

Подготовительные задачи

1. Дан единичный куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Найдите расстояния между прямыми: а) AB и DD_1 ; б) $A_1 A$ и BD_1 ; в) BD_1 и CB_1 ; г) BA_1 и CB_1 .

2. Рёбра правильного тетраэдра $ABCD$ равны 1. Точки K , M и N — середины рёбер BD , AB и AC соответственно. Найдите расстояния между прямыми: а) BD и AC ; б) KM и AC ; в) AB и KN ; г)* DM и BC ; д)* AK и CM ; е)* AK и BN .

3. Дана правильная четырёхугольная пирамида $SABCD$ с вершиной S . Все рёбра пирамиды равны 1, M — середина бокового ребра SD . Найдите расстояния между прямыми: а) SB и AC ; б) SA и BC ; в) AD и SC ; г) SB и CM .

4. Дана правильная треугольная призма $ABCA_1 B_1 C_1$, все рёбра которой равны 1. Точка M — середина AC . Найдите расстояния между прямыми: а) CC_1 и AB ; б) AB и CB_1 ; в) AB_1 и BC_1 ; г) BM и AC_1 .

5. Дана правильная шестиугольная призма $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$, все рёбра которой равны 1. Найдите расстояния между прямыми: а) AE_1 и DB_1 ; б) BB_1 и EF_1 ; в) AA_1 и CF_1 ; г) AB_1 и CD_1 ; д) BE и DB_1 .

6. Дана правильная шестиугольная пирамида $SABCDEF$ с вершиной S . Сторона основания равна 1, боковое ребро равно 2. Найдите расстояния между прямыми: а) SB и AF ; б) SB и AE ; в) SB и DF ; г) SB и AD .

Задачи на доказательство и вычисление

6.1. Дана правильная треугольная пирамида $DABC$ с вершиной D .
а) Докажите, что её сечение плоскостью, проходящей через середину ребра AB параллельно прямым AD и BC , — прямоугольник.

б) Найдите расстояние между противоположными рёбрами, если сторона основания равна $6\sqrt{3}$, а боковое ребро равно 10.

6.2. Дана правильная четырёхугольная пирамида $SABCD$ с вершиной S .

а) Постройте её сечение плоскостью, проходящей через середину ребра AB параллельно прямым SA и BC .

б) Найдите расстояние между прямыми AB и SC , если сторона основания равна 30, а боковое ребро равно $5\sqrt{34}$.

6.3. Основание прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — квадрат $ABCD$.

а) Докажите, что прямые BD_1 и AC перпендикулярны.

б) Найдите расстояние между этими прямыми, если стороны основания параллелепипеда равны 3, а боковые рёбра равны 6.

6.4. Основание прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ — прямоугольный треугольник ABC с прямым углом при вершине A , а боковая грань AA_1C_1C — квадрат.

а) Докажите, что прямые CB_1 и AC_1 перпендикулярны.

б) Найдите расстояние между этими прямыми, если $AC = 2$, $AB_1 = 2\sqrt{3}$.

6.5. Основание пирамиды $SABCD$ — ромб $ABCD$ с углом 60° при вершине A . Боковое ребро SD перпендикулярно плоскости основания и равно стороне основания.

а) Докажите, что прямые AC и SB перпендикулярны.

б) Найдите расстояние между этими прямыми, если сторона основания пирамиды равна $2\sqrt{2}$.

6.6. Основание прямой призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — ромб $ABCD$ с углом 120° при вершине D , а боковые грани призмы — квадраты.

а) Докажите, что прямые A_1C и BD перпендикулярны.

б) Найдите расстояние между этими прямыми, если сторона основания призмы равна $8\sqrt{3}$.

6.7. Основание пирамиды $SABCD$ — квадрат $ABCD$. Боковое ребро SA перпендикулярно плоскости основания.

а) Докажите, что плоскости ASD и CSD перпендикулярны.

б) Найдите расстояние между прямыми SC и BD , если сторона основания равна 2, а высота пирамиды равна $2\sqrt{2}$.

6.8. Основание пирамиды $SABCD$ — квадрат $ABCD$. Боковое ребро SA перпендикулярно плоскости основания, а треугольник BSD равносторонний.

а) Докажите, что высота пирамиды равна стороне основания.

б) Найдите расстояние между прямыми SC и BD , если сторона основания равна $2\sqrt{3}$.

6.9. Основание пирамиды $DABC$ — треугольник ABC со сторонами $AC = 6$, $BC = 8$, $AB = 10$. Все боковые рёбра равны.

а) Докажите, что высота пирамиды проходит через середину отрезка AB .

б) Найдите расстояние между прямыми DM и BC , где DM — высота пирамиды $DABC$.

6.10. Основание пирамиды $DABC$ — прямоугольный треугольник ABC с гипотенузой AB . Все боковые рёбра образуют равные углы плоскостью основания.

а) Докажите, что высота пирамиды проходит через середину отрезка AB .

б) Известно, что $AB = 18$, $AC = 6$. Найдите расстояние между прямыми DM и CH , где DM — высота пирамиды $DABC$, CH — высота треугольника ABC .

6.11. Боковая грань правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$ с вершиной S образует с плоскостью основания угол 45° . Точка M — середина бокового ребра SD .

а) Докажите, что противоположные боковые грани пирамиды перпендикулярны.

