

1. 求下列级数的收敛性

(1)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{5^{n-1}}$  (10分)

(2)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)2^n}{n!}$  (10分)

2. 讨论级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n x^n \sqrt{n+1}}$  的收敛性, 求出级数的收敛区间 - 收敛域 (15分)

3. 用 Fourier 级数求级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2}$  的和, (10分) 并由此求出  $\int_0^1 \ln x \cdot \ln(1-x) dx$  (10分)

4. 对每个  $T$ ,  $f(x, T)$  在  $[a, b]$  上是可积的, 如果当  $T \rightarrow T_0$  时,  $f(x, T)$  对于  $x \in [a, b]$  - 收敛到  $h(x)$ , 则  $h(x)$  在  $[a, b]$  上可积, 且

$$\lim_{T \rightarrow T_0} \int_a^b f(x, T) dx = \int_a^b h(x) dx = \int_a^b \lim_{T \rightarrow T_0} f(x, T) dx. \quad (15分)$$

5. 设函数  $f(x)$  在  $[0, +\infty)$  连续且  $\int_0^{+\infty} \frac{f(x)}{x} dx$  收敛, 对任意  $A > 0$ ,  $a, b > 0$ ,

(1) 求证:  $\int_0^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = f(0) \ln \frac{b}{a}$  (10分)

(2) 用上 - 题结论计算并验证:  $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan 5x - \arctan x}{x} dx$  (5分)

6. ~~证明~~ 求  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{dx}{1 + (\frac{x}{n})^n}$  (15分)