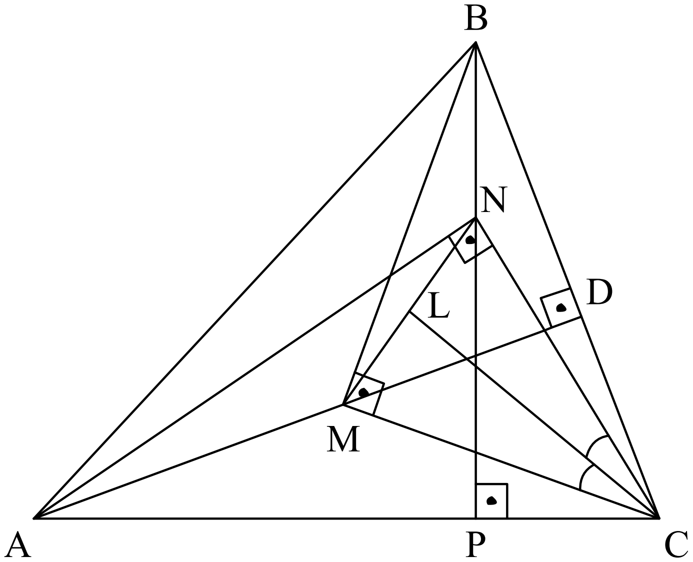
Пример 4. В остроугольном треугольнике ABC на высоте AD взята точка M, а на высоте BP – точка N так, что углы BMC и ANC – прямые. Известно, что $\widehat{MCN} = 30^\circ$, $|MN| = 4+2\sqrt{3}$. Найдите длину биссектрисы CL треугольника MCN.



Решение. В условии этой задачи даны лишь два элемента треугольника MCN. Это означает, что нам надо каким-то образом из условий про расположение точек N и M получить ещё одно соотношение на элементы треугольника MCN. Заметим, что по утверждению 5 треугольник NCP подобен треугольнику ACN, треугольник CMD подобен треугольнику CBM, и воспользуемся этими подобиями:

$$\frac{|CN|}{|AC|} = \frac{|CP|}{|CN|} \Longrightarrow |CN|^2 = |AC|\cdot|CP|;$$

$$\frac{|CM|}{|BC|} = \frac{|CD|}{|CM|} \Longrightarrow |CM|^2 = |BC|\cdot|CD|.$$

С другой стороны, из утверждения 3 вытекает, что треугольники ADC и BPC также подобны, поэтому

$$\frac{|CD|}{|CP|} = \frac{|AC|}{|BC|} \quad \Longrightarrow \quad |AC|\cdot|CP| = |BC|\cdot|CD|.$$

Таким образом, $|CM|^2 = |CN|^2$, то есть $|CM| = |CN|$. Следовательно, треугольник MCN равнобедренный, CL – его биссектриса, медиана и высота. С учётом этого находим

$$|CL| = \frac{1}{2}\cdot|MN|\cdot\operatorname{ctg}15^\circ = (2+\sqrt{3})\cdot\frac{1+\cos 30^\circ}{\sin 30^\circ} = 7+4\sqrt{3}.$$

Ответ. $7+4\sqrt{3}$.

Задачи

1. В прямоугольном треугольнике ABC из вершины прямого угла B опущена высота BD на гипотенузу AC. Известно, что $|AB| = 13$, $|BD| = 12$. Найдите площадь треугольника ABC.

2. В треугольнике ABC длина высоты BD равна 11.2, а длина высоты AE равна 12. Точка E лежит на стороне BC, причём $|BE| : |EC| = 5 : 9$. Найдите длину стороны AC.

3. В треугольнике ABC длина стороны AB равна 8, величина угла ACB равна $\pi/3$. Прямая, параллельная стороне AB, пересекает сторону AC в точке D, а сторону BC в точке E. Известно, что $|BC| = |DC|$, $|DE| = 3$. Найдите $|BC|$.

4. Окружность, центр которой лежит на гипотенузе прямоугольного треугольника, касается его катетов. Найдите длину радиуса этой окружности, если длины катетов треугольника равны 3 и 4.

5. Окружность, центр которой лежит на гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC, касается катетов AC и BC в точках E и D соответственно. Найдите величину угла ABC, если $|AE| = 1$, $|BD| = 3$.

