

|  |
| --- |
| МИНОБРНАУКИ РОССИИ |
| Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждениевысшего образования"МИРЭА - Российский технологический университет"РТУ МИРЭА |

**Институт** Информационных Технологий

**Кафедра** Вычислительной Техники

**ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №5**

**Двойственная задача**

**по дисциплине**

**«Теория принятия решений»**

Студент группы: ИКБО-04-19 Сюртуков З.А *(Фамилия студента)*

Руководитель работы Железняк Л.М.\_

*(Фамилия преподавателя)*

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

Москва 2021

**Двойственная задача**

С каждой ЗЛП тесно связана другая линейная задача, называемая двойственной. Тогда первоначальная задача называется исходной или прямой

При составлении двойственных задач используют следующие правила:

1) Матрица из коэффициентов при переменных в прямой задаче и аналогичная матрица в двойственной задаче получаются друг из друга транспортированием.

2) Ограничения – неравенства исходной задачи должны быть записаны так, чтобы знаки неравенств у них были направлены в одну сторону.

3) Если знаки неравенств в ограничениях прямой задачи «≤», то целевая функция должна 𝑓(𝑥̅) максимизироваться, если «≥» минимизироваться.

4) Каждому ограничению исходной задачи соответствует неизвестное в двойственной задаче; при этом неизвестное, отвечающее ограничению-неравенству, должно удовлетворять условию не отрицательности, отвечающее ограничению-равенству, может быть любого знака.

5) Целевая функция двойственной задачи 𝑔(𝑥̅) должна оптимизироваться противоположно целевой функции 𝑓(𝑥̅), т.е. 𝑓(𝑥̅) → 𝑚𝑎𝑥, то 𝑔(𝑦̅) → 𝑚𝑖𝑛, если 𝑓(𝑥̅) → 𝑚𝑖𝑛, то 𝑔(𝑦̅) → 𝑚𝑎𝑥.

**Ход решения 1 теоремы двойственности**

Для примера возьмем задачу, которая решалась симплексным методом. Вспомним ее целевую функцию и ограничения:

F(x) = 260X1 + 300X2 -> max

16X1 + 12X2 <= 1200

0,2X1 + 0,4X2 <= 30

6X1 + 5X2 <= 600

3X1 + 4X2 <= 300

Составим математическую модель двойственной задачи. В качестве переменных двойственной задачи возьмем y1, y2, y3, y4. Так как данная задача является симметричной, двойственная задача в матричном виде будет выглядеть следующим образом:

g(y) = (b, y) -> min

Atrans \* y => c

y > 0

Atrans = - транспонированная матрица коэффициентов системы ограничений.

Необходимо найти минимум целевой функции:

g(y) = (b, y) = 1200y1 + 30y2 + 600y3 + 300y4

При следующих ограничениях:

16y1 + 0,2y2 + 6y3 + 3y4 => 260

12y1 + 0,4y2 + 5y3 + 4y4 => 300

Все “y” больше 0.

Решение может быть найдено из формулы:

g(y) = Cb \* Drev

где Drev – обратная матрица, составленная из компонентов векторов, входящих в последний базис, при котором получен оптимальный план исходной задачи. В нашем примере базисными переменными являлись x4, x2, x5, x1. Этим переменным соответствуют векторы:

A4 = (0; 1; 0; 0)

A2 = (12; 0,4; 5; 4)

A5 = (0; 0; 1; 0)

A1 = (16; 0,2; 6; 3)

Тогда:

D =

Найдем обратную матрицу Drev:

Drev =

Cb = (0, 300, 0, 260)

Получаем:

y = Cb \* Drev = (5, 0, 0, 60)

Подставляем:

g(y) = 24000

Таким образом:

max f(x) = min g(y) = 24000

**Ход решения 2 теоремы двойственности**

Итак, имеем оптимальное решение прямой задачи:

X1 = 42.857

X2 = 42.857

Fmax = 24000

Рассмотрим выполнение неравенств прямой задачи при подстановке в систему ограничений:

1. Ограничение: 16x1 + 12x2 <= 1200

Подстановка: 16\*42.857 + 12\*42.857 = 1200

Вывод: ресурс является дефицитным и его оценка отлична от нуля (y1 != 0)

1. Ограничение: 0.2\*x1 + 0.4\*x2 <= 30

Подстановка: 0.2\*42.857 + 0.4\*42.857 = 25

Вывод: ресурс не является дефицитным и его оценка равна нулю (y2 = 0)

1. Ограничение: 6\*x1 + 5\*x2 <= 600

Подстановка: 6\*42.857 + 5\*42.857 = 462

Вывод: ресурс не является дефицитным и его оценка равна нулю (y3 = 0)

