数学科学学院2015 — 2016学年夏季学期“多元分析”考试试卷

专业: **年级:** **学号:** **姓名:** **成绩:**

草 稿 区

得 分

一、(20分) 设$D = \left\{(x,y)\middle|0 \leqslant x \leqslant y \leqslant 1\right\}$, 计算二重积分$\iint_D y^2 \mathrm{e}^{xy}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

解. D可以表为y型区域

$$D = \left\{(x,y)\middle|0 \leqslant y \leqslant 1, 0 \leqslant x \leqslant y\right\},$$

于是

$$\begin{aligned}
& \iint_D y^2 \mathrm{e}^{xy}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
= \ & \int_0^1 \mathrm{d}y \int_0^y y^2 \mathrm{e}^{xy}\mathrm{d}x \\
= \ & \int_0^1 y\mathrm{e}^{xy}\Big|_{x=0}^{y}\mathrm{d}y \\
= \ & \int_0^1 y\left(\mathrm{e}^{y^2} - 1\right)\mathrm{d}y \\
= \ & \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{y^2} - y^2\right)\Big|_0^1 \\
= \ & \frac{1}{2}(\mathrm{e} - 1) - \frac{1}{2} \\
= \ & \frac{\mathrm{e}}{2} - 1.
\end{aligned}$$

草 稿 区

得 分

二、(20分) 求曲线$xy=4,\ xy=8,\ xy^3=5,\ xy^3=15$在第一象限所围平面区域的面积.

解. 曲线$xy=4,\ xy=8,\ xy^3=5,\ xy^3=15$在第一象限所围的平面区域是

$$D=\left\{(x,y)\middle|x>0,y>0,4\leqslant xy\leqslant 8,5\leqslant xy^3\leqslant 15\right\},$$

因此所求面积为

$$S=\iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

作变量变换：$u=xy,\ v=xy^3$, 则在这个变换下xy平面的区域D与uv平面上的区域

$$D'=\left\{(u,v)\middle|4\leqslant u\leqslant 8,5\leqslant v\leqslant 15\right\}$$

一一对应. 由

$$\frac{D(u,v)}{D(x,y)}=\begin{vmatrix} y & x \\ y^3 & 3xy^2 \end{vmatrix}=2xy^3=2v$$

得

$$\left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right|=\frac{1}{\left|\frac{D(u,v)}{D(x,y)}\right|}=\frac{1}{2v},$$

故

$$S=\iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{D'}\frac{1}{2v}\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\int_4^8\mathrm{d}u\int_5^{15}\frac{1}{2v}\mathrm{d}v=2\ln 3.$$

草 稿 区

得 分

三、(20分) 设$R>0$, $V=\left\{(x,y,z)\middle|x^2+y^2+z^2\leqslant R^2\right\}$, 计算三重积分$\iiint_V |xyz|\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$.

解. 由对称性知

$$\iiint_V |xyz|\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 8\iiint_{V_1} xyz\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

其中

$$V_1=\left\{(x,y,z)\in V\middle|x\geqslant 0, y\geqslant 0, z\geqslant 0\right\}.$$

作球坐标变换$x=r\sin\varphi\sin\theta$, $y=r\sin\varphi\sin\theta$, $z=r\cos\varphi$, 则V_1变为

$$V_1'=\left\{(r,\varphi,\theta)\middle|0\leqslant r\leqslant R, 0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}, 0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right\},$$

于是

$$\begin{aligned}
&\iiint_V |xyz|\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\\
=\ &8\iiint_{V_1} xyz\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\\
=\ &8\iiint_{V_1'} r\sin\varphi\sin\theta\cdot r\sin\varphi\sin\theta\cdot r\cos\varphi\cdot r^2\sin\varphi\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta\\
=\ &8\int_0^R r^5\mathrm{d}r\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\varphi\cos\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\cos\theta\mathrm{d}\theta\\
=\ &8\cdot\frac{1}{6}r^6\Big|_0^R\cdot\frac{1}{4}\sin^4\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\cdot\frac{1}{2}\sin^2\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\\
=\ &\frac{1}{6}R^6.
\end{aligned}$$

草 稿 区

得 分

四、(20分) 求曲面$z=x^2+2y^2$, $z=2-x^2$所围立体的体积.

证. 此立体是椭圆抛物面$z=x^2+2y^2$与抛物柱面$z=2-x^2$所围的空间区域. 记它在xy平面的投影区域为D, 则D的边界曲线是这两个曲面的交线在xy平面的投影. $z=x^2+2y^2$与$z=2-x^2$联立，消去z, 得$x^2+y^2=1$, 这就是D的边界，故

$$D=\left\{(x,y)\middle|x^2+y^2\leqslant 1\right\},$$

于是所求的体积为

$$\begin{aligned}
V &= \iiint_V \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\
&= \iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y \int_{x^2+2y^2}^{2-x^2} \mathrm{d}z \\
&= \iint_D [(2-x^2)-(x^2+2y^2)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= 2\iint_D (1-x^2-y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= 2\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1(1-r^2)r\mathrm{d}r \\
&= 2\cdot 2\pi\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right) \\
&= \pi.
\end{aligned}$$

草 稿 区

得 分

五、(20分，其中第1问12分，第2问8分) 设$V=\{(x,y,z)\big|0\leqslant z\leqslant 1, x^2+y^2\leqslant z^2\}$.

