

## § 1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Найдите, при каких значениях переменной не имеет смысла алгебраическая дробь:

1.1. а)  $\frac{a-5}{a+5}$ ; б)  $\frac{5c}{4+10c}$ ; в)  $\frac{3x-9}{1+x}$ ; г)  $\frac{15m+4}{4m+15}$ .

1.2. а)  $\frac{9x^2}{x(x+2)}$ ; б)  $\frac{8y^2}{y(y-4)}$ ;  
в)  $\frac{45z^3+5}{3z(23z+69)}$ ; г)  $\frac{72t^2-17}{2t(15t-60)}$ .

1.3. а)  $\frac{3a^2+5}{(a+2)(3a+9)}$ ; б)  $\frac{31c^2}{(3c-4)(c+12)}$ ;  
в)  $\frac{4x^2-2x-3}{(x-3)(x+3)}$ ; г)  $\frac{17s+1}{(s-2)(2+s)}$ .

1.4. а)  $\frac{7a^2-5}{(a+8)(a-9)(a+17)}$ ; б)  $\frac{73c^3-8}{(4c-2)(7c+8)(13c+39)}$ ;  
в)  $\frac{3b+2}{3b(3b-2)^2}$ ; г)  $\frac{2s-1}{2s(2s+1)^2}$ .

1.5. а)  $\frac{t^2+5t}{t^2-4t}$ ; б)  $\frac{t^2-t}{t^2+t}$ ;  
в)  $\frac{t+2}{t^2+2t}$ ; г)  $\frac{t-4}{t^2-4t}$ .

1.6. а)  $\frac{a^2+5}{(a-1)^2}$ ; б)  $\frac{12c^2-7}{(c+3)^2}$ ;  
в)  $\frac{b^2+12}{4b^2-4b+1}$ ; г)  $\frac{27m^3-15}{4m^2+36m+81}$ .

Найдите, при каких значениях переменной имеет смысл алгебраическая дробь:

1.7. а)  $\frac{3x^2}{x^2 + 3}$ ;      в)  $\frac{x^2 - 1}{|x| + 5}$ ;

б)  $\frac{15b + 1}{b^2(b^2 + 1)}$ ;      г)  $\frac{8m - 3}{|m| \cdot (m^2 + 1)}$ .

1.8. а)  $\frac{35p - 24}{p^2 - 16}$ ;      в)  $\frac{t^2 + 4t - 1}{t^2 - 36}$ ;

б)  $\frac{14k^2 + 14}{(k^2 - 9)(k^2 + 1)}$ ;      г)  $\frac{8m^2 + 16}{(m^2 + 2)(m^2 - 4)}$ .

1.9. Найдите значения переменной, при которых алгебраическая дробь равна нулю (если такие значения существуют):

а)  $\frac{x - 4}{x + 2}$ ;      в)  $\frac{x^2 + 1}{x^2}$ ;

б)  $\frac{3x^2}{x(x - 2)}$ ;      г)  $\frac{x^2 - 4}{x - 2}$ .

1.10. При каких значениях переменной алгебраическая дробь  $\frac{2m^2 - 2}{m(m + 1)(m - 2)}$  обращается в нуль, а при каких — не имеет смысла?

Найдите допустимые значения переменных:

1.11. а)  $\frac{2 - \frac{1}{b}}{b - 2}$ ;      в)  $\frac{\frac{3}{b + 1} - 1}{b - 4}$ ;

б)  $\frac{\frac{x^2 - 4x + 9}{x - 2}}{x}$ ;      г)  $\frac{\frac{4}{x + 1} - 3}{\frac{x}{x + 12}}$ .

1.12. а)  $\frac{a + 1}{a - b}$ ;      в)  $\frac{a - b}{a + b}$ ;

б)  $\frac{b - 4}{a + 2b}$ ;      г)  $\frac{2ab}{3a - b}$ .

1.13. Докажите, что значение алгебраической дроби равно нулю при всех значениях переменной:

а)  $\frac{(a + 2)^2 - 4(a + 1) - a^2}{a^2 + 1}$ ;      б)  $\frac{9 + x(x - 6) - (x - 3)^2}{x^2 + 3}$ .

○1.14. Докажите, что алгебраическая дробь не имеет смысла ни при каких значениях переменной:

а)  $\frac{2x - 5}{(x - 3)(x^2 + 3x + 9) - x(x^2 + 3) + 3(9 + x)}$ ;

б)  $\frac{3a - 1}{2(4 - a) - (a + 2)(a^2 - 2a + 4) + a(a^2 + 2)}$ .

1.15. Докажите, что при любых значениях переменной:

а) значение дроби  $\frac{5}{a^2 + 7}$  положительно;

б) значение дроби  $\frac{-3}{b^2 + 4}$  отрицательно;

в) значение дроби  $\frac{(x - 3)^2}{a^2 + 8}$  неотрицательно;

г) значение дроби  $\frac{(y - 6)^2}{-y^2 - 3}$  неположительно.

1.16. Найдите значение алгебраической дроби:

а)  $\frac{a^2 - b^2}{(a + b)^2}$  при  $a = 4$ ,  $b = -2$ ;

б)  $\frac{c^3 + dc}{c^2d + d^2}$  при  $c = -2$ ,  $d = 10$ ;

в)  $\frac{x^2 + y^2}{x^4 - y^4}$  при  $x = 13$ ,  $y = 12$ ;

г)  $\frac{m^4 - n^4}{m^3n - mn^3}$  при  $m = 2$ ,  $n = -1$ .

○1.17. Пусть  $f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x + 5}$ . Найдите:

а)  $f(0)$ ;  $f(1)$ ;  $f(-3)$ ;

б)  $f(a)$ ;  $f(3a)$ ;  $f(a - 3)$ ;

в)  $f(x^2)$ ;  $f(x + 1)$ ;  $f\left(\frac{1}{x}\right)$ ;

г)  $f(ab)$ ;  $f(a + b)$ ;  $f\left(\frac{a}{b}\right)$ .

В № 1.18, 1.19 составьте математическую модель ситуации, описанной в условии задачи.

○1.18. Прогулочный катер двигался по реке, скорость течения которой 2 км/ч. По течению реки он проплыл 18 км, а против течения — 14 км, затратив на весь путь 1 ч 20 мин.

- 1.19. Из города в посёлок, находящийся на расстоянии 40 км от города, выехал грузовик, а через 10 мин вслед за ним отправился легковой автомобиль, скорость которого на 20 км/ч больше скорости грузовика. В посёлок они прибыли одновременно.

Решите задачу, выделяя три этапа математического моделирования:

- 1.20. Моторная лодка, собственная скорость которой равна 30 км/ч, прошла по течению реки расстояние 48 км и против течения — 42 км. Какова скорость течения реки, если известно, что на путь по течению лодка затратила столько же времени, сколько на путь против течения?
- 1.21. Автобус проходит расстояние 160 км за время, которое автомобиль тратит на прохождение 280 км. Найдите скорость автобуса, если известно, что она на 30 км/ч меньше скорости автомобиля.
- 1.22. Придумайте реальную ситуацию, описываемую заданной математической моделью:

а)  $\frac{12}{x} - \frac{12}{x+1} = 1$ ;      в)  $\frac{20}{x} = \frac{25}{x+1}$ ;

б)  $\frac{24}{x+2} = \frac{16}{x-2}$ ;      г)  $\frac{10}{x-2} + \frac{9}{x+2} = 3$ .

- 1.23. Какие значения может принимать число  $a$ , если дробь  $\frac{x^2 + 2x - 8}{x - a}$  определена при всех значениях  $x$ , удовлетворяющих условию:

а)  $x \neq -3$ ;      б)  $x \neq 0$ ;      в)  $x^2 = 4$ ;      г)  $|x| \neq 1$ ?

- 1.24. При каких значениях  $a$  определена для всех значений  $x$  дробь:

а)  $\frac{3x - a}{x^2 - a}$ ;      б)  $\frac{ax - 3}{x^2 + 1}$ ;      в)  $\frac{3x - a}{x - 3}$ ;      г)  $\frac{3x - a}{ax - 5}$ ?

- 1.25. Зная, что  $3x - 9y = 1$ , найдите значение выражения:

а)  $x - 3y$ ;      в)  $\frac{12y - 4x}{5}$ ;

б)  $\frac{6}{x - 3y}$ ;      г)  $(9y^2 - 6xy + x^2) \cdot 3$ .

○1.26. Зная, что  $\frac{a}{b} = 3$ , найдите значение выражения:

а)  $-\frac{a}{b}$ ;      б)  $\frac{b}{a}$ ;      в)  $\frac{a+b}{b}$ ;      г)  $\frac{b+2a}{a}$ .

○1.27. Зная, что  $\frac{x}{y} = \frac{1}{5}$ , найдите значение выражения:

а)  $\frac{x}{2y}$ ;      б)  $\frac{x+y}{x}$ ;      в)  $\frac{y}{2x}$ ;      г)  $\frac{x-y}{y}$ .

○1.28. Найдите значение дроби:

а)  $\frac{x+y}{x}$ , если  $\frac{x}{y} = 0,2$ ;      б)  $\frac{3x-8y}{y}$ , если  $\frac{x}{y} = 0,4$ .

○1.29. Зная, что  $\frac{a+2b}{b} = 7$ , найдите значение выражения:

а)  $\frac{a}{b}$ ;      б)  $\frac{2a-b}{2b}$ ;      в)  $\frac{2a+3b}{b}$ ;      г)  $\frac{4b-a}{2a}$ .

○1.30. Зная, что  $\frac{x-3y}{y} = 12$ , найдите значение выражения:

а)  $\frac{x}{y}$ ;      б)  $\frac{2x+y}{3y}$ ;      в)  $\frac{y}{x}$ ;      г)  $\frac{3x-y}{2x}$ .

○1.31. Найдите все натуральные значения  $n$ , при которых заданная дробь является натуральным числом:

а)  $\frac{n+3}{n}$ ;      б)  $\frac{2n+5}{n}$ ;      в)  $\frac{6-n}{n}$ ;      г)  $\frac{45-7n}{n}$ .

○1.32. Пусть  $\frac{x}{y} = 3$ . Найдите значение дроби  $\frac{3x^2 - 5xy + 2y^2}{x^2 + 5y^2}$ .

○1.33. Докажите, что если  $\frac{3b-a}{b-2a} = 4$ , то  $\frac{2a^2 - 3ab + 2b^2}{2a^2 - ab} = 1,58$ .

○1.34. Выразите:

а) переменную  $y$  из равенства  $(x-2)(y+4) = 15$ ;

б) переменную  $k$  из равенства  $x^2 \cdot k - (k+1)x - 4 = 0$ ;

в) переменную  $x$  из равенства  $(x+y)(2y-z) + x - 5 = 0$ ;

г) переменную  $z$  из равенства  $\frac{1}{x + \frac{1}{y + \frac{1}{z}}} = 1$ .

Сократите дробь:

1.35. а)  $\frac{14k^2l}{7kl^2}$ ;      в)  $\frac{135p^3q^2}{25q^2p}$ ;

б)  $\frac{13(x+4)^3}{26x(x+4)}$ ;      г)  $\frac{48m(2m-n)^3}{60n(2m-n)^3}$ .

○1.36. а)  $\frac{ac - bd + bc - ad}{af - bd + bf - ad}$ ;      в)  $\frac{2x - 2y - x^2 + y^2}{x^3y - 2x^2y^2 + xy^3}$ ;

б)  $\frac{a^2 + 2bc - b^2 - c^2}{b^2 - a^2 - c^2 + 2ac}$ ;      г)  $\frac{ac - 2bc - ab + b^2 + c^2}{bc + 2ab - ac - b^2 - a^2}$ .

○1.37. Докажите тождество:

а)  $\frac{4,5a^2 + 0,5ab}{40,5a^2 - 0,5b^2} = \frac{a}{9a - b}$ ;      б)  $\frac{24,5x^2 - 0,5y^2}{3,5x^2 - 0,5xy} = \frac{7x + y}{x}$ .

Найдите значение дроби:

○1.38. а)  $\frac{2x - 6y}{0,25x^2 - 2,25y^2}$ , если  $x + 3y = 8$ ,  $x - 3y \neq 0$ ;

б)  $\frac{2a + 4b}{0,2a^2 - 0,8b^2}$ , если  $a - 2b = 5$ ,  $a + 2b \neq 0$ .

○1.39. а)  $\frac{9x^2 - 3xy}{12xy - 4y^2}$  при  $x = 0,5$ ,  $y = 0,25$ ;

б)  $\frac{a^3 - 4ab^2}{12b^2 - 6ab}$  при  $a = -2,4$ ,  $b = 0,2$ ;

в)  $\frac{16m^2 - 4n^2}{6m - 3n}$  при  $m = 1,5$ ,  $n = -4,5$ ;

г)  $\frac{30kl - 15k^2}{4kl - 8l^2}$  при  $k = \frac{1}{5}$ ,  $l = \frac{1}{6}$ .

○1.40. Сократите дробь и выясните, изменилось ли в результате сокращения множество допустимых значений её переменных:

а)  $\frac{8x}{8a}$ ;      б)  $\frac{x^2 - 1}{x^2 + 2x + 1}$ ;      в)  $\frac{2x^2 + 8}{10x^3 + 40x}$ ;      г)  $\frac{2x}{x^2}$ .

○1.41. Сократите дробь и выясните, изменилось ли в результате сокращения множество допустимых значений её переменных:

а)  $\frac{x-1}{x^2-x}$ ;      в)  $\frac{d^2-8dn+16n^2}{12n-3d}$ ;

б)  $\frac{x^2-4y^2}{2x+4y}$ ;      г)  $\frac{y^2-2y+1}{y^2-1}$ .

○1.42. Докажите, что значение данной дроби при всех допустимых значениях  $x$  равно  $-8$ , укажите эти допустимые значения  $x$ :

а)  $\frac{8x-8}{1-x}$ ;      в)  $\frac{8x+8}{\frac{x^2-1}{1-x}}$ ;

б)  $\frac{8x^3-64}{(2-x)(x^2+2x+4)}$ ;      г)  $\frac{8-\frac{8}{x^3}}{\left(\frac{1}{x}-1\right)\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}+1\right)}$ .

○1.43. Найдите значения параметра  $a$ , при которых значение дроби при всех допустимых значениях  $t$  постоянно. Укажите это значение дроби и допустимые значения  $t$ :

а)  $\frac{t-3}{t-a}$ ;      в)  $\frac{2t^2-12t}{t^2-3at}$ ;

б)  $\frac{9t^2-4}{(2-at)(2-3t)}$ ;      г)  $\frac{t^3+8}{(2+at)(-t^2+2t-4)}$ .

