Запишем цепочку эквивалентных преобразований второго уравнения:

$$\sin x \cos y \sin(x+y) + \frac{1}{8} = 0 \iff$$

$$\iff \frac{1}{2}(\sin(x+y) + \sin(x-y))\sin(x+y) + \frac{1}{8} = 0 \iff$$

$$\iff 4\sin^2(x+y) + 4\sin(x-y)\sin(x+y) + 1 = 0 \iff$$

$$\iff (2\sin(x+y) + \sin(x-y))^2 + 1 - \sin^2(x-y) = 0,$$

и теперь уже видно, что наше уравнение эквивалентно системе

$$\begin{cases} 2\sin(x+y) + \sin(x-y) = 0, \\ \sin^2(x-y) = 1. \end{cases}$$

Из второго уравнения системы получаем, что либо $x - y = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$, либо $x - y = -\frac{\pi}{2} + 2n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$.

В первом случае $\sin(x+y) = -\frac{1}{2} \iff x + y = (-1)^{k+1}\frac{\pi}{6} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, а во втором $\sin(x+y) = \frac{1}{2} \iff x + y = (-1)^k\frac{\pi}{6} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$. Дальше все ясно.

Ответ: $\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + (-1)^{k+1}\frac{\pi}{12} + n\pi + \frac{k}{2}\pi, \\ y = -\frac{\pi}{4} + (-1)^{k+1}\frac{\pi}{12} + \frac{k}{2}\pi - n\pi \end{cases}$, $k, n \in \mathbf{Z}$ ◄

$\begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} + (-1)^{k}\frac{\pi}{12} + n\pi + \frac{k}{2}\pi \\ y = \frac{\pi}{4} + (-1)^{k}\frac{\pi}{12} + \frac{k}{2}\pi - n\pi \end{cases}$, $k, n \in \mathbf{Z}$.

Наш урок окончен. Оценку и здесь поставьте себе по стандарту.

Домашнее задание

Решить уравнения (неравенства):

► **1.** $\sin x + \sin 9x = 2$

► **2.** $(\sin x - \sqrt{3}\cos x)\sin 3x = 2$

► **3.** $\cos x - \sin 3x = -2$

► **4.** $\sin x \sin 7x = 1$

► **5.** $\cos x \cos 6x = -1$

► **6.** $2\cos\frac{x}{2} = 1 - x - x^2$

► **7.** $\cos^7 x + \sin^4 x = 1$

► **8.** $\cos x + \cos y - \cos(x+y) = \frac{3}{2}$

► **9.** $\operatorname{tg}^4 x + \operatorname{tg}^4 y + 2\operatorname{ctg}^2 x \operatorname{ctg}^2 y = 3 + \sin^2(x+y)$

► **10.** $2^{|x|} = \sin(x^2)$

► **11.** $\operatorname{tg}^2(\pi(x+y)) + \operatorname{ctg}^2(\pi(x+y)) = \sqrt{\frac{2x}{x^2+1}} + 1$

► **12.** $\log_3|\pi x| + \log_{\pi x} 3 = \dfrac{2}{\sin^2(x+y) - 2\sin(x+y) + 2}$