

2025-2026 最优化方法

回忆：小水滴

2026 年 1 月 27 日

1. $A \in \mathbb{R}^n$ 是非空闭凸集，对任意的 $x \in \mathbb{R}^n$, 定义

$$f(x) = \inf_{y \in A} \|x - y\|$$

证明：

- (a) $\forall x_0 \in \mathbb{R}^n, \exists y_0 \in A, s.t. f(x_0) = \|x_0 - y_0\|$
- (b) $f(x)$ 是凸函数

2. 用大 M 法解线性规划

$$\begin{aligned} & \min -x_1 - x_2 \\ \text{s.t.} & \begin{aligned} & 2x_1 + 5x_2 \leq 6 \\ & x_1 + x_2 \geq 2 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned} \end{aligned} \tag{1}$$

3. (a) $f(x)$ 在 \bar{x} 处连续可微，若 d 满足 $\nabla f(\bar{x})^T d < 0$ ，证明 d 是 $f(x)$ 的一个下降方向
(b) 最速下降法中， $x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k, \alpha_k$ 是精确搜索步长，证明

$$\nabla f(x_{k+1})^T d_k = 0$$

4. (a) 从 (1, 1) 开始，分别使用 Newton 法和阻尼 Newton 法最优化

$$\min x_1^2 + 3x_2^2$$

(b) 写出 BFGS 算法中 E_k 的表达式

5. (a) 证明 Lagrange 对偶问题 $g(\lambda, \mu) \leq d^*, d^*$ 为 $f(x)$ 的最优解

(b) 写出 KKT 条件

$$\begin{aligned} & \min \frac{1}{2} x^T G x + g^T x \\ & \text{s.t. } Ax = b \\ & \quad x^T C x \geq d^T x \end{aligned} \tag{2}$$

6. 证明有效集法第一种情况