**MOwNiT – aproksymacja średniokwadratowa trygonometryczna**

Przygotował:

Maksymilian Zawiślak

Dla poniższej funkcji:

Wzór 1

na przedziale:

wyznaczyć jej wartości w dyskretnych punktach. Następnie w oparciu o te punkty wyznaczyć przybliżenie funkcji wykorzystując aproksymację średniokwadratową trymetryczną, Wykonać eksperymenty numeryczne dla różnej liczby punktów dyskretyzacji oraz układów funkcji bazowych zawierających różną liczbę funkcji. Oszacować błędy przybliżenia. Graficznie zilustrować interesujące przypadki.

**Wykres głównej funkcji**

**Obraz zawierający wykres

Opis wygenerowany automatycznie**

Wykres 1: Wykres funkcji aproksymowanej

**Wyznaczanie aproksymacji**

Szukany jest wielomian w uogólnionej postaci:

Wzór 2

Aby wyznaczyć aproksymacje trygonometryczna należy założyć że funkcja aproksymowana jest ciągła oraz okresowa na przedziale długości, a wartości węzłów są punktami na przedziale , określone wzorem:

Wzór 3

gdzie:

Jako ciąg funkcji bazowych przyjąć należy:

Wzór 4

gdzie: to oczekiwany stopień wielomianu.

Ostatecznie aproksymacje można wyznaczyć z następującego wzoru:

Wzór 5

gdzie:

Wzór 6

Wzór 7

Aby wyznaczyć wielomian aproksymacyjny dobrze uwarunkowany (liczba funkcji bazowych nie przekraczająca liczby węzłów), miedzy stopniem wielomianu , a liczba węzłów powinno zachodzić:

Wzór 8

Zadana funkcja jest na przedziale , węzły należy przekształcić aby były na przedziale , przy pomocy takiego wzoru:

Wzór 9

gdzie:

* to węzeł po przekształceniu
* to węzeł przed przekształceniem

**Błędy obliczeniowe przy aproksymacji**

Błąd maksymalny:

Wzór 10

Błąd średniokwadratowy:

Wzór 11

gdzie:

– funkcja interpolująca

– funkcja interpolowana

– liczba punktów użytych do rysowania wykresów

**Błędy obliczeniowe**

Wyliczenia błędów zostały wykonane dla błędu maksymalnego oraz średniokwadratowego. Liczby węzłów jakie były testowane to: 10, 15, 20, 30, 40, 60, 80, 100, 200, a stopnie wielomianu to: 2, 3, 5, 9, 15, 20. W obliczeniach pamiętano o zasadzie .

* to liczba węzłów
* m to stopień wielomianu

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *n m* | 2 | 3 | 5 | 9 | 15 | 20 |
| 10 | 1.18026 | 1.05194 | - | - | - | - |
| 20 | 1.03376 | 1.03878 | 0.66126 | 0.81963 | - | - |
| 30 | 1.03073 | 1.02818 | 0.61618 | 0.47593 | - | - |
| 40 | 1.0307 | 1.0276 | 0.61095 | 0.4753 | 0.05246 | - |
| 60 | 1.03089 | 1.02762 | 0.60712 | 0.47158 | 0.04778 | 0.02175 |
| 80 | 1.03102 | 1.02772 | 0.60539 | 0.46944 | 0.04785 | 0.02065 |
| 100 | 1.03111 | 1.02779 | 0.60438 | 0.46813 | 0.04809 | 0.02044 |
| 200 | 1.03128 | 1.02794 | 0.60238 | 0.46547 | 0.04876 | 0.02059 |

Tabela 1: Błąd maksymalny

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *n m* | 2 | 3 | 5 | 9 | 15 | 20 |
| 10 | 1.50417 | 1.49866 | - | - | - | - |
| 20 | 0.61459 | 0.60064 | 0.46481 | 0.38504 | - | - |
| 30 | 0.40959 | 0.40023 | 0.30854 | 0.18409 | - | - |
| 40 | 0.30715 | 0.30013 | 0.23131 | 0.13786 | 0.01332 | - |
| 60 | 0.20475 | 0.20006 | 0.15416 | 0.0918 | 0.00744 | 0.00475 |
| 80 | 0.15356 | 0.15004 | 0.11561 | 0.06883 | 0.00516 | 0.00286 |
| 100 | 0.12284 | 0.12003 | 0.09248 | 0.05505 | 0.00397 | 0.00198 |
| 200 | 0.06142 | 0.06001 | 0.04624 | 0.02752 | 0.00187 | 0.00074 |

Tabela 2: Błąd średniokwadratowy

Analizując tabelę 1 oraz 2, można zauważyć, że najmniejsze wartości błędu średniokwadratowego występują niezależnie od stopnia wielomianu , dla 200 węzłów. Przy błędzie maksymalnym dla wartość błędu nie zawsze jest najmniejsza, lecz różni się od najlepszego wyniku nie więcej niż 0.01. W przypadku różnej liczby węzłów (), wartość parametru daje najmniejsze wartości błędów, jeżeli spełniony jest warunek .

