x_{i+1}) = y_{i+1}$

$$s_i(x) = \frac{s_i''(x)}{6h_i}(x_{i+1} - x_i)^3 + \frac{s_i''(x_{i+1})}{6h_i}(x - x_i)^3 + \left(\frac{y_{i+1}}{h_i} - \frac{s_i''(x_{i+1})h_i}{6} \right)(x - x_i) + \left(\frac{y_i}{h_i} - \frac{s_i''(x)h_i}{6} \right)(x_{i+1} - x)$$

Wzór 4

We wzorze 4 nie znane jest $s_i''(x)$. Aby je wyliczyć należy skorzystać z warunku ciągłości pierwszej pochodnej. Wyniki po zróżniczkowaniu to:

$$s_i'(x_i) = -\frac{h_i}{3}s_i''(x) - \frac{h_i}{6}s_i''(x_{i+1}) - \frac{y_i}{h_i} + \frac{y_{i+1}}{h_i}$$

Wzór 5

Dla przejrzystości do wzoru 5 wyprowadzić można symbole:

$$\sigma_i = \frac{1}{6}s_i''(x) \text{ oraz } \Delta_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i}$$

$$s_i'(x_i) = -2\sigma_i h_i - \sigma_{i+1} h_i + \Delta_i$$

$$s_i'(x_i) = \Delta_i - h_i(2\sigma_i + \sigma_{i+1})$$

Wzór 6

$$s_{i-1}'(x_i) = \Delta_{i-1} + h_{i-1}(2\sigma_i + \sigma_{i-1})$$

Wzór 7

Z warunku 4 dochodzi do równości między wzorami 6 oraz 7:

$$\Delta_{i-1} + h_{i-1}(2\sigma_i + \sigma_{i-1}) = \Delta_i - h_i(2\sigma_i + \sigma_{i+1})$$

Wzór 8

Wynika z tego układ $n - 2$ równań linowych, ale jako że jest n niewiadomych σ_i , konieczne jest określenie dwóch dodatkowych warunków skrajnych.

$$\begin{bmatrix} h_1 & 2(h_1 + h_2) & h_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_2 & 2(h_2 + h_3) & h_3 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & h_{n-3} & 2(h_{n-3} + h_{n-2}) & h_{n-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & h_{n-2} & 2(h_{n-2} + h_{n-1}) & h_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \vdots \\ \sigma_{n-2} \\ \sigma_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta_2 - \Delta_1 \\ \Delta_3 - \Delta_2 \\ \vdots \\ \Delta_{n-2} - \Delta_{n-3} \\ \Delta_{n-1} - \Delta_{n-2} \end{bmatrix}$$

Warunek zaciśniętych granic dla funkcji sześciennych

$C_1(x)$ – funkcja sześcienna, która przechodzi przez pierwsze 4 punkty

$C_n(x)$ – funkcja sześcienna, która przechodzi przez ostatnie 4 punkty

$$s'''(x_1) = C_1''' \quad s'''(x_n) = C_n'''$$

Stałe C_1''' oraz C_n''' mogą być wyznaczone bez znajomości $C_1(x)$ oraz $C_n(x)$

$$\Delta_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}, \text{ przybliża } f'$$

$$\Delta_i^{(2)} = \frac{\Delta_{i+1} - \Delta_i}{x_{i+2} - x_i}, 2\Delta_i^{(2)} \text{ przybliża } f''$$

$$\Delta_i^{(3)} = \frac{\Delta_{i+1}^{(2)} - \Delta_i^{(2)}}{x_{i+3} - x_i}, 6\Delta_i^{(3)} \text{ przybliża } f'''$$

Po zróżniczkowaniu wzoru 2, $s_i''(x) = s_i''(x_i) \frac{x_{i+1} - x_i}{h_i} + s_i''(x_{i+1}) \frac{x - x_i}{h_i}$ otrzymany wynik to:

$$s_i'''(x) = \frac{-s_i''(x_i)}{h_i} + \frac{s_i''(x_{i+1})}{h_i} = \frac{-6\sigma_i}{h_i} + \frac{6\sigma_{i+1}}{h_i}$$

Wzór 9

Następnie korzystając z $s'''(x_1) = C_1'''$, $s'''(x_n) = C_n'''$ oraz wzoru 9 powstają kolejne wzory:

$$s'''(x_1) = c_1'''(x_1) \Rightarrow \frac{6}{h_1}(\sigma_2 - \sigma_1) = 6\Delta_1^{(3)}$$

$$\text{Wzór 10 } s'''(x_n) = c_n'''(x_n) \Rightarrow \frac{6}{h_{n-1}}(\sigma_n - \sigma_{n-1}) = 6\Delta_{n-3}^{(3)}$$

