



Рассмотрим прямоугольный треугольник SOK , в котором

$$SO = \frac{CF\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}, \quad OK = \frac{OF\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2},$$

$$SK = \sqrt{SO^2 + OK^2} = \frac{a\sqrt{15}}{2}.$$

Отрезок OH — высота этого треугольника, проведённая из вершины прямого угла, поэтому

$$OH = \frac{SO \cdot OK}{SK} = \frac{a\sqrt{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{a\sqrt{15}}{2}} = \frac{3a}{\sqrt{15}}.$$

По формуле для медианы треугольника

$$AN = \frac{1}{2} \sqrt{2SA^2 + 2AF^2 - SF^2} = \frac{1}{2} \sqrt{2 \cdot 4a^2 + 2a^2 - 4a^2} = \frac{a\sqrt{6}}{2}.$$

Пусть искомый угол равен α . Тогда

$$\sin \alpha = \frac{OH}{AN} = \frac{\frac{3a}{\sqrt{15}}}{\frac{a\sqrt{6}}{2}} = \frac{\sqrt{10}}{5}.$$

◁

Подготовительные задачи

1. Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Найдите углы: а) между прямой AC_1 и плоскостью BDD_1 ; б) между прямой AB и плоскостью $CB_1 D_1$; в) между прямой DD_1 и плоскостью ACB_1 ; г) между прямой AC и плоскостью BCD_1 .

2. Дан правильный тетраэдр $ABCD$. Точки K , M и N — середины рёбер BD , AB и AC соответственно. Найдите углы: а) между прямой CD и плоскостью ABD ; б) между прямой DM и плоскостью ADC ;

в) между прямой KN и плоскостью ADC ; г) между прямой BD и плоскостью KMN .

3. Дана правильная четырёхугольная пирамида $SABCD$ с вершиной S . Все рёбра пирамиды равны, M — середина бокового ребра SD . Найдите углы: а) между прямой AM и плоскостью ABC ; б) между прямой BD и плоскостью BSC ; в) между прямой BM и плоскостью ASD ; г) между прямой SA и плоскостью CSD .

4. Дана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$, все рёбра которой равны 1. Точка M — середина ребра BC . Найдите углы: а) между прямой A_1M и плоскостью ABC ; б) между прямой BB_1 и плоскостью AB_1C_1 ; в) между прямой C_1M и плоскостью ABB_1 ; г) между прямой AA_1 и плоскостью A_1C_1M .

5. Дана правильная шестиугольная призма $ABCDEF A_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все рёбра которой равны 1. Найдите углы: а) между прямой AA_1 и плоскостью BCE_1 ; б) между прямой BC_1 и плоскостью AFF_1 ; в) между прямой BD_1 и плоскостью ABB_1 ; г) между прямой BE_1 и плоскостью ABB_1 .

6. Дана правильная шестиугольная пирамида $SABCDEF$ с вершиной S . Сторона основания равна 1, а боковое ребро равно 2. Найдите углы: а) между прямой BC и плоскостью ASF ; б) между прямой AB и плоскостью BSC ; в) между прямой SA и плоскостью BSC ; г) между прямой AC и плоскостью CSD .

Задачи на доказательство и вычисление

5.1. Основание треугольной пирамиды $DABC$ — прямоугольный треугольник ABC ($\angle C = 90^\circ$). Высота пирамиды проходит через точку C .

а) Докажите, что противоположные рёбра пирамиды попарно перпендикулярны.

б) Найдите углы, которые образуют боковые рёбра DA и DB с плоскостью основания, если $AC = 15$, $BC = 20$, а угол между плоскостями ABC и ABD равен 45° .

5.2. Высота PC треугольной пирамиды $PABC$ с вершиной P проходит через точку C . Прямые PA и BC перпендикулярны.

а) Докажите, что основание пирамиды — прямоугольный треугольник.

б) Найдите углы, которые образуют боковые рёбра PA и PB с плоскостью основания, если $AC = 6$, $BC = 8$, а расстояние от точки P до прямой AB равно 5.

5.3. Дана треугольная пирамида $SABC$ с основанием ABC ; O — точка пересечения медиан треугольника ABC .

а) Докажите, что плоскость, проходящая через прямую AB и середину отрезка SO , делит боковое ребро SC в отношении $1 : 3$, считая от вершины S .

б) Найдите угол между боковым ребром и плоскостью основания пирамиды, если пирамида правильная, а её высота составляет $\frac{4}{5}$ от высоты SM боковой грани SAB .

5.4. Дана треугольная пирамида $SABC$; O — точка пересечения медиан основания ABC .

а) Докажите, что плоскость, проходящая через прямую AB и середину M ребра SC , делит отрезок SO в отношении $3 : 1$, считая от вершины S .

б) Найдите угол между прямой BC и плоскостью ABM , если пирамида правильная, а угол между прямой, проходящей через точку M и середину ребра AB , и прямой SO равен 45° .

5.5. Дан прямоугольный параллелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, в котором $AD = 2$, $AA_1 = 4$, $AB = 2\sqrt{15}$. Точка M — середина ребра $C_1 D_1$, точка N лежит на ребре AA_1 , причём $AN = 3$.

а) Докажите, что $MN \perp CB_1$.

б) Найдите угол между прямой MN и плоскостью грани $BB_1 C_1 C$.

5.6. Дана прямая призма $ABCA_1 B_1 C_1$, основание которой — прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C и катетом BC , вдвое бóльшим бокового ребра призмы. Точка M — середина ребра $A_1 C_1$, точка N лежит на ребре BC , причём $CN : NB = 1 : 3$.

