

решение в тех и только тех случаях, когда квадрат либо вписан в меньшую окружность, ограничивающую кольцо (в этом случае $a = 3$), либо описан около большей окружности, ограничивающей кольцо (в этом случае $\frac{a\sqrt{2}}{2} = 5$, откуда $a = 5\sqrt{2}$), либо занимает промежуточное положение между двумя этими положениями (в этом случае $3 < a < 2\sqrt{5}$).

Ответ: $[3; 5\sqrt{2}]$.

Упражнения к § 4.3

1. а) Найдите наименьшее значение функции

$$y = \sqrt{(x-2)^2 + 16} + \sqrt{(x-10)^2 + 4}.$$

б) Найдите наименьшее значение функции

$$y = \sqrt{(x+3)^2 + 4} + \sqrt{(x-9)^2 + 9}.$$

2. а) Найдите наименьшее значение функции

$$y = \sqrt{x^2 + 9} + \sqrt{x^2 - 8x + 20}.$$

б) Найдите наименьшее значение функции

$$y = \sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 - 24x + 153}.$$

3. а) Найдите наименьшее значение функции

$$y = \sqrt{x^2 + 6x + 25} + \sqrt{x^2 - 10x + 29}.$$

б) Найдите наименьшее значение функции

$$y = \sqrt{x^2 + 8x + 20} + \sqrt{x^2 - 16x + 73}.$$

4. а) Найдите наименьшее значение функции

$$y = \sqrt{(x-3)^2 + (x-7)^2} + \sqrt{(x-15)^2 + (x-2)^2}.$$

б) Найдите наименьшее значение функции

$$y = \sqrt{(x-1)^2 + (x-2)^2} + \sqrt{(x-7)^2 + (x+6)^2}.$$

5. а) Решите уравнение $\sqrt{x^2 - 6x + 58} + \sqrt{x^2 + 10x + 89} = 17$.

б) Решите уравнение $\sqrt{x^2 + 8x + 20} + \sqrt{x^2 - 10x + 125} = 15$.

6. а) Решите неравенство $\sqrt{x^2 - 20x + 109} + \sqrt{x^2 - 2x + 82} \leq 15$.

б) Решите неравенство $\sqrt{x^2 + 6x + 58} + \sqrt{x^2 - 4x + 29} \leq 13$.

7. а) Решите неравенство

$$\sqrt{(2x-1)^2 + (x-7)^2} + \sqrt{(2x-13)^2 + (x-2)^2} \leq 13.$$

б) Решите неравенство

$$\sqrt{(x-2)^2 + (3x-7)^2} + \sqrt{(x-8)^2 + (3x+1)^2} \leq 10.$$

8. а) Найдите наибольшее и наименьшее значения выражения

$$(a-c)^2 + (b-d)^2,$$

если числа a, b, c, d таковы, что

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 4, \\ c^2 + d^2 = 36. \end{cases}$$

б) Найдите наибольшее и наименьшее значения выражения

$$(a+u)^2 + (b+v)^2,$$

если числа a, b, u, v таковы, что

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 64, \\ u^2 + v^2 = 25. \end{cases}$$

9. а) Найдите наибольшее и наименьшее значения выражения

$$(a+d)^2 + (b-p)^2 + (c+q)^2,$$

если числа a, b, c, d, p, q таковы, что

$$\begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 = 4, \\ d^2 + p^2 + q^2 = 121. \end{cases}$$

б) Найдите наибольшее и наименьшее значения выражения

$$(a+d)^2 + (b+p)^2 + (c-q)^2,$$

если числа a, b, c, d, p, q таковы, что

$$\begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 = 25, \\ d^2 + p^2 + q^2 = 81. \end{cases}$$

10. а) Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + (y-15)^2} + \sqrt{(x-8)^2 + y^2} = 17, \\ \sqrt{x^2 + (y-12)^2} + \sqrt{(x-16)^2 + y^2} = 20. \end{cases}$$

б) Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + (y-8)^2} + \sqrt{(x-6)^2 + y^2} = 10, \\ \sqrt{(x-5)^2 + y^2} + \sqrt{x^2 + (y-12)^2} = 13. \end{cases}$$

11. а) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых имеет единственное решение система уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 6x - 16 + 8y, \\ (x-6)^2 + (y-8)^2 = a^2. \end{cases}$$

б) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых имеет единственное решение система уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 8x - 37 + 10y, \\ (x-7)^2 + (y-9)^2 = a^2. \end{cases}$$

12. а) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых имеет единственное решение система уравнений

$$\begin{cases} (x-2a-3)^2 + (y-3a-5)^2 = 100, \\ (x-3a-8)^2 + (y-4a-3)^2 = 9. \end{cases}$$

б) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых имеет единственное решение система уравнений

$$\begin{cases} (x-5a-6)^2 + (y-4a+5)^2 = 36, \\ (x-6a-5)^2 + (y-5a+8)^2 = 16. \end{cases}$$

13. а) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых имеет единственное решение система уравнений

$$\begin{cases} (x-a-2)^2 + (y-a-4)^2 = (2a-1)^2, \\ (x-2a+1)^2 + (y-2a-3)^2 = (a-1)^2. \end{cases}$$

б) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых имеет единственное решение система уравнений

$$\begin{cases} (x-a-1)^2 + (y-a-3)^2 = (2a-3)^2, \\ (x-2a+3)^2 + (y-2a-1)^2 = (a-2)^2. \end{cases}$$

14. а) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых имеет единственное решение система уравнений

$$\begin{cases} x^2 + (y-6)^2 = 36, \\ \sqrt{x^2 + (y-18)^2} + \sqrt{(x-a)^2 + y^2} = \sqrt{a^2 + 324}. \end{cases}$$

б) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых имеет единственное решение система уравнений

$$\begin{cases} x^2 + (y - 5)^2 = 25, \\ \sqrt{x^2 + (y - 15)^2} + \sqrt{(x - a)^2 + y^2} = \sqrt{a^2 + 225}. \end{cases}$$

15. а) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых имеет ровно два решения система уравнений

$$\begin{cases} (x + a - 8)^2 + (y - a)^2 = 32, \\ \sqrt{x^2 + (y - 8)^2} + \sqrt{(x - 8)^2 + y^2} = 8\sqrt{2}. \end{cases}$$

б) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых имеет ровно два решения система уравнений

$$\begin{cases} (x + a - 10)^2 + (y - a)^2 = 50, \\ \sqrt{x^2 + (y - 10)^2} + \sqrt{(x - 10)^2 + y^2} = 10\sqrt{2}. \end{cases}$$

16. а) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых имеет единственное решение система уравнений

$$\begin{cases} y^2 - (2a + 1)y + a^2 + a - 2 = 0, \\ \sqrt{(x - a)^2 + y^2} + \sqrt{(x - a)^2 + (y - 3)^2} = 3. \end{cases}$$

б) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых имеет единственное решение система уравнений

$$\begin{cases} y^2 + (2a + 5)y + a^2 + 5a + 4 = 0, \\ \sqrt{(x + a)^2 + (y + 3)^2} + \sqrt{(x + a)^2 + y^2} = 3. \end{cases}$$

17. а) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых имеет единственное решение система уравнений

$$\begin{cases} (|x| - 5)^2 + (y - 4)^2 = 9, \\ (x + 2)^2 + y^2 = a^2. \end{cases}$$

б) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых имеет единственное решение система уравнений

$$\begin{cases} (|x| - 10)^2 + (y - 5)^2 = 16, \\ (x + 2)^2 + y^2 = a^2. \end{cases}$$

18. а) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых имеет ровно три различных решения система уравнений

$$\begin{cases} (x - 3)^2 + (y - 6)^2 = 25, \\ y = |x - a| + 1. \end{cases}$$

б) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых имеет ровно три различных решения система уравнений

$$\begin{cases} (x-2)^2 + (y-5)^2 = 9, \\ y = |x-a| + 2. \end{cases}$$

19. а) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых имеет ровно три решения система уравнений

$$\begin{cases} y + a = |x| + 5, \\ x^2 + (y - 2a + 5)^2 = 4. \end{cases}$$

б) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых имеет ровно три решения система уравнений

$$\begin{cases} y + 6 = |x| + a, \\ x^2 + (y + 3a - 13)^2 = 9. \end{cases}$$

20. а) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых имеет единственное решение система уравнений

$$\begin{cases} y = a|x| + a + 2, \\ x^2 + (y - a^2)^2 = 16. \end{cases}$$

б) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых имеет единственное решение система уравнений

$$\begin{cases} y = a|x| + a + 1, \\ x^2 + (y + a^2)^2 = 9. \end{cases}$$

21. а) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} y = \sqrt{3}|x| + 4a + 5, \\ x^2 + (y - 5a - 4)^2 = 36 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение, и укажите число решений системы для каждого значения a .

б) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} y = \sqrt{3}|x| + 5a + 4, \\ x^2 + (y - 6a - 5)^2 = 49 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение, и укажите число решений системы для каждого значения a .

