

MOwNiT – aproksymacja średniokwadratowa wielomianami algebraicznymi

Przygotował:

Maksymilian Zawiślak

Dla poniższej funkcji:

$$F(x) = \sin(2x) \cdot \sin\left(\frac{x^2}{\pi}\right)$$

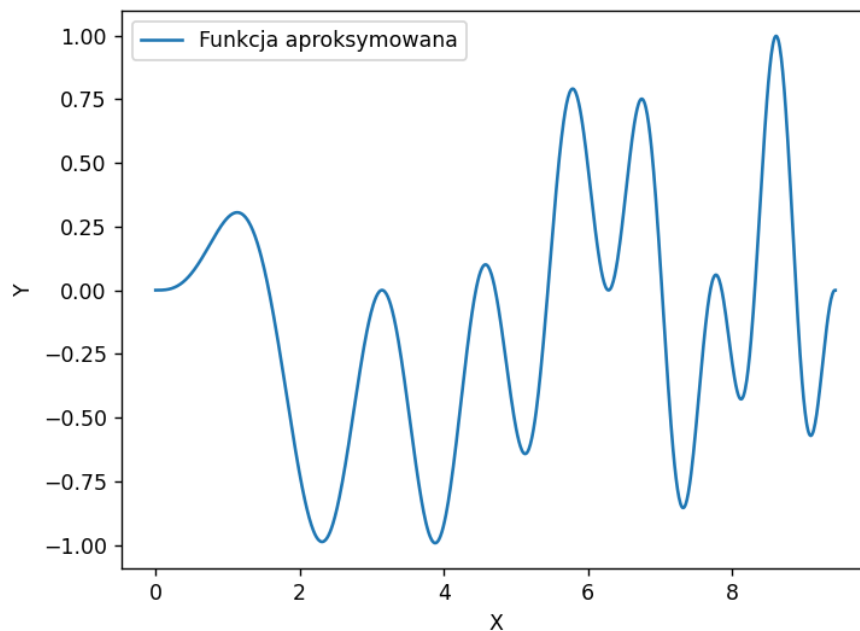
Wzór 1

na przedziale:

$$[0, 3\pi]$$

wyznaczyć jej wartości w n dyskretnych punktach. Następnie w oparciu o te punkty wyznaczyć przybliżenie funkcji wykorzystując aproksymację średniokwadratową wielomianami algebraicznymi. Wykonać eksperymenty numeryczne dla różnej liczby punktów dyskretyzacji oraz układów funkcji bazowych zawierających różną liczbę funkcji. Oszacować błędy przybliżenia. Graficznie zilustrować interesujące przypadki.

Wykres głównej funkcji



Wykres 1: Wykres funkcji aproksymowanej

Wyznaczenie aproksymacji

Posiadane dane:

- n punktów dyskretyzacji, $x_i, y_i = F(x_i)$, gdzie $i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$
- układ funkcji bazowych do składania funkcji aproksymacyjnej $\phi_j(x)$, gdzie $j \in \{0, 1, \dots, m\}$, oraz $m \leq n$

Szukany jest wielomian w uogólnionej postaci:

$$f(x) = \sum_{j=0}^m a_j \varphi_j(x)$$

Wzór 2

Przyjmując że funkcje bazowe mają postać $\varphi_j(x) = x^j$, gdzie $j \in \{0, 1, \dots, m\}$ to wzór 2 przyjmie formę:

$$f(x) = \sum_{j=0}^m a_j x^j$$

Wzór 3

Aby wyznaczyć współczynniki a_j można skorzystać z macierzowego układu równań:

$$\begin{bmatrix} \sum w_i & \sum w_i x_i & \sum w_i x_i^2 & \dots & \sum w_i x_i^m \\ \sum w_i x_i & \sum w_i x_i^2 & \sum w_i x_i^3 & \dots & \sum w_i x_i^{m+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sum w_i x_i^m & \sum w_i x_i^{m+1} & \sum w_i x_i^{m+2} & \dots & \sum w_i x_i^{2m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum w_i F_i \\ \sum w_i F_i x_i \\ \vdots \\ \sum w_i F_i x_i^m \end{bmatrix}$$

Gdzie w_i jest to waga dla danego węzła, w dalszych obliczeniach wartość ta zawsze była równa 1.