6. В параллелограмме $ABCD$ длина стороны AB равна 6, а длина высоты, проведённой к основанию AD, равна 3. Биссектриса угла BAD пересекает сторону BC в точке M так, что $|MC| = 4$. N – точка пересечения отрезков AM и BD. Вычислите площадь треугольника BNM.

7. В равнобедренный треугольник ABC с основанием AC вписана окружность, длина радиуса которой равна 3. Прямая p касается этой окружности и параллельна прямой AC, но не совпадает с ней. Расстояние от точки B до прямой p равно 3. Найдите расстояние между точками, в которых данная окружность касается сторон AB и BC.

8. В ромбе $ABCD$ проведены высоты BP и BQ. Они пересекают диагональ AC в точках M и N соответственно (M между A и N). Известно, что $|AM| = p$, $|MN| = q$. Найдите $|PQ|$.

9. На сторонах острого угла с вершиной O взяты точки A и B. На луче OB взята точка M на расстоянии $3{\cdot}|OA|$ от прямой OA, а на луче OA – точка N на расстоянии $3{\cdot}|OB|$ от прямой OB. Длина радиуса окружности, описанной около треугольника AOB, равна 3. Найдите $|MN|$.

10. В треугольнике ABC угол C – тупой, D – точка пересечения прямой DB, перпендикулярной к AB, и прямой DC, перпендикулярной к AC. Высота треугольника ADC, проведённая из вершины C, пересекает AB в точке M. Известно, что $|AM| = a$, $|MB| = b$. Найдите $|AC|$.

11. На стороне PQ треугольника PQR взята точка N, а на стороне PR – точка L, причем $|NQ| = |LR|$. Точка пересечения отрезков QL и NR делит отрезок QL в отношении $m : n$, считая от точки Q. Найдите значение отношения $|PN| : |PR|$.

12. В треугольнике ABC на стороне AC взяты точки P и Q таким образом, что $|AP| > |AQ|$. Прямые BP и BQ делят медиану AM на три равные части. Известно, что $|PQ| = 3$. Найдите длину стороны AC.

13. В треугольнике ABC взяты точка K на стороне AB и точка M на стороне AC так, что $|AK| : |KB| = 3 : 2$, $|AM| : |MC| = 4 : 5$. Найдите отношение, в котором прямая, проходящая через точку K параллельно стороне BC, делит отрезок BM.

14. В треугольнике ABC взяты точка N на стороне AB и точка M на стороне AC. Отрезки CN и BM пересекаются в точке O. Вычислите $|CO| : |ON|$, если известно, что $|AN| : |NB| = 2 : 3$, $|BO| : |OM| = 5 : 2$.

15. В треугольнике ABC точка D делит сторону AB пополам, а точка E лежит на стороне BC, причем $|BC| = 3|BE|$. Отрезки AE и CD пересекаются в точке O, $|AE| = 5$, $|OC| = 4$, $\widehat{AOC} = 120°$. Найдите длину стороны AB.

16. В треугольнике ABC точки D, E и F расположены на сторонах AB, BC и AC соответственно. Известно, что $|AD| : |DB| = 1 : 2$, $|BE| : |EC| = 2 : 3$, $|AF| : |FC| = 1 : 1$. Отрезки DE и BF пересекаются в точке K. Вычислите отношение $|BK| : |KF|$.

17. В треугольнике ABC длина высоты BD равна 6, длина медианы CE равна 5, расстояние от точки пересечения отрезков BD и CE до стороны AC равно 1. Найдите длину стороны AB.

18. В треугольнике ABC из вершин A и B проведены отрезки AD и BE, причём точки D и E лежат на сторонах BC и AC соответственно. Отрезки AD и BE пересекаются в точке Q таким образом, что $|AQ| : |QD| = x$, $|BQ| : |QE| = y$. Найдите значения отношений $|AE| : |EC|$ и $|BD| : |DC|$.

19. В треугольнике PQR точка T лежит на стороне PR так, что $\widehat{QTR} = \widehat{PQR}$. Известно, что $|PT| = 8$, $|TR| = 1$. Найдите:

    а) длину стороны QR;

    б) величину угла QRP, если длина радиуса описанной около треугольника PQT окружности равна $3\sqrt{3}$.