б) Найдите расстояние между прямыми AB и CM , если сторона основания пирамиды равна $\sqrt{2}$.

6.12. Боковая грань правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$ с вершиной S образует с плоскостью основания угол 60° . Точка M — середина бокового ребра SD .

а) Докажите, что плоскости AMB и CSD перпендикулярны.

б) Найдите расстояние между прямыми AB и CM , если сторона основания пирамиды равна $4\sqrt{3}$.

6.13. Дан параллелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$.

а) Постройте точку пересечения прямой AC_1 с плоскостью $BA_1 D$.

б) Найдите расстояние между прямыми BA_1 и CB_1 , если параллелепипед прямоугольный, $AA_1 = \sqrt{5}$, $AB = BC = 2\sqrt{10}$.

6.14. Точки M и N — середины рёбер соответственно AD и AB куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$.

а) Докажите, что косинус угла между прямыми $D_1 M$ и $A_1 N$ равен $\frac{4}{5}$.

б) Найдите расстояние между этими прямыми, если ребро куба равно 6.

6.15. Дана правильная шестиугольная пирамида $SABCDEF$ с вершиной S . Точка M — середина бокового ребра CS .

а) Постройте точку пересечения прямой BM с плоскостью ESF .

б) Найдите расстояние между прямыми BM и EF , если сторона основания пирамиды равна $2\sqrt{6}$, а высота пирамиды равна $3\sqrt{2}$.

6.16. Дана правильная шестиугольная призма $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$. Точка P — середина бокового ребра CC_1 .

а) Постройте точку пересечения прямой BP с плоскостью $AA_1 F$.

б) Найдите расстояние между прямыми BP и AB_1 , если сторона основания призмы равна 6, а боковое ребро равно $2\sqrt{3}$.

6.17. Основание прямой четырёхугольной призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — прямоугольник $ABCD$. Плоскость α проходит через середину ребра AD перпендикулярно прямой BD_1 .

а) Докажите, что угол между плоскостью α и плоскостью ABC равен углу между прямыми BD_1 и AA_1 .

б) Найдите косинус угла между плоскостью основания призмы и плоскостью α , если $AB = 12$, $AD = \sqrt{31}$, а расстояние между прямыми AC и $B_1 D_1$ равно 5.

6.18. Основание прямой четырёхугольной призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — прямоугольник $ABCD$. Плоскость α проходит через середину ребра CD перпендикулярно прямой $B_1 D$.

а) Докажите, что угол между плоскостью α и плоскостью ADD_1 равен углу между прямыми $B_1 D$ и AB .

б) Найдите тангенс угла между плоскостью грани ADD_1 и плоскостью α , если $AB = 5$, $AD = \sqrt{33}$, а расстояние между прямыми $A_1 C_1$ и BD равно $\sqrt{3}$.

6.19. Основание пирамиды $SABCD$ — квадрат $ABCD$, боковое ребро SA перпендикулярно плоскости основания, $BC = 2SA$. Точка M — середина ребра AB .

а) Докажите, что сечение пирамиды плоскостью, проходящей через прямую SM параллельно BD , — равносторонний треугольник.

б) Найдите расстояние между прямыми SM и BD , если $AB = 6\sqrt{3}$.

6.20. Основание пирамиды $ABCD$ — равносторонний треугольник ABC , боковое ребро AD перпендикулярно плоскости основания, $AD : BC = 1 : \sqrt{2}$. Точки M и N — середины рёбер BC и AB соответственно.

а) Докажите, что угол между прямыми AM и DN равен 60° .

б) Найдите расстояние между этими прямыми, если $AB = 6\sqrt{2}$.

6.21. Дан параллелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Его основания $ABCD$ и $A_1 B_1 C_1 D_1$ — квадраты. Отрезок, соединяющий центр основания $ABCD$ с серединой ребра $B_1 C_1$, перпендикулярен основаниям.

а) Докажите, что грани $AA_1 B_1 B$ и $ABCD$ перпендикулярны.

б) Найдите расстояние между прямыми AA_1 и BC , если все рёбра параллелепипеда равны 2.

6.22. Дан параллелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Его основания $ABCD$ и $A_1 B_1 C_1 D_1$ — квадраты. Отрезок, соединяющий вершину C с центром основания $A_1 B_1 C_1 D_1$, перпендикулярен основаниям.

а) Докажите, что прямые CC_1 и BD перпендикулярны.

б) Найдите расстояние между прямыми $A_1 C$ и AB , если сторона основания параллелепипеда равна 6, а боковое ребро равно $\sqrt{34}$.

6.23. Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Точка E — середина ребра AD . Вершины M и N правильного тетраэдра $MNPQ$ лежат на прямой ED_1 , а вершины P и Q — на прямой, проходящей через точку A_1 и пересекающей прямую BC в точке R .

а) Докажите, что $BR = 2BC$.

б) Найдите расстояние между серединами отрезков MN и PQ , если ребро куба равно a .

6.24. Основание прямой треугольной призмы $ABCA_1 B_1 C_1$ — равнобедренный прямоугольный треугольник с катетами $AC = BC$. Вершины M и N правильного тетраэдра $MNPQ$ лежат на прямой CA_1 , а вершины P и Q — на прямой AB_1 .

а) Докажите, что $AA_1 = AC$.

б) Найдите расстояние между серединами отрезков MN и PQ , если $AC = a$.