

# 2025-2026 学年高等代数与解析几何 2-1 第一次月考

回忆：凇素子

2025 年 11 月 13 日

1. 已知  $f(x) = x^4 - 3x^3 + 6x^2 + ax + b$ ,  $g(x) = x^2 - 1$ ,  $g(x) \mid f(x)$ , 求  $a, b$  的值。
2. 已知行列式  $d = |a_{ij}|$ , 其中  $a_{ij} \in \mathbb{C}$  且  $a_{ij} = \overline{a_{ji}}$ , 求证  $d$  是实数。
3. 已知  $P$  是一个数域, 且

$$g(x) = ax + b \in P[x], f(x) \in P[x]$$

求证  $g(x) \mid f(x)$  等价于  $g(x) \mid f(x)^2$ 。

4. 已知  $f(x), g(x)$  是有理系数多项式,  $f(x)$  不可约, 且  $f(x)$  与  $g(x)$  有一个共同的复根, 求证  $f(x)$  的所有根都是  $g(x)$  的根。
5. 求  $n$  阶行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 2-x & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & n-1-x \end{vmatrix} = 0$$

的所有解。

6. 求证  $n$  阶行列式

$$\begin{vmatrix} x+y & y & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ x & x+y & y & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & x+y & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x+y & y \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & x+y \end{vmatrix} = \frac{x^{n+1} - y^{n+1}}{x - y}$$

7. 已知  $n$  阶行列式  $D$  的所有元素都是  $\pm 1$ , 求证当  $n \geq 3$  时,  $D \leq \frac{2}{3}n!$ 。