

本科生图论期中考试

2025 秋季学期

问题 1. 证明: 连通图 G 的满足如下条件的子图 G' 的数量等于 2^{m-n+1} (其中 $m = |E(G)|, n = |V(G)|$)。

- 所有顶点的度数都是偶数;
- $V(G') = V(G)$ 。

问题 2. 设 T 是一棵树。任取顶点 $x \in V(T)$, 定义函数 $s(x) = \sum_{y \in V(T)} \text{dist}(x, y)$, 其中 $\text{dist}(x, y)$ 是树 T 中 x 到 y 的距离。证明: $s(x)$ 在树 T 上是严格凸的, 即当 x 是 T 一个顶点而 y, z 是它的两个邻点时, 有

$$2s(x) < s(y) + s(z).$$

问题 3.

(a) 设 $d(X)$ 表示图 G 的顶点集 X 与 $V \setminus X$ 之间的边数。证明如下不等式:

$$d(X \cup Y) + d(X \cap Y) \leq d(X) + d(Y), \quad X, Y \subseteq V(G).$$

(b) 设 G 是一个 k -边连通的图, 且删掉 G 中任意一条边后, 都会使 G 的边连通度降为 $k - 1$ 。证明: G 中存在一个度为 k 的顶点。