Wzór 11

Wzory 10 oraz 11 po przekształceniach wyglądają następująco i mogą one uzupełnić macierz układu równań:

$$(h_1 \sigma_2 - h_1 \sigma_1) = h_1^2 \Delta_1^{(3)}$$

Wzór 12

$$(h_{n-1} \sigma_{n-1} - h_{n-1} \sigma_n) = -h_n^2 \Delta_{n-3}^{(3)}$$

Wzór 13

$$\begin{bmatrix} -h_1 & h_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ h_1 & 2(h_1 + h_2) & h_2 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & h_{n-2} & 2(h_{n-2} + h_{n-1}) & h_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & h_{n-1} & -h_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \vdots \\ \sigma_{n-1} \\ \sigma_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1^2 \Delta_1^{(3)} \\ \Delta_2 - \Delta_1 \\ \vdots \\ \Delta_{n-1} - \Delta_{n-2} \\ -h_n^2 \Delta_{n-3}^{(3)} \end{bmatrix}$$

Warunek naturalnych granic dla funkcji sześciennych

Drugie pochodne na krańcach przedziałów mają wartości równą zero:

$$s''(x_1) = s''(x_n) = 0$$

Pamiętając oznaczenie $\sigma_i = \frac{1}{6} s_i''(x)$, otrzymuje się poniższe równia, które uzupełniają macierze układu równań :

$$s''(x_1) = 0 \Rightarrow \sigma_1 = 0$$

$$s''(x_n) = 0 \Rightarrow \sigma_n = 0$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ h_1 & 2(h_1 + h_2) & h_2 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & h_{n-2} & 2(h_{n-2} + h_{n-1}) & h_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \vdots \\ \sigma_{n-1} \\ \sigma_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \Delta_2 - \Delta_1 \\ \vdots \\ \Delta_{n-1} - \Delta_{n-2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Interpolacja kwadratowa

Interpolacja musi spełniać następujące warunki:

- 1) $s_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2$
- 2) $s_i(x_{i+1}) = f_i(x_{i+1}) = y_i$
- 3) $s_i(x_{i+1}) = s_{i+1}(x_{i+1})$
- 4) $s_i'(x_{i+1}) = s_{i+1}'(x_{i+1})$

Korzystając z warunku 1 można otrzymać

$$s_i(x_i) = a_i + b_i(x_i - x_i) + c_i(x_i - x_i)^2$$

Wzór 14

$$s_i(x_i) = a_i = y_i$$

Po zróżniczkowaniu wyrażania z warunku 1 otrzymuje się wzór:

$$s_i'(x) = b_i + 2c_i(x - x_i)$$

Wzór 15

Więc korzystając z wzoru 15 można otrzymać dwa następujące wzory:

$$s_i'(x_{i+1}) = b_i + 2c_i(x_{i+1} - x_i)$$

Wzór 16

$$s_{i+1}'(x_{i+1}) = b_{i+1} + 2c_{i+1}(x_{i+1} - x_{i+1})$$

Wzór 17

Korzystając z warunku 4 można przyrównać wzór 16 oraz 17:

$$b_{i+1} + 2c_{i+1}(x_{i+1} - x_{i+1}) = b_i + 2c_i(x_{i+1} - x_i)$$

$$b_{i+1} - b_i = 2c_i(x_{i+1} - x_i)$$

$$\frac{b_{i+1} - b_i}{2(x_{i+1} - x_i)} = c_i$$

Wzór 18

Korzystając z warunku 1 można wyprowadzić następujące wzory:

$$s_i(x_{i+1}) = a_i + b_i(x_{i+1} - x_i) + c_i(x_{i+1} - x_i)^2$$

Wzór 19

$$s_{i+1}(x_{i+1}) = a_{i+1} + b_{i+1}(x_{i+1} - x_{i+1}) + c_{i+1}(x_{i+1} - x_{i+1})^2$$

Wzór 20

Następnie korzystając z warunku 3 można przyrównać wzory 19 oraz 20.

$$a_{i+1} + b_{i+1}(x_{i+1} - x_{i+1}) + c_{i+1}(x_{i+1} - x_{i+1})^2 = a_i + b_i(x_{i+1} - x_i) + c_i(x_{i+1} - x_i)^2$$

$$y_{i+1} = y_i + b_i(x_{i+1} - x_i) + c_i(x_{i+1} - x_i)^2$$

Wzór 21

Można następnie podstawić wcześniej wyprowadzony wzór 18:

$$y_{i+1} = y_i + b_i(x_{i+1} - x_i) + \frac{b_{i+1} - b_i}{2(x_{i+1} - x_i)}(x_{i+1} - x_i)^2$$

$$y_{i+1} = y_i + (x_{i+1} - x_i) \left(b_i + \frac{b_{i+1} - b_i}{2} \right)$$

$$2 \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} = b_{i+1} + b_i$$

Wzór 22

Przesuwając indeksy ze wzoru 22:

$$\theta_i = \frac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}$$

Wzór 23

$$2\theta_{i+1} = b_{i-1} + b_{i+1}$$

Wzór 24

Ze wzoru 24 wynika układ $n - 1$ równań z n z niewiadomymi. Konieczne jest określenie jeszcze jednego dodatkowego równania z warunków brzegowych.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_{n-2} \\ b_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\theta_2 \\ 2\theta_3 \\ \vdots \\ 2\theta_{n-2} \\ 2\theta_{n-1} \end{bmatrix}$$