1. Ограничение: 3\*x1 + 4\*x2 <= 300

Подстановка: 3\*42.857 + 4\*42.857 = 300

Вывод: ресурс является дефицитным и его оценка отлична от нуля (y4 != 0)

Получаем:

16y1 + 3y4 = 260

12y1 + 4y4 = 300

Y1 = 5

Y4 = 60

Подставим значения в целевую функцию:

g(y) = 1200 \* 5 + 300 \* 60 = 24 000

**Ход решения 3 теоремы двойственности**

Оценим чувствительность решения задачи о максимальном доходе к изменению запасов сырья и спроса на продукцию. Вспомним, что оптимальное решение двойственной задачи равно:

Y = (5, 0, 0, 60)

Предположим, что спрос увеличился на единицу:

Gmax1 = y1 \* b1 = 5 \* 1 = 5

Gmax4 = y4 \* b4 = 60 \* 1 = 60

Обратная матрица базиса оптимального плана:

(y\_4, y\_2, y\_5, y\_1)

Drev =

Индексы базисных переменных оптимального плана:

A0\* = (0, 300, 0, 260)

Свободные члены неравенств прямой задачи:

A0 = (1200, 30, 600, 300)

**Сырье**:

Найдем нижнюю границу. В 4 столбце обратной матрицы 1 положительный элемент (4/7), ему соответствует индекс базисных переменных оптимального плана (300).

B\_n = (300/(4/7)) = 525

Найдем верхнюю границу. В 4 столбце обратной матрицы три отрицательных значения (− 1/7, -2/7, -3/7), которое соответствует индексу базисной переменной оптимального плана (0, 0, 260)

B\_v1 = 0 \* -7 = 0

B\_v2 = 0 \* -7/2 = 0

B\_v3 = 260 \* -7/3 = -607

Берем максимальный модуль:

B\_v = |B\_v3| = 607

Получаем интервал: (-525; 607)

Значит ресурс может изменяться в интервале: (1200 – 525; 1200 + 607) = (675; 1807)

**Электроэнергия:**

Найдем нижнюю границу. Во 2 столбце обратной матрицы 1 положительный элемент (1), ему соответствует индекс базисных переменных оптимального плана (0).

B\_n = 0 / 1 = 0

Верхняя граница:

B\_v = inf (так как нет отрицательных значений)

Получаем интервал: (0; inf)

Значит ресурс может изменяться в интервале: (30 – 0; 30 + inf) = (30; inf)

**Накладные расходы:**

Найдем нижнюю границу. В 3 столбце обратной матрицы 1 положительный элемент (1), ему соответствует индекс базисных переменных оптимального плана (0).

B\_n = 0 / 1= 0

Верхняя граница:

B\_v = inf (так как нет отрицательных значений)

Получаем интервал: (0; inf)

Значит ресурс может изменяться в интервале: (600 – 0; 600 + inf) = (600; inf)

**Зарплата:**

Найдем нижнюю границу. В 1 столбце обратной матрицы 2 положительных элемента (1/70; 1/7), ему соответствует индекс базисных переменных оптимального плана (0, 260).

B\_n1 = 0 \* 70 = 0

B\_n2 = 260 \* 7 = 1820

Берем максимальное значение:

B\_n = -B\_n2 = -1820

Найдем верхнюю границу. В 1 столбце обратной матрицы два отрицательных значения (−3/28, -9/28), которое соответствует индексу базисной переменной оптимального плана (300, 0).

B\_v1 = 300 \* -28/3 = -2800

B\_v2 = 0 \* -28/9 = 0

Берем максимальный модуль:

B\_v = |B\_v1| = 2800

Получаем интервал: (-1820; 2800)

Значит ресурс может изменяться в интервале: (300 – 1820; 300 + 2800) = (0; 3100).

Далее оценим влияние изменения объема ресурсов на величину максимальной стоимости продукции. Как известно, дефицитные ресурсы: y1 = 1200, y4 = 300. Умножим значения ресурсов на их верхние границы:

Gmax1 = y1 \* B\_v1 = 607 \* 1200 = 728 400

Gmax4 = y4 \* B\_v4 = 300 \* 2800 = 840 000

Совместное влияние изменений этих ресурсов приводит к максимальному изменению стоимости продукции:

Gmax = Gmax1 + Gmax4 = 728 400 + 840 000 = 1 568 400

Следовательно, оптимальное значение целевой функции при максимальном изменении ресурсов: 24000 + 1 568 400 = 1 592 400