**MOwNit – arytmetyka komputerowa**

Przygotował:

Maksymilian Zawiślak

Problem:

Obliczyć k-ty element zależności rekurencyjnej:

Następnie wrócić do wartości początkowych z obliczonych wartości oraz

Ogólny wzór i jego przekształcenia:

to parametr, który będzie przyjmować inne wartość

Wzór na elementy rosnące:

Wzór na elementy malejące

W zadaniu zostały wykorzystane 3 typy danych z biblioteki NumPy:

1. Float32 – typ zmiennoprzecinkowy o pojedynczej precyzji, 32 bity precyzji, 8 to cecha, a 23 to mantysa
2. Double – typ zmiennoprzecinkowy o podwójnej precyzji, 64 bity precyzji, 11 to cecha, a 54 to mantysa
3. Longdouble – typ zmiennoprzecinkowy o rozszerzonej precyzji, 80 bitów precyzji

**Obraz zawierający tekst

Opis wygenerowany automatycznie**

Rysunek : Kod wykonujący obliczenia dla typu Float32 (analogiczny kod dla pozostałych typów)

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Element | Forward | Backward |
| 0 | 1.000000e+00 | -1.258582e+27 |
| 1 | 3.333333e-01 | -4.195273e+26 |
| 2 | 1.111111e-01 | -1.398424e+26 |
| 3 | 3.703713e-02 | -4.661414e+25 |
| 4 | 1.234596e-02 | -1.553805e+25 |
| 5 | 4.116068e-03 | -5.179348e+24 |
| 6 | 1.374266e-03 | -1.726449e+24 |
| 7 | 4.648194e-04 | -5.754831e+23 |
| 8 | 1.751318e-04 | -1.918277e+23 |
| 9 | 1.189533e-04 | -6.394257e+22 |
| 10 | 2.213791e-04 | -2.131419e+22 |
| 11 | 6.189770e-04 | -7.104730e+21 |
| 12 | 1.841878e-03 | -2.368243e+21 |
| 13 | 5.520615e-03 | -7.894145e+20 |
| 14 | 1.656017e-02 | -2.631382e+20 |
| 15 | 4.967995e-02 | -8.771272e+19 |
| 16 | 1.490397e-01 | -2.923757e+19 |
| 17 | 4.471189e-01 | -9.745858e+18 |
| 18 | 1.341357e+00 | -3.248619e+18 |
| 19 | 4.024070e+00 | -1.082873e+18 |
| 20 | 1.207221e+01 | -3.609577e+17 |
| 21 | 3.621663e+01 | -1.203192e+17 |
| 22 | 1.086499e+02 | -4.010641e+16 |
| 23 | 3.259496e+02 | -1.336880e+16 |
| 24 | 9.778489e+02 | -4.456268e+15 |
| 25 | 2.933547e+03 | -1.485423e+15 |
| 26 | 8.800641e+03 | -4.951409e+14 |
| 27 | 2.640192e+04 | -1.650470e+14 |
| 28 | 7.920577e+04 | -5.501565e+13 |
| 29 | 2.376173e+05 | -1.833855e+13 |
| 30 | 7.128519e+05 | -6.112849e+12 |
| 31 | 2.138556e+06 | -2.037615e+12 |
| 32 | 6.415666e+06 | -6.791991e+11 |
| 33 | 1.924700e+07 | -2.263826e+11 |
| 34 | 5.774100e+07 | -7.540954e+10 |
| 35 | 1.732230e+08 | -2.498254e+10 |
| 36 | 5.196690e+08 | -7.865585e+09 |
| 37 | 1.559007e+09 | -1.236078e+09 |
| 38 | 4.677021e+09 | 3.745326e+09 |
| 39 | 1.403106e+10 | 1.372050e+10 |
| 40 | 4.209319e+10 | 4.198966e+10 |
| 41 | 1.262796e+11 | 1.262451e+11 |
| 42 | 3.788387e+11 | 3.788272e+11 |
| 43 | 1.136516e+12 | 1.136512e+12 |
| 44 | 3.409548e+12 | 3.409547e+12 |
| 45 | 1.022864e+13 | 1.022864e+13 |
| 46 | 3.068593e+13 | 3.068593e+13 |