Warunek zaciśniętych granic dla funkcji kwadratowych

W tym warunku brzegowym zakłada się, że pierwsze pochodne na krańcach są znane lub można przybliżyć je przy pomocy ilorazów różnicowych.

$$S_1'(x_1) = f_1' \text{ lub } S_n'(x_n) = f_n'$$

Aby przybliżyć f_1' można skorzystać z ilorazu różnicowego:

$$S_1'(x_1) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Wzór 25

Wzór 23 oraz wzór 25 są sobie równe:

$$\theta_2 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$S_1'(x_1) = \theta_2$$

Wzór 26

Teraz pamiętając wzór 15 oraz korzystając ze wzoru 26 dochodzi do równości:

$$\theta_2 = b_1 + 2c_1(x_1 - x_1)$$

$$\theta_2 = b_1$$

Wzór 27

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{n-1} \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_2 \\ 2\theta_2 \\ \vdots \\ 2\theta_{n-1} \\ 2\theta_n \end{bmatrix}$$

Otrzymany warunek brzegowy można wpisać do macierzy z układem równań, która teraz jest rozwiązywalna. Analogicznie będzie dla przypadku $S_n'(x_n) = f_n'$. W dalszych obliczeniach interpolacji korzystałem z warunku $S_1'(x_1) = f_1'$.

Warunek naturalnych granic dla funkcji kwadratowych

Pierwsze pochodne na krańcach przedziałów mają wartości równą zero:

$$S_1'(x_1) = 0 \text{ lub } S_n'(x_n) = 0$$

Po połączeniu powyższego założenia oraz wzoru 15 otrzymana równość to:

$$b_1 + 2c_1(x_1 - x_1) = 0$$

$$b_1 = 0$$

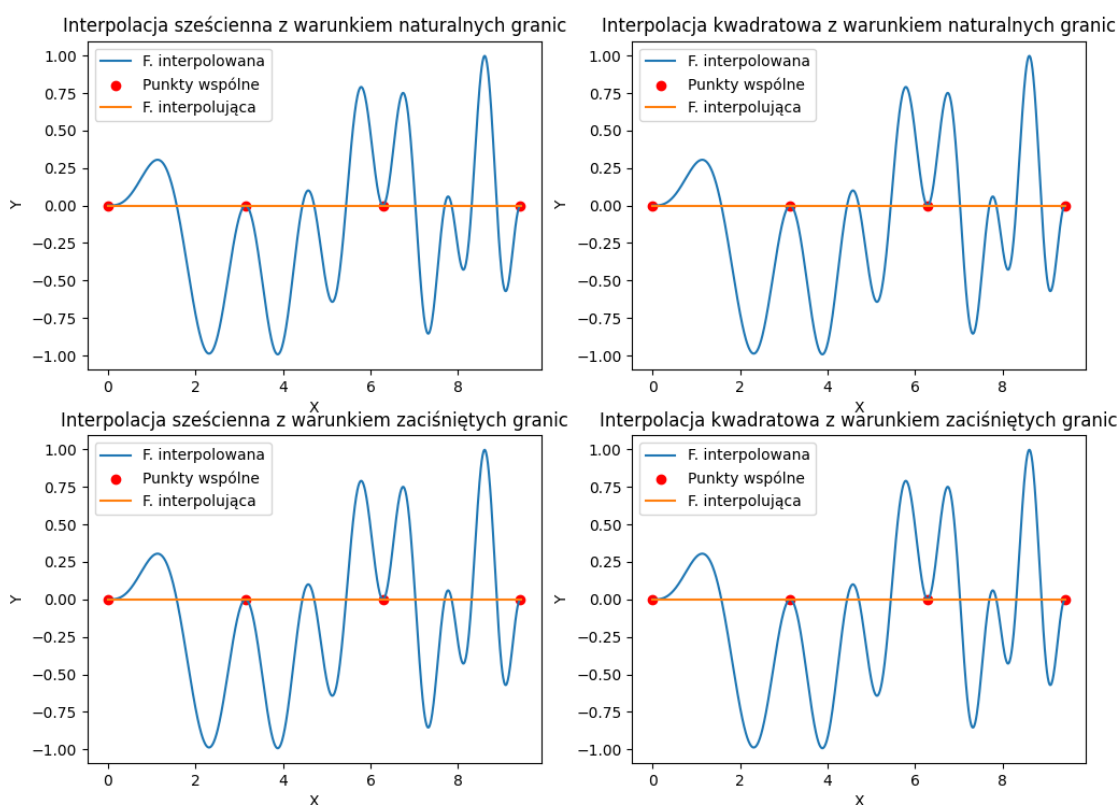
Wzór 28

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{n-1} \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2\theta_2 \\ \vdots \\ 2\theta_{n-1} \\ 2\theta_n \end{bmatrix}$$

Otrzymany warunek brzegowy można wpisać do macierzy z układem równań, która teraz jest rozwiązywalna. Analogicznie będzie dla przypadku $S_n'(x_n) = f_n'$. W dalszych obliczeniach interpolacji korzystałem z warunku $S_1'(x_1) = f_1'$.