○1.44. Пусть  $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n} = k$ .

Докажите, что  $\frac{a_1+a_2+\dots+a_n}{b_1+b_2+\dots+b_n} = k$ .

○1.45. Найдите все пары  $(x; y)$ , при которых данная дробь не определена, и изобразите их на координатной плоскости:

а)  $\frac{3x-5y}{x-y}$ ;      б)  $\frac{10x}{2x-y}$ ;      в)  $\frac{2x+y}{x+y}$ ;      г)  $\frac{-3x}{x+2y}$ .

○1.46. Найдите все пары  $(a; b)$ , при которых данная дробь не определена, и изобразите их на координатной плоскости:

а)  $\frac{10a}{(a-1)(b-1)}$ ;      в)  $\frac{b-5}{(a-5)(b+2)}$ ;

б)  $\frac{3+a}{(a+4)(2a+b)}$ ;      г)  $\frac{7ab}{(b-3)(4a-3b)}$ .

○1.47. Постройте множество точек  $(x; y)$  на координатной плоскости, координаты которых удовлетворяют условию:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \frac{x-1}{y-1} = 0; & \text{в) } \frac{x^2-y^2}{x+y} = 0; \\ \text{б) } \frac{x^2-2xy+x}{x(x-y)} = 0; & \text{г) } \frac{x^2-y^2-2y-1}{x+y+1} = 0. \end{array}$$

●1.48. Постройте график функции:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } y = \frac{2x^2-5x}{2x-5}; & \text{в) } y = \frac{2x^2-5x}{x}; \\ \text{б) } y = \frac{2x^3}{x+|x|}; & \text{г) } y = \frac{x^3}{|x|}. \end{array}$$

Приведите к наименьшему общему знаменателю алгебраические дроби:

$$1.49. \text{ а) } \frac{b}{3a} \text{ и } \frac{3}{a}; \quad \text{в) } \frac{3a^2}{8} \text{ и } \frac{5ab}{12};$$

$$\text{б) } \frac{b}{a} \text{ и } \frac{c}{2ab}; \quad \text{г) } \frac{m}{3n} \text{ и } \frac{5}{6mn}.$$

$$1.50. \text{ а) } \frac{x^2}{5y} \text{ и } \frac{z-3}{y^2}; \quad \text{в) } \frac{3c}{2d^2} \text{ и } \frac{c+d}{6ad};$$

$$\text{б) } \frac{1}{15xy} \text{ и } \frac{1}{5x^2y^2}; \quad \text{г) } \frac{3t}{4x^2y} \text{ и } \frac{2t}{5xy^2}.$$

$$1.51. \text{ а) } \frac{8}{15a^2b^3} \text{ и } \frac{3}{10a^3b^2}; \quad \text{в) } \frac{11c}{28p^3q^{31}} \text{ и } \frac{4c}{35p^8q};$$

$$\text{б) } \frac{7n+m}{63m^2n^4} \text{ и } \frac{n-4m}{36m^3n^3}; \quad \text{г) } \frac{2y^2-x}{24x^2y^3} \text{ и } \frac{8y+5x^2}{60x^4y}.$$

$$1.52. \text{ а) } \frac{b}{a+b} \text{ и } \frac{13b}{a}; \quad \text{в) } \frac{2c}{b} \text{ и } \frac{b}{b-c};$$

$$\text{б) } \frac{1+a}{a^2} \text{ и } \frac{a-1}{a-4}; \quad \text{г) } \frac{x-y}{x+y} \text{ и } \frac{x+3}{x^3}.$$

$$1.53. \text{ а) } \frac{b}{a} \text{ и } \frac{b^2}{a(a-1)}; \quad \text{в) } \frac{(c+d)}{c(c-d)} \text{ и } \frac{d}{c};$$

$$\text{б) } \frac{c+1}{c-1} \text{ и } \frac{c-3}{c(c-1)}; \quad \text{г) } \frac{x^2}{y(y+x)} \text{ и } \frac{y}{y+x}.$$



Приведите к наименьшему общему знаменателю алгебраические дроби:

- 1.54. а)  $\frac{b}{2a}$  и  $\frac{a+b}{a(a-b)}$ ;      в)  $\frac{m-n}{m(m+n)}$  и  $\frac{n}{3m}$ ;  
 б)  $\frac{a-1}{a^2}$  и  $\frac{a+1}{a(a-1)}$ ;      г)  $\frac{m-4}{m(m+2)}$  и  $\frac{m-2}{m^2}$ .
- 1.55. а)  $\frac{17x}{3x-3}$  и  $\frac{11}{6x-6}$ ;      в)  $\frac{5x}{8x+8y}$  и  $\frac{9y}{4x+4y}$ ;  
 б)  $\frac{b-2}{ab+2a}$  и  $\frac{a+2}{2b+b^2}$ ;      г)  $\frac{x-3}{x^2-xy}$  и  $\frac{y-3}{xy-y^2}$ .
- 1.56. а)  $\frac{5m}{m-8}$  и  $\frac{6n}{m+8}$ ;      в)  $\frac{q+10}{q-10}$  и  $\frac{3q}{q+10}$ ;  
 б)  $\frac{a-b}{b(a+b)}$  и  $\frac{4a}{b(a-b)}$ ;      г)  $\frac{x+1}{y(x-1)}$  и  $\frac{x-1}{y(x+1)}$ .
- 1.57. а)  $\frac{3c}{cd+d^2}$  и  $\frac{c+3}{cd-d^2}$ ;      в)  $\frac{x-2}{xy-y}$  и  $\frac{2y}{xy+y}$ ;  
 б)  $\frac{4-2x+x^2}{2x-x^2}$  и  $\frac{2-x}{2x+x^2}$ ;      г)  $\frac{x+1}{x^2-x}$  и  $\frac{x^2+x+1}{x^2+x}$ .
- 1.58. а)  $\frac{15}{m-n}$  и  $\frac{16}{n-m}$ ;      в)  $\frac{48}{3p-q}$  и  $\frac{11}{q-3p}$ ;  
 б)  $\frac{15a}{2a+b}$  и  $\frac{6b}{-2a-b}$ ;      г)  $\frac{4s}{-2t-3s}$  и  $\frac{8t}{2t+3s}$ .
- 1.59. а)  $\frac{1}{(x-y)^2}$  и  $\frac{1}{(y-x)^2}$ ;      в)  $\frac{25p}{(p-q)^2}$  и  $\frac{5q}{(q-p)^2}$ ;  
 б)  $\frac{15m}{(a-b)^2}$  и  $\frac{17n}{-(b-a)^2}$ ;      г)  $\frac{3k}{-(l-k)^2}$  и  $\frac{8l}{(k-l)^2}$ .
- 1.60. а)  $\frac{7x}{x^2-4}$  и  $\frac{x+2}{x-2}$ ;      в)  $\frac{m-n}{m+n}$  и  $\frac{5mn}{m^2-n^2}$ ;  
 б)  $\frac{8y}{y^2-9}$  и  $\frac{5}{3-y}$ ;      г)  $\frac{7m}{-m-n}$  и  $\frac{3n}{m^2-n^2}$ .
- 1.61. а)  $\frac{x+y}{x-y}$  и  $\frac{49}{(x-y)^2}$ ;      в)  $\frac{p}{(p+q)^2}$  и  $\frac{p-q}{p+q}$ ;  
 б)  $\frac{32a}{(z-t)^8}$  и  $\frac{42b}{(z-t)^7}$ ;      г)  $\frac{7a}{(a+b)^{12}}$  и  $\frac{9b}{(a+b)^{14}}$ .

Приведите к наименьшему общему знаменателю алгебраические дроби:

- 1.62. а)  $\frac{11a}{a^3 + b^3}$  и  $\frac{1}{a + b}$ ;      в)  $\frac{10b}{b^3 - 8}$  и  $\frac{1}{b - 2}$ ;  
 б)  $\frac{3x + 1}{x^3 - 27}$  и  $\frac{x - 3}{x^2 + 3x + 9}$ ;      г)  $\frac{1 - 5y}{t^3 + y^3}$  и  $\frac{t + y}{t^2 - ty + y}$ .
- 1.63. а)  $\frac{a - b}{5a + 5b}$  и  $\frac{a^2}{a^2 - b^2}$ ;      в)  $\frac{xy}{x^2 - y^2}$  и  $\frac{x + y}{2x - 2y}$ ;  
 б)  $\frac{y^3}{x^2 - y^2}$  и  $\frac{x^2 - xy + y^2}{x^2 - xy}$ ;      г)  $\frac{z^2 + tz + t^2}{zt + z^2}$  и  $\frac{3t}{z^2 - t^2}$ .
- 1.64. а)  $\frac{b}{2a^2}$ ,  $\frac{7}{6ab}$  и  $\frac{a}{3b^2}$ ;      в)  $3t$ ,  $\frac{2t}{s^2}$  и  $\frac{5}{st}$ ;  
 б)  $\frac{m}{(m + n)}$ ,  $\frac{n}{m}$  и  $(m + n)$ ;      г)  $\frac{a + b}{a^2}$ ,  $\frac{a - b}{3a}$  и  $\frac{b^2}{a + b}$ .
- 1.65. а)  $\frac{1 + x + x^2}{x - 2}$ ,  $\frac{x + 2}{x - 1}$  и  $2x$ ;      в)  $\frac{y - 5}{y + 1}$ ,  $5y$  и  $\frac{y^2 - y + 1}{y + 5}$ ;  
 б)  $\frac{c - 1}{(c - 2)(c + 2)}$ ,  $\frac{c^2}{c - 2}$  и  $\frac{4}{c + 2}$ ;      г)  $\frac{4c}{c^2 - 25}$ ,  $\frac{c - 5}{c + 5}$  и  $\frac{c + 5}{c - 5}$ .
- 1.66. а)  $\frac{x^2 + 5}{4 - x^2}$ ,  $\frac{x + 1}{x + 2}$  и  $\frac{x - 1}{x - 2}$ ;  
 б)  $\frac{2mn}{3n^2 - 3m^2}$ ,  $\frac{(m + n)^2}{-m^2 + 2mn - n^2}$  и  $\frac{(m - n)^2}{2mn + m^2 + n^2}$ ;  
 в)  $\frac{10xy}{4x^2 - y^2}$ ,  $\frac{2x}{-2x - y}$  и  $\frac{5y}{y - 2x}$ ;  
 г)  $\frac{6x}{5x^2 - 45}$ ,  $\frac{(x - 3)^2}{-x^2 - 6x - 9}$  и  $\frac{x^2 + 6x + 9}{x^2 + 9 - 6x}$ .
- 1.67. а)  $\frac{c + 6b}{ac + 2bc - 6ab - 3a^2}$ ,  $\frac{2b}{a + 2b}$  и  $\frac{c}{c - 3a}$ ;  
 б)  $\frac{3a - b}{4a + 2c}$ ,  $\frac{2a + c}{6a + 2b}$  и  $\frac{6a^2}{6a^2 + 2ab + 3ac + bc}$ ;  
 в)  $\frac{1}{y - 5z}$ ,  $\frac{z}{x + 2y}$  и  $\frac{2x + z}{xy - 10yz - 5xz + 2y^2}$ ;  
 г)  $\frac{a - 1}{a^2 - ab + bc - ac}$ ,  $\frac{a + c}{2b - 2a}$  и  $\frac{a - b}{3a - 3c}$ .

○1.68. Докажите, что если в дроби  $\frac{a^3 - 2b^3}{3a^3 - a^2b - 4ab^2}$  переменные  $a$  и  $b$  заменить соответственно на  $pa$  и  $pb$ , то получим дробь, тождественно равную данной. Используя доказанное тождество, найдите значение заданной дроби при:

а)  $a = \frac{5}{113}$ ,  $b = \frac{4}{113}$ ;      б)  $a = 65$ ,  $b = 52$ .

●1.69. Постройте график функции:

а)  $y = \frac{x^3 - 4x^2 + 2x - 8}{x^2 + 2}$ ;      б)  $y = \frac{x^3 - 4x^2 + 2x - 8}{x - 4} - 2$ .

## § 2. СЛОЖЕНИЕ И ВЫЧИТАНИЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ДРОБЕЙ

Выполните сложение (вычитание) алгебраических дробей:

2.1. а)  $\frac{c}{25} + \frac{d - c}{25}$ ;      в)  $\frac{48p^8}{5n} - \frac{23p^8}{5n}$ ;  
б)  $\frac{2a - b}{12b} + \frac{a + b}{12b}$ ;      г)  $\frac{7m + 2n}{n^3} - \frac{7m - 3n}{n^3}$ .

2.2. а)  $\frac{7p - 13}{10p} - \frac{2p - 3}{10p}$ ;      в)  $\frac{3x + 7y}{24y} + \frac{3x - 4y}{24y}$ ;  
б)  $\frac{x^2 + 2x - 3}{2x^2} + \frac{3 - x}{2x^2}$ ;      г)  $\frac{2 - 3y^2 + y}{3y^2} - \frac{2 + y^2}{3y^2}$ .

2.3. а)  $\frac{6}{3 + p} + \frac{2p}{3 + p}$ ;      в)  $\frac{3q}{q - 4} - \frac{12}{q - 4}$ ;  
б)  $\frac{7}{z - 7} - \frac{z}{z - 7}$ ;      г)  $\frac{t}{3 - t} - \frac{3}{3 - t}$ .

2.4. Найдите область определения алгебраических дробей и выполните указанные действия:

а)  $\frac{2m}{m - n} + \frac{2n}{n - m}$ ;      в)  $\frac{pq}{p - q} + \frac{q^2}{q - p}$ ;  
б)  $\frac{2y}{y + 3} + \frac{y - 3}{-y - 3}$ ;      г)  $\frac{3x + 5}{-x - 5} + \frac{2x}{x + 5}$ .

Найдите область определения алгебраических дробей и выполните указанные действия:

2.5. а)  $\frac{a^2 - 3}{a(a - 3)} - \frac{6}{a(a - 3)}$ ;      в)  $\frac{15 - d^2}{d(5 + d)} + \frac{10}{d(d + 5)}$ ;

б)  $\frac{x^2 + 1}{xy - y^2} + \frac{y^2 + 1}{y^2 - xy}$ ;      г)  $\frac{p^2 - 2}{p^2 - pq} + \frac{q^2 - 2}{pq - p^2}$ .

