

1. (15 分) 设向量组 $\alpha_1 = (1, 1, 1, 3)$, $\alpha_2 = (-1, -3, 5, 1)$, $\alpha_3 = (3, 2, -1, p+2)$, $\alpha_4 = (-2, -6, 10, p)$,

(1) 当 p 为何值时, 该向量组线性无关? 并在此时将 $\alpha = (4, 1, 6, 10)$ 用 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性表出;

(2) 当 p 为何值时, 该向量组线性相关? 并在此时求它的秩和一个极大无关组.

2. (15 分) 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性无关, 向量 β_1 可经它线性表出, 而向量 β_2 不能经它线性表出. 证明 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m, \beta_1 + \beta_2$ 线性无关.

3. (15 分) 设线性方程组为

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0, \\ 9x_1 - x_2 + 14x_3 + 2x_4 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 - 4x_4 = 1, \\ 4x_1 + 5x_2 + 7x_3 - 10x_4 = 2. \end{cases}$$

用特解和导出组的基础解系表示方程组的所有解.

4. (15 分) 设 A 是一实矩阵, 证明: $\text{秩}(A^T A) = \text{秩}(A)$.

5. (15 分) 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 且满足 $A^2B - A - B = E$, 求 $|B|$.

6. (15 分) 计算 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 8 \\ 3 & 6 & 12 \end{pmatrix}^k$, 其中 k 为正整数.

7. (10 分) 设 A 是一个 n 阶方阵, A 的第 i_1, \dots, i_r 行和第 i_1, \dots, i_r 列交叉点上的元素组成的子式称为 A 的主子式. 若 A 是对称矩阵且秩等于 r , 求证: A 必有一个 r 阶主子式不等于零.