Tabela 1: Obliczenia dla p=3 oraz typu Float32

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Element | Forward | Backward |
| 0 | 1.000000e+00 | -2.466985e+10 |
| 1 | 3.333333e-01 | -8.223285e+09 |
| 2 | 1.111111e-01 | -2.741095e+09 |
| 3 | 3.703704e-02 | -9.136983e+08 |
| 4 | 1.234568e-02 | -3.045661e+08 |
| 5 | 4.115226e-03 | -1.015220e+08 |
| 6 | 1.371742e-03 | -3.384068e+07 |
| 7 | 4.572474e-04 | -1.128023e+07 |
| 8 | 1.524158e-04 | -3.760075e+06 |
| 9 | 5.080526e-05 | -1.253358e+06 |
| 10 | 1.693509e-05 | -4.177862e+05 |
| 11 | 5.645027e-06 | -1.392621e+05 |
| 12 | 1.881669e-06 | -4.642068e+04 |
| 13 | 6.272038e-07 | -1.547356e+04 |
| 14 | 2.090103e-07 | -5.157854e+03 |
| 15 | 6.949709e-08 | -1.719285e+03 |
| 16 | 2.264668e-08 | -5.730949e+02 |
| 17 | 5.991855e-09 | -1.910316e+02 |
| 18 | -2.673835e-09 | -6.367721e+01 |
| 19 | -1.490464e-08 | -2.122574e+01 |
| 20 | -4.700829e-08 | -7.075245e+00 |
| 21 | -1.417897e-07 | -2.358415e+00 |
| 22 | -4.256239e-07 | -7.861388e-01 |
| 23 | -1.276957e-06 | -2.620474e-01 |
| 24 | -3.830898e-06 | -8.735254e-02 |
| 25 | -1.149270e-05 | -2.912773e-02 |
| 26 | -3.447812e-05 | -9.739890e-03 |
| 27 | -1.034343e-04 | -3.338572e-03 |
| 28 | -3.103030e-04 | -1.388682e-03 |
| 29 | -9.309091e-04 | -1.290369e-03 |
| 30 | -2.792727e-03 | -2.912547e-03 |
| 31 | -8.378182e-03 | -8.418122e-03 |
| 32 | -2.513455e-02 | -2.514786e-02 |
| 33 | -7.540364e-02 | -7.540808e-02 |
| 34 | -2.262109e-01 | -2.262124e-01 |
| 35 | -6.786328e-01 | -6.786333e-01 |
| 36 | -2.035898e+00 | -2.035898e+00 |
| 37 | -6.107695e+00 | -6.107695e+00 |
| 38 | -1.832308e+01 | -1.832308e+01 |
| 39 | -5.496925e+01 | -5.496925e+01 |
| 40 | -1.649078e+02 | -1.649078e+02 |
| 41 | -4.947233e+02 | -4.947233e+02 |
| 42 | -1.484170e+03 | -1.484170e+03 |
| 43 | -4.452510e+03 | -4.452510e+03 |
| 44 | -1.335753e+04 | -1.335753e+04 |
| 45 | -4.007259e+04 | -4.007259e+04 |
| 46 | -1.202178e+05 | -1.202178e+05 |

Tabela 2: Obliczenia dla p=3 oraz typu Double

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Element | Forward | Backward |
| 0 | 1.000000e+00 | -4.247940e+09 |
| 1 | 3.333333e-01 | -1.415980e+09 |
| 2 | 1.111111e-01 | -4.719933e+08 |
| 3 | 3.703704e-02 | -1.573311e+08 |
| 4 | 1.234568e-02 | -5.244370e+07 |
| 5 | 4.115226e-03 | -1.748123e+07 |
| 6 | 1.371742e-03 | -5.827078e+06 |
| 7 | 4.572474e-04 | -1.942359e+06 |
| 8 | 1.524158e-04 | -6.474531e+05 |
| 9 | 5.080526e-05 | -2.158177e+05 |
| 10 | 1.693509e-05 | -7.193923e+04 |
| 11 | 5.645028e-06 | -2.397974e+04 |
| 12 | 1.881672e-06 | -7.993248e+03 |
| 13 | 6.272130e-07 | -2.664416e+03 |
| 14 | 2.090378e-07 | -8.881387e+02 |
| 15 | 6.957971e-08 | -2.960462e+02 |
| 16 | 2.289453e-08 | -9.868208e+01 |
| 17 | 6.735404e-09 | -3.289403e+01 |
| 18 | -4.431858e-10 | -1.096468e+01 |
| 19 | -8.212690e-09 | -3.654892e+00 |
| 20 | -2.693245e-08 | -1.218297e+00 |
| 21 | -8.156214e-08 | -4.060992e-01 |
| 22 | -2.449413e-07 | -1.353666e-01 |
| 23 | -7.349090e-07 | -4.512286e-02 |
| 24 | -2.204755e-06 | -1.504291e-02 |
| 25 | -6.614275e-06 | -5.020183e-03 |
| 26 | -1.984283e-05 | -1.691032e-03 |
| 27 | -5.952849e-05 | -6.165917e-04 |
| 28 | -1.785855e-04 | -3.642732e-04 |
| 29 | -5.357564e-04 | -5.976523e-04 |
| 30 | -1.607269e-03 | -1.627901e-03 |
| 31 | -4.821808e-03 | -4.828685e-03 |
| 32 | -1.446542e-02 | -1.446772e-02 |
| 33 | -4.339627e-02 | -4.339703e-02 |
| 34 | -1.301888e-01 | -1.301891e-01 |
| 35 | -3.905664e-01 | -3.905665e-01 |
| 36 | -1.171699e+00 | -1.171699e+00 |
| 37 | -3.515098e+00 | -3.515098e+00 |
| 38 | -1.054529e+01 | -1.054529e+01 |
| 39 | -3.163588e+01 | -3.163588e+01 |
| 40 | -9.490764e+01 | -9.490764e+01 |
| 41 | -2.847229e+02 | -2.847229e+02 |
| 42 | -8.541688e+02 | -8.541688e+02 |
| 43 | -2.562506e+03 | -2.562506e+03 |
| 44 | -7.687519e+03 | -7.687519e+03 |
| 45 | -2.306256e+04 | -2.306256e+04 |
| 46 | -6.918767e+04 | -6.918767e+04 |