2.6. а)  $\frac{100}{3x - 10} - \frac{9x^2}{3x - 10}$ ;      в)  $\frac{121}{5x + 11} - \frac{25x^2}{5x + 11}$ ;

б)  $\frac{2z}{9 - z^2} - \frac{6}{9 - z^2}$ ;      г)  $\frac{3t}{49 - t^2} - \frac{21}{49 - t^2}$ .

2.7. а)  $\frac{z^2}{(z + 8)^2} - \frac{64}{(z + 8)^2}$ ;      в)  $\frac{t^2}{(t + 10)^2} - \frac{100}{(t + 10)^2}$ ;

б)  $\frac{a^2}{(9x - a)^2} - \frac{81x^2}{(a - 9x)^2}$ ;      г)  $\frac{49c^2}{(b - 7c)^2} - \frac{b^2}{(7c - b)^2}$ .

○2.8. а)  $\frac{x^2 + 12x}{x^2 - 36} + \frac{36}{x^2 - 36}$ ;      в)  $\frac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2} - \frac{2xy}{x^2 - y^2}$ ;

б)  $\frac{c^2 + 100}{c - 10} + \frac{20c}{10 - c}$ ;      г)  $\frac{d^2 + 49}{7 - d} + \frac{14d}{d - 7}$ .

○2.9. а)  $\frac{x^3}{x^2 - y^2} - \frac{y^3}{x^2 - y^2}$ ;      в)  $\frac{y^3}{y^2 - 4} + \frac{8}{y^2 - 4}$ ;

б)  $\frac{n^2 + n}{n^3 - 8} + \frac{n + 4}{n^3 - 8}$ ;      г)  $\frac{m^2 + 9}{m^3 + 27} - \frac{3m}{m^3 + 27}$ .

○2.10. Докажите тождество:

а)  $\frac{b^2}{b^2 + 1} + \frac{2b^2 + 1}{b^2 + 1} - \frac{2(2b^2 + 1)}{b^2 + 1} = -1$ ;

б)  $\frac{3c^2 + 4}{2c^2 + 3} - \frac{2(c^2 + 2)}{2c^2 + 3} + \frac{c^2 + 3}{2c^2 + 3} = 1$ .

○2.11. Упростите и найдите значение выражения:

а)  $\frac{-x^2 + 5x}{1 - 6x} + \frac{41x^2 - 2x}{6x - 1}$  при  $x = \frac{1}{28}$ ;

б)  $\frac{(m - 1)^2}{m^3 + 27} + \frac{8 - m}{m^3 + 27}$  при  $m = -3,5$ ;

в)  $\frac{4c^2 - 8c}{3c - 2} - \frac{2c + 5c^2}{2 - 3c}$  при  $c = \frac{2}{9}$ ;

г)  $\frac{n^2 + n + 1}{n^3 - 8} - \frac{n + 3}{8 - n^3}$  при  $n = -4$ .

Упростите выражение:

○2.12. а)  $\frac{9x^2}{9x^2 - 4} - \frac{12x}{(3x - 2)(3x + 2)} + \frac{4}{9x^2 - 4};$

б)  $\frac{25a^2}{25a^2 - 1} - \frac{10a}{(5a - 1)(5a + 1)} - \frac{1}{1 - 25a^2}.$

○2.13. а)  $\frac{x^2 - 3}{(x - 2)^4} - \frac{5x - 1}{(x - 2)^4} + \frac{x + 6}{(x - 2)^4};$

б)  $\frac{8m^2 + 3m - 2}{4m^2 + 4m + 1} - \frac{5m - 7}{-4m^2 - 4m - 1} - \frac{4m - 9}{(1 + 2m)^2}.$

○2.14. а)  $\frac{5}{(b - 4)(5 - b)} + \frac{b + 1}{(4 - b)(5 - b)};$

б)  $\frac{2}{(3 - a)(2 - a)} + \frac{a - 4}{(a - 3)(a - 2)}.$

○2.15. Упростите выражение и найдите его значение:

а)  $\frac{3 + 2x}{(2 + x)(4 - x)} + \frac{1 + x}{(x + 2)(x - 4)}$  при  $x = 3,95;$

б)  $\frac{5y - 61}{(y - 2)(3 - y)(y - 1)} - \frac{55 - 3y}{(2 - y)(y - 3)(1 - y)}$  при  $y = 1,8.$

○2.16. Вместо символа \* запишите такое выражение, чтобы получилось верное равенство:

а)  $\frac{*}{2 - 3a} + \frac{3a - 4}{2 - 3a} = 1;$       в)  $\frac{*}{2y + 5} + \frac{y - 1}{2y + 5} = -1;$

б)  $\frac{5x - 4}{x - 2} - \frac{*}{x - 2} = 2;$       г)  $\frac{4b - 7}{8b + 9} - \frac{*}{8b + 9} = -3.$

○2.17. Докажите, что выражение  $\frac{x^2 - 3}{(x - 2)^4} - \frac{5x - 1}{(x - 2)^4} + \frac{x + 6}{(x - 2)^4};$  при всех допустимых значениях переменной принимает положительные значения.

○2.18. Докажите, что выражение  $\frac{2 - y^2}{(y - 3)^4} - \frac{7 - 5y}{(y - 3)^4} - \frac{4 - y}{(y - 3)^4}$  при всех допустимых значениях переменной принимает отрицательные значения.

○2.19. Докажите тождество:

$$\frac{x^3 + y^3}{(x - y)^2} + \frac{3xy^2 - y^3}{(y - x)^2} + \frac{3xy^2}{2xy - x^2 - y^2} = \frac{x^3}{(x - y)^2}.$$

Выполните сложение (вычитание) алгебраических дробей:

2.20. а)  $\frac{x}{5} + \frac{2x}{3}$ ; б)  $\frac{3b}{28} - \frac{b}{4}$ ; в)  $\frac{6m}{7} - \frac{m}{11}$ ; г)  $\frac{m}{42} + \frac{5m}{6}$ .

2.21. а)  $\frac{a+8}{9} + \frac{a-2}{12}$ ; б)  $\frac{3-z}{12} - \frac{3z-5}{8}$ ;

б)  $\frac{b-4q}{6} - \frac{2q+b}{10}$ ; г)  $\frac{p-5}{20} + \frac{p-1}{12}$ .

2.22. а)  $\frac{3c-5}{c} - \frac{3d-2}{d}$ ; б)  $\frac{7-5r}{r} - \frac{8-5s}{s}$ ;

б)  $\frac{8a-15}{2a} + \frac{13-12b}{3b}$ ; г)  $\frac{9-5z}{5z} + \frac{5+4t}{4t}$ .

2.23. а)  $\frac{n+4}{8n} - \frac{m-2}{8m}$ ; б)  $\frac{p+4}{12p} - \frac{q+8}{12q}$ ;

б)  $\frac{3c+5d}{35cd} + \frac{c-3d}{21cd}$ ; г)  $\frac{2m+3n}{21mn} - \frac{m+6n}{15mn}$ .

2.24. а)  $\frac{x^2+y^2}{x} - x$ ; б)  $3z + \frac{1-9z^2}{3z}$ ;

б)  $2s - \frac{(b+s)^2}{b}$ ; г)  $\frac{(p-q)^2}{2p} + q$ .

2.25. а)  $(2a+1) - \frac{8a^2+3}{4a}$ ; б)  $\frac{9b^2-4}{3b} + (2-3b)$ ;

б)  $\frac{4}{3b} + 3b + 4$ ; г)  $a - 1 + \frac{1}{4a}$ .

2.26. а)  $\frac{2m-n}{mn} + \frac{5n-2k}{nk}$ ; б)  $\frac{3z+2t}{zt} - \frac{t+3s}{st}$ ;

б)  $\frac{m+1}{m} - \frac{3m-1}{m^2}$ ; г)  $\frac{5}{a} - \frac{10a-1}{5a^3}$ .

○2.27. Упростите выражение:

а)  $\frac{xy-y}{x} - \frac{xy-x}{y} - \frac{x^2-y^2}{xy}$ ;

б)  $12 + \frac{4p}{q} + \frac{p^2}{3q^2}$ ;

в)  $\frac{3mn+2n^2}{mn} - \frac{m+2n}{m} + \frac{m-2n}{n}$ ;

г)  $\frac{25b^2}{2a^2} - \frac{10b}{a} + 2$ .

○2.28. Упростите выражение и найдите его значение:

а)  $\frac{12x + 5y}{4x^2y} - \frac{5y - 4x}{5xy^2}$  при  $x = \frac{1}{2}$ ,  $y = \frac{1}{5}$ ;

б)  $\frac{2n + 3m}{6mn^2} - \frac{9m - 2n}{9m^2n}$  при  $m = \frac{2}{3}$ ,  $n = \frac{1}{2}$ .

Найдите область определения алгебраических дробей и выполните указанные действия:

2.29. а)  $\frac{1}{z+2} - \frac{2}{3z}$ ;      в)  $\frac{1}{2t-1} - \frac{2}{5t}$ ;

б)  $\frac{2a+b}{6a-b} - \frac{b}{2a}$ ;      г)  $\frac{7n+2k}{9n-2k} + \frac{n}{2k}$ .

2.30. а)  $4a + \frac{1}{a-1}$ ;      в)  $\frac{9+3b^2}{b+3} - 2b$ ;

б)  $a - 1 - \frac{2-3a}{a-2}$ ;      г)  $\frac{3-2b^2}{2b-1} + b + 3$ .

2.31. а)  $x + y - \frac{x^2 + y^2}{x-y}$ ;      в)  $\frac{a^2 + b^2}{a+b} + a - b$ ;

б)  $x - y - \frac{x^2 + y^2}{x-y}$ ;      г)  $\frac{a^2 + b^2}{a+b} - a - b$ .

2.32. а)  $\frac{b}{a} + \frac{b}{a(a-1)}$ ;      в)  $\frac{n^2}{m(m+n)} - \frac{m-n}{3m}$ ;

б)  $\frac{c+1}{c+3} - \frac{c^2-3}{c(c+3)}$ ;      г)  $\frac{a-2}{a^2} - \frac{a+2}{a(a-2)}$ .

2.33. а)  $\frac{2}{a(a+b)} + \frac{2}{b(a+b)}$ ;      в)  $\frac{3}{x(x-y)} - \frac{3}{y(x-y)}$ ;

б)  $\frac{y-x}{x(x-a)} - \frac{y-a}{a(x-a)}$ ;      г)  $\frac{y+c}{c(c+a)} + \frac{y-a}{a(c+a)}$ .

2.34. а)  $\frac{y}{x(x+y)} - \frac{x}{y(x+y)}$ ;      в)  $\frac{9t}{p(3t-p)} - \frac{p}{t(3t-p)}$ ;

б)  $\frac{m+2n}{n(m+n)} + \frac{n}{m(m+n)}$ ;      г)  $\frac{a}{b(a-b)} - \frac{2a-b}{a(a-b)}$ .

2.35. а)  $\frac{c}{b(c-2b)} + \frac{2}{2b-c}$ ;      в)  $\frac{6}{a(a-2)} + \frac{3}{2-a}$ ;

б)  $\frac{c}{b(c-b)} + \frac{b}{c(b-c)}$ ;      г)  $\frac{9n}{m(3n-m)} + \frac{m}{n(m-3n)}$ .

Упростите выражение:

2.36. а)  $\frac{x}{x+y} + \frac{y}{x-y}$ ;      в)  $\frac{m}{m-n} - \frac{n}{m+n}$ ;

б)  $\frac{a-3}{a+3} - \frac{a+2}{a-2}$ ;      г)  $\frac{p+2}{p+1} - \frac{p+6}{p+3}$ .

2.37. а)  $\frac{c-d}{2d(c+d)} + \frac{c+d}{2d(c-d)}$ ;      в)  $\frac{x+y}{4x(x-y)} - \frac{x-y}{4x(x+y)}$ ;

б)  $\frac{x+4y}{5y(x+y)} - \frac{x-y}{5y(x-4y)}$ ;      г)  $\frac{d-c}{3c(2c+d)} + \frac{2c-d}{3c(c+d)}$ .

○2.38. а)  $\frac{x^2-3xy}{(x+y)(x-y)} + \frac{y}{x-y}$ ;      в)  $\frac{b-2m}{b+m} - \frac{m^2-5bm}{(b-m)(b+m)}$ ;

б)  $\frac{a-3c}{a-c} + \frac{a^2+3c^2}{(a-c)(a+c)}$ ;      г)  $\frac{3d}{d+4} - \frac{d^2-20d}{(d-4)(d+4)}$ .

○2.39. а)  $\frac{-6x-3}{(2x-3)(2x+3)} - \frac{2}{3-2x}$ ;

б)  $\frac{6a+1}{(2a+1)(2a-1)} - \frac{2a}{-2a-1}$ ;

в)  $\frac{15x-15y}{(5x-3y)(5x+3y)} + \frac{4}{-3y-5x}$ ;

г)  $\frac{4-18x}{(3x-2)(3x+2)} - \frac{3x}{2-3x}$ .

○2.40. а)  $\frac{4b}{(a-b)(a+b)} + \frac{a-b}{a(a+b)}$ ;      в)  $\frac{c+2}{c(c-2)} - \frac{8}{(c-2)(c+2)}$ ;

б)  $\frac{3-x}{(x-1)(x+1)} - \frac{x-2}{x(1-x)}$ ;      г)  $\frac{a+5}{(a-3)(a+3)} + \frac{a+4}{a(-a-3)}$ .

○2.41. а)  $\frac{3c}{(c-2)^2} - \frac{6}{c-2}$ ;      в)  $\frac{3m}{(m+5)^2} + \frac{2}{m+5}$ ;

б)  $\frac{a^2}{(a-b)^2} - \frac{a+b}{2(a-b)}$ ;      г)  $\frac{x+y}{3(x-y)} + \frac{x^2}{(x-y)^2}$ .

○2.42. а)  $\frac{a^2+3ab}{2ab+2b^2} - \frac{a}{2b}$ ;      в)  $\frac{c}{3d} - \frac{4cd+c^2}{3d^2+3cd}$ ;

б)  $\frac{x-1}{3x-12} - \frac{x-2}{2x-8}$ ;      г)  $\frac{c-2}{6c+4} - \frac{c-6}{15c+10}$ .



