

Учитывая неравенство  $z \leq 3$  данной системы, получим, что  $0 \leq z \leq 3$ . Но поскольку  $z \leq 0$  или  $z \geq 3$ , переменная  $z$  может принимать только два значения:  $z = 0$  или  $z = 3$ . Рассмотрим оба этих случая. При  $z = 0$  первое уравнение данной системы приводится к виду  $x^2 - 2x + 1 = 0$ , или  $(x - 1)^2 = 0$ , откуда  $x = 1$ . Третье уравнение системы принимает при этом вид  $y^2 = 0$ , откуда  $y = 0$ . При  $x = 1$  и  $y = 0$  второе уравнение данной системы, очевидно, выполнено. Значит, тройка чисел  $(1; 0; 0)$  является решением системы. При  $z = 3$  первое уравнение данной системы принимает вид  $(2 - x)(3x - 6) = 0$ , откуда  $x = 2$ . Тогда второе уравнение системы принимает вид  $y^2 + 3y = 0$ , откуда  $y = 0$  или  $y = -3$ , а третье уравнение принимает вид  $y^2 = 9$ , откуда  $y = \pm 3$ . Значит,  $y = -3$ , и тройка чисел  $(2; -3; 3)$  — второе решение системы.

Ответ:  $(1; 0; 0); (2; -3; 3)$ .

### Упражнения к § 2.1

1. а) Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых больший корень уравнения

$$x^2 - (6a - 1)x + 9a^2 - 3a = 0$$

в 9 раз больше, чем его меньший корень.

б) Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых меньший корень уравнения

$$x^2 - (8a - 3)x + 16a^2 - 12a = 0$$

в 10 раз меньше, чем его больший корень.

2. а) Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых больший корень уравнения

$$x^2 - (10a - 19)x + 25a^2 - 95a + 90 = 0$$

меньше 7.

б) Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых больший корень уравнения

$$x^2 - (4a - 7)x + 4a^2 - 14a + 12 = 0$$

меньше  $-4$ .

3. а) Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых уравнение  $(x + 2a)^2 + (x - 6a)^2 = 200$  имеет два различных корня, среднее арифметическое которых равно 2.

б) Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых уравнение  $(x - 2a)^2 + (x - 4a)^2 = 242$  имеет два различных корня, среднее арифметическое которых равно  $-3$ .

4. а) Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых отношение дискриминанта уравнения  $ax^2 + x + 2 = 0$  к квадрату разности его корней равно  $8 - 2a$ .

б) Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых отношение дискриминанта уравнения  $ax^2 - x + 4 = 0$  к квадрату разности его корней равно  $4a + 12$ .

5. а) Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых уравнение  $(a - 2)x^2 - 2(a - 2)x + 3 = 0$  имеет единственный корень.

б) Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых уравнение  $(a + 3)x^2 - 2(a + 3)x - 5 = 0$  имеет единственный корень.

6. а) Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых уравнение  $ax^2 + 4x + a = 3$  имеет более одного корня.

б) Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых уравнение  $ax^2 + 6x + a = 8$  имеет более одного корня.

7. а) Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых уравнение

$$(ax^2 - (a^2 + 16)x + 16a)\sqrt{x + 5} = 0$$

имеет ровно два различных корня.

б) Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых уравнение

$$(ax^2 - (a^2 + 9)x + 9a)\sqrt{x + 4} = 0$$

имеет ровно два различных корня.

8. а) Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых неравенство

$$(a^2 - 1)x^2 + 2(a - 1)x + 1 > 0$$

выполнено при любом значении  $x$ .

б) Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых неравенство

$$(a^2 - 4)x^2 + 2(a + 2)x - 1 < 0$$

выполнено при любом значении  $x$ .

9. а) Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых модуль разности корней уравнения  $x^2 - 6x + a^2 - 4a + 12 = 0$  принимает наибольшее возможное значение.

б) Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых модуль разности корней уравнения  $x^2 + 4x - a^2 + 6a - 7 = 0$  принимает наименьшее возможное значение.

10. а) Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых уравнение  $x^2 + 2(a^2 + 7a + 3)x + 9 = 0$  имеет два различных положительных корня.

б) Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых уравнение  $x^2 + 2(a^2 - 6a - 3)x + 16 = 0$  имеет два различных отрицательных корня.