Tabela 3: Obliczenia dla p=3 oraz typu Long double

Wyniki obliczeń dla

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | Float32 | Double | Long double |
|  | 10228644000000.0 | -40072.58604666229 | -23062.556331875161478, |
|  | 30685933000000.0 | -120217.75813998686 | -69187.668995625480115 |

Tabela 4: Wyniki rekurencji do przodu dla p = 3

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | Float32 | Double | Long double |
|  | -1.2585818e+27 | -24669854823.772236 | -4247939848.4530809072 |
|  | -4.1952725e+26 | -8223284941.257413 | -1415979949.4843603909 |

Tabela 5: Wyniki rekurencji w tył dla p = 3

Niedokładności obliczeń występujące dla wartości i powodują, że żaden typ liczbowy nie jest w stanie powrócić do wartości początkowych. Wartości zwrócone są ujemne, a przyczyną błędów obliczeniowych może być błąd zaokrąglenia, który zwiększa się z każdym kolejnym obliczonym elementem, prowadząc do szybkiej utraty dokładności. Ciągłe mnożenie i dzielenie kolejnych elementów również może wprowadzać niedokładności. Im dokładniejszy typ, tym bliżej jest on do wartości startowej. Widoczne jest, że typ float32 traci precyzję najwcześniej, a typ Longdouble najpóźniej.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| k | Float32 | | Double | | Long double | |
|  |  |  |  |  |  |
| 10 | 1.0000006 | 0.3333335 | 1.0 | 0.3333333333333 | 0.9999999999999999 | 0.3333333333333 |
| 11 | 1.0000012 | 0.3333337 | 1.0 | 0.3333333333333 | 0.999999999999999 | 0.3333333333333 |
| … | … | … | … | … | … | … |
| 27 | -6374500.0 | -2124833.2 | 1.0000000007 | 0.3333333335778 | 0.999999971657778 | 0.3333333238859 |
| 28 | -6374500.0 | -6374500.0 | 0.9999996498 | 0.3333332166223 | 0.999999744899743 | 0.3333332482999 |
| 29 | 4.077885e+11 | 1.359295e+11 | 0.9999985475 | 0.3333328491695 | 0.999997703023679 | 0.3333325676745 |
| … | … | … | … | … | … | … |
| 38 | 2.8305794e+20 | 9.435265e+19 | 1820.1150969 | 606.70503231736 | -888.722737389341 | -296.2409124631 |
| 39 | 3.3702547e+21 | 1.1234182e+21 | 9873.0758698 | 3291.0252899615 | -8002.37380694677 | -2667.457935648 |

