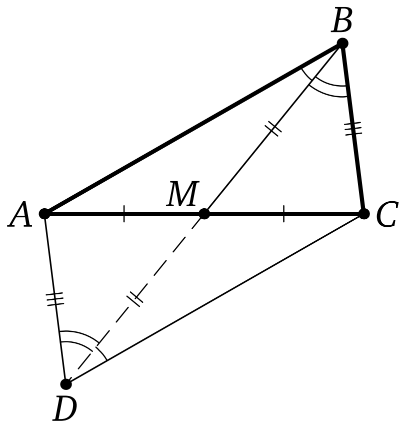
§ 2. Удвоение медианы

Решение задачи 2 из диагностической работы

2. В треугольнике ABC проведена медиана BM. Известно, что $\frac{\sin\angle ABM}{\sin\angle CBM}=\frac{1}{2}$. Найдите отношение $\frac{BC}{AB}$.

Ответ: $\frac{1}{2}$.



Р е ш е н и е. На продолжении медианы BM за точку M отложим отрезок MD, равный BM. Диагонали AC и BD четырёхугольника $ABCD$ делятся точкой пересечения M пополам, значит, $ABCD$ — параллелограмм. Поэтому

$$AD = BC \quad \text{и} \quad \angle ADB = \angle CBM.$$

По теореме синусов из треугольника ABD находим, что

$$\frac{AD}{AB}=\frac{\sin\angle ABD}{\sin\angle ADB}=\frac{\sin\angle ABM}{\sin\angle CBM}=\frac{1}{2}.$$

Следовательно, $\frac{BC}{AB}=\frac{AD}{AB}=\frac{1}{2}$. ◁

* * *

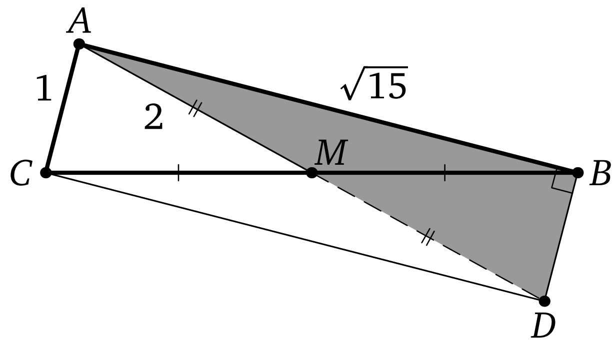
Во многих случаях для решения задачи удобно применить такое дополнительное построение, мы будем называть его удвоением медианы.

На продолжении медианы AM треугольника ABC за точку M отложим отрезок MD, равный AM. Тогда диагонали AD и BC четырёхугольника $ABDC$ точкой пересечения M делятся пополам, значит, $ABDC$ — параллелограмм. Далее применяем свойства параллелограмма.

Пример 1. Найдите площадь треугольника, если две его стороны равны 1 и $\sqrt{15}$, а медиана, проведённая к третьей, равна 2.

Ответ: $\frac{\sqrt{15}}{2}$.

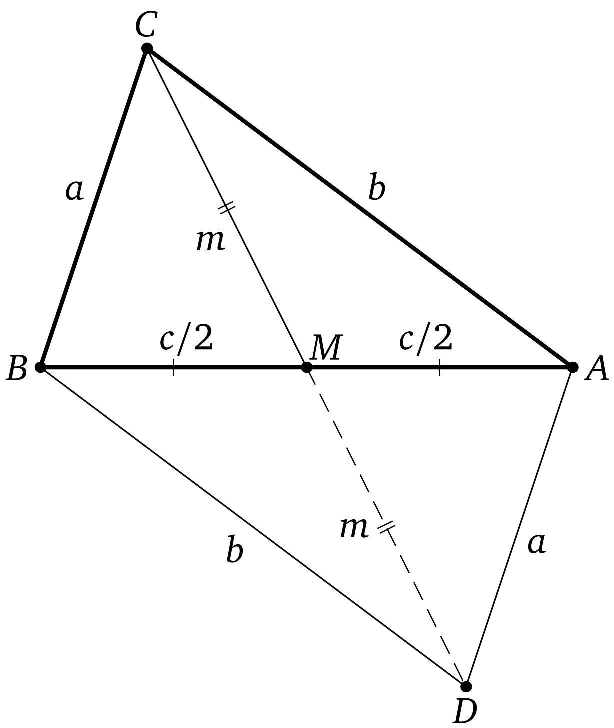
Р е ш е н и е. Пусть AM — медиана треугольника ABC, $AM=2$, $AB=\sqrt{15}$, $AC=1$. На продолжении медианы AM за точку M отложим отрезок MD, равный AM. Тогда $ABDC$ — параллелограмм, поэтому $BD=AC=1$.