(1) 求证：

$$\lim_{n\to\infty} n^3\iiint_V \mathrm{e}^{-nz}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=2\pi;$$

(2) 设函数$f(x,y,z)$在V上可积，在点$(0,0,0)$处连续，求证：

$$\lim_{n\to\infty} n^3\iiint_V \mathrm{e}^{-nz}f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=2\pi f(0,0,0).$$

证. (1) 记$D(z)=\{(x,y)\big|x^2+y^2\leqslant z^2\}$, 则

$$n^3\iiint_V \mathrm{e}^{-nz}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=n^3\int_0^1\mathrm{e}^{-nz}\mathrm{d}z\iint_{D(z)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=n^3\int_0^1\mathrm{e}^{-nz}\cdot\pi z^2\mathrm{d}z=\pi\int_0^n t^2\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t\ (t=nz)=\pi[2-(n^2+2n+2)\mathrm{e}^{-n}],$$

从而

$$\lim_{n\to\infty} n^3\iiint_V \mathrm{e}^{-nz}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\lim_{n\to\infty}\pi[2-(n^2+2n+2)\mathrm{e}^{-n}]=2\pi.$$

(2) 令$g(x,y,z)=f(x,y,z)-f(0,0,0)$, 则$g(x,y,z)$在$V$上可积，在点$(0,0,0)$处连续且$g(0,0,0)=0$. 由(1)知只需证明

$$\lim_{n\to\infty} n^3\iiint_V \mathrm{e}^{-nz}g(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0.$$

因为$g(x,y,z)$在点$(0,0,0)$处连续且$g(0,0,0)=0$, 所以对任意$\varepsilon>0$, 存在$\delta\in(0,1)$, 使得当$x^2+y^2+z^2\leqslant 2\delta^2$时，就有$|g(x,y,z)|<\varepsilon$. 令$V_1=\{(x,y,z)\big|0\leqslant z\leqslant\delta, x^2+y^2\leqslant z^2\}$, $V_2=\{(x,y,z)\big|\delta\leqslant z\leqslant 1, x^2+y^2\leqslant z^2\}$, 则由重积分的区域可加性知

$$\iiint_V \mathrm{e}^{-nz}g(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint_{V_1}\mathrm{e}^{-nz}g(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\iiint_{V_2}\mathrm{e}^{-nz}g(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

当$(x,y,z)\in V_1$时，有$x^2+y^2+z^2\leqslant 2z^2\leqslant 2\delta^2$, 故$|g(x,y,z)|<\varepsilon$, 从而

$$\left|\iiint_{V_1}\mathrm{e}^{-nz}g(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\right|<\iiint_{V_1}\mathrm{e}^{-nz}\cdot\varepsilon\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\varepsilon\int_0^\delta\mathrm{e}^{-nz}\mathrm{d}z\iint_{D(z)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\varepsilon\int_0^\delta\mathrm{e}^{-nz}\cdot\pi z^2\mathrm{d}z<\pi\varepsilon\int_0^1\mathrm{e}^{-nz}z^2\mathrm{d}z<\frac{2\pi\varepsilon}{n^3}.$$

由$g(x,y,z)$在V上可积知$g(x,y,z)$有界，设$|g(x,y,z)|\leqslant M$, 就有

$$\left|\iiint_{V_2}\mathrm{e}^{-nz}g(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\right|\leqslant\iiint_{V_2}\mathrm{e}^{-nz}\cdot M\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=M\int_\delta^1\mathrm{e}^{-nz}\mathrm{d}z\iint_{D(z)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=M\int_\delta^1\mathrm{e}^{-nz}\cdot\pi z^2\mathrm{d}z<M\pi\int_\delta^1\mathrm{e}^{-n\delta}\mathrm{d}z<M\pi\mathrm{e}^{-n\delta}.$$

对上述$\varepsilon>0$和$\delta>0$, 存在正整数N, 当$n>N$时，有$n^3\mathrm{e}^{-n\delta}<\varepsilon$, 从而$n>N$时，就有$\left|n^3\iiint_V\mathrm{e}^{-nz}g(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\right|<2\pi\varepsilon+M\pi\varepsilon=(M+2)\pi\varepsilon$. 按极限定义知$\lim\limits_{n\to\infty}n^3\iiint_V\mathrm{e}^{-nz}g(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0$. 这就完成了证明.