Wykresy interpolacji kwadratowych oraz sześciennych

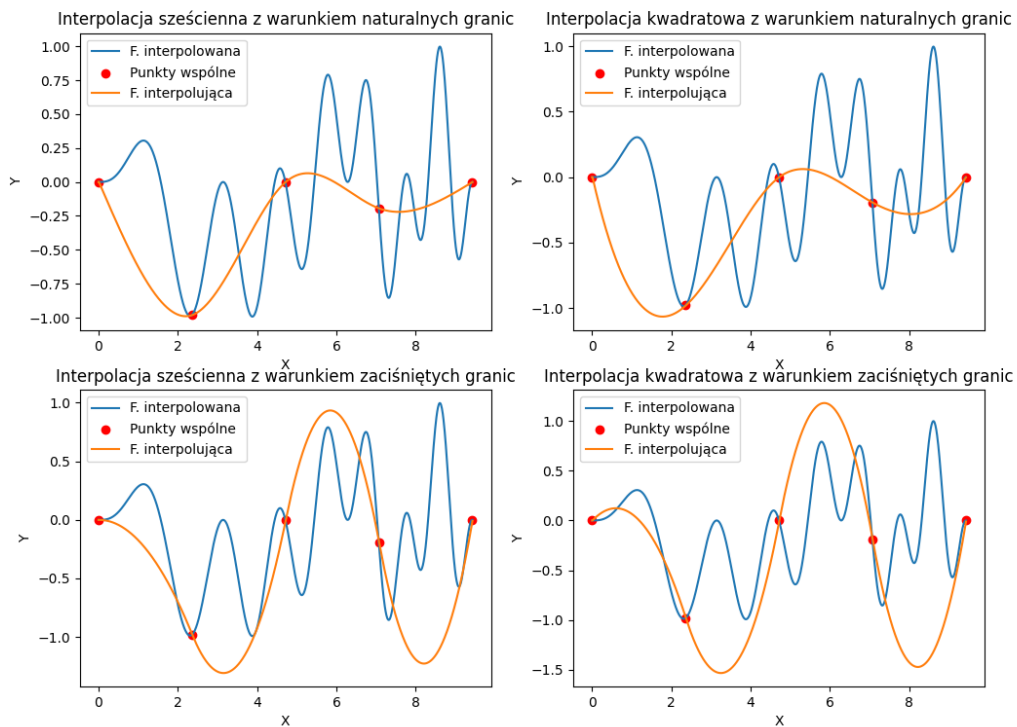
Interpolacje na 4 węzłach równoległych



Wykres 2: Wykresy interpolacji funkcjami sklejanymi na 4 węzłach równoległych

Na wykresie 2 interpolacja jest linią prostą. Dzieje się tak, gdy węzły trafiają w wartość związane z liczbą π , tutaj węzły są na wartościach $[0, \pi, 2\pi, 3\pi]$. Analogiczna prosta linia występowała dla interpolacji Newtona, Lagrange'a oraz Hermit'a.