Треугольник ABD прямоугольный, так как $AD^2 = AB^2 + BD^2$. Следовательно,

$$S_{\Delta ABC} = S_{\Delta ABD} = \frac{\sqrt{15}}{2}. \qquad \lhd$$

Пример 2. Стороны треугольника равны a, b, c. Докажите, что медиана, проведённая к стороне c, равна $\frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}$.



Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$ — стороны треугольника ABC; $CM = m$ — медиана треугольника.

На продолжении медианы CM за точку M отложим отрезок MD, равный CM. Тогда $ACBD$ — параллелограмм. Поэтому

$$CD^2 + AB^2 = 2(AC^2 + BC^2), \quad \text{или} \quad 4m^2 + c^2 = 2(a^2 + b^2).$$

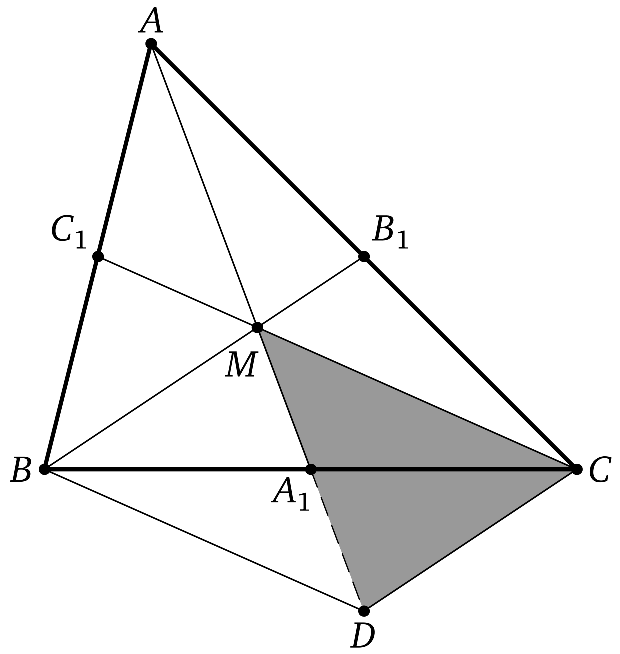
Отсюда находим, что

$$m^2 = \frac{1}{4}(2a^2 + 2b^2 - c^2). \qquad \square$$

Пример 3. Площадь треугольника ABC равна S. Найдите площадь треугольника, стороны которого равны медианам треугольника ABC.

Ответ: $\frac{3}{4}S$.

Р е ш е н и е. Пусть M — точка пересечения медиан треугольника ABC, A_1, B_1, C_1 — середины сторон BC, AC и AB соответственно, S — площадь треугольника ABC, S' — площадь треугольника, составленного из медиан треугольника ABC.



На продолжении медианы MA_1 треугольника BMC за точку A_1 отложим отрезок A_1D, равный MA_1. Медианы треугольника делятся их точкой пересечения в отношении $2:1$, считая от вершины, поэтому $MD = 2A_1M = AM = \frac{2}{3}AA_1$. Четырёхугольник $MBDC$ — параллелограмм, поэтому $CD = BM = \frac{2}{3}BB_1$. Кроме того, $CM = \frac{2}{3}CC_1$.

Таким образом, треугольник, составленный из медиан треугольника ABC, подобен треугольнику MDC, причём коэффициент подобия равен $\frac{3}{2}$, значит, $S' = \frac{9}{4}S_{\Delta MDC}$.

Известно, что медианы разбивают треугольник на шесть равновеликих треугольников, поэтому

$$S_{\Delta A_1MC} = \frac{1}{6}S, \quad \text{а} \quad S_{\Delta MDC} = 2S_{\Delta A_1MC} = \frac{1}{3}S.$$

Следовательно,

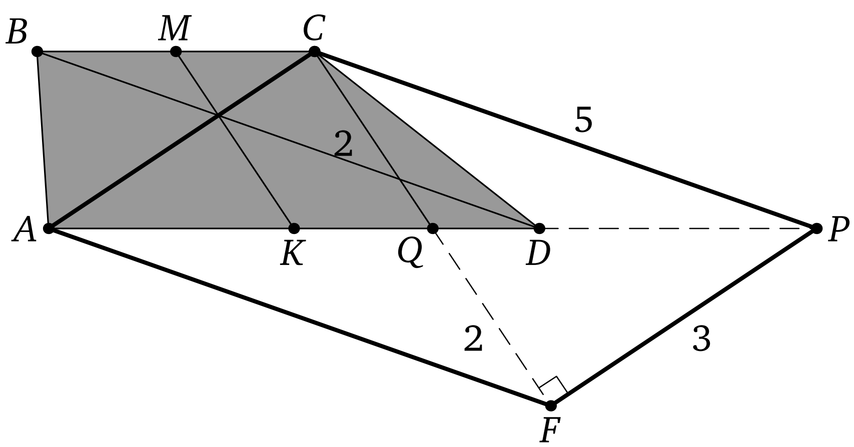
$$S' = \frac{9}{4}S_{\Delta MDC} = \frac{9}{4}\cdot\frac{1}{3}S = \frac{3}{4}S. \qquad \triangleleft$$

