

八、求下列级数的和

$$\text{1) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^{n-1}} \quad (10分)$$

$$\text{1) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)2^n}{n!} \quad (10分)$$

2. 调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n^{\alpha} (\ln n)}$ 的收敛性, 求出级数的收敛区间 - 收敛的区间 (15分)

3. 用 Fourier 级数求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2}$ 的和, (10分) 并指出 $\int_0^1 \ln x \cdot h(x) dx$ (10分)

4. 对每个 T , $f(x, T)$ 在 $[a, b]$ 上是可积, 如果当 $T \rightarrow T_0$ 时, $f(x, T)$ 在 $x \in [a, b]$ 上一致收敛于 $h(x)$, 则 $h(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积, 且

$$\lim_{T \rightarrow T_0} \int_a^b f(x, T) dx = \int_a^b h(x) dx = \int_a^b \lim_{T \rightarrow T_0} f(x, T) dx. \quad (15分)$$

5. 放数级数 $\int_a^b f(x) dx$ 在 $[a, +\infty)$ 上连续且 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 收敛, 对任意 $A > 0$, $a, b > 0$.

$$\text{1) 求证: } \int_a^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = f(a) \ln \frac{b}{a} \quad (10分)$$

$$\text{2) 用上-2) 经过计算得: } \int_0^{+\infty} \frac{\arctan \sqrt{x} - \arctan x}{x} dx. \quad (5分)$$

6. ~~证明~~ 求 $\int_0^1 \frac{dx}{1+x(\ln x)^n}$ (15分)