

2. Рёбра правильного тетраэдра $ABCD$ равны 1. Точка P — середина ребра AB . Найдите расстояния: а) от точки P до прямой CD ; б) от точки A до плоскости BCD ; в) от точки P до плоскости ADC ; г) от центра грани ABC до плоскости BCD .

3. Все рёбра правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$ с вершиной S равны 1. Точка E — середина бокового ребра SC . Найдите расстояния: а) от точки A до прямой SC ; б) от точки E до прямой AB ; в) от точки E до прямой BD ; г) от точки A до плоскости BSD ; д) от точки S до плоскости BED .

4. Дана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$, все рёбра которой равны 1. Точка M — середина ребра BC . Найдите расстояния: а) от точки B до прямой AC_1 ; б) от точки A до прямой B_1C_1 ; в) от точки M до прямой A_1C_1 ; г) от точки A до плоскости BCA_1 ; д) от точки M до плоскости AB_1C_1 .

5. Дана правильная шестиугольная призма $ABCDEF A_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все рёбра которой равны 1. Найдите расстояния: а) от точки B до прямой A_1F_1 ; б) от точки B до прямой FE_1 ; в) от точки B до прямой AD_1 ; г) от точки A до прямой D_1F_1 ; д) от точки A до прямой B_1E ; е) от точки A до плоскости DEA_1 ; ж) от точки A до плоскости DEF_1 ; з) от точки A до плоскости BFE_1 ; и) от точки A до плоскости BFA_1 ; к) от точки A до плоскости CEF_1 .

6. Дана правильная шестиугольная пирамида $SABCDEF$ с вершиной S . Стороны основания равны 1, боковые рёбра равны 2. Точка G — середина ребра SC . Найдите расстояния: а) от точки S до прямой BF ; б) от точки B до прямой SA ; в) от точки F до прямой BG ; г) от точки A до прямой SD ; д) от точки A до прямой SC ; е) от точки A до плоскости SDE ; ж) от точки A до плоскости SBF ; з) от точки A до плоскости SCE .

Задачи на доказательство и вычисление

4.1. В правильной четырёхугольной призме $ABCD A_1B_1C_1D_1$ основание $ABCD$ — квадрат. Точка M — центр боковой грани BCC_1B_1 .

а) Докажите, что плоскость A_1D_1M делит диагональ AC_1 в отношении $2:1$, считая от точки A .

б) Найдите расстояние от точки M до прямой BD_1 , если сторона основания призмы равна 6, а боковое ребро равно 3.

4.2. Дана треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$ с основаниями ABC и $A_1B_1C_1$. Точка M — центр боковой грани BCC_1B_1 .

а) Постройте точку пересечения прямой A_1M с плоскостью ABC .

б) Найдите расстояние от точки M до прямой AB_1 , если призма прямая, ABC — прямоугольный треугольник с прямым углом C , а диагонали боковых граней AA_1B_1B и BB_1C_1C равны 17 и 15 соответственно.

4.3. Дана правильная шестиугольная призма $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$.

а) Докажите, что плоскость $CA_1 F_1$ делит ребро BB_1 пополам.

б) Найдите расстояние от точки C до прямой $A_1 F_1$, если стороны основания призмы равны 5, а боковые рёбра равны 11.

4.4. Дана правильная шестиугольная пирамида $SABCDEF$ с вершиной S .

а) Докажите, что плоскость α , проходящая через ребро AB и середину ребра SE , делит ребро SC в отношении $2:1$, считая от вершины S .

б) Найдите расстояние от точки S до плоскости α , если сторона основания пирамиды равна $2\sqrt{3}$, а угол между боковой гранью и плоскостью основания пирамиды равен 60° .

4.5. Основание пирамиды $DABC$ — прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C . Высота пирамиды проходит через середину ребра AC , а боковая грань ACD — равносторонний треугольник.

а) Докажите, что сечение пирамиды плоскостью, проходящей через ребро BC и произвольную точку M ребра AD , — прямоугольный треугольник.

б) Найдите расстояние от вершины D до этой плоскости, если M — середина ребра AD , а высота пирамиды равна 6.

4.6. Основание пирамиды $SABCD$ — прямоугольник $ABCD$. Высота SH пирамиды лежит в плоскости CSD .

а) Докажите, что сечение пирамиды плоскостью, проходящей через ребро BC и произвольную точку M ребра SA , отличную от S и A , — прямоугольная трапеция.

б) Найдите расстояние от вершины S до этой плоскости, если H — середина ребра CD , M — середина ребра SA , $SC = CD$ и $SH = 2\sqrt{3}$.

4.7. Основание пирамиды $SABCD$ — квадрат $ABCD$. Боковое ребро SD перпендикулярно плоскости основания. Точка M — середина высоты пирамиды.

а) Докажите, что прямая SB параллельна плоскости ACM .

б) Найдите расстояние от точки B до плоскости ACM , если $AB = 8$, а угол между плоскостью ACM и плоскостью основания пирамиды равен 45° .

4.8. Основание пирамиды $SABCD$ — прямоугольник $ABCD$. Боковое ребро SD перпендикулярно плоскости основания.

а) Докажите, что прямые SC и AD перпендикулярны.

б) Пусть M — середина высоты пирамиды. Найдите расстояние от точки B до плоскости ACM , если $AB = 8$, $BC = 6$, а синус угла между плоскостью ACM и плоскостью основания пирамиды равен $\frac{5}{6}$.

4.9. Основание шестиугольной пирамиды $SAB CDEF$ — правильный шестиугольник $ABCDEF$. Высота пирамиды втрое больше стороны основания и проходит через точку E .

а) Докажите, что угол между боковой гранью ASB и плоскостью основания равен 60° .

б) Найдите расстояние от точки C до плоскости ASB , если сторона основания пирамиды равна 4.