Błędy obliczeniowe przy aproksymacji

Błąd maksymalny:

$$\max_i \{|F(x_i) - f(x_i)|\}$$

Błąd średniokwadratowy:

$$\frac{1}{N} \sqrt{\sum_{i=1}^N (F(x_i) - f(x_i))^2}$$

$$i \in \{1, 2, \dots, N\}$$

gdzie:

$F(x)$ – funkcja interpolująca

$f(x)$ – funkcja interpolowana

N – liczba punktów użytych do rysowania wykresów,

Błędy obliczeniowe

Wyliczenia błędów zostały wykonane dla błędu maksymalnego oraz średniokwadratowego. Liczby węzłów jakie były testowane to: 10, 15, 20, 30, 40, 60, 80, 100, 200 a stopnie wielomianów to: 2, 3, 5, 7, 8, 9. W obliczeniach pamiętano o zasadzie $m < n$.

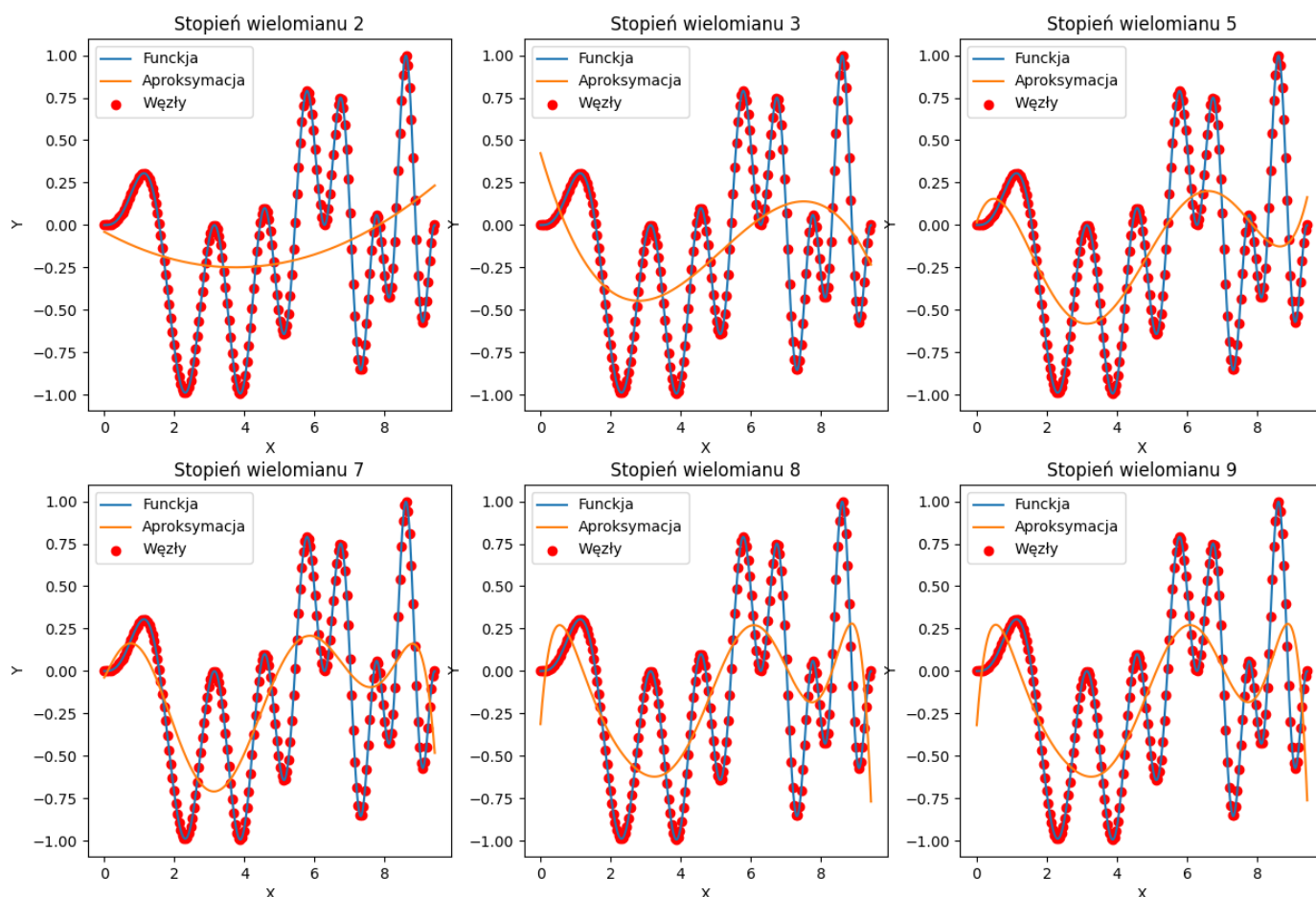
Liczba węzłów (n)	Stopień wielomianu (m)	Błąd maksymalny	Błąd średniokwadratowy
10	3	1.21358	1.53153
10	5	1.23023	1.53344
10	7	1.32666	1.56124
10	8	3.09115	3.01694
10	9	3.09013	3.01696
15	2	0.99162	0.95661
15	3	0.93699	0.89819
15	5	1.13238	0.8428
15	7	1.05471	0.84878
15	8	1.57143	0.9457
15	9	2.07546	1.07115
20	2	0.97877	0.71743
20	3	0.96704	0.6645
20	5	1.14554	0.631
20	7	0.95555	0.60221
20	8	0.94632	0.5977
20	9	0.9339	0.59711
30	2	0.97738	0.47821
