$t_2 = \dfrac{3}{2}$. Исходное уравнение (1) равносильно совокупности уравнений $\left(\dfrac{3}{2}\right)^x = 1$, $\left(\dfrac{3}{2}\right)^x = \dfrac{3}{2}$, откуда находим $x_1 = 0$, $x_2 = 1$.

Ответ. $x_1 = 0$, $x_2 = 1$.

Пример 6. Решить уравнение

$$\left(\sqrt[3]{3+\sqrt{8}}\right)^x + \left(\sqrt[3]{3-\sqrt{8}}\right)^x = 6.$$

Решение. Воспользуемся равенством $3 - \sqrt{8} = \dfrac{1}{3+\sqrt{8}}$ и положим $\left(\sqrt[3]{3+\sqrt{8}}\right)^x = t$. Тогда уравнение примет вид $t + \dfrac{1}{t} = 6$ или $t^2 - 6t + 1$, откуда $t_1 = 3 + \sqrt{8}$, $t_2 = 3 - \sqrt{8}$. Исходное уравнение равносильно совокупности уравнений

$$\left(\sqrt[3]{3+\sqrt{8}}\right)^x = 3+\sqrt{8}, \qquad \left(\sqrt[3]{3+\sqrt{8}}\right)^x = 3-\sqrt{8} = \frac{1}{3+\sqrt{8}},$$

откуда $x_1 = 3$, $x_2 = -3$.

Ответ. $x_1 = 3$, $x_2 = -3$.

Пример 7. Решить уравнение

$$3^x + 4^x = 25.$$

Решение. Число 2 является корнем этого уравнения. Докажем, что уравнение не имеет других корней. Так как каждая из функций 3^x и 4^x является возрастающей, то и $f(x) = 3^x + 4^x$ — также возрастающая функция. Поэтому $f(x) < f(2) = 25$ при $x < 2$ и $f(x) > f(2)$ при $x > 2$, т. е. функция не принимает значение, равное 25, при $x \neq 2$. Это означает, что $x = 2$ — единственный корень уравнения.

Задачи

Решить уравнение (1–11):

1. $729^{\frac{x}{3}} = \dfrac{1}{9}$. **2.** $5^{x+1} - 14 \cdot 5^x + 3 \cdot 5^{x+2} = 66$. **3.** $7 \cdot 49^x - 13 \cdot 7^x = 2$.

4. $3^x - 3^{2-x} = 8$. **5.** $3 \cdot 2^{x+1} - 2^{-x} \cdot 5^{2x+1} = 13 \cdot 5^x$. **6.** $4^{x+1} - 6^x = 2 \cdot 9^{x+1}$.

7. $2 \cdot 14^x + 3 \cdot 49^x = 2^{2x}$. **8.** $2^{|x+1|} - |2^x - 1| = 1 + 2^x$.

9. $\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x + \left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x = 4$. **10.** $4^x + 25^x = 29$.

11. $\left(\dfrac{1}{5}\right)^x + \left(\dfrac{1}{3}\right)^x = 34$.