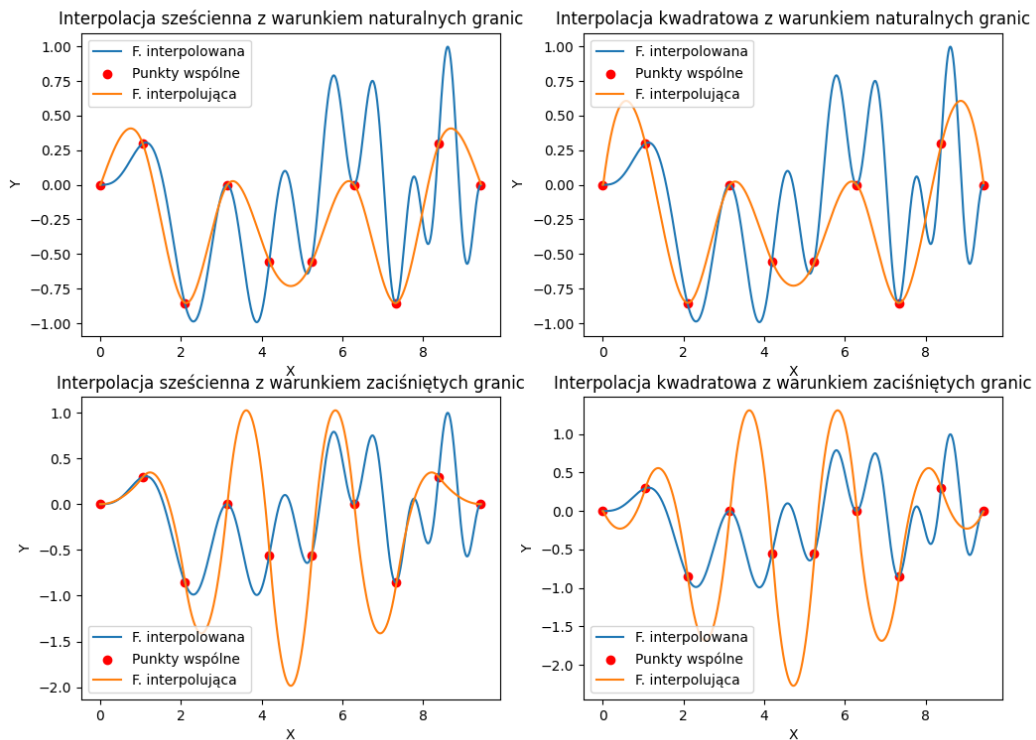
Interpolacje na 5 węzłach równoległych



Wykres 3: Wykresy interpolacji funkcjami sklejanymi na 5 węzłach równoległych

Widać na wykresie 3, że interpolacje zaczynają się różnić w zależności od rodzaju funkcji sklejanych, ale także w zależności od warunku granicznego.

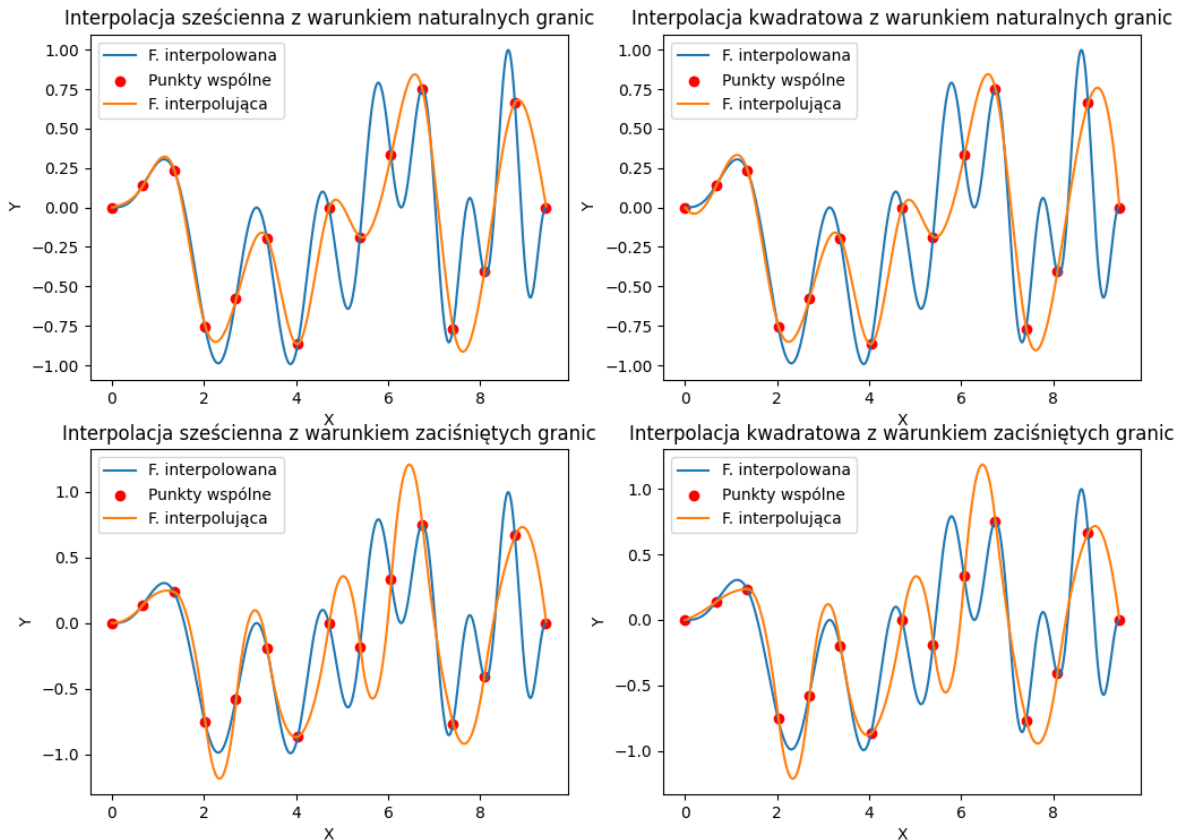
Interpolacje na 10 węzłach równoległych



Wykres 4: Wykresy interpolacji funkcjami sklejanymi na 10 węzłach równoległych

Wykres 3 oraz 4 pokazują, że zastosowanie funkcji sklejanych przeciwdziała występowaniu efektu Rungego, który w przypadku interpolacji Hermit'a pojawiał się już przy 5 węzłach interpolacji a dla interpolacji Lagrange'a oraz Newtona dla 10 węzłów.