30	3	0.97793	0.44157
30	5	1.12849	0.42064
30	7	0.90717	0.39879
30	8	0.89649	0.39397
30	9	0.88305	0.39389
40	2	0.97738	0.35862
40	3	0.98183	0.33081
40	5	1.1262	0.31543
40	7	0.89414	0.29845
40	8	0.87943	0.29389
40	9	0.86957	0.29388
60	2	0.97748	0.23906
60	3	0.98561	0.22036
60	5	1.12489	0.21026
60	7	0.88172	0.19859
60	8	0.85997	0.1948
60	9	0.85389	0.19481
80	2	0.97754	0.17929
80	3	0.98752	0.16522
80	5	1.12431	0.15768
80	7	0.87496	0.14882
80	8	0.84814	0.14568
80	9	0.84399	0.14569
100	2	0.97759	0.14343
100	3	0.98868	0.13216
100	5	1.12395	0.12614
100	7	0.87061	0.11901
100	8	0.84013	0.11636
100	9	0.83713	0.11636
200	2	0.97767	0.07172
200	3	0.99104	0.06607
200	5	1.12316	0.06307
200	7	0.86116	0.05947
200	8	0.8216	0.05804
200	9	0.82082	0.05803

Tabela 1: Wyniki błędów aproksymacji

Analizując tabelę 1, można zauważyć, że najmniejsze wartości błędów występują niezależnie od wartości parametru m , dla 200 węzłów. Ponadto, w przypadku tej samej liczby węzłów (n), wartość parametru $m = 7$ często daje najmniejsze wartości błędów lub różni się co najwyżej o 0.05 od najmniejszej wartości błędu.