4.10. Основание шестиугольной призмы $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ — правильный шестиугольник $ABCDEF$ с центром O . Отрезок OA_1 — высота призмы.

а) Докажите, что плоскость $FF_1 E$ перпендикулярна плоскости основания призмы.

б) Найдите расстояние от точки A до плоскости BCC_1 , если сторона основания призмы равна $2\sqrt{3}$.

4.11. Дана правильная шестиугольная призма $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$.

а) Докажите, что плоскость ADC_1 перпендикулярна плоскости FBB_1 .

б) Найдите расстояние от точки C до плоскости ADC_1 , если $AA_1 = 4$, а косинус угла между прямой AC_1 и плоскостью ABC равен $\frac{3}{\sqrt{13}}$.

4.12. Дана правильная четырёхугольная призма $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ со стороной основания $\sqrt{2}$ и боковым ребром 2. Точки M и N — середины рёбер $A_1 B_1$ и CC_1 соответственно.

а) Докажите, что $MN \perp BC_1$.

б) Найдите расстояние от точки M до плоскости $BC_1 D$.

4.13. Основание пирамиды $SABCD$ — равнобедренная трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC , причём $AD = 2BC = 2AB$. Высота SH пирамиды проходит через точку пересечения прямых AB и CD .

а) Докажите, что треугольник SBD прямоугольный.

б) Найдите расстояние от точки C до плоскости ASD , если $SH = BC = 4$.

4.14. Основание пирамиды $SABCD$ — прямоугольная трапеция $ABCD$ с большим основанием AD и прямым углом D . Высота SH пирамиды проходит через точку пересечения прямых AB и CD .

а) Докажите, что грань ASD — прямоугольный треугольник.

б) Найдите расстояние от точки B до плоскости ASD , если $AD = 3BC = 3$, $\angle BAD = 45^\circ$ и $SH = 4$.

4.15. Боковые рёбра пирамиды $SABC$ с вершиной S попарно перпендикулярны.

а) Докажите, что высота SH пирамиды проходит через точку пересечения высот основания ABC .

б) Найдите SH , если боковые рёбра равны 2, 2 и $7\sqrt{2}$.

4.16. Боковые рёбра пирамиды $SABC$ с вершиной S попарно перпендикулярны, M — произвольная точка на ребре BC .

а) Докажите, что плоскости AMS и BSC перпендикулярны.

б) Высота SH пирамиды равна 12. Прямая AH пересекает ребро BC в точке K . Найдите расстояние от точки K до прямой AS , если $AS = 20$.

4.17. Плоскость проходит через середины боковых рёбер DA и DC треугольной пирамиды $DABC$ и точку пересечения медиан основания ABC .

а) Постройте точку пересечения этой плоскости с прямой DB .

б) Найдите расстояние от точки A до этой плоскости, если все рёбра пирамиды равны $3\sqrt{6}$.

4.18. Плоскость проходит через середины сторон AD и BC основания $ABCD$ правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$ и точку пересечения медиан боковой грани CSD .

а) Постройте точку пересечения прямой AS с этой плоскостью.

б) Найдите расстояние от точки B до этой плоскости, если все рёбра пирамиды равны $2\sqrt{3}$.

4.19. Все грани параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — равные ромбы, причём плоские углы при вершине C острые.

а) Докажите, что $AA_1 \perp BD$.

б) Найдите расстояние от вершины C до плоскости $A_1 B_1 C_1$, если плоские углы при вершине C равны 60° , а $AA_1 = \sqrt{6}$.

4.20. Основание наклонной призмы $ABCA_1 B_1 C_1$ — равносторонний треугольник ABC . Боковые грани $AA_1 B_1 B$ и $AA_1 C_1 C$ — равные ромбы с острым углом при общей вершине A .

а) Докажите, что боковая грань $BB_1 C_1 C$ — квадрат.

б) Найдите расстояние от вершины A до плоскости $BB_1 C_1$, если $\angle CAA_1 = 60^\circ$, а сторона основания призмы равна $\sqrt{2}$.

4.21. Основание пирамиды $SABCD$ — параллелограмм $ABCD$. Боковые рёбра SA и SD равны. Точка M лежит на боковом ребре SC и не совпадает с его концами. Плоскость α проходит через точку M параллельно прямым BC и SA .

а) Докажите, что сечение пирамиды плоскостью α — равнобедренная трапеция.

б) Найдите расстояние от точки A до плоскости α , если боковая сторона этой трапеции равна меньшему основанию, а все рёбра пирамиды равны 1.

4.22. Точка K лежит на стороне AB основания $ABCD$ правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$, все рёбра которой равны. Плоскость α проходит через точку K параллельно плоскости ASD . Сечение пирамиды плоскостью α — четырёхугольник, в который можно вписать окружность.

а) Докажите, что $BK = 2AK$.

б) Найдите расстояние от вершины S до плоскости α , если все рёбра пирамиды равны 1.

4.23. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ сторона основания AB равна 6, а боковое ребро AA_1 равно 3. На ребре B_1C_1 отмечена точка L так, что $B_1L = 1$. Точки K и M — середины рёбер AB и A_1C_1 соответственно. Плоскость γ параллельна прямой AC и содержит точки K и L .

а) Докажите, что прямая BM перпендикулярна плоскости γ .

б) Найдите объём пирамиды, вершина которой — точка M , а основание — сечение данной призмы плоскостью γ .

4.24. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ сторона основания AB равна 16, а высота пирамиды равна 4. На рёбрах AB , CD и AS отмечены точки M , N и K соответственно, причём $AM = DN = 4$ и $AK = 3$.

а) Докажите, что плоскости MNK и SBC параллельны.

б) Найдите расстояние от точки K до плоскости SBC .