22. а) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых имеет хотя бы одно решение $(x; y; z)$ система уравнений

$$\begin{cases} (x + 3 \sin z)^2 + (y + 3 \cos z)^2 = 4, \\ |x| + |y| = a. \end{cases}$$

б) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых следующая система уравнений имеет хотя бы одно решение $(x; y; z)$:

$$\begin{cases} (x - 5 \sin z)^2 + (y - 5 \cos z)^2 = 9, \\ |x| + |y| = a. \end{cases}$$

23. а) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых следующая система уравнений имеет хотя бы одно решение $(x; y; z)$:

$$\begin{cases} (x + \sqrt{25 - z})^2 + (y - \sqrt{z})^2 = 9, \\ a + x = y. \end{cases}$$

б) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых следующая система уравнений имеет хотя бы одно решение $(x; y; z)$:

$$\begin{cases} (x - \sqrt{z})^2 + (y - \sqrt{16 - z})^2 = 4, \\ x + y = a. \end{cases}$$

24. а) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых имеет ровно два решения система неравенств

$$\begin{cases} 16y^2 \geq 9x^2, \\ (x - 6a + 1)^2 + y^2 \leq 9a^2. \end{cases}$$

б) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых имеет ровно два решения система неравенств

$$\begin{cases} 9y^2 \geq 16x^2, \\ (x - 7a + 4)^2 + y^2 \leq 16a^2. \end{cases}$$

25. а) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых имеет конечное число решений система неравенств

$$\begin{cases} (y - 3x)(3y - x) \leq 0, \\ (x - a)^2 + (y + a)^2 \leq 16a. \end{cases}$$

б) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых имеет конечное число решений система неравенств

$$\begin{cases} (y - 4x)(4y - x) \leq 0, \\ (x - a)^2 + (y + a)^2 \leq 25a. \end{cases}$$

26. а) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} x^2 - 2x + y^2 - 4y = 2|x + 2y - 5|, \\ 2x - y = a \end{cases}$$

имеет более двух решений.

б) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} x^2 - 8x + y^2 + 4y + 15 = 4|2x - y - 10|, \\ x + 2y = a \end{cases}$$

имеет более двух решений.

27. а) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} |3x - y + 2| \leq 12, \\ (x - 3a)^2 + (y + a)^2 = 3a + 4 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

б) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} |x + 2y + 1| \leq 11, \\ (x - a)^2 + (y - 2a)^2 = a + 2 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

28. а) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} 2x^2 + 2y^2 = 5xy, \\ (x - a)^2 + (y - a)^2 = 5a^4 \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

б) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} 3x^2 + 3y^2 = 10xy, \\ (x - a)^2 + (y - a)^2 = 10a^4 \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

29. а) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{(x - 4)^2 + (y - a)^2} + \sqrt{(x - 7)^2 + (y - a)^2} = 3, \\ \sqrt{(x - 3)^2 + (y - 2)^2} = 5 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение.

б) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{(x-6)^2 + (y-a)^2} + \sqrt{(x-10)^2 + (y-a)^2} = 4, \\ \sqrt{(x-4)^2 + (y-3)^2} = 10 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

30. а) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} 2x - 2y - 2 = |x^2 + y^2 - 1|, \\ y = a(x - 1) \end{cases}$$

имеет более двух решений.

б) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} 4x - 4y - 8 = |x^2 + y^2 - 4|, \\ y = a(x - 2) \end{cases}$$

имеет более двух решений.

31. а) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} x^2 + 5x + y^2 - y - |x - 5y + 5| = 52, \\ y - 2 = a(x - 5) \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

б) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} x^2 + 7x + y^2 + y - |x - 5y + 1| = 46, \\ y - 1 = a(x - 4) \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

32. а) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} x^2 + |x^2 - 2x| = y^2 + |y^2 - 2y|, \\ x + y = a \end{cases}$$

имеет более двух решений.

б) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} x^2 + |x^2 - x| = y^2 + |y^2 - y|, \\ 2x + 2y = a \end{cases}$$

имеет более двух решений.

33. а) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} y^2 - x - 2 = |x^2 - x - 2|, \\ x - y = a \end{cases}$$

имеет более двух решений.

б) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} 2y^2 - x - 1 = |2x^2 - x - 1|, \\ 2x - 2y = a \end{cases}$$

имеет более двух решений.

34. а) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} x^2 + 20x + y^2 - 20y + 75 = |x^2 + y^2 - 25|, \\ x - y = a \end{cases}$$

имеет более одного решения.

б) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} x^2 + 4x + y^2 - 4y + 3 = |x^2 + y^2 - 1|, \\ 5x - 5y = a \end{cases}$$

имеет более одного решения.