Porównanie aproksymacji dla stałej liczby węzłów

Aproksymacja na 200 węzłach równoległych



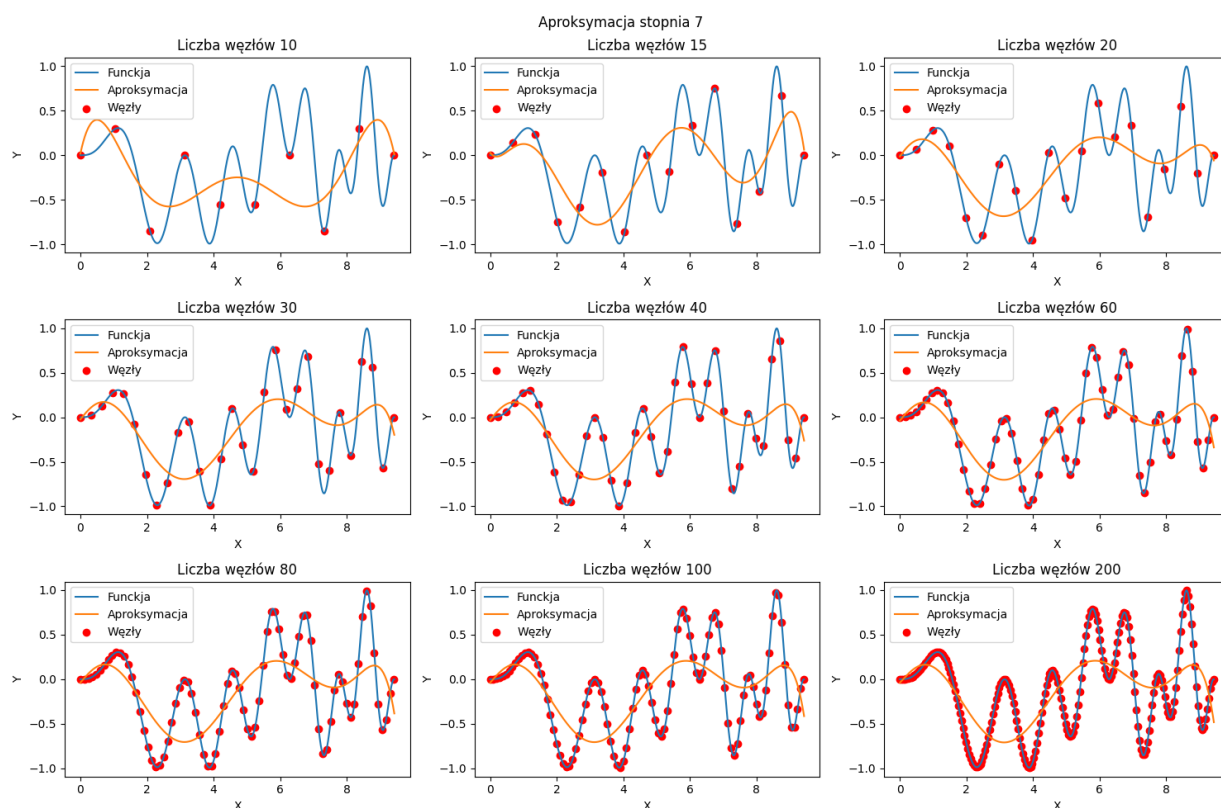
Wykresy 1: Aproksymacje dla $n = 200$

Wykresy 1 przedstawiają aproksymacje dla stałej liczby węzłów lecz dla różnych wartości parametru m . Wraz ze wzrostem stopnia wielomianu rośnie liczba ekstremów lokalnych aproksymacji. Im mniejszy stopień, tym funkcja aproksymująca jest bardziej gładka. W tabeli 2 można zaobserwować że wraz ze wzrostem parametru m maleje błąd średniokwadratowy. Dla błędu maksymalnego nie można stwierdzić takiej zależności.