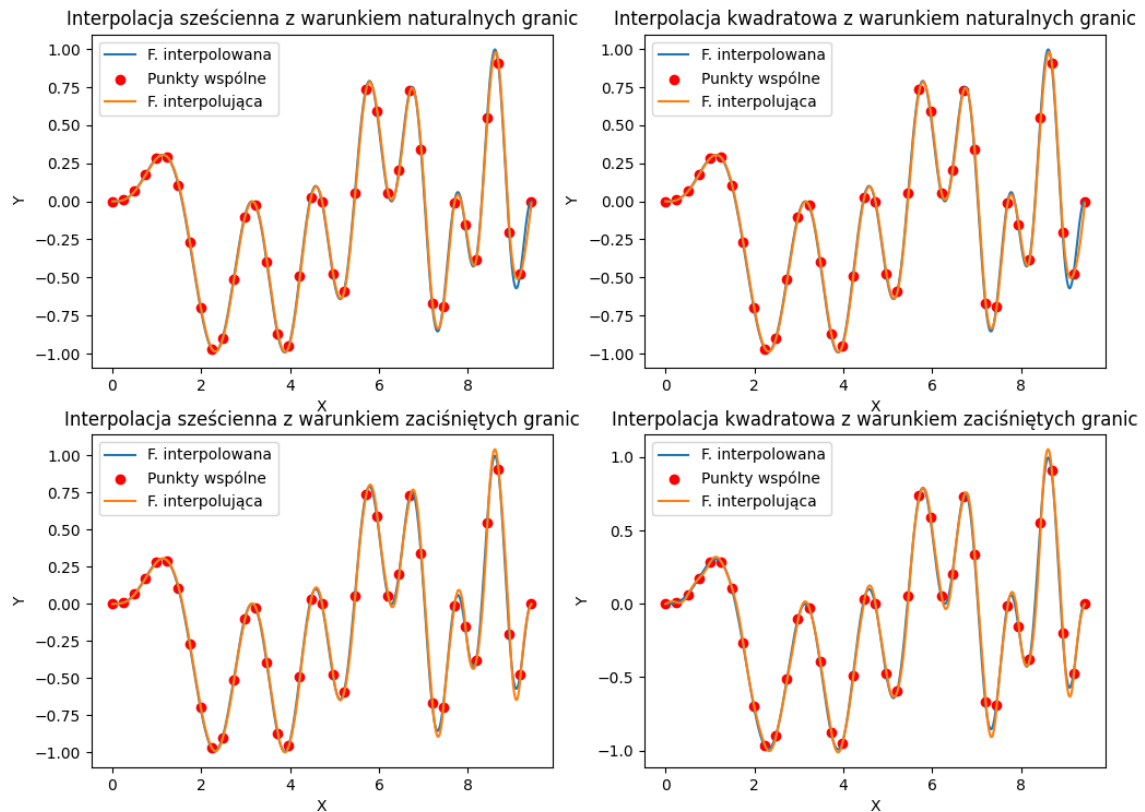
Interpolacje na 15 węzłach równoległych



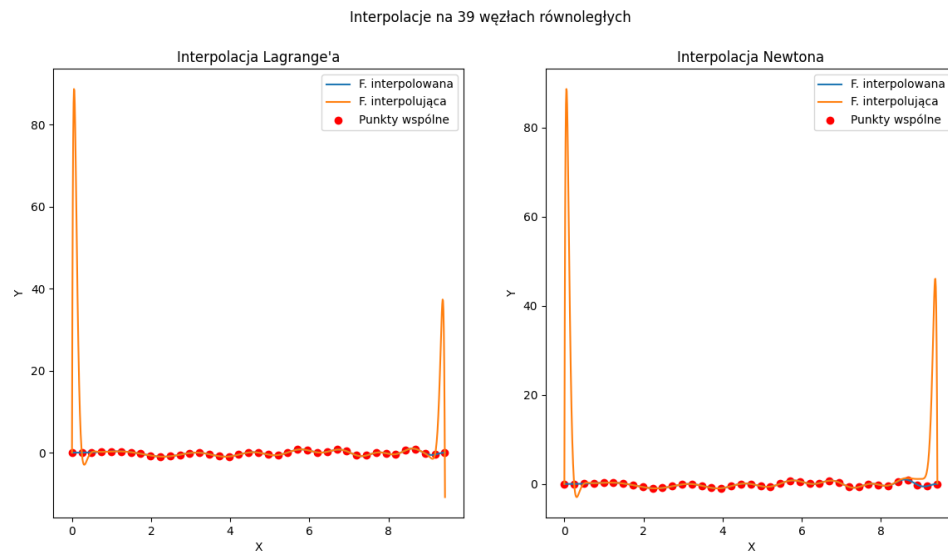
Wykres 5: Wykresy interpolacji funkcjami sklejanymi na 15 węzłach równoległych