Упростите выражение:

$$\textcircled{2.43.} \text{ а) } \frac{2-a}{a^2-ab} - \frac{2-b}{ab-b^2}; \quad \text{в) } \frac{d+3}{cd+d^2} - \frac{c-3}{cd+c^2};$$

$$\text{б) } \frac{b+2a}{a^2+ab} - \frac{a+2b}{b^2+ab}; \quad \text{г) } \frac{3p+q}{p^2-pq} - \frac{3q+p}{pq-q^2}.$$

$$\textcircled{2.44.} \text{ а) } \frac{36+c^2}{c^2-36} - \frac{c}{c-6}; \quad \text{в) } \frac{2}{m-4} - \frac{5m-4}{m^2-16};$$

$$\text{б) } \frac{10x}{16-x^2} + \frac{5}{x-4}; \quad \text{г) } \frac{12n}{n^2-49} + \frac{6}{7-n}.$$

$$\textcircled{2.45.} \text{ а) } \frac{1-x}{x^2-xy} - \frac{y-1}{y^2-xy}; \quad \text{в) } \frac{3+c}{c^2-cd} + \frac{3+d}{d^2-cd};$$

$$\text{б) } \frac{p-q}{2p^2+2pq} + \frac{2q}{p^2-q^2}; \quad \text{г) } \frac{3m+n}{9m^2-3mn} - \frac{4n}{9m^2-n^2}.$$

$$\textcircled{2.46.} \text{ а) } \frac{6x^2-15x+25}{4x^2-25} + \frac{x}{5-2x}; \quad \text{в) } \frac{2z}{4-3z} + \frac{15z^2+32z+16}{9z^2-16};$$

$$\text{б) } \frac{x-12a}{x^2-16a^2} - \frac{4a}{4ax-x^2}; \quad \text{г) } \frac{c-30d}{c^2-100d^2} - \frac{10d}{10cd-c^2}.$$

$$\textcircled{2.47.} \text{ а) } \frac{y}{(x-y)^2} - \frac{x+y}{y^2-xy}; \quad \text{в) } \frac{a+b}{a^2-ab} - \frac{a}{(b-a)^2};$$

$$\text{б) } \frac{7n^2+mn-8m^2}{m^2-2mn+n^2} - \frac{8m}{n-m}; \quad \text{г) } \frac{5+13p-6p^2}{9p^2+6p+1} + \frac{2p}{3p+1}.$$

$$\textcircled{2.48.} \text{ а) } \frac{2x^2+1}{x^3-1} - \frac{x}{x^2+x+1}; \quad \text{в) } \frac{6c^2+48}{c^3+64} - \frac{3c}{c^2-4c+16};$$

$$\text{б) } \frac{6y}{y^3+8} + \frac{1}{y+2}; \quad \text{г) } \frac{1}{b-3} - \frac{9b}{b^3-27}.$$

$$\textcircled{2.49.} \text{ а) } c^2 - cd + d^2 - \frac{c^3-d^3}{c+d}; \quad \text{в) } \frac{m^3+n^3}{m-n} - m^2 - mn - n^2;$$

$$\text{б) } \frac{a^3-b^3}{a^2-ab+b^2} - a - b; \quad \text{г) } \frac{x^3+y^3}{x^2+xy+y^2} + x - y.$$

$$\textcircled{2.50.} \text{ а) } \frac{m^2-2mn+4n^2}{m-2n} + \frac{m^2+2mn+4n^2}{m+2n};$$

$$\text{б) } \frac{4l^2+6lk+9k^2}{2l+3k} + \frac{4l^2-6lk+9k^2}{2l-3k}.$$

Упростите выражение:

○2.51. а)  $1 - \frac{1}{a^3 + 1} - \frac{a}{a + 1}$ ;

б)  $\frac{c}{c^2 + 3c + 9} - \frac{1}{c - 3} + \frac{27}{c^3 - 27}$ ;

в)  $1 - \frac{2d - 1}{4d^2 - 2d + 1} - \frac{2d}{2d + 1}$ ;

г)  $\frac{1}{b + 2} - \frac{b}{b^2 - 2b + 4} - \frac{12}{b^3 + 8}$ .

○2.52. а)  $\frac{3b^2 + 2b + 4}{b^3 - 1} - \frac{1 - 2b}{b^2 + b + 1} - \frac{3}{b - 1}$ ;

б)  $\frac{a - 2}{a^2 + 2a + 4} - \frac{6a}{a^3 - 8} + \frac{1}{a - 2}$ .

○2.53. а)  $\frac{2mn}{m^3 + n^3} + \frac{2m}{m^2 - n^2} - \frac{1}{m - n}$ ;

б)  $\frac{2xy}{x^3 - y^3} - \frac{2x}{x^2 - y^2} + \frac{1}{x + y}$ .

○2.54. а)  $\frac{1}{(b - 5)^2} - \frac{2}{b^2 - 25} + \frac{1}{(b + 5)^2}$ ;

б)  $\frac{1}{(2m - 5n)^2} - \frac{2}{25n^2 - 4m^2} + \frac{1}{(5n + 2m)^2}$ .

Докажите тождество:

○2.55.  $\frac{3a(16 - 3a)}{9a^2 - 4} + \frac{3(1 + 2a)}{2 - 3a} - \frac{2 - 9a}{3a + 2} = \frac{1}{3a + 2}$ .

○2.56.  $\frac{x + 2y}{x^2 + 2xy + y^2} - \frac{x - 2y}{x^2 - y^2} + \frac{2y^2}{(x + y)(x^2 - y^2)} = \frac{2y}{x^2 - y^2}$ .

○2.57.  $\frac{1}{2z^2 + 5z} - \frac{2}{25 - 10z} - \frac{4}{4z^2 - 25} = \frac{1}{5z}$ .

●2.58.  $\frac{1}{1 - a} + \frac{1}{1 + a} + \frac{2}{1 + a^2} + \frac{4}{1 + a^4} + \frac{8}{1 + a^8} + \frac{16}{1 + a^{16}} = \frac{32}{1 - a^{32}}$ .

●2.59. Найдите значения переменных, при которых не определена дробь:

а)  $\frac{2}{\frac{1}{a + 2} - \frac{1}{a - 3}}$ ;

в)  $\frac{a + 3b}{\frac{a}{a + b} + \frac{b}{a - b}}$ ;

б)  $\frac{z + 1}{\frac{4}{z + 2} - \frac{3}{z - 1}}$ ;

г)  $\frac{x - 2y}{x - \frac{x^2 + y^2}{x - y}}$ .

○2.60. Найдите значение выражения:

а)  $\frac{8}{(x^2 + 3)(x^2 - 1)} + \frac{2}{x^2 + 3} + \frac{1}{x + 1}$  при  $x = 0,992$ ;

б)  $\frac{(x + 1)^3}{x} - \frac{(x + 1)^2}{x + 2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{x + 2}$  при  $x = -2,1$ .

●2.61. Пусть  $f(x) = \frac{2x + 3}{x^2 - x + 1} + \frac{3 - 2x}{x^2 + x + 1}$ .

Найдите  $f(x) - f(-x)$ .

●2.62. Пусть  $f(x) = \frac{2x^2 + 3x}{3x^2 - 7x + 5} - \frac{2x^2 - 3x}{3x^2 + 7x + 5}$ .

Найдите  $f(x) + f(-x)$ .

●2.63. Пусть  $x = \frac{a - b}{a + b}$ ;  $y = \frac{b - c}{b + c}$ ;  $z = \frac{c - a}{c + a}$ . Докажите, что справедливо равенство  $(1 + x)(1 + y)(1 + z) = (1 - x)(1 - y)(1 - z)$ .

Упростите выражение:

●2.64.  $\frac{a^3}{(a - b)(a - c)} + \frac{b^3}{(b - a)(b - c)} + \frac{c^3}{(c - a)(c - b)}$ .

●2.65. а)  $\left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right)^2 + \left(\frac{c}{a} + \frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)^2 - \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right)\left(\frac{c}{a} + \frac{a}{c}\right)\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)$ ;

б)  $\frac{b - c}{b + c} + \frac{c - a}{c + a} + \frac{a - b}{a + b} + \frac{(b - c)(c - a)(a - b)}{(b + c)(c + a)(a + b)}$ .

●2.66. а) Докажите, что при всех натуральных значениях  $n$  верно равенство  $\frac{1}{n(n + 1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n + 1}$ .

б) Используя равенство из пункта а), найдите сумму  $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{99 \cdot 100}$ .

●2.67. а) Докажите, что при всех натуральных значениях  $n$  верно равенство  $\frac{1}{(2n - 1)(2n + 1)} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2n - 1} - \frac{1}{2n + 1} \right)$ .

б) Используя равенство из пункта а), найдите сумму  $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{99 \cdot 101}$ .

### § 3. УМНОЖЕНИЕ И ДЕЛЕНИЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ДРОБЕЙ. ВОЗВЕДЕНИЕ АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ ДРОБИ В СТЕПЕНЬ

Упростите выражение:

3.1. а)  $\frac{6a}{b} : \frac{3a}{b}$ ;      в)  $\left(-\frac{9}{2x}\right) \cdot \left(-\frac{5x}{3}\right)$ ;

б)  $-\frac{4p}{q} \cdot \frac{q}{2p}$ ;      г)  $\frac{5c}{2d} : \left(-\frac{15c}{d}\right)$ .

3.2. а)  $\frac{12x^5}{55} : \frac{6x^2}{5}$ ;      в)  $\frac{16}{5d^3} : \frac{12}{d^4}$ ;

б)  $\frac{4}{3y^3} \cdot \frac{y^8}{18}$ ;      г)  $\frac{36c^{12}}{49} \cdot \frac{7}{6c^{15}}$ .

3.3. а)  $\frac{a^3b}{c} \cdot \frac{c^2}{a^4b^2}$ ;      в)  $\frac{m^3}{cd} : \frac{m^2n}{cd}$ ;

б)  $\frac{3m^2n}{c} : \frac{m^2n}{3c}$ ;      г)  $\frac{5c^2x}{a} \cdot \frac{15a}{c^3x}$ .

3.4. а)  $6mx \cdot \frac{ab}{2mx^2}$ ;      в)  $\frac{m}{17a^2d^2} \cdot 34a^2d^8$ ;

б)  $9xy : \frac{3x^2y}{ab}$ ;      г)  $\frac{4x^3y^4}{a} : 36x^3y^4$ .

3.5. а)  $\frac{x-y}{4a} \cdot \frac{4}{x-y}$ ;      в)  $\frac{2m-3n}{7} \cdot \frac{7s}{2m-3n}$ ;

б)  $\frac{a+b}{8} : \frac{a+b}{8x}$ ;      г)  $\frac{15p+12q}{13p} : \frac{15p+12q}{13}$ .

3.6. а)  $\frac{16u-13v}{21} : \frac{13v-16u}{p}$ ;      в)  $\frac{98p-17q}{4} : \frac{17q-98p}{16m}$ ;

б)  $\frac{45m-n}{23c} \cdot \frac{c}{n-45m}$ ;      г)  $\frac{64r-15s}{9c^2} \cdot \frac{18c}{15s-64r}$ .

3.7. а)  $\frac{c+d}{c-d} \cdot \frac{c-d}{c(c+d)}$ ;      в)  $\frac{m(m-n)}{p(p+q)} \cdot \frac{p^2(p+q)}{m-n}$ ;

б)  $\frac{a-b}{c+d} : \frac{3(a-b)}{a(c+d)}$ ;      г)  $\frac{a+b}{2b(a-b)} : \frac{a+b}{2b^2(a-b)}$ .

Упростите выражение:

○3.8. а)  $\frac{x+y}{x-y} \cdot (x-y)$ ;      в)  $(a+b) \cdot \frac{2a+b}{a+b}$ ;

б)  $\frac{2x+y}{x-y} : (2x+y)^2$ ;      г)  $(a-b)^2 : \frac{a-b}{a-2b}$ .

○3.9. а)  $\frac{a}{x^2-3x} : \frac{a^3}{3x-9}$ ;      в)  $\frac{m^3-m^2}{y^4} \cdot \frac{y^2}{m^2-m}$ ;

б)  $\frac{mx+my}{ab^2} \cdot \frac{a^2b}{4x+4y}$ ;      г)  $\frac{6a}{n^2-n} : \frac{3an}{2n-2}$ .

○3.10. а)  $\frac{4p-p^2}{y-x} : \frac{8p-2p^2}{x-y}$ ;      в)  $\frac{c^3-c^2}{d^3+d} \cdot \frac{1+d^2}{c-c^2}$ ;

б)  $\frac{a-b}{3q-q^2} \cdot \frac{6q-2q^2}{b-a}$ ;      г)  $\frac{x+x^3}{n-n^2} : \frac{x^2+1}{n^3-n^2}$ .

○3.11. а)  $\frac{x^2-y^2}{3xy} \cdot \frac{3y}{x-y}$ ;      в)  $\frac{c^2-49}{10cd} : \frac{2c+14}{5d}$ ;

б)  $\frac{5a^2}{a^2-16} : \frac{5a}{a+4}$ ;      г)  $\frac{b-d}{d} \cdot \frac{3bd}{b^2-d^2}$ .

○3.12. а)  $\frac{1}{x+y} \cdot (x^3+y^3)$ ;

б)  $(a^3+b^3) : (a^2-ab+b^2)$ ;

в)  $\frac{1}{n^3-m^3} \cdot (n^2+nm+m^2)$ ;

г)  $(p^3-q^3) : (p-q)$ .

○3.13. а)  $\frac{1}{a^3-b^3} \cdot (a^2-b^2)$ ;      в)  $\frac{12n}{x^3-27} \cdot \frac{x^2+3x+9}{6n}$ ;

б)  $(8a^3+1) : \frac{4a^2-2a+1}{n}$ ;      г)  $\frac{m^3-64}{3} : (m^2+4m+16)$ .

○3.14. а)  $\frac{x^2-10x+25}{3x+12} : \frac{2x-10}{x^2-16}$ ;

б)  $\frac{1-a}{4a+8b} \cdot \frac{a^2+4ab+4b^2}{3-3a}$ ;

в)  $\frac{c^2-25}{c^2+12c+36} \cdot \frac{3c+18}{2c+10}$ ;

г)  $\frac{5m-10n}{m-5} : \frac{4n^2-4mn+m^2}{15-3m}$ .

Выполните возведение алгебраической дроби в степень:

3.15. а)  $\left(\frac{a}{2x}\right)^5$ ; б)  $\left(\frac{5y}{3}\right)^3$ ; в)  $\left(\frac{8z}{9}\right)^2$ ; г)  $\left(\frac{t}{4b}\right)^4$ .

