**MOwNiT – aproksymacja średniokwadratowa wielomianami algebraicznymi**

Przygotował:

Maksymilian Zawiślak

Dla poniższej funkcji:

Wzór 1

na przedziale:

wyznaczyć jej wartości w dyskretnych punktach. Następnie w oparciu o te punkty wyznaczyć przybliżenie funkcji wykorzystując aproksymację średniokwadratową wielomianami algebraicznymi, Wykonać eksperymenty numeryczne dla różnej liczby punktów dyskretyzacji oraz układów funkcji bazowych zawierających różną liczbę funkcji. Oszacować błędy przybliżenia. Graficznie zilustrować interesujące przypadki.

**Wykres głównej funkcji**

**Obraz zawierający wykres

Opis wygenerowany automatycznie**

Wykres 1: Wykres funkcji aproksymowanej

**Wyznaczenie aproksymacji**

Posiadane dane:

* punktów dyskretyzacji, , gdzie
* Układ funkcji bazowych do składania funkcji aproksymacyjnej , , oraz

Szukany jest wielomian w uogólnionej postaci:

Wzór 2

Przyjmując że funkcje bazowe maja postać , gdzie to wzór 2 przyjmie formę:

Wzór 3

Brakuje współczynników , dla których spełniony musi być wzór 4:

Wzór 4

gdzie:

* jest odchyleniem wartości funkcji aproksymowanej od wartości funkcji aproksymującej
* jest to waga dla danego węzła

Obliczając pochodne cząstkowe 1. rzędu dla współczynników i następie przyrównując je do zera, otrzymujemy układ m+1 równań liniowych w postaci:

Wzór 3

dla

W przypadku aproksymowania funkcji o zbiorze dyskretnym o rozmiarze oraz łącząc wzory 3 i 5 dochodzi do:

Wzór 4

dla

Po dalszych przekształceniach wzoru 6 powstaje:

Wzór 5

Korzystając ze wzoru 7, można zapisać układ równań w postaci macierzowej

*=*

W dalszych obliczeniach aproksymacji wartość zawsze była równa 1.

**Błędy obliczeniowe przy aproksymacji**

Błąd maksymalny:

Błąd średniokwadratowy:

gdzie:

– funkcja interpolująca

– funkcja interpolowana

– liczba punktów użytych do rysowania wykresów

**Błędy obliczeniowe**

Wyliczenia błędów zostały wykonane dla błędu maksymalnego oraz średniokwadratowego. Liczby węzłów jakie były testowane to: 10, 15, 20, 30, 40, 60, 80, 100, 200, a liczba funkcji bazowych to: 2, 3, 5, 7, 8, 9. W obliczeniach pamiętano o zasadzie .

* to liczba węzłów
* m to liczba funkcji bazowych

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *n m* | 2 | 3 | 5 | 7 | 8 | 9 |
| 10 | 1.21358 | 1.21358 | 1.23023 | 1.32666 | 3.09115 | 3.09013 |
| 20 | 0.97877 | 0.96704 | 1.14554 | 0.95555 | 0.94632 | 0.9339 |
| 30 | 0.97738 | 0.97793 | 1.12849 | 0.90717 | 0.89649 | 0.88305 |
| 40 | 0.97738 | 0.98183 | 1.1262 | 0.89414 | 0.87943 | 0.86957 |
| 60 | 0.97748 | 0.98561 | 1.12489 | 0.88172 | 0.85997 | 0.85389 |
| 80 | 0.97754 | 0.98752 | 1.12431 | 0.87496 | 0.84814 | 0.84399 |
| 100 | 0.97759 | 0.98868 | 1.12395 | 0.87061 | 0.84013 | 0.83713 |
| 200 | 0.97767 | 0.99104 | 1.12316 | 0.86116 | 0.8216 | 0.82082 |

Tabela 1: Błąd maksymalny

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *n m* | 2 | 3 | 5 | 7 | 8 | 9 |
| 10 | 1.53153 | 1.53153 | 1.53344 | 1.56124 | 3.01694 | 3.01696 |
| 20 | 0.71743 | 0.6645 | 0.631 | 0.60221 | 0.5977 | 0.59711 |
| 30 | 0.47821 | 0.44157 | 0.42064 | 0.39879 | 0.39397 | 0.39389 |
| 40 | 0.35862 | 0.33081 | 0.31543 | 0.29845 | 0.29389 | 0.29388 |
| 60 | 0.23906 | 0.22036 | 0.21026 | 0.19859 | 0.1948 | 0.19481 |
| 80 | 0.17929 | 0.16522 | 0.15768 | 0.14882 | 0.14568 | 0.14569 |
| 100 | 0.14343 | 0.13216 | 0.12614 | 0.11901 | 0.11636 | 0.11636 |
| 200 | 0.07172 | 0.06607 | 0.06307 | 0.05947 | 0.05804 | 0.05803 |

Tabela 2: Błąd średniokwadratowy

Analizując tabelę 1 oraz 2, można zauważyć, że najmniejsze wartości błędów występują niezależnie od liczby funkcji bazowych , dla 200 węzłów. Ponadto, w przypadku tej samej liczby węzłów (), wartość parametru daje najmniejsze wartości błędów lub różni się co najwyżej o 0.05 od najmniejszej wartości błędu.

