

数学学院本科生2024–2025学年第1学期抽象代数I课程期末考试试卷(A卷)

专业: 年级: 学号: 姓名:

| 题目 | 一 | 二 | 三 | 四 | 五 | 六 | 卷面成绩 |
|----|---|---|---|---|---|---|------|
| 得分 | | | | | | | |

一、判断题. 判断下列论断是否正确, 若正确, 给出简要证明, 否则举反例说明. (本题共 20 分, 每小题 5 分)

草稿区

1. 设 G 为有限交换群, n 为正整数, 且 $n \mid |G|$, 则 G 中存在 n 阶子群.
2. 设 $\{\mathbb{C}; +\}$ 是全体复数在加法下形成的群, $\{\mathbb{C}^*; \times\}$ 是全体非零复数在乘法下形成的群, 则 $\{\mathbb{C}; +\}$ 与 $\{\mathbb{C}^*; \times\}$ 同构.
3. 设 R 为欧几里得环, R_1 是 R 的子环, 则 R_1 也是欧几里得环.
4. 设 $R = \mathbb{Z}[\sqrt{-a}]$ 不是唯一分解整环, 其中 a 为正整数, 则 R 中必存在不可约元素 p 使得 p 不是素元.

二、(本题 20 分) (1) 试求群 S_{15} 中元素

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 8 & 5 & 3 & 1 & 2 & 15 & 13 & 11 & 4 & 6 & 9 & 7 & 10 & 12 & 14 \end{pmatrix}$$

草稿区

的阶。(本小题 10 分)

(2) 试问在交错群 A_{15} 中有多少 7 阶元? (本小题 10 分)

三、(本题 20 分) 试证明在整环 $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ 中 $9 + 2\sqrt{-5}$ 是素元, 而 $2 + \sqrt{-5}$ 是不可约元但不是素元.

四、(本题15分) 试证明99阶群都是交换群.

草稿区

五、(本题15分) 设 R 为整环, $a, b \in R$, 若 $c \in R$ 且 $a|c, b|c$, 则称 c 为 a, b 的一个公倍式.

若 a, b 的一个公倍式 m 能够整除 a, b 的任何一个公倍式, 则称 m 为 a, b 的一个最小公倍式.

- 1) 证明: 若 R 为唯一分解整环, 则 R 中任何两个元素都存在最小公倍式.
- 2) 证明: 在整环 $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$ 中, 元素 $a = 2 + 2\sqrt{-3}, b = 4$ 不存在最小公倍式.

草稿区

六、(本题10分) 设 R, R' 为幺环. 一个 R 到 R' 的映射 η 称为一个 Jordan 同态如果

- (1) η 是加法群 $\{R; +\}$ 到 $\{R'; +\}$ 的群同态;
- (2) $\eta(1) = 1'$, 其中 $1, 1'$ 分别为 R, R' 的乘法单位元;
- (3) 对任何 $a, b \in R$, $\eta(aba) = \eta(a)\eta(b)\eta(a)$.

草稿区

试证明: 如果 $\eta : R \rightarrow R'$ 是一个 Jordan 同态, 且 R' 为整环, 则对任何 $a, b \in R$,
 $\eta(ab) = \eta(a)\eta(b)$ 或 $\eta(ab) = \eta(b)\eta(a)$ 至少有一个成立.