Однородные уравнения – уравнения вида:

$\sin^2 x + 3\sin x\cos x + 2\cos^2 x = 0$

Проведем замену: $u = \sin x, v = \cos x$:

$u^2 + 3uv + 2v^2 = 0$

Для решения поделим уравнение на v^2:

$\frac{u^2}{v^2} + 3\frac{u}{v} + 2 = 0$

Проведем замену: $t = \frac{u}{v}$

$t^2 + 3t + 2 = 0$

Решая это уравнение, получим $t_1 = -1; t_2 = -2$

Сделав обратную замену, дорешайте данное уравнение

Биквадратные уравнения – уравнения вида:

$x^4 - 5x^2 + 6 = 0$

Проведем замену: $t = x^2$

$t^2 - 5t + 6 = 0$

Решая это уравнение, получим $t_1 = 3; t_2 = 2$

Сделав обратную замену, получим

$x^2 = 3$ or $x^2 = 2$

Трансцендентное уравнение - уравнения вида $f(x) = \mathrm{g}(x)$

Решаются такие уравнения, как правило, угадыванием корня и построением графика или исследованием левой и правой части на монотонность.

$e^x = 1 - x$

Заметим, что $e^x -$ монотонно возрастающая, а $1 - x$ – монотонно убывающая, значит, корень у уравнения единственный. Очевидно, что это 1.

Возвратное уравнение - уравнение типа

$ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0$

Алгоритм решения возвратных уравнений:

1) разделим уравнение на x^2
2) при помощи группировки приводим уравнение к виду

   $a(x^2 + \frac{1}{x^2}) + b(x + \frac{1}{x}) + c = 0$
3) введем новую переменную $t = x + \frac{1}{x}$, тогда $t^2 = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}$, значит

   $x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2$
4) получим уравнение относительно t: $a(t^2 - 2) + bt + c = 0$
5) дорешиваем данное уравнение и делаем обратную замену

Кубические уравнение - уравнение третьей степени

$x^3 + 3x^2 + x + 3 = 0$

Существует два способа их решения:

1) Метод группировки

$x^2(x + 3) + x + 3 = 0 \Rightarrow (x^2 + 1)(x + 3) = 0 \Rightarrow x = -3$

2) Метод “угадывания” корней

Попытаемся угадать корень (обычно для угадывания подбираются корни из промежутка {-3;-2;-1;1;2;3}). Заметим что -3 является корнем уравнения. Поделим наш многочлен $f(x) = x^3 + 3x^2 + x + 3$ на $g(x) = x + 3$ и получим $r(x) = x^2 + 1$.

Значит, $f(x) = (x^2 + 1)(x + 3) = 0 \Rightarrow x = -3$

По алгоритму деления многочленов: Деление многочленов столбиком

Необходимо помнить оба метода, не всегда можно решить только одним методом. Данными методами можно решать уравнения степени больше 3.

Уравнения с модулем

Уравнения вида: $|f(x)| = a$

$$\left[\begin{array}{l} f(x) = a \\ f(x) = -a \end{array}\right.$$

Уравнения вида: $|f(x)| = |g(x)|$

$$\left[\begin{array}{l} f(x) = g(x) \\ f(x) = -g(x) \end{array}\right.$$

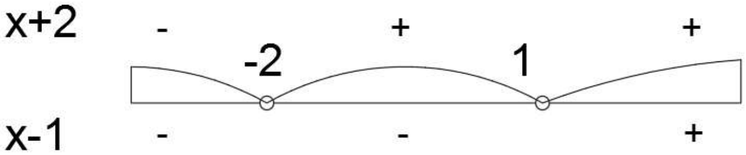
Уравнения вида: $|f(x)| = g(x)$

$$\left\{\begin{array}{l} g(x) > 0 \\ \left[\begin{array}{l} f(x) = g(x) \\ f(x) = -g(x) \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Метод интервалов в задачах с модулем: $|f(x)| + |g(x)| = a$

$$|x - 2| + |x + 1| = 3$$

1. Найдем нули каждой функции, которая стоит под модулем и отметим на числовой прямой
2. Расставим знаки для каждой подмодульной функции



3. Раскроем модуль в соответствии с полученными знаками

$$\left[\begin{array}{ll} -(x-2)-(x+1)=3, & x \le -2 \\ (x-2)-(x+1)=3, & 1 \ge x \ge -2 \\ (x-2)+(x+1)=3, & x \ge 1 \end{array}\right.$$

4. Дорешаем каждое из уравнений и в зависимости от указанного для промежутка получим корни

$$\left[\begin{array}{ll} x=-1, & x \le -2 \\ -3=3, & -2 \le x \le 1 \\ x=2, & x \ge 1 \end{array}\right.$$

Ответ: {-1;2}

Иррациональные уравнения

Уравнения вида: $\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)}$

$$\begin{cases} f(x) = g(x) \\ g(x) \geq 0 \end{cases}$$

Уравнения вида: $\sqrt{f(x)} = g(x)$

$$\begin{cases} f(x) = g(x)^2 \\ g(x) \geq 0 \end{cases}$$

Уравнения вида: $\frac{\sqrt{A}+\sqrt{B}}{\sqrt{A}-\sqrt{B}} = C$

Решаются умножением на сопряженное $\sqrt{A} + \sqrt{B}$

$$\frac{A+2\sqrt{AB}+B}{A-B} = C$$