Liczba węzłów (n)	Stopień wielomianu (m)	Błąd maksymalny	Błąd średniokwadratowy
200	2	0.97767	0.07172
200	3	0.99104	0.06607
200	5	1.12316	0.06307
200	7	0.86116	0.05947
200	8	0.8216	0.05804
200	9	0.82082	0.05803

Tabela 2: Błędy aproksymacji dla $n = 200$

Porównanie aproksymacji dla stałego stopnia wielomianu



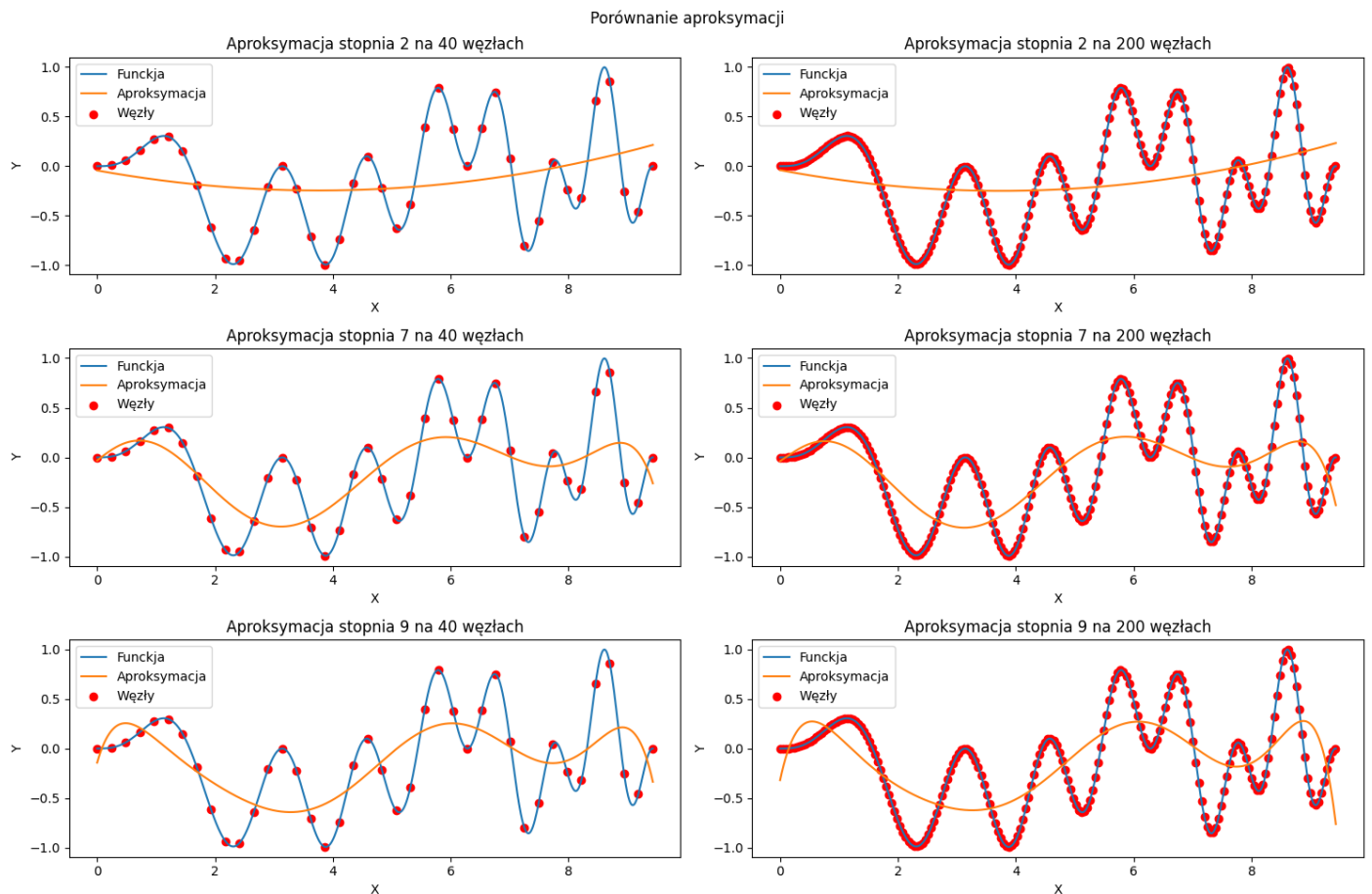
Wykresy 2: Aproksymacje dla $m = 7$

Wykresy 2 przedstawiają aproksymacje o stałej wartości stopnia wielomianu, lecz dla różnej liczby węzłów. Na wykresach można zaobserwować że aproksymacje niezależnie od liczby węzłów mają tyle samo ekstremów lokalnych, a ich proste od $n = 30$ mają wręcz identyczny kształt. Mimo podobieństwa funkcji aproksymujących, można zaobserwować w tabeli 3, że wartości błędów stale maleją wraz ze wzrostem parametru n . Nie wpływa to jednak istotnie na kształt oraz jakość aproksymacji.

Liczba węzłów (n)	Błąd maksymalny	Błąd średniokwadratowy
10	1.32666	1.56124
15	1.05471	0.84878
20	0.95555	0.60221
30	0.90717	0.39879
40	0.89414	0.29845
60	0.88172	0.19859
80	0.87496	0.14882
100	0.87061	0.11901
200	0.86116	0.05947

Tabela 3: Błędy aproksymacji dla $m = 7$

Porównanie kształtów aproksymacji



Wykresy 3: Porównanie kształtów aproksymacji

Wykresy 3 przedstawiają porównanie kształtów aproksymacji na 40 oraz 200 węzłach dla 3 różnych stopni wielomianu. Można zobaczyć na wykresach że kształt aproksymacji zależy bardziej od wartości parametru m niż od liczby węzłów. Funkcja aproksymująca jest bardziej gładka dla niskich wartości m , natomiast dla wyższych stopni wielomianu zdecydowanie lepiej przybliża funkcję aproksymowaną.