11. а) Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых уравнение  $ax^2 - (a + 1)x + 2a^2 - 5a - 3 = 0$  имеет два корня разных знаков.

б) Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых уравнение  $(a^2 - a - 2)x^2 - x + a^2 + a - 2 = 0$  имеет два корня разных знаков.

12. а) Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых уравнение

$$4 \cos^4 3x - 4(a - 3) \cos^2 3x - 2a + 5 = 0$$

имеет хотя бы один корень.

б) Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых уравнение

$$4 \sin^4 5x - 4(a + 1) \sin^2 5x - 2a - 3 = 0$$

имеет хотя бы один корень.

13. а) Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых уравнение  $\cos^4 x - (a + 2) \cos^2 x - a - 3 = 0$  имеет хотя бы один корень, и укажите корни уравнения для каждого из найденных значений  $a$ .

б) Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых уравнение  $\sin^4 x + (a - 6) \sin^2 x - 4a + 8 = 0$  имеет хотя бы один корень, и укажите корни уравнения для каждого из найденных значений  $a$ .

14. а) Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых уравнение

$$\cos 14x + 2(5a + 9) \sin 7x - 110a + 43 = 0$$

имеет хотя бы один корень.

б) Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых уравнение

$$\cos 18x + 4(a - 1) \sin 9x - 20a + 69 = 0$$

имеет хотя бы один корень.

15. а) Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых уравнение  $\cos 2x - 2(a + 1) \cos x - 4a - 11 = 0$  имеет хотя бы один корень, и укажите корни уравнения для каждого из найденных значений  $a$ .

б) Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых уравнение  $\cos 2x + (2a + 9) \sin x - 5a - 11 = 0$  имеет хотя бы один корень, и укажите корни уравнения для каждого из найденных значений  $a$ .

16. а) Для каждого значения параметра  $a$  найдите корни уравнения  $\arcsin((a-1)x-1-(a-1)x^2) + \arcsin x = 0$ .

б) Для каждого значения параметра  $a$  найдите корни уравнения  $\arccos(ax^2 - (a+1)x + 2) + \arccos(-x) = \pi$ .

17. а) Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых уравнение  $\frac{2x^2-6x+3}{x^2-3x+4} = a+1$  имеет хотя бы один корень.

б) Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых уравнение  $\frac{x^2-4x+3}{x^2-4x+7} = \frac{a+2}{3}$  имеет хотя бы один корень.

18. а) Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых уравнение  $\frac{(2a+1)x^2-2(a+5)x+18a+9}{x^2-5x+9} = 3a$  имеет хотя бы один корень.

б) Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых уравнение  $\frac{(a+1)x^2+(5a+4)x+9a+9}{x^2+5x+9} = 2a$  имеет хотя бы один корень.

19. а) Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых прямая  $y = a$  имеет хотя бы одну общую точку с графиком функции  $y = \frac{\operatorname{tg}^2 x + 11}{3 \operatorname{tg} x - 1}$ .

б) Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых прямая  $y = a$  имеет хотя бы одну общую точку с графиком функции  $y = \frac{\operatorname{tg}^2 x + 14}{4 \operatorname{tg} x + 1}$ .

20. а) Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых уравнение  $16^x + (3a^2 + 5a + 7) \cdot 4^x - 2a + 3 = 0$  имеет единственный корень.

б) Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых уравнение  $49^x + (3a^2 - a + 3) \cdot 7^x - a - 2 = 0$  имеет единственный корень.

21. а) Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых уравнение  $36^x - (8a - 1) \cdot 6^x + 16a^2 - 4a - 2 = 0$  имеет единственный корень.

б) Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых уравнение  $25^x - (8a + 5) \cdot 5^x + 16a^2 + 20a - 14 = 0$  имеет единственный корень.

22. а) Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых неравенство  $4^x - (3a - 1) \cdot 2^x + 2a^2 + a - 6 \leq 0$  имеет единственное решение.

б) Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых неравенство  $9^x - (3a - 5) \cdot 3^x + 2a^2 - 6a + 4 \leq 0$  имеет единственное решение.

**23. а)** Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых один из корней уравнения  $16^x - (4^{a+3} + 16^{a+1}) \cdot 4^x + 4^{3a+5} = 0$  больше другого в три раза.