Tabela 6: Wartości do jakich wraca rekurencja gdy zawraca na k-tym elemencie

Im większa wartość parametru k, tym większa jest niedokładność obliczeń. Typ liczbowy Float32 traci precyzję najwcześniej i już dla niskich wartości k nie radzi sobie dobrze. W przypadku Double i Longdouble niedokładności pojawiają się później dopiero dla większych wartości k.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Element | Forward | Backward |
| 0 | 1.000000e+00 | NaN |
| 1 | 5.000000e-01 | NaN |
| 2 | 1.500000e+00 | NaN |
| 3 | 7.000000e+00 | NaN |
| 4 | 3.350000e+01 | NaN |
| 5 | 1.605000e+02 | NaN |
| 6 | 7.690000e+02 | NaN |
| 7 | 3.684500e+03 | NaN |
| 8 | 1.765350e+04 | NaN |
| 9 | 8.458300e+04 | NaN |
| 10 | 4.052615e+05 | NaN |
| 11 | 1.941724e+06 | NaN |
| 12 | 9.303361e+06 | NaN |
| 13 | 4.457508e+07 | NaN |
| 14 | 2.135720e+08 | NaN |
| 15 | 1.023285e+09 | NaN |
| 16 | 4.902853e+09 | NaN |
| 17 | 2.349098e+10 | NaN |
| 18 | 1.125520e+11 | NaN |
| 19 | 5.392692e+11 | -inf |
| 20 | 2.583794e+12 | -inf |
| 21 | 1.237970e+13 | -1.705296e+38 |
| 22 | 5.931471e+13 | -3.559159e+37 |
| 23 | 2.841939e+14 | -7.428397e+36 |
| 24 | 1.361655e+15 | -1.550397e+36 |
| 25 | 6.524079e+15 | -3.235866e+35 |
| 26 | 3.125874e+16 | -6.753646e+34 |
| 27 | 1.497696e+17 | -1.409568e+34 |
| 28 | 7.175893e+17 | -2.941940e+33 |
| 29 | 3.438177e+18 | -6.140186e+32 |
| 30 | 1.647330e+19 | -1.281531e+32 |
| 31 | 7.892830e+19 | -2.674712e+31 |
| 32 | 3.781682e+20 | -5.582449e+30 |
| 33 | 1.811913e+21 | -1.165125e+30 |
| 34 | 8.681395e+21 | -2.431757e+29 |
| 35 | 4.159507e+22 | -5.075369e+28 |
| 36 | 1.992939e+23 | -1.059272e+28 |
| 37 | 9.548747e+23 | -2.209916e+27 |
| 38 | 4.575079e+24 | -4.568606e+26 |
| 39 | 2.192052e+25 | -7.438672e+25 |
| 40 | 1.050275e+26 | 8.492704e+25 |
| 41 | 5.032171e+26 | 4.990219e+26 |
| 42 | 2.411058e+27 | 2.410183e+27 |
| 43 | 1.155207e+28 | 1.155189e+28 |
| 44 | 5.534931e+28 | 5.534927e+28 |
| 45 | 2.651945e+29 | 2.651945e+29 |
| 46 | 1.270623e+30 | 1.270623e+30 |

Tabela 7: Obliczenia dla p=2 oraz typu Float32

W tabeli 7 widać że przy powrocie do wartości początkowych doszło do błędu obliczeń na elemencie numer 18

Wyniki obliczeń dla

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | Float32 | Double | Long double |
|  | 2.6519446e+29 | 2.6519452145503464e+29 | 2.6519452145503458166e+29 |
|  | 1.270623e+30 | 1.27062328786523e+30 | 1.2706232878652297147e+30 |

Tabela 8: Wyniki rekurencji do przodu dla p = 2

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | Float32 | Double | Long double |
|  | NaN | -7.704010532621838e+43 | -1.7351611458615731e+40 |
|  | NaN | -1.60792062131628e+43 | -3.6214921772544773e+39 |

Tabela 9: Wyniki rekurencji w tył dla p = 2

W tabeli 8 widać że dla rekurencji do przodu dla każdego typu liczbowego wyniki są podobne. Natomiast wyniki przedstawione w tabeli 9 pokazują że w powrocie do wartości startowych dla każdego typu są inne i żadna się zgadza się z

