

является усилением ограничения $x \geq -\frac{3}{4}$. Система (11) таким образом равносильна системе

$$\begin{cases} -t^2 = \frac{9}{16} + 3x, \\ 3x = \frac{1}{16} - 3t + t^2, \\ x \geq -\frac{3}{8}, \\ t \leq 1. \end{cases} \quad (12)$$

Из первых двух уравнений системы (12) получаем уравнение относительно t :

$$2t^2 - 3t + \frac{5}{8} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t_1 = \frac{5}{4}, \quad t_2 = \frac{1}{4}.$$

Значение t_1 отпадает ввиду последнего ограничения системы (12), а значение t_2 даёт $x = -\frac{5}{24}$ и $y = \frac{3}{32}$.

ОТВЕТ: $(-\frac{5}{24}, \frac{3}{32})$.

6 Задачи

Во всех задачах, если не сказано иное, требуется решить уравнение или систему уравнений.

Учёт ОДЗ

1. (МГУ, социологич. ф-т, 1997) $\sqrt{-3x+3} = x-1$.

I

2. $\sqrt{x^2-x} + \sqrt{2-x-x^2} = \sqrt{x}-1$.

I

Равносильные преобразования

3. а) $\sqrt{x^2-7x+1} = \sqrt{2x^2-15x+8}$; б) $\sqrt{2x^2+x-4} = \sqrt{3x+3}$.

$\frac{z}{z^2+1} (g:z (e$

4. (МГУ, ф-т гос. управления, 2006) $\sqrt{x^4-10x^2+25} = \sqrt{x^4-4x^2+4}$.

$\frac{z}{z} \wedge \mp$

5. (МГУ, мехмат, 1980) $(x^2+x-6)\sqrt{x+1} = 0$.

$z \cdot 1 -$

6. (МГУ, экономич. ф-т, 1986) $\sqrt{3x+4}(9x^2+21x+10) = 0$.

$\frac{g}{z} - \frac{g}{z} -$

7. (МГУ, геологич. ф-т, 1983) $(x+1)\sqrt{x^2-3x-6} = 2x+2$.

$g \cdot z -$

8. (МГУ, ф-т почвоведения, 1997) $x = \sqrt{8x + 9}$.

6

9. (МГУ, географич. ф-т, 1993) $\sqrt{13 - 2x} = 5 - x$.

7

10. (МГУ, геологич. ф-т, 1996) $\sqrt{3x - 5} = x - 11$.

81

11. (МГУ, ИСАА, 1997) $\sqrt{3}(x + 2) - \sqrt{9 + 2x} = 0$.

$\frac{8}{1} -$

12. (МГУ, географич. ф-т, 2000) $\sqrt{3x + 2} = 2x - 4$.

$\frac{8}{19\sqrt{137}+61}$

13. (МГУ, экономич. ф-т, 2003) $\sqrt{5 + 8x - 4x^2} = 4x - 1$.

1

14. (МГУ, физический ф-т, 1988) $\sqrt{4 - 6x - x^2} = x + 4$.

1-

15. (МГУ, географич. ф-т, 1982) $x + \sqrt{2x^2 - 14x + 13} = 5$.

7-

16. (МГУ, ф-т психологии, 1996) $\sqrt{2x^2 - 21x + 4} = 2 - 11x$.

0

17. (МГУ, географич. ф-т, 1999) $\sqrt{2x^2 - 8x + 5} = x - 2$.

$\frac{8}{7} + 7$

18. (МГУ, физический ф-т, 1985) $\sqrt{x^4 - 2x - 5} = 1 - x$.

$\frac{8}{7} -$

19. (МГУ, ФНМ, 2001) $\frac{1}{2} - x^2 = \sqrt{\frac{1}{2} - x}$.

$\frac{7}{1-\frac{8}{7}}$

20. (МГУ, ВШБ, 2003) $22x^2 + 10x = \sqrt{1276x^3 + 364x^2}$.

7 ' 0

21. (МГУ, физический ф-т, 1999) $\sqrt{x + 2} \sqrt{2x + 1} = x + 4$.