**б)** Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых один из корней уравнения  $25^x - (125^{a-1} + 5^{2a-3}) \cdot 5^x + 5^{5a-6} = 0$  больше другого в два раза.

**24. а)** Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых уравнение  $\log_{14}^2 x - (18a + 5) \log_{14} x + 81a^2 + 45a + 6 = 0$  имеет два различных корня, среднее арифметическое которых равно 105.

**б)** Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых уравнение  $\log_{16}^2 x - (16a + 19) \log_{16} x + 64a^2 + 152a + 90 = 0$  имеет два различных корня, среднее арифметическое которых равно 8,5.

**25. а)** Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых неравенство  $a \log_3^2 x - (a - 2) \log_3 x - 2 \geq 0$  имеет единственное решение.

**б)** Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых неравенство  $a \log_5^2 x - (a + 3) \log_5 x + 3 \leq 0$  имеет единственное решение.

**26. а)** Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых система уравнений

$$\begin{cases} x - 3y = -1, \\ x^2 + 6xy + 9y^2 - 10ax - 30ay + 125a^2 + 60a + 9 = 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

**б)** Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых система уравнений

$$\begin{cases} x + 5y = 3, \\ x^2 + 8xy + 16y^2 - 8ax - 32ay + 25a^2 + 12a + 4 = 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

**27. а)** Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых при любом значении параметра  $b$  система уравнений

$$\begin{cases} x + az^2 = by, \\ 2bx + (b - 6)y = 8z + 8 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение  $(x; y; z)$ .

**б)** Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых при любом значении параметра  $b$  система уравнений

$$\begin{cases} 2bx + y = a, \\ (b - 1)x + z^2 + z = by \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение  $(x; y; z)$ .

**28. а)** Найдите наибольшее значение параметра  $a$ , для которого существует хотя бы одна пара  $(x; y)$  таких чисел  $x$  и  $y$ , что

$$x^2 + 2y^2 + xy - ax + ay + a^2 \leq 3.$$

**б)** Найдите наименьшее значение параметра  $a$ , для которого существует хотя бы одна пара  $(x; y)$  таких чисел  $x$  и  $y$ , что

$$2x^2 + 2y^2 + xy - ax + ay + a^2 \leq 2.$$

**29. а)** Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых существует хотя бы одна пара  $(x; y)$  таких чисел  $x$  и  $y$ , что

$$x^2 - 4xy + 6y^2 + 2y + 2y \sin(\pi a) + \sin^2(\pi a) + 1 = 0.$$

**б)** Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых существует хотя бы одна пара  $(x; y)$  таких чисел  $x$  и  $y$ , что

$$11x^2 + 6xy + y^2 - 2x - 2x \operatorname{tg}(\pi a) + \operatorname{tg}^2(\pi a) + 1 = 0.$$

**30. а)** Найдите все пары  $(x; y)$  таких чисел  $x$  и  $y$ , что

$$x^2 - x \log_2(xy) - 2x + 0,5 \log_2^2(xy) + 2 = 0.$$

**б)** Найдите все пары  $(x; y)$  таких чисел  $x$  и  $y$ , что

$$\log_{0,2}^2(xy) - 4y \log_{0,2}(xy) + 5y^2 + 2y + 1 = 0.$$

**31. а)** Найдите все тройки  $(x; y; z)$  таких чисел  $x, y, z$ , что

$$\log_{0,5}^2 x + 2y^2 + 10 \cdot 9^z + 2y \log_{0,5} x - 2y \cdot 3^{z+1} - 2 \cdot 3^z + 1 = 0.$$

**б)** Найдите все тройки  $(x; y; z)$  таких чисел  $x, y, z$ , что

$$17 \cdot 25^x + \log_3^2 y + 2z^2 - 8z \cdot 5^x - 2 \cdot 5^x - 2z \log_3 y + 1 = 0.$$

**32. а)** Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых существует единственная тройка  $(x; y; z)$  действительных чисел  $x, y, z$ , удовлетворяющая системе уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = z, \\ x + y + z = a. \end{cases}$$

**б)** Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых существует единственная тройка  $(x; y; z)$  действительных чисел  $x, y, z$ , удовлетворяющая системе уравнений

$$\begin{cases} x^2 + 4y^2 = x + y + z, \\ x + 2y + 3z = a. \end{cases}$$