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Element | Forward float | Backward float | Forward double | Backward double | Forward long double | Backward long double |
| 0 | 1.000000 | 1.000000 | 1.000000 | 1.000000 | 1.000000 | 1.000000 |
| 1 | 0.050000 | 0.050000 | 0.050000 | 0.050000 | 0.050000 | 0.050000 |
| 2 | -0.975000 | -0.975000 | -0.975000 | -0.975000 | -0.975000 | -0.975000 |
| 3 | -0.537500 | -0.537500 | -0.537500 | -0.537500 | -0.537500 | -0.537500 |
| 4 | 0.706250 | 0.706250 | 0.706250 | 0.706250 | 0.706250 | 0.706250 |
| 5 | 0.890625 | 0.890625 | 0.890625 | 0.890625 | 0.890625 | 0.890625 |
| 6 | -0.260938 | -0.260937 | -0.260937 | -0.260938 | -0.260937 | -0.260938 |
| … | … | … | … | … | … | … |
| 21 | -0.944356 | -0.944356 | -0.944356 | -0.944356 | -0.944356 | -0.944356 |
| 22 | -0.612161 | -0.612161 | -0.612161 | -0.612161 | -0.612161 | -0.612161 |
| 23 | 0.638276 | 0.638275 | 0.638276 | 0.638276 | 0.638276 | 0.638276 |
| … | … | … | … | … | … | … |
| 43 | 0.964676 | 0.964676 | 0.964677 | 0.964677 | 0.964677 | 0.964677 |
| 44 | -0.082963 | -0.082963 | -0.082963 | -0.082963 | -0.082963 | -0.082963 |
| 45 | -1.006158 | -1.006158 | -1.006158 | -1.006158 | -1.006158 | -1.006158 |
| 46 | -0.420116 | -0.420116 | -0.420116 | -0.420116 | -0.420116 | -0.420116 |

Tabela 10: Wyniki dla każdego typu liczbowego i p = 20

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Element | Forward float | Backward float | Forward double | Backward double | Forward long double | Backward long double |
| 0 | 1.000000 | 1.000000 | 1.000000 | 1.000000 | 1.000000 | 1.000000 |
| 1 | 0.033333 | 0.033333 | 0.033333 | 0.033333 | 0.033333 | 0.033333 |
| 2 | -0.988889 | -0.988889 | -0.988889 | -0.988889 | -0.988889 | -0.988889 |
| 3 | -0.362963 | -0.362963 | -0.362963 | -0.362963 | -0.362963 | -0.362963 |
| 4 | 0.867901 | 0.867901 | 0.867901 | 0.867901 | 0.867901 | 0.867901 |
| 5 | 0.652263 | 0.652263 | 0.652263 | 0.652263 | 0.652263 | 0.652263 |
| 6 | -0.650480 | -0.650480 | -0.650480 | -0.650480 | -0.650480 | -0.650480 |
| … | … | … | … | … | … | … |
| 21 | -0.240266 | -0.240266 | -0.240266 | -0.240266 | -0.240266 | -0.240266 |
| 22 | 0.926328 | 0.926328 | 0.926328 | 0.926328 | 0.926328 | 0.926328 |
| 23 | 0.549042 | 0.549042 | 0.549042 | 0.549042 | 0.549042 | 0.549042 |
| … | … | … | … | … | … | … |
| 43 | -0.711595 | -0.711595 | -0.711595 | -0.711595 | -0.711595 | -0.711595 |
| 44 | 0.586878 | 0.586878 | 0.586878 | 0.586878 | 0.586878 | 0.586878 |
| 45 | 0.907221 | 0.907221 | 0.907221 | 0.907221 | 0.907221 | 0.907221 |
| 46 | -0.284471 | -0.284471 | -0.284471 | -0.284471 | -0.284471 | -0.284471 |

Tabela 11: Wyniki dla każdego typu liczbowego i p = 30

W tabelach 10 i 11 widać że wartości wracają dla każdego typu liczbowego poprawnie do wartości startowych.

Podsumowując, dla założonych parametrów i , nie udało się otrzymać poprawnych wyników dla żadnego typu liczbowego. Dopiero manewrowanie oboma parametrami w górę i dół doprowadzało do poprawnych obliczeń. Przy zmniejszeniu dla każdego typu udało się otrzymać poprawne wyniki. Natomiast przy zmianie na dla typu Float32 doszło nawet do błędu obliczeń. Zmiana na większą wartość parametru pozwoliła otrzymać wyniki poprawne. Najmniejsza wartość parametru , dla którego udało mi się otrzymać poprawne wyniki dla każdego typu to . Na wyniki na pewno wpływa wartość startowa , która w zależności od parametru p ma inna postać, łatwiejsza lub trudniejszą dla komputera. Manewrowanie parametrem wpływa na rodzaje liczb jakie komputer musi obliczać i zapamiętywać, niektóre wartości parametru mogą prowadzić do ułamków nieskończonych, z którymi komputer może sobie nie poradzić poprawnie.

Do obliczeń został wykorzystany język programowania Pyhton wraz z biblioteką NumPy pod systemem Linux, pod procesorem w architekturze x86\_64, 2400Mhz i 16GB pamięci operacyjnej.