3.16. а)  $\left(-\frac{2x}{3y}\right)^5$ ; б)  $\left(-\frac{8z}{15t}\right)^2$ ; в)  $\left(-\frac{4t}{5s}\right)^3$ ; г)  $\left(-\frac{3m}{4n}\right)^4$ .

3.17. а)  $\left(\frac{2x^2y^3}{3z^6}\right)^4$ ; б)  $\left(\frac{5a^4c^3}{2k^3}\right)^3$ ;  
 б)  $\left(-\frac{3n^6k^3}{10p^4}\right)^3$ ; г)  $\left(-\frac{5x^6y^3}{z^8}\right)^4$ .

Упростите выражение:

○3.18. а)  $\frac{a^2}{x} \cdot \left(\frac{x^2}{a^3}\right)^2$ ; б)  $\left(\frac{a^3b}{c^4}\right)^5 \cdot \left(\frac{c^7}{a^5b^2}\right)^3$ ;

б)  $\left(\frac{p}{x^3}\right)^3 : \left(\frac{p^2}{x^3}\right)^2$ ; г)  $\left(\frac{x^6y^8}{z^5}\right)^5 : \frac{x^{10}y^{13}}{z^8}$ .

○3.19. а)  $\left(-\frac{18a^3}{11b^3}\right) \cdot \left(-\frac{22b^4}{9a^2}\right)$ ; б)  $-\frac{35ax^2}{12b^2y} \cdot \frac{8ab}{21xy}$ ;

б)  $\frac{17x^2y}{5a} : \left(-\frac{34xy^2}{25a^2}\right)$ ; г)  $\left(-\frac{27c^3}{4b^2}\right) : \left(-\frac{45c^5}{32b}\right)$ .

○3.20. а)  $\left(-\frac{2pq^5}{3ma^2}\right)^2 \cdot \frac{9m^2a^2}{4p^3q^7}$ ; б)  $\left(-\frac{2x^3y^4}{5a^2b}\right)^3 \cdot \left(-\frac{25a^4b^3}{24x^8y^{13}}\right)$ ;

б)  $-\frac{50a^4b^5}{63m^9n^8} : \left(\frac{5a^2b^3}{3m^2n^5}\right)^3$ ; г)  $\left(-\frac{10p^2q^2}{3a^3}\right)^2 : \left(-\frac{25p^3q^3}{27a^6}\right)$ .

○3.21. а)  $\frac{10y^5}{9a} : \frac{5y^3}{3b} \cdot \frac{3a^2}{by}$ ; б)  $\frac{28a^2}{27x^3} : \frac{21x^4}{45y} \cdot \frac{x^8}{20ya}$ ;

б)  $\frac{25a^3b^3}{14x^2y^4} \cdot \frac{21xy^3}{10a^2b^2} \cdot \frac{8xy^2}{15ab}$ ; г)  $\frac{45m^4}{49n^2t} \cdot \frac{56n^3}{27m^2} : \frac{20m^2n}{63t^2}$ .

○3.22. а)  $\left(\frac{x^2}{2a^3}\right)^3 \cdot \left(\frac{4a^4}{x^3}\right)^2$ ; б)  $\left(-\frac{2a^2}{b^3}\right)^8 \cdot \left(\frac{b^2}{-2a^3}\right)^2$ ;

б)  $\left(\frac{-2a^8b^3}{c^7}\right)^5 : \left(-\frac{4a^{10}b^4}{c^9}\right)^4$ ; г)  $\left(-\frac{9x^7y^6}{a^{12}}\right)^4 \cdot \left(-\frac{a^8}{27x^5y^4}\right)^3$ .

○3.23. Укажите допустимые значения переменных, при которых справедливо тождество:

а)  $\left(\frac{a}{b}\right)^0 = 1$ ; б)  $\left(\frac{a^2 - 9}{a}\right)^0 = 1$ ;

б)  $\left(\frac{2a - b}{a + 2}\right)^0 = 1$ ; г)  $\left(\frac{16 - a^2}{a^2 - 9}\right)^0 = 1$ .

Упростите выражение:

- 3.24. а)  $\frac{a^2 - 1}{a - b} \cdot \frac{9a - 9b}{a^2 + a}$ ;      в)  $\frac{(x + 4)^2}{3x - 9} \cdot \frac{x^2 - 9}{3x + 12}$ ;  
 б)  $\frac{(y - 5)^2}{3y + 18} : \frac{2y - 10}{y^2 - 36}$ ;      г)  $\frac{b^2 + 4bc}{b + 6} : \frac{b^2 - 16c^2}{2b + 12}$ .
- 3.25. а)  $\frac{x^2y}{25y^2 - 4} \cdot \frac{15y + 6}{3xy^2}$ ;      в)  $\frac{m^2n}{64n^2 - 9} : \frac{5mn}{8n + 3}$ ;  
 б)  $\frac{7 - 2x}{22a^2b^2} : \frac{4x^2 - 49}{11ab^3}$ ;      г)  $\frac{24c^2d}{9p^2 - 25} \cdot \frac{5 - 3p}{12cd^3}$ .
- 3.26. а)  $\frac{5p^2 - 5q^2}{5p - 10q} \cdot \frac{p^2 - 2pq}{(q - p)^2}$ ;      в)  $\frac{3x^2 - 3y^2}{xy + 3y^2} : \frac{(y - x)^2}{9y + 3x}$ ;  
 б)  $\frac{x^2 - 6x + 9}{9x^3} : \frac{x^2 - 9}{9x}$ ;      г)  $\frac{25 - y^2}{25y} \cdot \frac{10y^2}{y^2 - 10y + 25}$ .
- 3.27. а)  $\frac{a^3 + b^3}{a^2b - ab^2} \cdot \frac{a - b}{a + b}$ ;      в)  $\frac{2x^2 + 4x}{x^3 - 8} : \frac{x + 2}{x - 2}$ ;  
 б)  $\frac{x^2 + 3x + 9}{x + 3} : (x^3 - 27)$ ;      г)  $(x^3 + y^3) \cdot \frac{x + y}{x^2 - xy + y^2}$ .
- 3.28. а)  $\frac{x^2 - 1}{x^3 + 1} : \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - x + 1}$ ;      в)  $\frac{z^2 + 6z + 9}{z^3 + 27} : \frac{3z + 9}{z^2 - 3z + 9}$ ;  
 б)  $\frac{t^3 + 8}{12t^2 + 27t} \cdot \frac{4t + 9}{t^2 - 2t + 4}$ ;      г)  $\frac{y^3 - 8}{y^2 - 9} \cdot \frac{y + 3}{y^2 + 2y + 4}$ .
- 3.29. а)  $\frac{a^2 - 6a + 9}{1 - b^3} : \frac{2a - 6}{b^2 - 1}$ ;      в)  $\frac{b^2 - 6b + 9}{4b^2 - 6b + 9} \cdot \frac{27 + 8b^3}{6 - 2b}$ ;  
 б)  $\frac{c^3 - 8d^3}{2c + 4d} \cdot \frac{4d^2 - c^2}{(2d - c)^2}$ ;      г)  $\frac{(m - 1)^2}{4 + 4m^3} : \frac{1 - m^2}{(2m + 2)^2}$ .
- 3.30. а)  $\frac{1 - 16a^2}{4a^2 + 10a + 25} : \frac{4a - 1}{8a^3 - 125}$ ;  
 б)  $\frac{64a^3 - 27b^3}{(4a - 3b)^2} \cdot \frac{9b^2 - 16a^2}{16a^2 + 12ab + 9b^2}$ ;  
 в)  $\frac{4 - 9c^2}{9c^2 - 12c + 16} : \frac{2 - 3c}{27c^3 + 64}$ ;  
 г)  $\frac{125p^3 + 8q^3}{(5p + 2q)^2} : \frac{25p^2 - 10pq + 4q^2}{4q^2 - 25p^2}$ .

Упростите выражение:

○3.31. а)  $\frac{x-3}{2x+4} \cdot \frac{x^2-4}{x^3-27} \cdot \frac{x^2+3x+9}{x^2-2x}$ ;  
 б)  $\frac{a^2-16}{2a-a^2} \cdot \frac{ab-2b}{a^2+8a+16} : \frac{a-4}{4b}$ ;  
 в)  $\frac{b^2-10b+25}{5b-10} : \frac{b^2-25}{2b-b^2} \cdot \frac{b+5}{5b}$ ;  
 г)  $\frac{a^3+8}{3a-6} : \frac{a^2+4a+4}{a^2-2a} : \frac{a^2-2a+4}{a^2-4}$ .

○3.32. а)  $\left(\frac{b^4(b-c)^2}{a^6(c-a)}\right)^3 : \left(\frac{b^2(b-c)}{a^3(a-c)}\right)^6$ ;  
 б)  $\left(-\frac{a^2+ab}{ab^2-b^3}\right)^4 \cdot \left(\frac{b-a}{a^2+2ab+b^2}\right)^3$ ;  
 в)  $\left(\frac{a^2(a-b)}{x^4(a-x)^3}\right)^6 \cdot \left(\frac{x^6(x-a)^5}{a^3(b-a)^2}\right)^4$ ;  
 г)  $\left(\frac{x^2-4xy+4y^2}{x^2+xy}\right)^2 \cdot \left(-\frac{x+y}{2xy-x^2}\right)^3$ .

○3.33. Докажите тождество:

а)  $\frac{a^4-64ab^3}{a^2-2ab+b^2} \cdot \frac{a^2-b^2}{a^2b-16b^3} : \frac{a^3+4a^2b+16ab^2}{ab+4b^2} = \frac{a+b}{a-b}$ ;  
 б)  $\frac{x^3z+125z}{x^2-16z^2} : \frac{x^3-25x}{x^2-8xz+16z^2} \cdot \frac{x+4z}{x^2-5x+25} : \frac{x-4z}{x-5} = \frac{z}{x}$ .

○3.34. Найдите значение выражения:

а)  $\frac{4x^2}{2x-y} : \frac{12x^3}{4x^2-y^2} \cdot \frac{2x^2}{6x^2+3xy}$  при  $x=2,7845$ ,  $y=-13,8471$ ;  
 б)  $\frac{a^2+a}{2a-8} \cdot \frac{a^2+a}{2a+8} : \frac{3a^4+6a^3+3a^2}{a^2-16}$  при  $a=1\,234\,567\,890$ .

○3.35. Докажите, что при всех допустимых значениях переменных выражение принимает одно и то же значение:

а)  $\left(\frac{2x^2y^3}{x+y}\right)^3 : \left(\frac{x^6y^9}{x^2-y^2} \cdot \frac{8x-8y}{x^2+2xy+y^2}\right)$ ;  
 б)  $\left(\frac{a-3}{3a^2b}\right)^2 : \left(\frac{9-a^2}{18a^3b} : \frac{a^2b+3ab}{2a-6}\right)$ .



**○3.36.** Общее сопротивление трёх параллельно соединённых проводников можно найти по формуле  $\frac{1}{R_{\text{общ}}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$ . Выразите  $R_{\text{общ}}$  как дробь от  $R_1, R_2, R_3$ .

Постройте график функции:

- 3.37.** а)  $y = (x - 1) \cdot \frac{2x - 1}{x - 1}$ ;      в)  $y = \frac{x^2 - 4x}{(x - 4)^2} \cdot \frac{x^2 - 16}{2x}$ ;  
 б)  $y = \frac{2x + 3}{x} : \frac{4x + 6}{5x^2}$ ;      г)  $y = \frac{x^3 + 1}{(x + 2)^2} \cdot \frac{x^2 + 4x + 4}{x^2 - x + 1}$ .
- 3.38.** а)  $y = \frac{x^2 + x - 6}{x} : \frac{x - 2}{2x}$ ;  
 б)  $y = \frac{2x^2 - 10x + 8}{x + 3} : \frac{x - 1}{3x + 9}$ .

## § 4. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ РАЦИОНАЛЬНЫХ ВЫРАЖЕНИЙ

Упростите выражение:

- 4.1.** а)  $\left(\frac{x}{y} - \frac{y}{x}\right) \cdot \frac{5xy}{x - y}$ ;      в)  $\left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a}\right) : \frac{a + b}{3ab}$ ;  
 б)  $\left(\frac{z^2}{t^2} + \frac{2z}{t} + 1\right) : \frac{t + z}{t}$ ;      г)  $\left(1 - \frac{2c}{d} + \frac{c^2}{d^2}\right) \cdot \frac{d}{c - d}$ .
- 4.2.** а)  $\left(\frac{m^2}{n} - n\right) : \left(\frac{m}{n} + 1\right)$ ;      в)  $\left(4p - \frac{q^2}{p}\right) : \left(1 - \frac{2p}{q}\right)$ ;  
 б)  $\left(3 + \frac{u}{v}\right) \cdot \frac{uv}{2u + 6v}$ ;      г)  $\left(\frac{r}{s} - 2\right) : \frac{4s - 2r}{rs^2}$ .
- 4.3.** а)  $\left(2 + \frac{t}{t + 1}\right) \cdot \frac{3t^2 + 3t}{12t + 8}$ ;      в)  $\frac{z - 3}{z + 3} \cdot \left(z + \frac{z^2}{3 - z}\right)$ ;  
 б)  $\left(p - \frac{5p}{p + 2}\right) : \frac{p - 3}{p + 2}$ ;      г)  $\left(\frac{q}{q - 5} - 2q\right) : \frac{11 - 2q}{q - 5}$ .
- 4.4.** а)  $\left(\frac{6}{x - y} - \frac{5}{x + y}\right) \cdot \frac{x - y}{x + 11y}$ ;      в)  $\left(\frac{x - 2y}{xy} + \frac{1}{x}\right) \cdot \frac{x^2 y^2}{x - y}$ ;  
 б)  $\left(a - \frac{a^2}{a + 1}\right) \cdot \frac{a^2 - 1}{a^2 + 2a}$ ;      г)  $\frac{cd - d^2}{c^2 + d^2} \cdot \left(\frac{c}{c + d} + \frac{d}{c - d}\right)$ .