**Porównanie aproksymacji dla stałej liczby węzłów**

Obraz zawierający tekst, Czcionka, diagram, pismo odręczne

Opis wygenerowany automatycznie

Wykresy 1: Wykresy aproksymacji dla n = 200

Wykresy 1 przedstawiają aproksymacje dla stałej liczby węzłów (), lecz dla różnych stopni wielomianu. Wraz ze wzrostem liczby funkcji bazowych w funkcji aproksymującej przybywa ekstremów lokalnych. Wzrost parametru powoduje również zwiększenie dokładności aproksymacji oraz zmniejszenie wartości obu błędów co pokazuje tabel 3.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Stopień wielomianu () | Błąd maksymalny | Błąd średniokwadratowy |
| 2 | 1.03128 | 0.06142 |
| 3 | 1.02794 | 0.06001 |
| 5 | 0.60238 | 0.04624 |
| 9 | 0.46547 | 0.02752 |
| 15 | 0.04876 | 0.00187 |
| 20 | 0.02059 | 0.00074 |

Tabela 3: Błędy aproksymacji dla n = 200

**Porównanie aproksymacji dla stałego stopnia wielomianu**

Obraz zawierający tekst, diagram, Czcionka, zrzut ekranu

Opis wygenerowany automatycznie

Wykresy 2: Wykresy aproksymacji dla m = 20

Wykresy 2 przedstawiają aproksymacje dla stałego stopnia wielomianu, lecz dla różnej liczby węzłów. Wartość parametru została wybrana na podstawie wcześniejszych analiz tabeli błędów jako najlepiej przybliżająca wartość. Kształt aproksymacji niewiele różni się w zależności od liczby użytych węzłów. Mimo podobieństwa funkcji aproksymującej, w tabeli 4 można zaobserwować że wraz ze wzrostem parametru stale maleje błąd średniokwadratowy. Błąd maksymalny również maleje lecz nie tak szybko jak błąd średniokwadratowy, można wręcz zaobserwować że utrzymuję się on na poziomie równym 0.02.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Liczba węzłów () | Błąd maksymalny | Błąd średniokwadratowy |
| 50 | 0.02436 | 0.00667 |
| 60 | 0.02175 | 0.00475 |
| 80 | 0.02065 | 0.00286 |
| 100 | 0.02044 | 0.00198 |
| 200 | 0.02059 | 0.00074 |
| 300 | 0.02041 | 0.00045 |

Tabela 4: Błędy aproksymacji dla m = 20

**Porównanie kształtów aproksymacji**

Obraz zawierający tekst, diagram, linia, Czcionka

Opis wygenerowany automatycznie

Obraz zawierający tekst, Czcionka, pismo odręczne, diagram

Opis wygenerowany automatycznie

Wykresy 3: Porównanie kształtów aproksymacji

Wykresy 3 przedstawiają porównanie kształtów aproksymacji na 60 oraz 200 węzłach dla wartości równych 3, 9, 15 oraz 20. Można zaobserwować że kształt aproksymacji zależy bardziej od liczby funkcji bazowych niż od liczby węzłów. Dla lub zaobserwować można problemy z aproksymacją przy lewym końcu przedziału. Podejrzewanym problemem był błąd przy ustalaniu pierwszego i ostatniego węzła. Po weryfikacji okazało się, że wartość pierwszego węzła jest równa początkowi przedziału, a ostatniego końcowi, więc nie to powoduje problemy przy wyznaczaniu funkcji aproksymującej. Innym powodem występowania takiego zjawiska mogą być błędy arytmetyki komputerowej. Widać że dla większego stopnia wielomianu problem maleje Dla wyższych wartości parametru , aproksymacja jest bardziej dokładna, co widać po obliczonych błędach w tabeli 5. Mimo braku wyraźnych różnic w kształcie wykresów występują spore różnice w błędzie średniokwadratowym, na korzyść aproksymacji na 200 węzłach. W przypadku błędu maksymalnego takie duże różnice nie występują.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Liczba węzłów () | Stopień wielomianu () | Błąd maksymalny | Błąd średniokwadratowy |
| 60 | 3 | 1.02762 | 0.20006 |
| 60 | 9 | 0.47158 | 0.0918 |
| 60 | 15 | 0.04778 | 0.00744 |
| 60 | 20 | 0.02175 | 0.00475 |
| 200 | 3 | 1.02794 | 0.06001 |
| 200 | 9 | 0.46547 | 0.02752 |
| 200 | 15 | 0.04876 | 0.00187 |
| 200 | 20 | 0.02059 | 0.00074 |

Tabela 5: Tabela błędy aproksymacji

**Wnioski**

Dla ustalonego stopnia wielomianu, zwiększanie liczby węzłów od pewnego momentu tylko nieznacznie poprawia dokładność funkcji aproksymującej. W tabeli 1 duży przeskok w wartościach błędu maksymalnego można zaobserwować miedzy oraz dla , dalsze zwiększanie parametru nie znacznie wpływa na wartość tego błędu. Dla ustalonej liczby węzłów, zwiększanie wielomianu, poprawia dokładność. Analogicznie jak przy zwiększaniu wartości wzrost parametru od pewnego momentu nie wpływa znacząco na jakość przybliżenia. Liczba węzłów nie wypływa istotnie na kształt aproksymacji. Przy wyborze parametrów oraz należy pamiętać o warunku oraz aby stopień wielomianu nie był za niski aby nie pojawił się wyżej opisywany problem z funkcją aproksymacją na końcach przedziałów. Dla zadanej funkcji aproksymacja trygonometryczna zadziałała lepiej niż aproksymacja wielomianami algebraicznymi.

Do obliczeń oraz wizualizacji został wykorzystany język programowania Pyhton wraz z bibliotekami NumPy, math, pandas oraz matplotlib. Wszystko zostało wykonane pod system Windows 10 na procesorze i5-1135G7 2.40GHz z 16GB pamięci operacyjnej. Wykresy były generowane przy użyciu 944 punktów. Punkty były wyznaczone co 0.01 w całym przedziale.