$\frac{7}{29\sqrt{3}+8}$

22. (МГУ, ф-т почвоведения, 1998) $\sqrt{x+1} - \sqrt{4x-3} = 1.$

$\frac{6}{7}$

23. (МГУ, ф-т психологии, 2001) $\sqrt{x+2} + \sqrt{8-x} = \sqrt{15}.$

$\frac{7}{8\sqrt{5+9}}$

24. (МГУ, экономич. ф-т, 1982) $\sqrt{x+1} - \sqrt{2x-5} = \sqrt{x-2}.$

8

25. (МГУ, социологич. ф-т, 2003) $\sqrt{2x+3} + \sqrt{x-2} = \sqrt{3x+7}.$

8

26. (МГУ, физический ф-т, 2007) $\sqrt{x-2} - \sqrt{2x+2} = \sqrt{2x-5} - \sqrt{3x-1}.$

8

27. (МГУ, физический ф-т, 2000) $\frac{1}{\sqrt{x+2}} + \sqrt{x+2} = \sqrt{3x+1}.$

$\frac{7}{29\sqrt{1+1}}$

28. (МГУ, ф-т почвоведения, 2004) $\sqrt{x^2+5x+4} - \sqrt{x^2-x-6} = -\sqrt{2x^2+4x-2}.$

$\frac{4}{-}$

29. («Физтех», 2013, 10–11) Найдите сумму корней уравнения $\sqrt[3]{x+5} + \sqrt{3-x} = 2.$

91–

Замена переменной

30. (МГУ, филологич. ф-т, 2007) $-x - \sqrt{-x} = 10.$

$\frac{25}{-}$

31. (МГУ, МШЭ, 2006) $\sqrt{x+3} = 9 - x.$

9

32. (МГУ, химический ф-т, 1993) $\sqrt{x+4} = x + 2.$

0

33. (МГУ, химический ф-т, 1998) $7 - x = 3\sqrt{5-x}.$

$\frac{4}{1,1}$

34. (МГУ, социологич. ф-т, 1999) $\sqrt{x-1} = 6 - x.$

$\frac{2}{13-\sqrt{21}}$

35. (МГУ, геологич. ф-т, 1983) $(x+1)\sqrt{16x+17} = (x+1)(8x-23).$

$\frac{4}{1,1-}$

36. (МГУ, экономич. ф-т, 1983) $x^2 + \sqrt{x^2 + 11} = 31.$

57

37. (МГУ, геологич. ф-т, 1994) $x^2 + 2\sqrt{x^2 + 3x - 4} = 4 - 3x.$

41

38. (МГУ, экономич. ф-т, 2006) $2\sqrt{2x^2 - x + 8} = x - 2x^2 + 7.$

17

39. (МГУ, физический ф-т, 1999) $\sqrt{\frac{4}{x-2} + 1} = \frac{1}{x-2}.$

58

40. («Ломоносов», 2017, 10–11) $\sqrt{\sqrt{x+2} + \sqrt{x-2}} = 2\sqrt{\sqrt{x+2} - \sqrt{x-2}} + \sqrt{2}.$

16

41. («Покори Воробьёвы горы!», 2011, 10–11) $7x^2 + 20x - 14 = 5\sqrt{x^4 - 20x^2 + 4}.$

811

42. («Покори Воробьёвы горы!», 2015, 10–11) Решите уравнение

$$\left| x\sqrt{1-x^2} + x \right| = \sqrt{1+x^2}.$$

2

Двойная замена

43. (МГУ, ф-т почвоведения, 1998) $\sqrt{x+1} - \sqrt{5x-6} = 1.$

45

44. (МФТИ, 2001) $\sqrt{2x^2 - 8x + 25} - \sqrt{x^2 - 4x + 13} = 2.$

79

45. («Покори Воробьёвы горы!», 2011, 9–11) $\sqrt[3]{15x+1-x^2} + \sqrt[3]{x^2-15x+27} = 4.$

05

46. (МГУ, географич. ф-т, 1995) $\sqrt[4]{x - \frac{3}{2}} + \sqrt[4]{10 - x} = 2.$

23

47. (МГУ, химический ф-т, 2003)

$$\left(1 + \frac{1}{\sqrt{1-x}}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{\sqrt{1+x}}\right) \cdot (\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}) = 8.$$

0

48. (МГУ, ИСАА, 2005) $\sqrt{x+1} + \sqrt{x^2+4x+3} = \sqrt{(x+2)^3}.$

$\frac{7}{8-\sqrt{3}}$

49. (МГУ, химический ф-т, 2002) При каждом значении параметра a решить уравнение

$$\sqrt{-x^3 + (a-1)x^2 + (a-1)x + a} = 2x^2 + 3x + 2 - a.$$

Если $a \geq 0$, то $x = 1 \pm \sqrt{a}$; если $a > 0$, то решений нет

Умножение на сопряжённое

50. («Покори Воробьёвы горы!», 2018, 10–11) Решите уравнение

$$\frac{1}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x+3}} + \frac{1}{\sqrt{x+3} + \sqrt{x+4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{x+2017} + \sqrt{x+2018}} = 42.$$

