

то площадь треугольника ABC будет максимальна тогда, когда максимальна длина высоты BH . Из геометрических соображений понятно, что наибольшая возможная длина высоты BH равна 3, причём точка H является центром нашей окружности, то есть $|LH| = 3$. Наконец, применяя теорему Пифагора в треугольнике BLH , мы находим нужную нам величину: $|BL| = \sqrt{|BH|^2 + |LH|^2} = \sqrt{18}$.

О т в е т. $\sqrt{18}$.

Задачи

1. На стороне KM треугольника KLM , площадь которого равна 4, взята точка N таким образом, что $|KM| = 4|MN|$. Найдите длину отрезка LN , если длина стороны KL равна $2\sqrt{3}$, а $\widehat{KLN} = \pi/3$.
2. Центр O окружности, длина радиуса которой равна 3, лежит на гипотенузе AC прямоугольного треугольника ABC . Его катеты касаются этой окружности. Найдите площадь треугольника ABC , если известно, что $|OC| = 5$.
3. Внутри прямоугольного треугольника ABC (угол ABC – прямой) взята точка D таким образом, что площади треугольников ABD и BCD соответственно в три и в четыре раза меньше площади треугольника ABC . Найдите длину отрезка BD , если $|AD| = a$, $|DC| = c$.
4. В трапеции $ABCD$ $|CD| = 12$, боковая сторона AD перпендикулярна основаниям, а её длина равна 9. Длина отрезка AO , где O – точка пересечения диагоналей трапеции $ABCD$, равна 6. Найдите площадь треугольника BOC .
5. Прямая, проходящая через вершину основания равнобедренного треугольника, делит его площадь пополам, а периметр делит на части 5 м и 7 м. Найдите площадь треугольника.
6. В равнобедренном треугольнике ABC длина основания AC равна 2, величина угла ACB равна $\pi/6$. Из вершины A к боковой стороне BC проведены медиана AD и биссектриса AE . Найдите площадь треугольника ADE .
7. В треугольнике FGH угол G – прямой, $|FG| = 8$, $|GH| = 2$. Точка D лежит на стороне FH , A и B – точки пересечения медиан треугольников FGD и DGH соответственно. Найдите площадь треугольника GAB .
8. Дан треугольник ABC , площадь которого равна 2. На его медианах AK , BL и CN взяты соответственно точки P , Q и R так, что $|AP| = |PK|$, $|QL| = 2|BQ|$, $|CR| : |RN| = 5 : 4$. Найдите площадь треугольника PQR .
9. Точка N лежит на гипотенузе AC прямоугольного равнобедренного треугольника ABC . Точка M расположена на катете AB таким образом, что угол MNC прямой. Известно, что площадь треугольника MNC составляет три восьмых площади треугольника ABC . Вычислите отношение $|AN| : |NC|$.

10. Прямоугольные треугольники ABC и ABD имеют общую гипотенузу AB , длина которой равна 5. Точки C и D расположены по разные стороны от прямой AB , $|BC| = |BD| = 3$. Точка E лежит на стороне AC , $|EC| = 1$. Точка F лежит на стороне AD , $|FD| = 2$. Найдите площадь пятиугольника $ECBDF$.
11. В треугольнике ABC медиана AD и биссектриса BE перпендикулярны и пересекаются в точке F . Найдите площадь треугольника ABC , если площадь треугольника DEF равна 5.
12. В ромбе $ABCD$ перпендикуляр к стороне AD , восстановленный из её середины, пересекает диагональ AC в точке M , а перпендикуляр к стороне CD , восстановленный из её середины, пересекает диагональ AC в точке N . Найдите отношение площадей треугольника MND и ромба $ABCD$, если $\widehat{BAD} = \pi/3$.
13. Основание AB трапеции $ABCD$ вдвое длиннее основания CD и вдвое длиннее боковой стороны AD . Найдите площадь трапеции $ABCD$, если известно, что $|AC| = a$, $|BC| = b$.
14. На сторонах KL и LM треугольника KLM взяты точки A и B соответственно. Отрезки KB и MA пересекаются в точке C . Найдите площадь треугольника ALC , если известно, что площади треугольников KAC , MBC и KCM равны соответственно 12, 50 и 45.
15. В параллелограмме $ABCD$ на диагонали AC взята точка E , а на стороне AD взята точка F , причём $|AC| = 3|AE|$, $|AD| = 4|AF|$. Найдите площадь параллелограмма $ABCD$, если площадь четырёхугольника $ABGE$, где G – точка пересечения прямой FE и отрезка BC , равна 8.
16. В треугольнике ABC на стороне AB взята точка K , а на стороне BC взята точка L так, что $|AK| : |BK| = 1 : 2$, $|CL| : |BL| = 2 : 1$. Пусть Q – точка пересечения прямых AL и CK . Найдите площадь треугольника ABC , если дано, что площадь треугольника BQC равна 1.
17. В равнобедренный треугольник ABC с основанием AC вписана окружность, которая касается боковой стороны AB в точке M . Через точку M проведён перпендикуляр ML к стороне AC треугольника ABC (точка L – основание этого перпендикуляра). Найдите величину угла BCA , если известно, что площадь треугольника ABC равна 1, а площадь четырёхугольника $LMBC$ равна S .
18. Через вершины A и B треугольника ABC проведена окружность, пересекающая стороны BC и AC в точках D и E соответственно. Площадь треугольника CDE в 7 раз меньше площади четырёхугольника $ABDE$. Найдите $|DE|$ и длину радиуса окружности, если $|AB| = 4$, $\widehat{C} = 45^\circ$.
19. На стороне AB треугольника ABC взята точка E , а на стороне BC – точка D так, что $|AE| = 2$, $|CD| = 1$. Прямые AD и CE пересекаются в точке O . Найдите площадь четырёхугольника $BDOE$, если $|AB| = |BC| = 8$, $|AC| = 6$.

