одно из каждых семи последовательных значений b. Итого, для каждого значения а получаем по 100 вариантов.

2) Пусть a не делится на 5 (на отрезке $[1; 700]$ имеется $700 - 140 = 560$ таких значений a). Для каждого такого a подходят те и только те значения b, кратные 5, при которых сумма остатков от деления a на 7 и b на 7 равна 0 или 7, т. е. подходит одно из каждых $5 \cdot 7 = 35$ последовательных значений b. Итого, для каждого значения a получаем по 20 вариантов.

Суммируем количество пар: $100 \cdot 140 + 560 \cdot 20 = 25\,200$.

Пример 6. На клетчатой доске размера 22×25 (длина стороны клетки равна 1) требуется отметить тройку клеток так, чтобы центры этих клеток образовывали прямоугольный треугольник с катетами длины 7 и 4 (катеты параллельны краям доски). Сколькими способами это можно сделать?

Решение. Пусть сторона длины 25 — горизонтальная, сторона длины 22 — вертикальная. Дополним каждую нужную тройку клеток четвертой клеткой так, чтобы центры этих четырех клеток образовывали прямоугольник 4×7. Достаточно посчитать количество k таких четверок и результат умножить на 4.

Пусть катет длины 7 направлен по вертикали. Тогда положение прямоугольника однозначно определяется его левой нижней вершиной, которая может быть расположена в любой из $22 - 7 = 15$ нижних строк доски и в любом из $25 - 4 = 21$ левых столбцов доски. Итого $15 \cdot 21 = 315$ вариантов.

Если катет длины 7 направлен по горизонтали, то аналогично находим количество способов: $(25 - 7)(22 - 4) = 324$.

Итак, $k = 324 + 315 = 639$; в итоге получаем $4k = 2\,556$.

Задачи

1. Сколькими способами можно поставить рядом на полке четыре различные книги?
2. Сколько разных трехзначных чисел можно записать, используя цифры 6, 7 и 8?
3. Сколько пятизначных чисел, не содержащих одинаковые цифры, можно записать с помощью цифр 1, 2, 3, 4, 5 так, чтобы:
   1) последней была цифра 5;
   2) первой была цифра 2, а второй — цифра 3?
4. Сколько различных слов можно составить, переставляя местами буквы в слове «треугольник» (считая и само это слово)?
5. В классе изучают 9 предметов. Сколькими способами можно составить расписание на понедельник, если в этот день должно быть 6 разных предметов?
6. Сколькими способами из колоды в 36 карт можно выбрать две карты?
7. На окружности отмечено 12 точек. Сколько существует треугольников с вершинами в этих точках?

8. На плоскости имеется 15 точек, причем никакие три из них не лежат на одной прямой. Сколько различных отрезков можно построить, соединяя эти точки попарно?

Ответы

1. 24. 2. 27. 3. 1) 24; 2) 6.
4. P_{11}. 5. 60480.
6. 630. 7. 220. 8. 105.

§ 47. Разные задачи по алгебре

Примеры с решениями

Пример 1. Найти все значения a, при которых уравнение $\sin x = (4a-2)^2$ имеет корни, а числа $\dfrac{1-4a}{27a^4}$ являются целыми.

Решение. Уравнение $\sin x = (4a-2)^2$ имеет корни тогда и только тогда, когда $(4a-2)^2 \leqslant 1$, т. е. $\left|a-\dfrac{1}{2}\right| \leqslant \dfrac{1}{4}$, откуда $\dfrac{1}{4} \leqslant a \leqslant \dfrac{3}{4}$. Задача сводится к нахождению всех значений a, при которых функция $f(a) = \dfrac{1-4a}{27a^4}$ принимает целые значения на отрезке $\left[\dfrac{1}{4}, \dfrac{3}{4}\right]$.

Уравнение $f'(a) = \dfrac{1}{27}(-4a^{-5}+12a^{-4}) = \dfrac{4}{27}a^{-5}(3a-1) = 0$ имеет на отрезке $\left[\dfrac{1}{4}, \dfrac{3}{4}\right]$ единственный корень $a = \dfrac{1}{3}$, причем $f'(a) < 0$ при $a < \dfrac{1}{3}$ и $f'(a) > 0$ при $a > \dfrac{1}{3}$. Следовательно, функция $f(a)$ убывает при $a \in \left[\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{3}\right)$ и возрастает при $a \in \left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{3}{4}\right]$. Так как $f\left(\dfrac{1}{4}\right) = 0$ и $f\left(\dfrac{1}{3}\right) = -1$ — целые числа, а $-1 < f\left(-\dfrac{3}{4}\right) = -\dfrac{2^9}{3^7} < 0$, то искомое множество значений a состоит из чисел $\dfrac{1}{4}$ и $\dfrac{1}{3}$.

Ответ. $\dfrac{1}{4}$, $\dfrac{1}{3}$.

Пример 2. Доказать, что многочлен

$$P(x) = x^8 - x^5 + x^2 - x + 1$$

принимает положительные значения при всех $x \in \mathbf{R}$.

Решение. Докажем, что неравенство $P(x) > 0$ является верным на каждом из промежутков $x \leqslant 0$, $0 < x < 1$, $x \geqslant 1$.

1) Пусть $x \leqslant 0$, тогда $x^8 \geqslant 0$, $x^2 \geqslant 0$, $-x^5 \geqslant 0$, $-x \geqslant 0$ и поэтому $P(x) \geqslant 1$ при $x \leqslant 0$.