Упростите выражение:

$$\textcircled{4.5.} \text{ а) } \left( \frac{1+c^3}{1+c} - c \right) \cdot \frac{1+c}{1-c^2}; \quad \text{в) } \left( \frac{x^3-8}{x-2} + 2x \right) : \frac{x^2+4x+4}{2-x};$$

$$\text{б) } \frac{b+3}{b^3+9b} \cdot \left( \frac{b+3}{b-3} + \frac{b-3}{b+3} \right); \quad \text{г) } \frac{x^2-9}{2x^2+1} \cdot \left( \frac{6x+1}{x-3} + \frac{6x-1}{x+3} \right).$$

$$\textcircled{4.6.} \text{ а) } \left( \frac{m}{n^2-mn} + \frac{n}{m^2-mn} \right) \cdot \frac{mn}{n+m};$$

$$\text{б) } \frac{r^2-25}{r+3} \cdot \frac{1}{r^2+5r} - \frac{r+5}{r^2-3r};$$

$$\text{в) } \left( \frac{st}{s^2-t^2} + \frac{t}{2t-2s} \right) \cdot \frac{s+t}{2t};$$

$$\text{г) } \frac{3a+b}{a^2b-ab^2} + \frac{b-a}{ab} : \frac{a^2-b^2}{3a-b}.$$

**○4.7.** Найдите значение выражения:

$$\text{а) } \left( \frac{2m+1}{2m-1} - \frac{2m-1}{2m+1} \right) : \frac{4m}{10m-5} \text{ при } m = \frac{3}{14};$$

$$\text{б) } \left( \frac{a}{b-a} - \frac{a}{b+a} \right) \cdot \frac{b^2+2ab+a^2}{2a^2} \text{ при } a = 23 \text{ и } b = 33.$$

Докажите тождество:

$$\textcircled{4.8.} \text{ а) } \frac{\frac{1}{x+y} + \frac{1}{x-y}}{\frac{1}{x+y} - \frac{1}{x-y}} = -\frac{x}{y}; \quad \text{в) } \frac{\frac{1}{x-y} - \frac{1}{x+y}}{\frac{1}{x+y} + \frac{1}{x-y}} = \frac{y}{x};$$

$$\text{б) } \frac{\frac{2}{x} - \frac{x-2}{x^2-x}}{\frac{3}{x} + \frac{x+3}{x^2-x}} = \frac{1}{4}; \quad \text{г) } \frac{\frac{1}{x-1} - \frac{4-x}{x^2-x}}{\frac{2}{x-1} - \frac{x+2}{x^2-x}} = 2.$$

$$\textcircled{4.9.} \text{ а) } \left( \frac{a+5}{5a-1} + \frac{a+5}{a+1} \right) : \frac{a^2+5a}{1-5a} + \frac{a^2+5}{a+1} = a-1;$$

$$\text{б) } \left( \frac{b-3}{7b-4} - \frac{b-3}{b-4} \right) \cdot \frac{7b-4}{9b-3b^2} + \frac{b^2-14}{4-b} = -b-4.$$

**●4.10.** Найдите область определения выражения  $A(x)$  и упростите выражение:

$$\text{а) } A(x) = \frac{x - \frac{x-1}{x+1}}{1 + \frac{x^2-x}{x+1}}; \quad \text{б) } A(x) = \frac{1 + \frac{1+x}{1-3x}}{1 - 3 \cdot \frac{1+x}{1-3x}} \cdot \frac{1 + \frac{1+x}{1-3x}}{1 - 3 \cdot \frac{1+x}{1-3x}}.$$

- 4.11. Из пункта  $A$  в пункт  $B$  со скоростью  $v_1$  выехал автомобиль. Приехав в пункт  $B$ , автомобиль мгновенно развернулся и со скоростью  $v_2$  поехал обратно в пункт  $A$ . Выразите его среднюю скорость  $v$  на всём продолжении пути туда и обратно. Как изменится результат, если, доехав до пункта  $B$ , автомобиль пробудет там  $a$  часов, а затем поедет обратно в пункт  $A$ , если  $a$  составляет  $k$ -ю часть суммарного времени движения из  $A$  в  $B$  и обратно из  $B$  в  $A$ ?

○4.12. Докажите тождество:

$$\text{а) } x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2; \quad \text{б) } x^3 + \frac{1}{x^3} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - 3\left(x + \frac{1}{x}\right).$$

Упростите выражение:

$$\text{○4.13. а) } \left(\frac{a^2}{a+b} - \frac{a^3}{a^2+2ab+b^2}\right) : \left(\frac{a}{a+b} - \frac{a^2}{a^2-b^2}\right);$$

$$\text{б) } \frac{z-2}{4z^2+16z+16} : \left(\frac{z}{2z-4} - \frac{z^2+4}{2z^2-8} - \frac{2}{z^2+2z}\right).$$

$$\text{○4.14. а) } \left(\frac{10m^2}{3+2m} - 5m\right) : \frac{30m^2-15m}{8m^3+27} + \frac{8-2m}{2m-1};$$

$$\text{б) } \left(3n - \frac{9n^2}{3n+1}\right) \cdot \frac{27n^3+1}{6n-9n^2} + \frac{9n-3}{3n-2}.$$

$$\text{○4.15. а) } \left(\frac{d^3-8}{d^2-4} - \frac{6d}{d+2}\right) : \left(1 - \frac{4}{d+2}\right)^2;$$

$$\text{б) } \left(c - \frac{c^3+8}{2c+c^2}\right) \cdot \frac{c}{(c-2)^2} + \frac{2}{2-c}.$$

○4.16. Укажите область определения выражения и докажите, что его значение не зависит от значений переменной:

$$\text{а) } \frac{2a}{a+1} + \left(\frac{3}{(a-1)^2} - \frac{3}{a^2-1}\right) : \frac{3}{a^2-2a+1};$$

$$\text{б) } \frac{b^2+8b+16}{b} \cdot \left(\frac{b}{(b+4)^2} + \frac{b}{16-b^2}\right) + \frac{8}{b-4};$$

$$\text{в) } \frac{y}{y+2} + \left(\frac{1}{4-y^2} - \frac{1}{4-4y+y^2}\right) : \frac{2}{(y-2)^2};$$

$$\text{г) } \frac{x^2-10x+25}{2x} \cdot \left(\frac{x}{x^2-25} - \frac{x}{(x-5)^2}\right) + \frac{5}{5+x}.$$

**○4.17.** Упростите выражение и найдите его значение:

а)  $6a + \left( \frac{a}{a-2} - \frac{a}{a+2} \right) : \frac{4a}{a^4 - 2a^3 + 8a - 16}$  при  $a = -2,5$ ;

б)  $\left( \frac{a-1}{a+1} - \frac{a+1}{a-1} \right) \cdot \left( \frac{1}{2} - \frac{a}{4} - \frac{1}{4a} \right)$  при  $a = -3\frac{3}{4}$ ;

в)  $\left( \frac{n+2}{n-2} \right)^3 : \frac{n^3 + 4n^2 + 4n}{3n^2 - 12n + 12} \cdot \frac{n}{3}$  при  $n = -0,5$ ;

г)  $\left( \frac{a^2}{a+b} - \frac{a^3}{a^2 + 2ab + b^2} \right) : \left( \frac{a}{a+b} - \frac{a^2}{a^2 - b^2} \right)$  при  $a = -2,5$ ,  
 $b = -0,5$ .

Упростите выражение:

**○4.18.** а)  $\left( 1 - \frac{2}{1-3a} \right) \cdot \left( 1 - \frac{9a - 9a^2}{3a+1} \right) : (2 \cdot (1 - 9a^2))$ ;

б)  $\frac{2}{a} - \left( \frac{a+1}{a^3-1} - \frac{1}{a^2+a+1} - \frac{2}{1-a} \right) : \frac{a^3 + a^2 + 2a}{a^2 - 1}$ .

**○4.19.** а)  $2n - \left( \frac{2n-3}{n+1} - \frac{n+1}{2-2n} - \frac{n^2+3}{2n^2-2} \right) \cdot \frac{n^3+1}{n^2-n}$ ;

б)  $\left( \left( \frac{3}{x-y} + \frac{3x}{x^3-y^3} \cdot \frac{x^2+xy+y^2}{x+y} \right) : \frac{2x+y}{x^2+2xy+y^2} \right) \cdot \frac{3}{x+y}$ .

Докажите тождество:

**○4.20.**  $\left( \frac{8y^2+2y}{8y^3-1} - \frac{2y+1}{4y^2+2y+1} \right) \cdot \left( 1 + \frac{2y+1}{2y} - \frac{4y^2+10y}{4y^2+2y} \right) : \frac{1}{2y} = \frac{2y-1}{2y+1}$ .

**○4.21.**  $\left( \frac{y^2+9}{27-3y^2} + \frac{y}{3y+9} - \frac{3}{y^2-3y} \right) : \frac{(3y+9)^2}{3y^2-y^3} = \frac{y}{9y+27}$ .

**○4.22.**  $\left( \frac{z}{z-2} - \frac{z^2}{z^3+8} \cdot \frac{z^2+2z}{z-2} \right) : \frac{8}{z^2-2z+4} + \frac{z^2+z-2}{2z+4} = \frac{z-2}{4}$ .

**○4.23.**  $\frac{18xy}{2y+3x} + \frac{1}{2y-3x} : \left( \frac{4}{4y^2-9x^2} - \frac{6y-9x}{8y^3+27x^3} \right) = 3x+2y$ .

**○4.24.** Найдите значение выражения:

$$\frac{2-a}{5} + \left( \frac{1}{1-2a} \right)^2 : \left( \frac{a+2}{4a^3-4a^2+a} - \frac{2-a}{1-8a^3} \cdot \frac{4a^2+2a+1}{2a^2+a} \right)$$

при  $a = -3,2746$ .

Найдите значение выражения:

○4.25.  $\left( \frac{b^2 - 2b + 4}{4b^2 - 1} \cdot \frac{2b^2 + b}{b^3 + 8} - \frac{b + 2}{2b^2 - b} \right) : \frac{4}{b^2 + 2b} - \frac{b + 4}{3 - 6b}$   
при  $b = \frac{7}{275}$ .

○4.26.  $\left( \frac{1}{2x + 1} - \frac{3}{8x^3 + 1} + \frac{3}{4x^2 - 2x + 1} \right) \cdot \left( 2x - \frac{4x - 1}{2x + 1} \right)$   
при  $x = -2,123$ .

●4.27. Выполните подстановку и упростите выражение

$$\frac{ax}{a + x} + \frac{bx}{x - b}, \text{ где } x = \frac{ab}{a - b}.$$

●4.28. Докажите, что при любых значениях  $x > 2$  значение выражения

$$\left( \frac{x + 1}{2x} + \frac{4}{x + 3} - 2 \right) : \frac{x + 1}{x + 3} - \frac{x^2 - 5x + 3}{2x}$$

является отрицательным числом.

●4.29. Докажите, что выражение

$$\frac{12a - 4a^2}{2a + 3} + \frac{1}{2a - 3} : \left( \frac{4}{4a^2 - 9} - \frac{6a - 9}{8a^3 + 27} \right)$$

при любых допустимых значениях переменной  $a$  принимает одно и то же значение.

●4.30. Найдите:

а)  $f\left(\frac{1}{x}\right)$ , если  $f(x) = \frac{x - 1}{3 - x}$ ;

б)  $f(f(x))$ , если  $f(x) = \frac{a - x}{x}$ ;

в)  $f\left(f\left(\frac{1}{x}\right)\right)$ , если  $f(x) = \frac{2x - 1}{3 - 5x}$ ;

г)  $f\left(\frac{1}{f\left(\frac{1}{x}\right)}\right)$ , если  $f(x) = \frac{a + kx}{b + mx}$ .

●4.31. Найдите  $f(f(f(f(x))))$ , если:

а)  $f(x) = \frac{1}{1 - x}$ ;      б)  $f(x) = \frac{4}{2 - x}$ .

## § 5. ПЕРВЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ О РАЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ

При каком значении переменной равна нулю алгебраическая дробь:

5.1. а)  $\frac{7x-21}{3}$ ; б)  $\frac{x+1}{x^2+1}$ ; в)  $\frac{3x+1}{x+3}$ ; г)  $\frac{(x+3)(x-1)}{3x}$ ?

5.2. а)  $\frac{x^2+3x}{x^2}$ ; б)  $\frac{x-4}{x^2-4x}$ ; в)  $\frac{4x^2-1}{6x+3}$ ; г)  $\frac{x^2}{x^2+2x}$ ?

Решите уравнение:

5.3. а)  $\frac{p^2+4p}{2-p} = 0$ ; в)  $\frac{q^2-16q}{q+4} = 0$ ;

б)  $\frac{4x^2-9}{4x^2} = 0$ ; г)  $\frac{9x^2-1}{3x} = 0$ .

5.4. а)  $\frac{x^2-4x}{4x} = 0$ ; в)  $\frac{x^2+3x}{5x+15} = 0$ ;

б)  $\frac{x^2-36}{x^2+6x} = 0$ ; г)  $\frac{x^2-64}{8x-x^2} = 0$ .

5.5. а)  $\frac{t^4-81}{t^2+9} = 0$ ; в)  $\frac{y^4-16}{y^2+4} = 0$ ;

б)  $\frac{a^3-4a}{a+2} = 0$ ; г)  $\frac{9d-d^3}{d-3} = 0$ .

5.6. а)  $\frac{10-3y}{4y} = -2$ ; в)  $\frac{2t+9}{5t} = 4$ ;

б)  $\frac{6-v}{2v-1} = \frac{4}{3}$ ; г)  $\frac{s+2}{3s-5} = \frac{5}{4}$ .

○5.7. а)  $\frac{3n+75}{5} = \frac{6n+42}{5}$ ; в)  $\frac{x^2+2x}{x^2+1} = \frac{2x+1}{x^2+1}$ ;

б)  $\frac{x^2}{x+3} = \frac{x}{x+3}$ ; г)  $\frac{5y^2-1}{y} = \frac{y^2+3}{y}$ .

○5.8. а)  $\frac{x^2-2}{x+2} = \frac{2}{x+2}$ ; в)  $\frac{x^2}{x+1} = \frac{-x}{x+1}$ ;

б)  $\frac{x^2-1}{x-3} = \frac{3x-1}{x-3}$ ; г)  $\frac{16+3x^2}{x-4} = \frac{4x^2}{x-4}$ .

Решите уравнение:

○5.9. а)  $\frac{x^2 - 8x}{x - 6} = \frac{4x - 36}{x - 6}$ ;      в)  $\frac{x^2 + 16x}{x + 5} = \frac{6x - 25}{x + 5}$ ;

б)  $\frac{4x - 1}{x - 2} = \frac{x + 5}{x - 2}$ ;      г)  $\frac{7x + 4}{x + 3} = \frac{3x - 8}{x + 3}$ .