Na wykresach 3, 4 oraz 5 można zaobserwować, że interpolacje tego samego rodzaju lecz o różnych warunkach brzegowych różnią się. Na wykresach interpolacji z warunkiem naturalnych granic funkcja interpolująca wykonuje mniejsze oscylacje. Można też zauważyć, że interpolacje o tych samych warunkach brzegowych lecz innych rodzajów, są do siebie bardzo podobne. Znaczące różnice w kształcie funkcji można zaobserwować dopiero na krańcach przedziałów.

Interpolacje na 39 węzłach równoległych



Wykres 6: Wykresy interpolacji funkcjami sklejanymi na 39 węzłach równoległych



Wykres 7: Wykresy interpolacji Lagrange'a oraz Newtona na 39 węzłach równoległych

Na wykresie 6 interpolacje funkcjami sklejanymi zgadzają się z zadaną funkcją. Natomiast interpolacje Lagrange'a i Newtona na wykresie 7 dla tej samej liczby węzłów znacznie odbiegają od funkcji interpolowanej na krańcach przedziału.

Błędy funkcji interpolującej

Błąd maksymalny:

$$\max_i \{|F(x_i) - f(x_i)|\}$$

Błąd średniokwadratowy:

$$\frac{1}{N} \sqrt{\sum_{i=1}^N (F(x_i) - f(x_i))^2}$$

gdzie:

$F(x)$ – funkcja interpolująca

$f(x)$ – funkcja interpolowana

N – liczba punktów użytych do rysowania wykresów, $i \in \{1, 2, \dots, N\}$

Próby przeprowadzono odpowiednio na 4, 5, 11, 12, 15, 20, 30, 40, 50, 60, 75, 100, 200, 300 oraz 400 równoległych węzłach interpolacji dla obu rodzaju warunków brzegowych.

Liczba węzłów	Warunek naturalnych granic (Natural Boundary)		Warunek zaciśniętych granic (Clamped Boundary)	
	Błąd maksymalny	Błąd średniokwadratowy	Błąd maksymalny	Błąd średniokwadratowy
4	0.997662	3.837342	0.997662	3.837342
5	1.135079	3.262593	1.270987	3.626906
11	1.086372	1.180893	1.398269	1.287586
12	1.213437	1.198861	1.486975	1.270141
15	1.112085	0.760890	1.288334	0.803551
20	0.723908	0.364619	0.712308	0.355153
30	0.241311	0.053609	0.463905	0.079200
40	0.131268	0.019622	0.143280	0.020318
50	0.078169	0.012968	0.053546	0.012321
60	0.053668	0.010337	0.053185	0.010090
75	0.052226	0.008138	0.052327	0.008077
100	0.051995	0.006073	0.051998	0.006063
200	0.052066	0.003033	0.052066	0.003032
300	0.052068	0.002022	0.052068	0.002022
400	0.052068	0.001516	0.052068	0.00151

Tabela 1: Wyniki błędów interpolacji sześcienniej

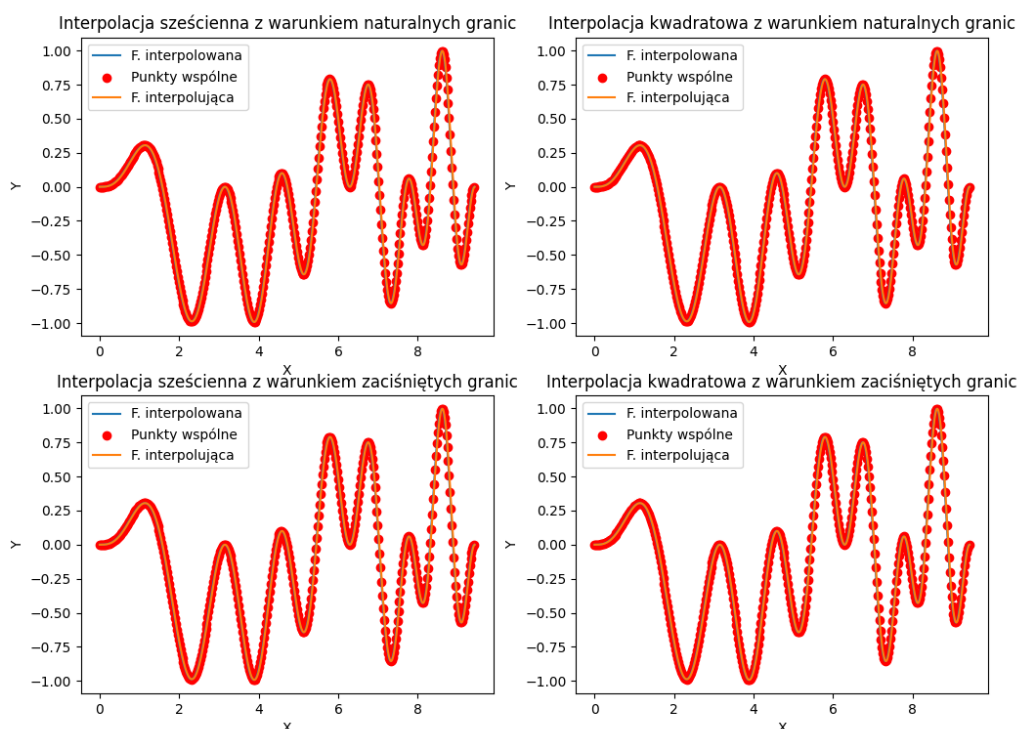
Przy analizie tabeli 1 okazuje się, że dokładne określenie preferowanego warunku brzegowego dla interpolacji sześcienniej jest niemożliwe. Wartości błędów są uzależnione od liczby węzłów i zdarza się, że mniejsze wartości błędów są osiągane dla naturalnych granic, a czasami dla warunku zaciśniętych granic.

