

南开大学本科生2023 - 2024学年第一学期《常微分方程》期末考试试卷(A卷)

任课教师: 专业: 年级: 学号: 姓名: 成绩:

草稿区

得分

一、(50分) 求解常微分方程

1. $y'' + 3y' + 4y = 0$ 满足初值 $y(0) = 1, y'(0) = 0$.
2. $y' = \frac{xy}{x^2-y^2}, y(1) = 1$.
3. $2xy''y' = 1 + (y')^2$
4. $y = px \ln x + (xp)^2, p = \frac{dy}{dx}$.
5. $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = e^{xy}$.

南开大学本科生2023 - 2024学年第一学期《常微分方程》期末考试试卷(A卷)

草稿区

得分

二、(10分)

1. 求解 $\frac{dy}{dx} + \frac{2+xy^3}{2+x^3y} = 0$ 。

2. 求解 $2yy'' = 1 + (y')^2$ 。

南开大学本科生2023 - 2024学年第一学期《常微分方程》期末考试试卷(A卷)

草稿区

得分

三、(15分)

1. 假设 $P(x, y)$ 和 $Q(x, y)$ 满足

$$\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} = 2xQ - 2yP$$

试证明方程 $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ 有积分因子 $\mu = e^{x^2+y^2}$ 。

2. 已知 $f(x)$ 连续, 且满足

$$f(x) = \sin x - \int_0^x (x-t)f(t)dt,$$

求 $f(x)$ 。

3. 求解 $x'' + 2x' + 5x = \sin 2t$ 。

南开大学本科生2023 - 2024学年第一学期《常微分方程》期末考试试卷(A卷)

草稿区

南开大学本科生2023 - 2024学年第一学期《常微分方程》期末考试试卷(A卷)

草稿区

得分

- 四、(10分) 1. 求解 $x^2y'' - 4xy' + 6y = 2x$.
2. 求解 $x' = -x - y + t^2, y' = -y - z + 2t, z' = -z + t$.

南开大学本科生2023 - 2024学年第一学期《常微分方程》期末考试试卷(A卷)

草稿区

得分

- 五、(10分) 1. 证明 $x' = 2y, y' = -x^3$ 的零解是稳定的, 不是渐进稳定的。
2. 判断以下动力系统奇点(0,0)的类型 $x' = x + 2y, y' = 5y - 2x$.

南开大学本科生2023 - 2024学年第一学期《常微分方程》期末考试试卷(A卷)

草稿区

得分

六、(5分) 证明: 考虑系统 $x' = X(x, y), y' = Y(x, y)$. 这里 $X(x, y), Y(x, y)$ 在单连通区域 D 上是 C^1 的, 若于 D 中存在 C^1 函数 $h(x, y)$ 使得散度 $\operatorname{div}(hX, hY) = \frac{\partial(hX)}{\partial x} + \frac{\partial(hY)}{\partial y} \neq 0$ 在 D 中保持定号, 且不在 D 的任何子区域恒等于 0, 则系统在 D 中无闭轨. 构造合适的函数 h 证明 $x' = y, y' = x + y + y^2$ 在平面中无闭轨.