

# 本科生图论期中考试

2025 秋季学期

**问题 1.** 证明: 连通图  $G$  的满足如下条件的子图  $G'$  的数量等于  $2^{m-n+1}$  (其中  $m = |E(G)|, n = |V(G)|$ )。

- 所有顶点的度数都是偶数;
- $V(G') = V(G)$ 。

**问题 2.** 设  $T$  是一棵树。任取顶点  $x \in V(T)$ , 定义函数  $s(x) = \sum_{y \in V(T)} \text{dist}(x, y)$ , 其中  $\text{dist}(x, y)$  是树  $T$  中  $x$  到  $y$  的距离。证明:  $s(x)$  在树  $T$  上是严格凸的, 即当  $x$  是  $T$  一个顶点而  $y, z$  是它的两个邻点时, 有

$$2s(x) < s(y) + s(z).$$

**问题 3.**

(a) 设  $d(X)$  表示图  $G$  的顶点集  $X$  与  $V \setminus X$  之间的边数。证明如下不等式:

$$d(X \cup Y) + d(X \cap Y) \leq d(X) + d(Y), \quad X, Y \subseteq V(G).$$

(b) 设  $G$  是一个  $k$ -边连通的图, 且删掉  $G$  中任意一条边后, 都会使  $G$  的边连通度降为  $k - 1$ 。证明:  $G$  中存在一个度为  $k$  的顶点。