2

51. (МГУ, геологич. ф-т, 1985)

$$\sqrt{3x^2 - 7x + 3} - \sqrt{x^2 - 2} = \sqrt{3x^2 - 5x - 1} - \sqrt{x^2 - 3x + 4}.$$

7

52. («Покори Воробьёвы горы!», 2012, 10–11)

$$\frac{27x-24}{2x+\sqrt{4x^2-3}} - \frac{36x-32}{\sqrt{4x^2-3}+\sqrt{4x^2+1}} = 9x^2 - 26x + 16.$$

$\frac{6}{8} \cdot \frac{3}{\sqrt{13}+2}$

Системы уравнений

53. (МГУ, ф-т психологии, 1981)

$$\begin{cases} x - y + \sqrt{x^2 - 4y^2} = 2, \\ x^5 \cdot \sqrt{x^2 - 4y^2} = 0. \end{cases}$$

$(\frac{3}{4}, \frac{3}{4}) ; (\frac{3}{4}, \frac{3}{4})$

54. (МГУ, геологич. ф-т, 1995)

$$\begin{cases} x^3 \cdot \sqrt{x-y} = 0, \\ 2y^2 + y = 21 + 2xy. \end{cases}$$

$$\left(\frac{z}{l} - '0 \right) : (1z '1z)$$

55. (МГУ, мехмат, 1980)

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + 4xy - 3y^2} = x + 1, \\ x - y = 1. \end{cases}$$

$$(1 'z)$$

56. (МГУ, химический ф-т, 1977)

$$\begin{cases} \sqrt{x+y-1} = 1, \\ \sqrt{x-y+2} = 2y-2. \end{cases}$$

$$\left(\frac{z}{8}, \frac{z}{1} \right)$$

57. (МГУ, геологич. ф-т, 1999)

$$\begin{cases} 4x + 5y = \sqrt{16x^2 - 25y^2}, \\ x^2 + 6x - 7 = 0. \end{cases}$$

$$\left(\frac{z}{8z} 'L- \right) : \left(\frac{z}{4} - '1 \right) : (0 '1)$$

58. (МГУ, ВШБ, 2004)

$$\begin{cases} \sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{y-2} = 1, \\ x + y - 20 = 0. \end{cases}$$

$$(6z '6-) : (9- '9z)$$

59. (МГУ, химический ф-т, 1991)

$$\begin{cases} \sqrt{2x-1} + \sqrt{y+3} = 3, \\ 2xy - y + 6x = 7. \end{cases}$$

$$\left(\overline{z} - ' \frac{z}{z} \right) : (1 '1)$$

60. (МГУ, физический ф-т, 2002)

$$\begin{cases} 5\sqrt{2x^2 - y^4} = 4x - 3y, \\ 4\sqrt{2x^2 - y^4} = 3x - 2y. \end{cases}$$

$$\left(\underline{z} \wedge ' \underline{z} \wedge z \right) : (0 '0)$$

61. (МГУ, физический ф-т, 2006)

$$\begin{cases} 3x + y + \sqrt{9x^2 - y^2} = 6, \\ y\sqrt{(3x + y)(3x - y)} = 2. \end{cases}$$

$$\left(\frac{8}{2\sqrt{17}}, \frac{6}{8} \right)$$

62. («Физтех», 2016, 9–11)

$$\begin{cases} 2x + \sqrt{2x + 3y} - 3y = 5, \\ 4x^2 + 2x + 3y - 9y^2 = 32. \end{cases}$$

$$\left(\frac{8}{9}, \frac{7}{11} \right)$$

63. («Физтех», 2016, 9–11) Найдите все пары *положительных* чисел (x, y) , удовлетворяющих системе уравнений

$$\begin{cases} y - 2\sqrt{xy} - \sqrt{\frac{y}{x}} + 2 = 0, \\ 3x^2y^2 + y^4 = 84. \end{cases}$$

$$\left(\frac{61}{48}\sqrt[3]{2}, \frac{92}{12}\sqrt[3]{2} \right); \left(8, \frac{8}{1} \right)$$

