14. Пусть $b_1, b_2, \ldots, b_n$ — положительные числа, $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — произвольные действительные числа, M и m — соответственно наибольшая и наименьшая из дробей $\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \cdots, \frac{a_n}{b_n}$. Доказать, что

$$m \leqslant \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{b_1 + b_2 + \cdots + b_n} \leqslant M.$$

15. Доказать, что для любого натурального $n \geqslant 2$ выполняется неравенство

$$\frac{1}{\sqrt{n}} < 2(\sqrt{n} - \sqrt{n-1}).$$

16. Доказать, что для любого натурального $n \geqslant 2$ справедливы неравенства

$$\sqrt{n} < 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}.$$

17. Доказать, что при любом $n \in \mathbf{N}$ выполняется неравенство

$$\lg(n+1) < \frac{\lg 1 + \lg 2 + \cdots + \lg n}{n}.$$

18. Доказать, что если $a + b = 1$, то

$$a^3 + b^3 \geqslant \frac{1}{4}, \qquad a^6 + b^6 \geqslant \frac{1}{32}.$$

19. Доказать, что для любого $\alpha \in \mathbf{R}$ справедливы неравенства:

а) $\frac{1}{2} \leqslant \sin^4\alpha + \cos^4\alpha \leqslant 1$; б) $\frac{1}{4} \leqslant \sin^6\alpha + \cos^6\alpha \leqslant 1$;

в) $\frac{1}{8} \leqslant \sin^8\alpha + \cos^8\alpha \leqslant 1$.

20. Сравнить числа a и b, если:

а) $a = \sqrt[3]{3}$, $b = \sqrt[5]{5}$; б) $a = \sqrt[3]{2}$, $b = \sqrt[7]{5}$;
в) $a = \sqrt{8} + \sqrt{15}$, $b = 7$; г) $a = \sqrt{3} + \sqrt{6}$, $b = \sqrt{17}$;
д) $a = 3^{\sqrt{3}}$, $b = (\sqrt{3})^3$; е) $a = 2^{\pi}$, $b = \pi^2$;
ж) $a = 2^{300}$, $b = 3^{200}$; з) $a = \sqrt{13} - \sqrt{12}$, $b = \sqrt{12} - \sqrt{11}$.

21. Доказать, что $\log_{12} 13 > \log_{14} 15$.

22. Сравнить числа a и b, если:

а) $a = 7\log_5 2$, $b = 3$; б) $a = \frac{1}{2}\log_4 65$, $b = \log_5 11$;

в) $a = \log_7 18$, $b = \log_2 3$; г) $a = \log_{1/2}\frac{1}{3}$, $b = \log_{1/3}\frac{1}{2}$;

д) $a = \log_9 36$, $b = \log_{36} 288$; е) $a = \log_{17} 68$, $b = \log_{68} 544$.

23. Упростив выражение

$$a = (4 - 3\sqrt{2})^2 + 8\sqrt{34 - 24\sqrt{2}} - \sqrt{5},$$

сравнить полученное число с нулем.

24. Сравнить числа a и b, если:

а) $a = \sin 1,5$, $b = \sin 1,7$; б) $a = \cos 2,9$, $b = \cos 3,2$;

в) $a = \arcsin\sqrt{\frac{3}{5}}$, $b = \arccos\sqrt{\frac{3}{5}}$; г) $a = \frac{2}{\sqrt{5} - \sqrt{3}} + \frac{5}{\sqrt{3} + 2\sqrt{2}}$, $b = \frac{2}{\sqrt{8} - \sqrt{5}}$;

д) $a = \sqrt{2} + \sqrt{3}$, $b = \sqrt{10}$; е) $5 - \sqrt{15}$, $b = \sqrt{17} - 3$.