Ребро CC_1 — перпендикуляр к плоскости ABC, поэтому CE — ортогональная проекция наклонной ME на эту плоскость, а угол CEM — линейный угол двугранного угла между секущей плоскостью и плоскостью ABC. Из прямоугольного треугольника CEM находим, что

$$ME = \sqrt{CM^2 + CE^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{9}{8}} = \frac{\sqrt{11}}{2\sqrt{2}},$$

$$\cos\angle CEM = \frac{CE}{ME} = \frac{\frac{3\sqrt{2}}{4}}{\frac{\sqrt{11}}{2\sqrt{2}}} = \frac{3}{\sqrt{11}}.$$

Пятиугольник $KBCDL$ — ортогональная проекция сечения $KPMQL$ на плоскость ABC, а поскольку

$$S_{KBCDL} = S_{ABCD} - S_{\Delta AKL} = S_{ABCD} - \frac{1}{4}S_{\Delta ABD} = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8},$$

то по теореме о площади ортогональной проекции

$$S_{KPMQL} = \frac{S_{KBCDL}}{\cos\angle CEM} = \frac{\frac{7}{8}}{\frac{3}{\sqrt{11}}} = \frac{7\sqrt{11}}{24}. \qquad \triangleleft$$

Подготовительные задачи

1. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром a. Найдите площадь сечения плоскостью, проходящей через:

а) две его диагонали;

б) середины трёх рёбер, исходящих из одной вершины;

в) вершину B_1 и середины рёбер AB и AD;

г) диагональ AC_1 параллельно прямой BD;

д) середину ребра AB параллельно прямым BD и BC_1.

2. Дан правильный тетраэдр $ABCD$ с ребром a. Найдите площадь сечения плоскостью, проходящей через:

а) середину ребра AD параллельно плоскости ABC;

б) вершину D и середины рёбер AB и BC;

в) середину ребра AB параллельно рёбрам AC и BD;

г) высоту DH тетраэдра параллельно ребру AC;

д) центры граней ABC, ABD и BCD.

3. Дана правильная четырёхугольная пирамида $SABCD$ с вершиной S. Все рёбра пирамиды равны a. Найдите площадь сечения плоскостью, проходящей через:

а) середину ребра SA параллельно плоскости основания пирамиды;

б) диагональ BD основания и середину ребра SC;

в) ребро AB и середину ребра SD;

г) центр основания параллельно плоскости ASB;

д) середину ребра SC и точку A параллельно диагонали BD основания.

4. Дана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$. Все рёбра призмы равны a. Найдите площадь сечения плоскостью, проходящей через:

а) вершины A, B_1 и C;

б) ребро BC и центр основания $A_1B_1C_1$;

в) центры граней ABC, AA_1B_1B и BB_1C_1C;

г) прямую BC_1 параллельно медиане AM основания ABC;

д) середину ребра BB_1 параллельно прямым BA_1 и B_1C_1.

5. Дана правильная шестиугольная призма $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$. Все рёбра призмы равны a. Найдите площадь сечения плоскостью, проходящей через:

а) вершины A, B и C_1;

б) вершины B, F и C_1;

в) вершины A, B и D_1;

г) центр основания $ABCDEF$ параллельно прямым DE и AE_1;

д) середины рёбер BC, EF и центр грани AA_1B_1B.

6. Дана правильная шестиугольная пирамида $SABCDEF$ с вершиной S. Стороны основания пирамиды равны a, а боковые рёбра равны $2a$. Найдите площадь сечения плоскостью, проходящей через:

а) вершину S и диагональ BD основания;

б) середины рёбер AB и EF параллельно высоте пирамиды;

в) вершину S и середины рёбер AB и AF;

г) точки A, D и середину ребра SE;

д) ребро AB и середину ребра SD.

Задачи на доказательство и вычисление

7.1. Плоскость α проходит через высоту DD_1 правильного тетраэдра $ABCD$ и ребро AD.

а) Докажите, что плоскость α перпендикулярна ребру BC.

б) Найдите площадь сечения тетраэдра плоскостью α, если ребра тетраэдра равны a.

7.2. Через вершины C, B_1 и D_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ проведена плоскость α.