64. (МФТИ, 2002)

$$\begin{cases} \sqrt{x - 4y} - 2\sqrt{3y + x} = 1, \\ 7\sqrt{3y + x} + 22y + 5x = 13. \end{cases}$$

$$(8, -\frac{81}{1})$$

65. (МФТИ, 2005)

$$\begin{cases} 1 + xy = \frac{x^2y^2}{2x - y} + \frac{2x - y}{xy}, \\ \frac{2x - y}{xy}\sqrt{2x - y} = 4 - 3xy. \end{cases}$$

$$\left(\frac{8}{1}, -\frac{8}{1} \right); (1, 1)$$

66. (МФТИ, 2005)

$$\begin{cases} 1 + \frac{1}{\sqrt{x - 2y}} = \frac{xy}{x - 2y} + \frac{\sqrt{x - 2y}}{xy}, \\ xy\sqrt{\frac{xy}{x - 2y}} = 2 - \sqrt{x - 2y}. \end{cases}$$

$$\left(\frac{8}{1}, \frac{8}{1} \right); (1, -1)$$

67. («Ломоносов», 2013, 9)

$$\begin{cases} x^2 = 2\sqrt{y^2 + 1}, \\ y^2 = 2\sqrt{z^2 - 1} - 2, \\ z^2 = 4\sqrt{x^2 + 2} - 6. \end{cases}$$

$$\left(\left(\mathbb{Z}^{\wedge -} \cdot '0' \cdot \mathbb{Z}^{\wedge -} \right) ; \left(\mathbb{Z}^{\wedge} \cdot '0' \cdot \mathbb{Z}^{\wedge -} \right) ; \left(\mathbb{Z}^{\wedge -} \cdot '0' \cdot \mathbb{Z}^{\wedge} \right) ; \left(\mathbb{Z}^{\wedge} \cdot '0' \cdot \mathbb{Z}^{\wedge} \right) \right)$$

68. (МФТИ, 2003)

$$\begin{cases} 1 - 5y = \frac{x}{y} - 6\sqrt{x - y}, \\ \sqrt{x - \sqrt{x - y}} = x - 5y - 6. \end{cases}$$

$$\left(\left(\frac{\mathfrak{z}\mathfrak{z}}{622} \wedge \frac{\mathfrak{z}}{2} + \frac{\mathfrak{z}}{622} \right) ; (9, \mathfrak{z}\mathfrak{z}) \right)$$

69. («Физтех», 2014)

$$\begin{cases} 4x^2 + y^2 - 4xy = 4x - 2y + 3, \\ \sqrt{6x - 3y} = 2 - xy. \end{cases}$$

$$\left(\mathbb{Z}^{\wedge -} \cdot \frac{\mathbb{Z}}{\mathbb{I}} \right) ; (\mathbb{I}^{\wedge -} \cdot \mathbb{I})$$

70. («Физтех», 2008)

$$\begin{cases} x + \sqrt{\frac{x}{x - y}} = \frac{42}{x - y}, \\ xy - 4x = 9. \end{cases}$$

$$\left(\left(\frac{8\mathfrak{z}}{629} \wedge \frac{\mathfrak{z}}{214} - \frac{\mathfrak{z}}{9} \right) ; (\mathfrak{z}, 6) \right)$$

71. («Физтех», 2011)

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 - \frac{2}{3}y} = y - x, \\ \frac{9}{4}y^2 + x^3 = 2x + 1. \end{cases}$$

$$\left(\left(\frac{\mathfrak{z}}{627} - \frac{\mathfrak{z}}{111} \wedge \frac{\mathfrak{z}}{6} \right) ; \left(0, \frac{\mathfrak{z}}{9} \wedge \frac{\mathfrak{z}}{1} \right) ; (0, \mathbb{I}^{\wedge -}) \right)$$

72. («Физтех», 2010)

$$\begin{cases} \sqrt{25 - y^2} - \sqrt{25 - x^2} = 1, \\ \sqrt{25 - y^2} + \sqrt{25 - x^2} = x^2 - 2y^2 + 2y + 3. \end{cases}$$

$$\left(\mathbb{I}^{\wedge -} ; (9, \mathfrak{z} \wedge \mathfrak{z} \mp) ; (\mathfrak{z}, 4) ; (\mathbb{I}^{\wedge -} \cdot \mathbb{I}) \right)$$

73. («Физтех», 2009)

$$\begin{cases} \sqrt{\frac{4}{9}x^2 + \sqrt{x^2 - 9y^2}} = \frac{3}{4} - \frac{2}{3}x, \\ \sqrt{\frac{15}{16} - 2x - 4y} = 1 + 4y. \end{cases}$$

$$\left(\frac{9\mathbb{I}}{\mathbb{I}} - ; \frac{9\mathbb{I}}{\frac{9}{2}}\right)$$

74. («Физтех», 2012)

$$\begin{cases} 3x^2 + 11xy + 10y^2 + 10x + 20y = 0, \\ \sqrt{25 - y(3x + 5y + 10)} + \sqrt{y^2 - 10y + 30} = 5. \end{cases}$$

$$(\mathfrak{E}'\mathfrak{g}-) ; (L'\mathfrak{A}\mathbb{I}-)$$