Liczba węzłów (n)	Stopień wielomianu (m)	Błąd maksymalny	Błąd średniokwadratowy
40	2	0.97738	0.35862
40	7	0.89414	0.29845
40	9	0.86957	0.29388
200	2	0.97767	0.07172
200	7	0.86116	0.05947
200	9	0.82082	0.05804

Tabela 4: Błędy aproksymacji

Analizując tabelę 4, mimo podobieństwa kształtów wykresów, występują wyraźne różnice w błędzie średniokwadratowym, na korzyść aproksymacji na 200 węzłach. Jednak w przypadku błędu maksymalnego, te różnice nie są już tak wyraźne, dla wartości $m = 2$, błąd ten jest mniejszy na 40 węzłach.

Wnioski

Podczas dokonywania wyboru parametru m dla aproksymacji, pamiętając że warunek $n > m$ musi być spełniony, trzeba brać pod uwagę cel aproksymacji - czy ma być ona gładka, czy bardziej dokładna

w przybliżeniu funkcji aproksymowanej. Wraz ze wzrostem wartości parametru n , można zaobserwować różnice w precyzji aproksymacji, jednak po osiągnięciu pewnej liczby węzłów stają się one minimalne i nie wpływają istotnie na poprawienie jakości aproksymacji.

Do obliczeń oraz wizualizacji został wykorzystany język programowania Python wraz z bibliotekami NumPy, math, pandas oraz matplotlib. Wszystko zostało wykonane pod system Windows 10 na procesorze i5-1135G7 2.40GHz z 16GB pamięci operacyjnej. Wykresy były generowane przy użyciu 944 punktów. Punkty były wyznaczone co 0.01 w całym przedziale. Układy równań liniowych były rozwiązywane przy użyciu funkcji `linalg.solve()` z biblioteki NumPy.