Liczba węzłów	Warunek naturalnych granic (Natural Boundary)		Warunek zaciśniętych granic (Clamped Boundary)	
	Błąd maksymalny	Błąd średniokwadratowy	Błąd maksymalny	Błąd średniokwadratowy
4	0.997662	3.837342	0.997662	3.837342
5	2.099195	4.398656	2.324764	5.111037
11	3.079799	2.822248	3.276233	3.130432
12	1.528804	1.318254	1.415550	1.283674
15	1.315155	1.006169	1.291032	0.992279
20	0.821747	0.372853	0.875740	0.391736
30	0.295243	0.072990	0.322131	0.079831
40	0.088412	0.020153	0.094058	0.022025
50	0.071206	0.012867	0.067456	0.013360
60	0.054560	0.010285	0.057056	0.010431
75	0.052965	0.008125	0.052838	0.008154
100	0.053838	0.006075	0.054536	0.006079
200	0.052293	0.003034	0.052366	0.003034
300	0.052140	0.002023	0.052180	0.002023
400	0.052097	0.001517	0.052094	0.001517

Tabela 2: Wyniki błędów interpolacji kwadratowej

Podobne spostrzeżenia jak w tabeli 1 można odnotować analizując błędy interpolacji funkcjami kwadratowymi z tabeli 2. Warto jednak zauważyć, że najmniejsze wartości błędów w obu przypadkach pojawiają się dla największej liczby testowanych węzłów interpolacji, niezależnie od użytego warunku brzegowego.

Interpolacje na 400 węzłach równoległych



Wykres 8: Wykresy interpolacji funkcjami sklejanymi na 400 węzłach równoległych

Analizując wykres 8, można wywnioskować, że użyta metoda interpolacji lub zastosowany warunek brzegowy nie ma wpływu na dopasowanie wykresów do funkcji interpolowanej. Wszystkie krzywe interpolacyjne doskonale pasują do danej w zadaniu funkcji, co świadczy o wysokiej skuteczności interpolacji.

Wnioski

Metoda interpolacji za pomocą funkcji sklepanych umożliwia otrzymanie znacznie bardziej precyzyjnej funkcji interpolującej niż interpolacje Newtona, Lagrange'a czy Hermit'a. Jednym z najważniejszych atutów tej metody jest to, że w przeciwieństwie do wcześniej wspomnianych interpolacji, nie występuje w niej efekt Rungego. Jednakże, wybór odpowiednich warunków brzegowych ma kluczowe znaczenie dla uzyskanej funkcji interpolacyjnej, zwłaszcza w przypadku interpolacji sześcienniej, gdzie konieczne jest wyznaczenie dwóch warunków brzegowych. Warto również zauważyć, że zwiększanie liczby węzłów interpolacji przekłada się na zwiększenie jej dokładności. Dokładność dopasowania funkcji interpolującej jest osiągana znacznie szybciej niż w przypadku wymienionych powyżej interpolacji.

Do obliczeń oraz wizualizacji został wykorzystany język programowania Python wraz z bibliotekami NumPy, math, pandas oraz matplotlib. Wszystko zostało wykonane pod system Windows 10 na procesorze i5-1135G7 2.40GHz z 16GB pamięci operacyjnej. Wykresy były generowane przy użyciu 944 punktów. Punkty były wyznaczone co 0.01 w całym przedziale. Układy równań liniowych były rozwiązywane przy użyciu funkcji `linalg.solve()` z biblioteki NumPy.