**Porównanie aproksymacji dla stałej liczby węzłów**

**Obraz zawierający wykres

Opis wygenerowany automatycznie**

Wykresy 1: Aproksymacje dla n = 200

Wykresy 1 przedstawiają aproksymacje dla stałe liczby węzłów lecz dla różnej liczby funkcji bazowych . Wraz ze wzrostem stopnia wielomianu rośnie liczba ekstremów lokalnych aproksymacji. Im mniejszy stopień, tym funkcja aproksymująca jest bardziej gładka. W tabeli 3 można zaobserwować że wraz ze wzrostem parametru maleje błąd średniokwadratowy. Dla błędu maksymalnego nie można stwierdzić takiej zależności.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Liczba funkcji bazowych () | Błąd maksymalny | Błąd średniokwadratowy |
| 2 | 0.97767 | 0.07172 |
| 3 | 0.99104 | 0.06607 |
| 5 | 1.12316 | 0.06307 |
| 7 | 0.86116 | 0.05947 |
| 8 | 0.8216 | 0.05804 |
| 9 | 0.82082 | 0.05803 |

Tabela 3: Błędy aproksymacji dla n = 200

**Porównanie aproksymacji dla stałego stopnia wielomianu**

Obraz zawierający wykres

Opis wygenerowany automatycznie

Wykresy 2: Aproksymacje dla m = 7

Wykresy 2 przedstawiają aproksymacje o stałej liczby wielomianów bazowych, lecz dla różnej liczby węzłów. Na wykresach można zaobserwować że aproksymacje niezależnie od liczby węzłów maja tyle samo ekstremów lokalnych, a ich proste od mają wręcz identyczny kształt. Mimo podobieństwa funkcji aproksymujących, można zaobserwować w tabeli 4, że wraz ze wzrostem parametru wartości błędów stale maleją. Nie wypływa to jednak istotnie na kształt aproksymacji.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Liczba węzłów () | Błąd maksymalny | Błąd średniokwadratowy |
| 10 | 1.32666 | 1.56124 |
| 15 | 1.05471 | 0.84878 |
| 20 | 0.95555 | 0.60221 |
| 30 | 0.90717 | 0.39879 |
| 40 | 0.89414 | 0.29845 |
| 60 | 0.88172 | 0.19859 |
| 80 | 0.87496 | 0.14882 |
| 100 | 0.87061 | 0.11901 |
| 200 | 0.86116 | 0.05947 |

Tabela 4: Błędy aproksymacji dla m = 7

**Porównanie kształtów aproksymacji**

Obraz zawierający wykres

Opis wygenerowany automatycznie

Wykresy 3: Porównanie kształtów aproksymacji

Wykresy 3 przedstawiają porównanie kształtów aproksymacji na 40 oraz 200 węzłach dla 3 różnych wartości parametru . Można zobaczyć na wykresach że kształt aproksymacji zależy bardziej od liczby funkcji bazowych niż od liczby węzłów. Funkcja aproksymująca jest bardziej gładka dla niskich wartości , natomiast dla wyższych stopni wielomianu zdecydowanie lepiej przybliża funkcje aproksymowaną.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Liczba węzłów () | Liczba funkcji bazowych () | Błąd maksymalny | Błąd średniokwadratowy |
| 40 | 2 | 0.97738 | 0.35862 |
| 40 | 7 | 0.89414 | 0.29845 |
| 40 | 9 | 0.86957 | 0.29388 |
| 200 | 2 | 0.97767 | 0.07172 |
| 200 | 7 | 0.86116 | 0.05947 |
| 200 | 9 | 0.82082 | 0.05804 |

Tabela 5: Błędy aproksymacji

Analizując tabele 5, mimo podobieństwa kształtów wykresów, występują wyraźne różnice w błędzie średniokwadratowym, na korzyść aproksymacji na 200 węzłach. Jednak w przypadku błędu maksymalnego, te różnice nie są już tak wyraźne, dla wartości , błąd ten jest mniejszy na 40 węzłach.

Obraz zawierający wykres

Opis wygenerowany automatycznie

Wykres 2: Aproksymacja n=10, m=8

|  |  |
| --- | --- |
| Błąd maksymalny | Błąd średniokwadratowy |
| 3.09115 | 3.01694 |

Tabela 6: Wartości błędów dla n=10, m=8

Przy wyznaczaniu aproksymacji należy również pamiętać że najlepsze wyniki dostanie się gdy . Na wykresie 2 widać że gdy wartość n oraz m są bliskie sobie, wyznaczona prosta bardziej przypomina interpolacje niż wcześniej omawiane funkcje aproksymujące. Może prowadzić to do wystąpienia efektu Rungego, który zaburzy wynik aproksymacji, co można zobaczyć w tabeli 6.

**Wnioski**

Podczas dokonywania wyboru parametru dla aproksymacji, pamiętając że warunek musi być spełniony, trzeba brać pod uwagę cel aproksymacji. Dla małej liczby funkcji bazowych, aproksymacja jest bardziej gładka. Zwiększanie parametru m, powoduje że funkcja aproksymująca ma więcej ekstremów lokalnych i zaczyna lepiej przybliżać zadana funkcje. Nie da się jasno określić zależności między wartościami błędów, a parametrami oraz . Wraz ze wzrostem liczby węzłów, można zaobserwować różnice w precyzji aproksymacji, jednak po osiągnięciu pewnej wartości stają się one minimalne i nie wpływają istotnie na poprawienie jakości aproksymacji. Największą dokładności przybliżenia otrzyma się gdy zastosuje się warunek .

Do obliczeń oraz wizualizacji został wykorzystany język programowania Pyhton wraz z bibliotekami NumPy, math, pandas oraz matplotlib. Wszystko zostało wykonane pod system Windows 10 na procesorze i5-1135G7 2.40GHz z 16GB pamięci operacyjnej. Wykresy były generowane przy użyciu 944 punktów. Punkty były wyznaczone co 0.01 w całym przedziale.