20. На плоскости лежит равнобедренный прямоугольный треугольник, у которого катеты имеют длину a . Поворотом в этой плоскости данного треугольника вокруг вершины его прямого угла на угол 45° получается другой равнобедренный прямоугольный треугольник. Найдите площадь четырёхугольника, являющегося общей частью этих двух треугольников.
21. Длина радиуса вписанной в равнобедренный треугольник ABC окружности равна 4, $|AC| = |BC|$. На прямой AB взята точка D , удалённая от прямых AC и BC на расстояния 11 и 3 соответственно. Найдите $\cos \widehat{DBC}$.
22. Площадь трапеции $ABCD$ равна 30. Точка P – середина боковой стороны AB . Точка R на боковой стороне CD выбрана так, что $2|CD| = 3|RD|$. Прямые AR и PD пересекаются в точке Q . Найдите площадь треугольника APQ , если известно, что $|AD| = 2|BC|$.
23. В трапеции $ABCD$ стороны AB и CD параллельны, причём $|CD| = 2|AB|$. На сторонах AD и BC выбраны соответственно точки P и Q таким образом, что $|DP| : |PA| = 2 : 1$, $|BQ| : |QC| = 3 : 4$. Найдите отношение площадей четырёхугольников $ABQP$ и $CDPQ$.
24. Точки P и Q расположены на стороне BC треугольника ABC таким образом, что $|BP| : |PQ| : |QC| = 1 : 2 : 3$. Точка R делит сторону AC этого треугольника таким образом, что $|AR| : |RC| = 1 : 2$. Чему равно отношение площади четырёхугольника $PQST$ к площади треугольника ABC , если S и T – точки пересечения прямой BR с прямыми AQ и AP соответственно?
25. В треугольнике ABC , площадь которого равна S , проведены биссектриса CE и медиана BD , пересекающиеся в точке O . Найдите площадь четырёхугольника $ADOE$, если $|BC| = a$, $|AC| = b$.
26. Длина высоты трапеции $ABCD$ равна 7, а длины оснований AD и BC равны соответственно 8 и 6. Через точку E , лежащую на стороне CD , проведена прямая BE , которая делит диагональ AC в точке O в отношении $|AO| : |OC| = 3 : 2$. Найдите площадь треугольника OEC .
27. В прямоугольном треугольнике величина меньшего из углов равна α . Прямая, перпендикулярная гипотенузе, делит этот треугольник на две части, равные по площади. Найдите, в каком отношении она делит гипотенузу.
28. Через вершину A и середину M стороны BC параллелограмма $ABCD$, площадь которого равна 1, проведена прямая, пересекающая диагональ BD в точке O . Найдите площадь четырёхугольника $OMCD$.
29. В треугольнике ABC градусная мера угла A равна 45° , а угол C – острый. Из середины стороны BC на сторону AC опущен перпендикуляр MN . Найдите градусные меры углов треугольника ABC , если площади треугольников MNC и ABC относятся как 1 : 8.
30. Точка O является центром окружности, вписанной в прямоугольный треугольник ABC с прямым углом B . Известно, что отношение площадей треугольников AOC и ABC равно $k : k + 1$. Найдите величины острых углов треугольника ABC . При каких k задача имеет решение?

31. В треугольнике ABC точка D лежит на стороне AC , $|AD| = 2|DC|$. На стороне BC взята точка E таким образом, что площадь треугольника AED равна 1. Отрезки AE и BD пересекаются в точке O . Найдите отношение площадей треугольников ABO и OED , если площадь треугольника ABD равна 3.
32. На отрезке AB лежат точки C и D , причём точка C – между точками A и D . Точка M взята так, что перпендикулярны прямые AM и MD , а также перпендикулярны прямые CM и MB . Найдите площадь треугольника CMD , если известно, что $\widehat{CMD} = \alpha$, а площади треугольников AMD и CMB равны S_1 и S_2 соответственно.
33. Точка F лежит на продолжении за точку C стороны BC параллелограмма $ABCD$. Отрезок AF пересекает диагональ BD в точке E и сторону CD в точке G . Известно, что $|GF| = 3$, $|AE| = |EG| + 1$. Какую часть площади параллелограмма $ABCD$ составляет площадь треугольника AED ?
34. Отрезок BL является биссектрисой треугольника ABC . На продолжении его стороны AC за точку C взята точка M таким образом, что угол LBM прямой. Найдите площадь треугольника CBL , если известно, что площади треугольников ABL и CBM равны 10 и 15 соответственно.
35. Точки D и E являются соответственно серединами сторон AC и BC равно-стороннего треугольника ABC . Точка F лежит на отрезке CD , отрезки BF и DE пересекаются в точке M . Найдите длину отрезка MF , если известно, что площадь четырёхугольника $ABMD$ составляет пять восьмых площади треугольника ABC , а $|AB| = a$.
36. На стороне BC треугольника ABC выбраны точки K и L таким образом, что $|BL| = |LC|$, $|BK| = |KL|$. Точки D и F лежат соответственно на продолжениях отрезков AL и AK за точки L и K так, что $|KF| = 2|AL|$, $|LD| = |AK|$. Вычислите отношение площадей четырёхугольника $KLDF$ и треугольника ABC , если известно, что $\widehat{ABC} = \beta$, $\widehat{ACB} = \gamma$.