а) Докажите, что плоскость α перпендикулярна диагонали AC_1 куба.

б) Найдите площадь куба плоскостью α, если ребро куба равно a.

7.3. Через вершину S и диагональ BD основания правильной шестиугольной пирамиды $SABCDEF$ проведена плоскость α.

а) Докажите, что расстояние от центра основания до этой плоскости в три раза меньше расстояния до этой плоскости от точки F.

б) Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью α, если сторона основания равна $\sqrt{3}$, а угол между боковой гранью и плоскостью основания равен 60°.

7.4. Плоскость α проходит через сторону AB основания ABC правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ и середину ребра B_1C_1.

а) Пусть M — точка пересечения плоскости α с прямой CC_1. Докажите, что C_1 — середина отрезка CM.

б) Найдите площадь сечения призмы плоскостью α, если все рёбра призмы равны a.

7.5. Через вершину S правильной четырёхугольной пирамиды и середины сторон AD и CD основания проведена плоскость α; K — точка пересечения этой плоскости с прямой BC.

а) Докажите, что отрезок CK вдвое меньше стороны основания.

б) Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью α, если сторона основания пирамиды равна a, а боковое ребро равно $2a$.

7.6. Дана правильная шестиугольная призма. Плоскость α проходит через сторону одного основания и противолежащую ей сторону другого основания.

а) Докажите, что плоскость α проходит через середины двух противоположных боковых рёбер призмы.

б) Найдите площадь сечения призмы плоскостью α, если боковые грани призмы — квадраты со стороной 2.

7.7. Через диагональ B_1D_1 грани $A_1B_1C_1D_1$ и середину ребра DC правильной четырёхугольной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ проведена плоскость α.

а) Постройте точку пересечения этой плоскости с прямой CC_1.

б) Найдите площадь сечения призмы плоскостью α, если $AB = a$, $CC_1 = 2a$.

7.8. Плоскость α перпендикулярна основанию правильной треугольной пирамиды $SABC$ и делит стороны AB и BC основания пополам.

а) Докажите, что плоскость α делит боковое ребро в отношении $1:3$, считая от вершины S.

б) Найдите площадь сечения пирамиды этой плоскостью, если известно, что сторона основания равна 2, а высота пирамиды равна 4.

7.9. Точки M и N — середины рёбер SA и SB правильной треугольной пирамиды $SABC$ с вершиной S. Через M и N проведена плоскость, перпендикулярная плоскости основания.

а) Докажите, что эта плоскость делит медиану CE основания в отношении $1:5$, считая от точки E.

б) Найдите площадь сечения, если $AB=36$, $SA=31$.

7.10. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания AB равна 12, а боковое ребро SA равно 13. Точки M и N — середины рёбер SA и SB соответственно. Плоскость α содержит прямую MN и перпендикулярна плоскости основания пирамиды.

а) Докажите, что плоскость α делит медиану CE основания в отношении $5:1$, считая от точки C.

б) Найдите площадь многоугольника, являющегося сечением пирамиды $SABC$ плоскостью α.

7.11. На ребре AA_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взята точка E так, что $A_1E=6EA$. Точка T — середина ребра B_1C_1. Известно, что $AB=4\sqrt{2}$, $AD=12$, $AA_1=14$.

а) Докажите, что плоскость ETD_1 делит ребро BB_1 в отношении $4:3$.

б) Найдите площадь сечения параллелепипеда плоскостью ETD_1.

7.12. На ребре AA_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взята точка E так, что $A_1E:EA=5:3$, на ребре BB_1 — точка F так, что $B_1F:FB=5:11$. Точка T — середина ребра B_1C_1. Известно, что $AB=6\sqrt{2}$, $AD=10$, $AA_1=16$.

а) Докажите, что плоскость EFT проходит через вершину D_1.

б) Найдите площадь сечения параллелепипеда плоскостью EFT.

7.13. Дана правильная четырёхугольная пирамида $PABCD$ с вершиной в точке P. Через точку C и середину ребра AB перпендикулярно к основанию пирамиды проведена плоскость α.

а) Докажите, что плоскость α делит ребро BP в отношении $2:1$, считая от точки B.

б) Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью α, если известно, что $PA=10$, $AC=16$.

7.14. В правильной шестиугольной пирамиде с вершиной S стороны основания $ABCDEF$ равны 6, а боковые рёбра равны 12. Точки K и M — середины рёбер и SF и SE соответственно.

а) Постройте сечение пирамиды плоскостью BKM.

б) Найдите площадь полученного сечения.

7.15. Точка M — середина ребра CD единичного куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Через вершину A_1 проведена плоскость, параллельная прямым AM и D_1M.

а) Докажите, что эта плоскость проходит через середину ребра AB.

б) Найдите площадь сечения куба этой плоскостью.

7.16. Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с основаниями $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$. Точки M и N — середины рёбер AD и CD соответственно, точка K лежит на ребре BB_1, причём $B_1K:KB=1:2$.

а) Докажите, что плоскость, проходящая через точки M, N и K, делит ребро CC_1 в отношении $2:7$, считая от точки C.

б) Найдите площадь сечения параллелепипеда этой плоскостью, если параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — правильная четырёхугольная призма, сторона основания $ABCD$ равна $4\sqrt{2}$, а боковое ребро равно 12.

7.17. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ проведено сечение плоскостью, проходящей через середину M ребра AB, точку B_1 и точку K, лежащую на ребре AC и делящую его в отношении $AK:KC=1:3$.

а) Докажите, что эта плоскость проходит через середину ребра A_1C_1.

б) Найдите площадь сечения, если известно, что сторона основания призмы равна $4\sqrt{2}$, а высота призмы равна $8\sqrt{2}$.

7.18. Основание четырёхугольной пирамиды $SABCD$ — параллелограмм $ABCD$.

а) Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через середину ребра AB параллельно плоскости SAD.

б) Найдите площадь полученного сечения, если площадь грани SAD равна 16.

7.19. Основанием пирамиды $SABCD$ с равными боковыми рёбрами является прямоугольник $ABCD$. Плоскость α проходит через сторону AB основания и середину высоты пирамиды.

а) Докажите, что плоскость α делит боковое ребро SD в отношении $1:2$, считая от вершины S.

б) Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью α, если $AB=6$, $AD=8$, а высота пирамиды равна 6.

7.20. Через середину ребра AB куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ проведена плоскость, параллельная прямым BD_1 и A_1C_1.

а) Докажите, что эта плоскость делит диагональ DB_1 в отношении $3:5$, считая от от вершины D.

б) Найдите площадь полученного сечения, если ребро куба равно 4.

7.21. Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Плоскость α проходит через прямую BA_1 параллельно прямой CB_1.

а) Докажите, что плоскость α делит диагональ AC_1 параллелепипеда в отношении $1:2$, считая от вершины A.

б) Найдите площадь сечения параллелепипеда плоскостью α, если он прямой, его основание $ABCD$ — ромб с диагоналями $AC = 10$ и $BD = 8$, а боковое ребро параллелепипеда равно 12.

7.22. Дана треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$. Плоскость α проходит через прямую BC_1 параллельно прямой AB_1.

а) Докажите, что плоскость α проходит через середину ребра AC.

б) Найдите площадь сечения призмы плоскостью α, если призма правильная, сторона её основания равна $2\sqrt{3}$, а боковое ребро равно 1.

7.23. В правильной четырёхугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ сторона основания AB равна 6, а боковое ребро AA_1 равно $4\sqrt{3}$. На рёбрах AB, A_1D_1 и C_1D_1 отмечены точки M, N и K соответственно, причём $AM = A_1N = C_1K = 1$.

а) Пусть L — точка пересечения плоскости MNK с ребром BC. Докажите, что $MNKL$ — квадрат.

б) Найдите площадь сечения призмы плоскостью MNK.

7.24. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ сторона основания AB равна 6, а боковое ребро AA_1 равно $2\sqrt{2}$. На рёбрах AB, A_1B_1 и B_1C_1 отмечены точки M, N и K соответственно, причём $AM = B_1N = C_1K = 2$.

а) Пусть L — точка пересечения плоскости MNK с ребром AC. Докажите, что $MNKL$ — квадрат.

б) Найдите площадь сечения призмы плоскостью MNK.