Пример 4. Диагонали трапеции равны 3 и 5, а отрезок, соединяющий середины оснований, равен 2. Найдите площадь трапеции.

Ответ: 6.

Решение. Пусть M и K — середины оснований BC и AD трапеции $ABCD$, $AC=3$, $BD=5$. Через вершину C меньшего основания BC проведём прямую, параллельную диагонали BD, до пересечения с прямой AD в точке P и прямую, параллельную MK, до пересечения с прямой AD в точке Q. Тогда

$$AQ = AK + KQ = AK + MC = \frac{1}{2}AD + \frac{1}{2}BC = \\ = \frac{1}{2}(AD+BC) = \frac{1}{2}(AD+DP) = \frac{1}{2}AP,$$



поэтому CQ — медиана треугольника ACP. Теперь известно, что

$$CQ = MK = 2, \quad AC = 3, \quad CP = BD = 5, \quad S_{ABCD} = S_{\Delta ACP}.$$

На продолжении медианы CQ за точку Q отложим отрезок QF, равный CQ. Стороны треугольника CFP равны:

$$CF = 2CQ = 4, \quad CP = BD = 5, \quad FP = AC = 3.$$

Этот треугольник прямоугольный ($CP^2 = CF^2 + PF^2$), поэтому

$$S_{\Delta CFP} = \frac{1}{2} \cdot CF \cdot PF = 6.$$

Следовательно,

$$S_{ABCD} = S_{\Delta ACP} = S_{\Delta CFP} = 6.$$

(Кстати, отрезок MK проходит через точку пересечения диагоналей трапеции, но это нам не понадобилось.) ◁

Подготовительные задачи

2.1. Медиана AM треугольника ABC равна m и образует со сторонами AB и AC углы α и β соответственно. Найдите эти стороны.

2.2. В треугольнике ABC известно, что BD — медиана, $BD=AB\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}$, а $\angle DBC=90^\circ$. Найдите угол ABD.

2.3. Найдите площадь треугольника, если две его стороны равны 27 и 29, а медиана, проведённая к третьей, равна 26.

2.4. Стороны треугольника равны 11, 13 и 12. Найдите медиану, проведённую к большей стороне.

2.5. В треугольнике две стороны равны 11 и 23, а медиана, проведённая к третьей, равна 10. Найдите третью сторону.

2.6. В равнобедренном треугольнике с боковой стороной, равной 4, проведена медиана к боковой стороне. Найдите основание треугольника, если медиана равна 3.

2.7. Основание равнобедренного треугольника равно $4\sqrt{2}$, а медиана, проведённая к боковой стороне, равна 5. Найдите боковые стороны.

2.8. В треугольнике ABC известны стороны $AB=2$ и $AC=4$ и медиана $AM=\sqrt{7}$. Найдите угол BAC.

2.9. В треугольнике ABC отрезок AD — медиана, $AD=m$, $AB=a$, $AC=b$. Найдите угол BAC.

Тренировочные задачи

2.10. Две стороны треугольника равны 10 и 12, а медиана, проведённая к третьей, равна 5. Найдите площадь треугольника.

2.11. Найдите площадь треугольника, медианы которого равны 3, 4 и 5.

2.12. Найдите площадь треугольника, медианы которого равны 10, 10 и 16.

2.13. Найдите площадь треугольника, медианы которого равны 12, 15 и 21.

2.14. Медиана AD и высота CE равнобедренного треугольника ABC ($AB=BC$) пересекаются в точке P. Найдите площадь треугольника ABC, если $CP=5$, $PE=2$.

2.15. Медиана AM и биссектриса CD прямоугольного треугольника ABC ($\angle B=90^\circ$) пересекаются в точке O. Найдите площадь треугольника ABC, если $CO=9$, $OD=5$.

2.16*. Внутри прямоугольного треугольника ABC с прямым углом при вершине C отмечена точка O, причём $OA=OB=b$. Известно также, что CD — высота треугольника ABC, точка E — середина отрезка OC, $DE=a$. Найдите CE.