○5.10. а)  $\frac{4}{x} - \frac{x + 8}{2x} = \frac{5}{6}$ ;      в)  $\frac{x - 20}{4x} + \frac{5}{x} = \frac{2}{3}$ ;

б)  $\frac{1}{2x} + \frac{x}{x + 1} = \frac{1}{2}$ ;      г)  $\frac{x}{x - 2} - \frac{2}{3x} = \frac{1}{3}$ .

○5.11. а)  $\frac{3}{x + 2} + \frac{x}{x - 2} = 1$ ;      в)  $\frac{1}{x - 3} + \frac{x}{x + 3} = 1$ ;

б)  $\frac{2x}{x - 1} + \frac{3}{x + 1} = 2$ ;      г)  $\frac{3x}{x - 2} - \frac{5}{x + 2} = 3$ .

Решите задачу, выделяя три этапа математического моделирования:

○5.12. Расстояние между городами  $A$  и  $B$  50 км. Из города  $A$  в город  $B$  выехал велосипедист, а через 2 ч 30 мин вслед за ним выехал мотоциклист. Двигаясь со скоростью в 2,5 раза большей, чем у велосипедиста, мотоциклист прибыл в  $B$  одновременно с велосипедистом. Найдите скорость велосипедиста и скорость мотоциклиста.

○5.13. Из пункта  $A$  выехал автобус, а через 15 мин в том же направлении выехал другой автобус со скоростью в 1,2 раза большей и догнал первый на расстоянии 45 км от  $A$ . Найдите скорость первого автобуса.

○5.14. Катер прошёл 12 км по течению реки и 4 км против течения, затратив на весь путь 2 ч. Чему равна собственная скорость катера, если скорость течения равна 4 км/ч?

○5.15. Лодка проплыла 18 км по течению реки и 6 км против течения, затратив на весь путь 4 ч. Чему равна собственная скорость лодки, если скорость течения равна 3 км/ч?

○5.16. Расстояние между городами  $A$  и  $B$  равно 400 км. Из  $A$  в  $B$  выехала грузовая машина, а через 2 ч вслед за ней выехала легковая машина, скорость которой в 1,5 раза больше скорости грузовой. Найдите скорость грузовой машины, если известно, что она прибыла в  $B$  на 1 ч 20 мин позже легковой.

○5.17. Расстояние между пунктами  $A$  и  $B$  равно 100 км. Из  $A$  в  $B$  выехал автобус, а через 8 мин вслед за ним выехал мотоциклист, скорость которого в 1,2 раза больше скорости автобуса. В пункт  $B$  автобус пришёл на 12 мин позже мотоциклиста. Чему равна скорость мотоциклиста?

Решите уравнение:

○5.18. а)  $\frac{2x^2 - 1}{x} = x$ ;                      в)  $\frac{3x^2 + 2}{x + 1} = 3x$ ;

б)  $\frac{5x^2 - 36}{6x} = x - 2$ ;                      г)  $\frac{2x^2 - 13}{x - 2} = x + 2$ .

○5.19. а)  $\frac{x^2 + 4x}{x + 2} = \frac{2x}{3}$ ;                      в)  $\frac{x^2 - 5x}{x - 1} = \frac{7x}{9}$ ;

б)  $\frac{c - 2}{c + 3} = \frac{c + 3}{c - 2}$ ;                      г)  $\frac{x - 2}{x + 2} = \frac{x + 3}{x - 4}$ .

○5.20. а)  $\frac{3x}{x - 1} + \frac{x + 3}{x + 1} = 3$ ;                      в)  $\frac{2x}{x + 3} + \frac{x - 6}{x - 3} = 2$ ;

б)  $\frac{a - 1}{4a - 5} = \left(\frac{2a - 1}{4a - 5}\right)^2$ ;                      г)  $\left(\frac{b - 1}{b + 3}\right)^2 = \frac{b + 1}{b + 3}$ .

○5.21. а)  $\frac{3}{x - 4} - \frac{25}{x^2 - 16} = \frac{x + 1}{x + 4}$ ;

б)  $\frac{19}{(x - 5)(x + 1)} + \frac{x}{x + 1} = \frac{3}{x - 5}$ ;

в)  $\frac{1}{x - 5} - \frac{26}{x^2 - 25} = \frac{x + 4}{x + 5}$ ;

г)  $\frac{14}{(x - 3)(x + 2)} + \frac{6}{x + 2} = \frac{x}{x - 3}$ .

○5.22. а)  $\frac{x^2 + 3x}{2(x - 3)} + \frac{x + 12}{6} = \frac{3x}{x - 3}$ ;                      в)  $\frac{x^2 - x}{3(x + 2)} + \frac{x}{x + 2} = \frac{x + 6}{12}$ ;

б)  $\frac{3}{x} - \frac{6}{x(x + 2)} = \frac{1 + 2x}{x + 2}$ ;                      г)  $\frac{1}{x} - \frac{5}{x(5 - x)} = \frac{x - 7}{5 - x}$ .

○5.23. а)  $\frac{x}{x - 2} - \frac{4}{x + 2} = \frac{8}{x^2 - 4}$ ;                      в)  $\frac{x}{x - 3} - \frac{6}{x + 3} = \frac{18}{x^2 - 9}$ ;

б)  $\frac{3x + 27}{3x - x^2} + \frac{3}{x} - \frac{4x}{3 - x} = 0$ ;                      г)  $\frac{5x}{x - 2} + \frac{2}{x} - \frac{16 + 2x}{x^2 - 2x} = 0$ .



Решите уравнение:

○5.24. а)  $\frac{c-2}{2c+6} + \frac{c+3}{3c-6} = 0;$

б)  $\frac{y+2}{y^2-7y} - \frac{4}{(7-y)^2} = \frac{1}{y-7};$

в)  $\frac{d+5}{5d-20} + \frac{d-4}{4d+20} = \frac{9}{20};$

г)  $\frac{2a-2}{a^2-36} - \frac{a-2}{a^2-6a} - \frac{a-1}{a^2+6a} = 0.$

○5.25. а)  $\frac{c+2}{c^2-5c} - \frac{c-5}{2c^2-50} = \frac{c+25}{2c^2-50};$

б)  $\frac{3y-1}{6y-3} - \frac{1}{1-4y^2} = \frac{y}{2y+1};$

в)  $\frac{4(d+9)}{5d^2-45} + \frac{d+3}{5d^2-15d} = \frac{d-3}{d^2+3d};$

г)  $\frac{1}{4x-6} + \frac{2x-5}{18-8x^2} - \frac{1}{2x^2+3x} = 0.$

○5.26. а) Существует ли такое значение  $d$ , при котором разность дробей  $\frac{12d-7}{10d+1}$  и  $\frac{d-3}{5d+1}$  равна 1?

б) Существует ли такое значение  $b$ , при котором разность дробей  $\frac{18b+2}{b-4}$  и  $\frac{15b+1}{b+5}$  равна 3?

○5.27. а) Алгебраическое выражение  $\frac{a+1}{2} - 3b$  принимает значение  $3\frac{1}{2}$  при  $b = -0,5$  и при некотором значении  $a$ . Чему равно значение того же выражения при том же значении  $a$  и при  $b = \frac{5}{12}$ ?

б) Алгебраическое выражение  $\frac{c-2}{3} \cdot x - 4x$  принимает значение 1 при  $x = -\frac{1}{3}$  и при некотором значении  $c$ . Чему равно значение того же выражения при том же значении  $c$  и при  $x = -11\frac{1}{3}$ ?

○5.28. а) Алгебраическое выражение  $\frac{n+1}{3} \cdot y + \frac{3n-1}{5} \cdot y^2 + y^3$  принимает значение  $-21$  при  $y = -3$  и при некотором значении  $n$ . Чему равно значение того же выражения при том же значении  $n$  и при  $y = \frac{1}{3}$ ?

б) Алгебраическое выражение  $\frac{s-9}{4} \cdot z + \frac{s+2}{3} \cdot z^2 - z^3$  принимает значение  $16$  при  $z = -2$  и при некотором значении  $s$ . Чему равно значение того же выражения при том же значении  $s$  и при  $z = 0,5$ ?

Решите уравнение:

○5.29. а)  $\frac{x+1}{x-1} + \frac{3x+2}{x+1} = 4$ ;      в)  $\frac{2x+3}{x+4} + \frac{2}{x+1} = 2$ ;

б)  $\frac{3x+4}{2x+1} - \frac{x+3}{x+1} = 1$ ;      г)  $\frac{x+2}{2x+1} + \frac{x+3}{x+1} = 5$ .

○5.30. а)  $\frac{5x+7}{x^2+11x-12} = \frac{13x-1}{x(x+11)-12}$ ;

б)  $\frac{x^2-7x+3}{x^2+10x-39} = \frac{7x-12}{39-10x-x^2}$ ;

в)  $\frac{5x^2-8x+13}{x^3+10x^2+x-12} = \frac{7x^2-10x+13}{x^3+10x^2+x-12}$ ;

г)  $\frac{3x^2-6x+6301}{x^2-27x+11} = \frac{2x^2+21x+6290}{x^2-27x+11}$ .

○5.31. а)  $\frac{x^2-7x+6}{x^2+1} + \frac{(x-1)(x-6)}{(1-x)(1+x)+2x^2} = 0$ ;

б)  $\frac{x^2-5x+6}{x-1} + \frac{(x-2)(x-3)}{(1+x)^2-x^2-x-2} = 0$ .

○5.32. а)  $\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{4}{x(x+1)^2} = \frac{5}{2x(x+1)}$ ;

б)  $\frac{2x+19}{5x^2-5} - \frac{17}{x^2-1} - \frac{3}{1-x} = 0$ .

○5.33. а)  $\frac{3x-3}{2x^2-2} - \frac{2x+2}{3x^2+6x+3} = \frac{5(x-1)}{12x^2-24x+12}$ ;

б)  $\frac{6}{4-x} = \frac{25}{1-3x} - \frac{16}{x-4}$ .

- 5.34. Решите уравнение  $\frac{x^2 + 6x}{x + 6} = a$ ;
- а) при  $a = 3$ ;
  - б) при  $a = -3$ ;
  - в) при  $a = -6$ ;
  - г) для всех значений параметра  $a$ .
- 5.35. Решите уравнение  $\frac{x^2 - ax}{x - a} = 2$ ;
- а) при  $a = 3$ ;
  - б) при  $a = -5$ ;
  - в) при  $a = 2$ ;
  - г) для всех значений параметра  $a$ .
- 5.36. Решите уравнение  $\frac{x^3 - 4x}{x^2 - 4} = a$ ;
- а) при  $a = 3$ ;
  - б) при  $a = -1$ ;
  - в) при  $a = -2$ ;
  - г) для всех значений параметра  $a$ .
- 5.37. При каких значениях параметра  $a$  дробь  $\frac{t^2 - ta}{a - t}$  ни при каких допустимых значениях  $t$  не принимает значения, равного 5?
- 5.38. Для каждого значения  $c$  решите уравнение:
- а)  $\frac{x + 1}{x - c} = 0$ ;
  - б)  $\frac{2x - c}{x - 4} = 1$ ;
  - в)  $\frac{x - c}{x - 5} = 0$ ;
  - г)  $\frac{cx + 4}{x + 2} = 2$ .
- 5.39. Найдите такие числа  $a$  и  $b$ , что равенство  $\frac{3x - 5}{x - 1} = a + \frac{b}{x - 1}$  выполняется при всех допустимых значениях  $x$ .
- 5.40. Найдите такие числа  $a$  и  $b$ , что равенство  $\frac{x + 2}{x^2 - 1} = \frac{a}{x + 1} + \frac{b}{x - 1}$  выполняется при всех допустимых значениях  $x$ .
- 5.41. Найдите такие числа  $a$  и  $b$ , что равенство  $\frac{2x + 5}{x^2 - 2x} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x - 2}$  выполняется при всех допустимых значениях  $x$ .

●5.42. Для каждого значения  $a$  решите уравнение:

а)  $\frac{2x+3}{x+4} + \frac{a}{x+1} = 2;$

б)  $\frac{x+1}{x-1} + \frac{3x+a}{x+1} = 4;$

в)  $\frac{ax+4}{2x+1} - \frac{x+3}{x+1} = 1;$

г)  $\frac{x+2}{2x+1} + \frac{ax+3}{x+1} = 5.$

●5.43. Найдите все значения  $a$ , при которых один из корней уравнения равен  $x_0$ , и для каждого такого  $a$  решите данное уравнение:

а)  $\frac{2x+19}{5x^2-5} + \frac{a}{x^2-1} = \frac{3}{1-x}, x_0 = 3;$

б)  $\frac{a}{(x+1)^2} + \frac{4}{x(x+1)^2} = \frac{5}{2x(x+1)}, x_0 = 1;$

в)  $\frac{ax-3}{2x^2-2} - \frac{2x+2}{3x^2+6x+3} = \frac{5x-5}{12x^2-24x+12}, x_0 = 3;$

г)  $\frac{6}{4-x} = \frac{a+7}{1-3x} + \frac{2-a}{x-4}, x_0 = 2.$

## § 6. СТЕПЕНЬ С ОТРИЦАТЕЛЬНЫМ ЦЕЛЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ

Запишите в виде степени с положительным показателем следующее выражение:

6.1. а)  $3^{-3};$  б)  $\left(\frac{1}{3}\right)^{-1};$  в)  $5^{-2};$  г)  $\left(\frac{3}{5}\right)^{-2}.$

6.2. а)  $a^{-5};$  б)  $\frac{1}{(c+d)^{-3}};$  в)  $(t-s)^{-3};$  г)  $\frac{1}{t^{-2}}.$

6.3. а)  $\left(\frac{5}{a}\right)^{-2};$  б)  $\frac{1}{(a+b)^{-2}};$  в)  $(5x)^{-3};$  г)  $\frac{1}{(2x)^{-2}}.$

6.4. Представьте числа 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128,  $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{32}, \frac{1}{128}$  в виде степени числа:

а) 2; б)  $\frac{1}{2}.$

**6.5.** Представьте числа 3, 9, 27, 81, 243,  $\frac{1}{3}$ ,  $\frac{1}{9}$ ,  $\frac{1}{27}$ ,  $\frac{1}{81}$ ,  $\frac{1}{243}$  в виде степени числа:

а) 3;      б)  $\frac{1}{3}$ .