20. Через вершины A и B треугольника ABC проведена окружность, длина радиуса которой равна $2\sqrt{5}$, отсекающая от прямой BC отрезок длины $4\sqrt{5}$ и касающаяся прямой AC в точке A. Из точки B проведён перпендикуляр к прямой BC до пересечения с прямой AC в точке F. Найдите площадь треугольника ABC, если $|BF| = 2$.

21. Медианы AM и BE треугольника ABC пересекаются в точке O. Точки O, M, E, C лежат на одной окружности, $|BE| = |AM| = 3$. Найдите $|AB|$.

22. На сторонах AB, BC и AC треугольника ABC взяты точки D, E и F соответственно. Отрезки AE и DF проходят через центр вписанной в треугольник ABC окружности, а прямые DF и BC параллельны. Найдите длину отрезка BE и периметр треугольника ABC, если известно, что $|BC| = 15$, $|BD| = 6$, $|CF| = 4$.

23. Прямая, параллельная медиане AD прямоугольного треугольника ABC, пересекает его гипотенузу BC в точке F, катет AB в точке E и прямую AC в точке H. Известно, что $|EF| = 1$, $|EH| = 3$. Найдите длину гипотенузы BC.

24. На сторонах AB и AD прямоугольника $ABCD$ выбраны точки P и Q ($P \in AB$) так, что $\angle CQD = \angle AQP = \angle BPC$. Вычислите длину отрезка AP, если $|AB| = b$, $|AD| = d$ $(b > d)$.

25. Прямые, содержащие высоты треугольника ABC, пересекаются в точке H. Известно, что $|BH| = 6$, $\widehat{ABC} = \pi/3$. Найдите длину стороны AC.

26. В треугольнике ABC расположен прямоугольник $PQRS$ так, что сторона PQ лежит на отрезке AC, а вершины R и S – на отрезках BC и AB соответственно. Найдите длину отрезка PS, если известно, что $|AP| = 1$, $|PQ| = 5$, $|QC| = 2$, а периметр треугольника BRS равен 15.

27. На продолжении биссектрисы AL треугольника ABC за точку A взята точка D таким образом, что $\widehat{BDC} = \widehat{BAL} = \pi/3$, $|AD| = 10$. Найдите площадь треугольника ABC.

28. В прямоугольном треугольнике ABC проведена биссектриса BD, а на гипотенузе BC взята точка H так, что $DH \perp BD$. Найдите площадь треугольника ABC, если известно, что $|CH| = 1$, $|CD| = 2$.

29. На стороне AB выпуклого четырёхугольника $ABCD$ выбрана точка M так, что $\angle AMD = \angle ADB$ и $\angle ACM = \angle ABC$. Утроенный квадрат отношения расстояния от точки A до прямой CD к расстоянию от точки C до прямой AD равен 2, $|CD| = 20$. Найдите длину радиуса вписанной в треугольник ACD окружности.

30. На сторонах AB и BC треугольника ABC взяты точки M и N соответственно таким образом, что $\widehat{BAC} = \widehat{BNM} = \pi/6$. Также известно, что $|AM| = |CN|$. Найдите отношение периметра треугольника ABC к сумме длин его медиан.

31. Найдите пару подобных треугольников, длины всех сторон которых выражаются целыми числами, если известно, что длины двух сторон первого треугольника равны длинам двух сторон второго треугольника, а длины их третьих сторон отличаются на 61.

1.5. Площадь треугольника

Теоретический материал

В этом разделе рассматриваются различные факты, связанные с площадями треугольников. Для успешного решения задач, относящихся к этой теме, необходимо знать и уметь обосновывать все леммы, приведённые ниже.

Сначала сформулируем два утверждения, которые следует воспринимать как аксиомы.

Утверждение 1. *Равные фигуры имеют одинаковые площади.*

Утверждение 2. *Если фигура F состоит из двух непересекающихся фигур F_1 и F_2, то площадь фигуры F равна сумме площадей фигур F_1 и F_2.*

Теперь докажем пять лемм, с помощью которых решается большинство задач, связанных с площадями треугольников и многоугольников.

Лемма 1. *Если два треугольника имеют общую вершину, а их стороны, противолежащие этой вершине, лежат на одной прямой, то отношение площадей этих треугольников равно отношению длин указанных сторон.*