Задачи на доказательство и вычисление

2.17.1. Медиана AM треугольника ABC продолжена за точку M на расстояние $MD=AM$.

а) Докажите, что $CD=AB$.

б) Найдите площадь треугольника ABC, если $AB=10$, $AC=12$, $AM=5$.

2.17.2. Медиана CK треугольника ABC продолжена за точку K на расстояние $KM=CK$.

а) Докажите, что $AM \parallel BC$.

б) Найдите площадь треугольника ABC, если $AC=10$, $BC=24$, $CK=13$.

2.18.1. В треугольнике ABC высота BD равна 6, медиана CE равна 5, расстояние от точки пересечения отрезков BD и CE до стороны AC равно 1.

а) Докажите, что $CD:AD=1:4$.

б) Найдите площадь треугольника AEC.

2.18.2. В треугольнике ABC высота AH равна 30, медиана BM равна 25, расстояние от точки пересечения отрезков BM и AH до стороны BC равно 6.

а) Докажите, что $BH:CH=1:3$.

б) Найдите площадь треугольника AMB.

2.19.1. Дан треугольник ABC со сторонами $AB=3$, $AC=\sqrt{73}$ и медианой $AM=4$.

а) Докажите, что медиана AM перпендикулярна стороне AB.

б) Найдите высоту треугольника ABC, проведённую из вершины A.

2.19.2. Дан треугольник ABC со сторонами $AB=14$, $BC=8$ и медианой $BM=9$.

а) Докажите, что треугольник ABC равнобедренный.

б) Найдите высоту треугольника ABC, проведённую из вершины B.

2.20.1. На сторонах AC и BC треугольника ABC вне треугольника построены квадраты $ACDE$ и $BFKC$. Точка M — середина стороны AB.

а) Докажите, что $CM=\frac{1}{2}DK$.

б) Найдите расстояния от точки M до центров квадратов, если $AC=6$, $BC=10$ и $\angle ACB=30^\circ$.

2.20.2. На сторонах AC и BC треугольника ABC вне треугольника построены квадраты $ACDE$ и $BFKC$. Точка L — середина отрезка DK.

а) Докажите, что $CL=\frac{1}{2}AB$.

б) Найдите расстояние между центрами квадратов, если $AC=2\sqrt{2}$, $BC=3\sqrt{6}$ и $\angle ACB=60^\circ$.

2.21.1. В трапеции $ABCD$ основания BC и AD относятся как $1:2$. Пусть K — середина диагонали AC. Прямая DK пересекает сторону AB в точке L.

а) Докажите, что $AL=2BL$.

б) Найдите площадь четырёхугольника $BCKL$, если площадь трапеции $ABCD$ равна 9.

2.21.2. В трапеции $ABCD$ основания BC и AD относятся как $1:3$. Пусть M — середина боковой стороны CD. Прямая AM пересекает диагональ BD в точке P.

а) Докажите, что $BP:PD=4:3$.

б) Найдите площадь четырёхугольника $BCMP$, если площадь трапеции $ABCD$ равна 56.

2.22.1. Медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. Известно, что $AC=3MB$.

а) Докажите, что треугольник ABC прямоугольный.

б) Найдите сумму квадратов медиан AA_1 и CC_1, если $AC=30$.

2.22.2. Медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. Известно, что $AC=6MB_1$.

а) Докажите, что треугольник ABC прямоугольный.

б) Найдите сумму квадратов медиан AA_1 и CC_1, если $AC=12$.

2.23.1. Медиана AM и высота CH равнобедренного треугольника ABC $(AB=BC)$ пересекаются в точке K. Известно, что $CK=5$, $KH=1$.

а) Докажите, что $AH:BH=1:4$.

б) Найдите площадь треугольника ABC.

2.23.2. Медиана GA и высота HB остроугольного равнобедренного треугольника FGH $(FG=FH)$ пересекаются в точке C. Известно, что $FG=20$, $CH=10$.

а) Докажите, что $\operatorname{tg}\angle AGF=\frac{CH}{FG}$.

б) Найдите площадь треугольника FGH.

2.24.1. В треугольнике ABC биссектриса BE и медиана AD перпендикулярны.

а) Докажите, что $CE = 2AE$.

б) Найдите стороны треугольника ABC, если $BE = AD = 8$.

2.24.2. В треугольнике ABC сторона AB вдвое больше стороны AC.

а) Докажите, что медиана CM перпендикулярна биссектрисе AK.

б) Найдите сторону BC, если $AC = 5$, $AK = 4$.