**6.6.** Представьте в виде степени числа 10 число:

а) 0,1;      б) 0,0001;      в) 0,01;      г) 0,00001.

Вычислите:

**6.7.** а)  $3^{-3}$ ,  $2^{-2}$ ,  $88^{-1}$ ;      в)  $(-2)^0$ ,  $(-3)^{-2}$ ,  $(-5)^{-3}$ ;

б)  $\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}$ ,  $\left(\frac{7}{9}\right)^{-2}$ ,  $\left(\frac{1}{7}\right)^{-3}$ ;      г)  $\left(1\frac{1}{3}\right)^{-1}$ ,  $\left(2\frac{1}{5}\right)^{-2}$ ,  $\left(-111\frac{1}{9}\right)^{-3}$ .

**6.8.** а)  $(0,1)^{-1}$ ,  $(0,1)^{-2}$ ,  $(0,1)^{-3}$ ;

б)  $(0,01)^{-1}$ ,  $(-0,01)^{-9}$ ,  $(-0,01)^{-4}$ ;

в)  $(-0,001)^{-2}$ ,  $(-0,001)^{-3}$ ,  $(0,001)^{-5}$ ;

г)  $(0,0001)^{-1}$ ,  $(-0,0001)^{-3}$ ,  $(0,00001)^{-2}$ .

**6.9.** а)  $(0,2)^{-1}$ ,  $(0,3)^{-2}$ ;      в)  $(-0,006)^{-2}$ ,  $(-0,003)^{-3}$ ;

б)  $(0,03)^{-1}$ ,  $(-0,07)^{-2}$ ;      г)  $(-0,999999)^{-1}$ ,  $(0,11111)^{-1}$ .

**6.10.** а)  $(3,1)^{-1}$ ,  $(2,2)^{-2}$ ,  $(2,5)^{-3}$ ;

б)  $(-1,02)^{-1}$ ,  $(-1,25)^{-2}$ ,  $(-1,5)^{-3}$ .

**6.11.** Запишите данное число в виде произведения степени числа 10 на число из отрезка  $[-1; 1]$ :

а) 239,7;      б) 0,0987;      в) -657 483;      г) -0,000087.

Например,  $22,3 = 0,223 \cdot 10^2$ ,  $0,003 = 0,3 \cdot 10^{-2}$ .

**6.12.** Расположите в порядке убывания числа:

а)  $\left(\frac{1}{2}\right)^3$ ,  $\left(\frac{1}{2}\right)^0$ ,  $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$ ,  $\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$ ;

б)  $3^{-1}$ ,  $3^3$ ,  $3^0$ ,  $3^{-2}$ ;

в)  $5^{-2}$ ,  $5^2$ ,  $5^{-1}$ ,  $5^0$ ;

г)  $\left(\frac{1}{4}\right)^2$ ,  $\left(\frac{1}{4}\right)^{-3}$ ,  $\left(\frac{1}{4}\right)^0$ ,  $\left(\frac{1}{4}\right)^{-1}$ .

Найдите значение выражения:

**6.13.** а)  $(64 \cdot 4^{-5})^2$ ;      в)  $(128 \cdot 2^{-6})^{-2}$ ;

б)  $\frac{5^{-3} \cdot 5^{-1}}{5^{-6}}$ ;      г)  $\frac{3^{-9}}{3^{-2} \cdot 3^{-6}}$ .

**6.14.** а)  $\left(-\frac{1}{3}\right)^{-1} \cdot 10^{-1} + (4)^0 - (-2)^3 - (-5)^{-2} \cdot (-5)^3$ ;

б)  $-\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} \cdot (2)^{-1} - \left(\frac{4}{81}\right)^0 - (-0,5)^{-2} + (2,5)^{-1} \cdot (2,5)^2$ ;

в)  $\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} \cdot (4)^{-1} - \left(-\frac{1}{3}\right)^{-3} + (-0,6)^{-3} \cdot (-0,6)^4 - (4^5)^0$ ;

г)  $(-0,5)^{-3} \cdot (2)^{-1} - (-2,7)^0 - (-2)^3 \cdot 1,2 - \left(\frac{2}{3}\right)^{-2}$ .

Выполните действия и приведите выражение к виду, не содержащему отрицательных показателей степеней:

**6.15.** а)  $a^2 \cdot a^{-3}$ ;      б)  $b^4 \cdot b^{-5}$ ;      в)  $d \cdot d^{-2}$ ;      г)  $m^{-5} \cdot m^{-1}$ .

**6.16.** а)  $k^6 : k^{-1}$ ;      б)  $l^2 : l^{-1}$ ;      в)  $x^3 : x^{-4}$ ;      г)  $y : y^{-3}$ .

**6.17.** а)  $2a^{-2} : \left(\frac{2}{3}a\right)$ ;      в)  $\frac{4}{7}m^7 : \left(1\frac{3}{4}m^{-3}\right)$ ;

б)  $1,2x^{-2} : (4x^{-5})$ ;      г)  $8r^{-5} : \left(\frac{2}{3}r^{-7}\right)$ .

**6.18.** а)  $3m^{-2}n^3 : \frac{3}{4}m^{-3}n^3$ ;      в)  $\frac{7}{11}t^{-2}s^6 \cdot \left(1\frac{4}{7}t^{-1}s^{-2}\right)$ ;

б)  $0,5a^2b^{-2} \cdot (4a^{-3}b^3)$ ;      г)  $16p^{-1}q^3 : \left(\frac{4}{7}p^{-3}q^2\right)$ .

**6.19.** а)  $(a^2 - 1) \cdot a^{-1}$ ;      в)  $(b - b^3) \cdot b^{-2}$ ;

б)  $(l^3 - l^2) \cdot l^{-2}$ ;      г)  $(m^5 - m^4) \cdot m^{-5}$ .

**6.20.** а)  $ab^{-1} + a^{-1}b$ ;      в)  $p^2q^2(p^{-2} - q^{-2})$ ;

б)  $c^{-1}d^2 - c^2d^{-1}$ ;      г)  $mn^{-2} - m^{-2}n$ .

**6.21.** а)  $(b^{-1} + a^{-1}) \cdot (a + b)^{-1}$ ;      в)  $(m^{-2} + n^{-2}) : (m^2 + n^2)$ ;

б)  $(x^{-2} - y^{-2}) : (x - y)$ ;      г)  $(ab^{-2} + a^{-2}b) \cdot \left(\frac{a^{-1}}{b}\right)^{-2}$ .

○6.22. Выполните действия и приведите выражение к виду, не содержащему отрицательных показателей степеней:

а)  $(b^{-1} + a^{-1}) \cdot \left( \frac{1}{a^{-1}} + \frac{1}{b^{-1}} \right)^{-1}$ ;

б)  $\left( (s^{-1} + t^{-1}) : \left( \frac{1}{s^{-2}} - \frac{1}{t^{-2}} \right) \right)^{-1}$ .

6.23. Представьте выражение в виде степени и найдите его значение при заданном значении переменной:

а)  $\frac{b^5(b^{-4})^2}{b^{-2}b}$  при  $b = 3^{-1}$ ;      б)  $\frac{(n^{-5})^3n}{n^{-2}n^{-10}}$  при  $n = 4$ .

6.24. Докажите тождество:

а)  $(a^{-1} + b^{-1})(a^{-1} - b^{-1}) = a^{-2} - b^{-2}$ ;

б)  $(a^{-1} + b^{-1})(a^{-2} - a^{-1}b^{-1} + b^{-2}) = a^{-3} + b^{-3}$ .

6.25. Верно ли равенство:

а)  $(a^{-1} + b^{-1})^2 = a^{-2} + 2a^{-1}b^{-1} + b^{-2}$ ;

б)  $(a + b)^{-2} = a^2 - 2a^1b^1 + b^2$ ;

в)  $(a^{-1} - b^{-1})^{-2} = a^2 + 2a^1b^1 + b^2$ ;

г)  $(a^{-1} - b^{-1})^3 = a^{-3} - 3a^{-2}b^{-1} + 3a^{-1}b^{-2} - b^{-3}$ ?

Вынесите за скобку степень с наименьшим показателем:

6.26. а)  $33a^{-2} + 23a^{-5}$ ;      в)  $2a^{-2} + 7a^5$ ;

б)  $3a^{-2} + 7$ ;      г)  $8a + 15a^{-5}$ .

6.27. а)  $5a + 3a^{-2} + 23a^{-5}$ ;      в)  $3a^{-3} - 2a^{-2} + 7a^5$ ;

б)  $7 + 3a^{-5} + 2a$ ;      г)  $a^{-2} + a^{-1} + 1$ .

6.28. а)  $5ab^{-3} + 3a^{-2}b^2 - 2a^{-4}$ ;

б)  $3a^{-3}b^{-5} - 2a^{-2}b + 7a^5b^{-6}$ .

6.29. а)  $5a^{k-2} + 3a^{k+2} + 23a^{k-5}$ ;      в)  $7a^{-1-k} + 3a^{5-k} + 2a^{-k}$ ;

б)  $3a^{3-d} - 5a^{2-d} - 6a^{5-d}$ ;      г)  $a^{-1+k} + a^{2-k} + 2a^{-2k}$ .

○6.30. Вычислите  $2^{-k}$ , если  $2^{3-k} + 2^{1-k} + 5 \cdot 2^{-k} = 40$ .

Сократите дробь:

○6.31. а)  $\frac{1 + a^{-1}}{1 + a}$ ;      в)  $\frac{3 + 5a^{-1}}{3a + 5}$ ;  
б)  $\frac{1 - a^{-1}}{1 - a}$ ;      г)  $\frac{2a^{-2} + a^{-1}}{a + 2}$ .

○6.32. а)  $\frac{b^{-1} + a^{-1}}{a + b}$ ;      в)  $\frac{3b^{-1} + 2a^{-1}}{3a + 2b}$ ;  
б)  $\frac{b^{-1} - a^{-1}}{a - b}$ ;      г)  $\frac{ab^{-1} - ba^{-1}}{a^2 - b^2}$ .

○6.33. а)  $\frac{b^{-1} + a^{-1}}{a^{-2} - b^{-2}}$ ;      в)  $\frac{b^{-3} + a^{-3}}{a + b}$ ;  
б)  $\frac{b^{-1} - a^{-1}}{a^{-3} - b^{-3}}$ ;      г)  $\frac{b^{-3} - a^{-3}}{a^{-2} + a^{-1}b^{-1} + b^{-2}}$ .

Найдите значение выражения:

○6.34. а)  $\frac{3x^{-2}}{2 - x^{-2}} - \frac{3x^{-2}}{2 + x^{-2}}$  при  $x = 0,5^{-1}$ ;  
б)  $\frac{9x^{-1}}{2 - x^{-1}} - \frac{9x^{-1}}{2 + x^{-1}}$  при  $x = 0,2^{-1}$ .

○6.35. а)  $\frac{2x(2 - x)^{-1}}{1 - \left(\frac{2 - x}{2x}\right)^{-1}}$  при  $x = \frac{3}{5}$ ;      б)  $\frac{3x(2 - x)^{-1}}{2 - \left(\frac{2 - x}{3x}\right)^{-1}}$  при  $x = \frac{5}{7}$ .

○6.36. а)  $\frac{2x^{-1} - y^{-1}}{2x^{-1} + y^{-1}}$ , если  $\frac{y}{x} = 3^{-1}$ ;      б)  $\frac{x^{-1} - 3y^{-1}}{x^{-1} + 3y^{-1}}$ , если  $\frac{x}{y} = 4^{-1}$ .

○6.37. а)  $\frac{x^{-1} - 3y^{-1}}{x^{-2} - 9y^{-2}} \cdot x^{-1}$ , если  $\frac{x}{y} = 2^{-1}$ ;

б)  $\frac{x^{-1} + 2y^{-1}}{x^{-2} - 4y^{-2}} \cdot x^{-1}$ , если  $\frac{y}{x} = 5^{-1}$ .

○6.38. Пусть  $x + x^{-1} = 5$ . Найдите значение выражения:

а)  $x^2 + x^{-2}$ ;      в)  $x^4 + x^{-4}$ ;

б)  $x^3 + x^{-3}$ ;      г)  $x^5 + x^{-5}$ .



**06.39.** Решите уравнение:

а)  $4x^{-2} - 4x^{-1} = -1$ ;      в)  $9x^{-2} + 6x^{-1} = -1$ ;

б)  $x^{-4} + 16 = 8x^{-2}$ ;      г)  $x^{-4} + 81 = 18x^{-2}$ .

Упростите выражение:

**06.40.** а)  $\left(\frac{x+4}{3x+3} - (x+1)^{-1}\right) \cdot \left(\frac{x+1}{3}\right)^{-1} + \frac{2}{x^2-1}$ ;

б)  $\left(\frac{x+10}{5x+25} - (x+5)^{-1}\right) \cdot \left(\frac{x-5}{5}\right)^{-1} - \frac{10}{x^2-25}$ .

**06.41.** а)  $\frac{2-a-5(a+2)^{-1}}{5(4-a^2)^{-1}-1}$ ;      б)  $\frac{(x^2-1)^{-1}-3}{3(x-1)-(x+1)^{-1}}$ .

Докажите тождество:

**●6.42.**  $\left(\frac{y^2(xy^{-1}-1)^2}{x(1+x^{-1}y)^2} \cdot \frac{y^2(x^{-2}+y^{-2})}{x(xy^{-1}+x^{-1}y)}\right) : \frac{1-x^{-1}y}{xy^{-1}+1} = \frac{x-y}{x+y}$ .

**●6.43.**  $\left(\frac{a^{-n}+b^{-n}}{a^{-n}-b^{-n}} - \frac{a^{-n}-b^{-n}}{a^{-n}+b^{-n}}\right)^{-1} = \frac{a^{-n}b^n - b^{-n}a^n}{4}$ .

**●6.44.**  $\left(\frac{a^{-n}-b^{-n}}{a^{-2n}-a^{-n}b^{-n}+b^{-2n}}\right)^{-1} + \left(\frac{a^{-n}+b^{-n}}{a^{-2n}+a^{-n}b^{-n}+b^{-2n}}\right)^{-1} = \frac{2a^{-n}b^{2n}}{b^{2n}-a^{2n}}$ .

**06.45.** Найдите область определения выражения:

а)  $(x^2-4)^{-4}$ ;

б)  $(x-(x-1)^{-1}-1)^{-3}$ ;

в)  $(x^{-2}-4)^{-1}$ ;

г)  $3((x^0-(x-1)^{-1})^0-x)^{-1}$ .