а) Докажите, что $MN \perp CB_1$.

б) Найдите угол между прямой MN и плоскостью основания $A_1 B_1 C_1$, если $AA_1 : AB = 1 : \sqrt{7}$.

5.7. Дана правильная треугольная призма $ABCA_1 B_1 C_1$ с основаниями ABC и $A_1 B_1 C_1$. Скрещивающиеся диагонали BA_1 и CB_1 боковых граней $AA_1 B_1 B$ и $BB_1 C_1 C$ перпендикулярны.

а) Докажите, что $AB : AA_1 = \sqrt{2} : 1$.

б) Найдите угол между прямой BA_1 и плоскостью BCC_1 .

5.8. Дана правильная четырёхугольная призма $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ с основаниями $ABCD$ и $A_1 B_1 C_1 D_1$. Точка M — середина ребра $B_1 C_1$. Прямые CA_1 и BM перпендикулярны.

а) Докажите, что диагональ основания призмы вдвое больше бокового ребра.

б) Найдите угол между прямой CA_1 и плоскостью BCC_1 .

5.9. Дана четырёхугольная пирамида $SABCD$, основание которой — параллелограмм $ABCD$. Точка K — середина медианы SM грани CSD , N — середина ребра AB .

а) Постройте точку пересечения прямой KN с плоскостью ASC .

б) Найдите угол между прямой KN и плоскостью ASC , если пирамида правильная, а её боковые грани образуют с плоскостью основания углы, равные 60° .

5.10. Дана треугольная пирамида $DABC$. Точки M и N — середины рёбер BC и AD , L — середина ребра AB .

а) Постройте точку пересечения прямой MN с плоскостью CDL .

б) Найдите угол между прямой MN и плоскостью CDL , если пирамида правильная, а угол между её боковым ребром и плоскостью основания ABC равен 60° .

5.11. Дана правильная шестиугольная пирамида $SABCDEF$ с вершиной S . Точка M — середина ребра SD .

а) Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через точки A , B и M .

б) Найдите угол между прямой AM и плоскостью CSF , если $AB:SA = 1:\sqrt{19}$.

5.12. Дана правильная шестиугольная пирамида $SABCDEF$ с вершиной S .

а) Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через прямую AB и середину высоты SH пирамиды.

б) Пусть K — точка пересечения этой плоскости с ребром SC . Найдите угол между прямой BK и плоскостью ASB , если $AB:AS = 1:2$.

5.13. Точка M — середина ребра AB правильного тетраэдра $DABC$.

а) Докажите, что ортогональная проекция точки M на плоскость ACD лежит на медиане AP грани ACD .

б) Найдите угол между прямой DM и плоскостью ACD .

5.14. Дана правильная четырёхугольная пирамида $SABCD$ с вершиной S . Все рёбра пирамиды равны. Точка M — середина ребра BC .

а) Докажите, что ортогональная проекция середины ребра AB на плоскость CSD делит медиану SN этой грани в отношении $1:2$, считая от вершины S .

б) Найдите угол между прямой SM и плоскостью CSD .

5.15. Основание $ABCD$ призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — равнобедренная трапеция с основаниями AB и CD . Боковые стороны равны меньшему основанию CD , а их продолжения пересекаются под углом 60° .

а) Плоскость CA_1D_1 пересекает ребро AB в точке M . Докажите, что прямая D_1M проходит через середину диагонали A_1C .

б) Найдите угол между боковым ребром BB_1 и плоскостью CA_1D_1 , если призма прямая, а $AA_1 : AD = \sqrt{3} : 2$.

5.16. Основание $ABCD$ призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — трапеция с основаниями $AB = 2CD$.

а) Докажите, что плоскость BA_1D_1 проходит через середину бокового ребра CC_1 .

б) Найдите угол между боковым ребром AA_1 и этой плоскостью, если призма прямая, трапеция $ABCD$ прямоугольная с прямым углом при вершине B , а $BC = CD$ и $AA_1 = \sqrt{6}CD$.

5.17. Точка M — середина медианы BK основания ABC правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$, а N — центр боковой грани AA_1B_1B .

а) Постройте точку пересечения прямой MN с плоскостью $A_1B_1C_1$.

б) Найдите угол между прямой MN и плоскостью грани BB_1C_1C , если известно, что $\frac{AB}{AA_1} = 2\sqrt{2}$.

5.18. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ точка N — центр боковой грани AA_1B_1B , а M — точка пересечения медиан основания ABC .

а) Постройте точку пересечения прямой MN с плоскостью $A_1B_1C_1$.

б) Найдите угол между прямой MN и плоскостью BB_1C_1C , если известно, что $\frac{AB}{AA_1} = 2\sqrt{3}$.

5.19. Основания ABC и $A_1B_1C_1$ призмы $ABCA_1B_1C_1$ — равносторонние треугольники. Отрезок, соединяющий центр O основания ABC с серединой ребра A_1B_1 , перпендикулярен основаниям призмы.

а) Докажите, что грань ABB_1A_1 — прямоугольник.

б) Найдите угол между прямой BC и плоскостью ABC_1 , если высота призмы равна стороне основания.

5.20. Основания ABC и $A_1B_1C_1$ призмы $ABCA_1B_1C_1$ — равносторонние треугольники. Отрезок, соединяющий центр O основания ABC с вершиной C_1 , перпендикулярен основаниям призмы.

а) Докажите, что плоскости ABC_1 и OCC_1 перпендикулярны.

б) Найдите угол между прямой AA_1 и плоскостью ABC_1 , если боковое ребро призмы равно стороне основания.