

## Задачи

1. В треугольнике  $ABC$  угол  $BAC$  прямой,  $|AB| = 1$ ,  $|BC| = 3$ . Точка  $K$  делит сторону  $AC$  в отношении 7:1, считая от точки  $A$ . Что больше,  $|AC|$  или  $|BK|$ ?
2. В прямоугольном треугольнике  $ABC$  точки  $D$  и  $E$  лежат соответственно на катетах  $BC$  и  $AC$  так, что  $|CD| = |CE| = 1$ . Точка  $O$  есть точка пересечения отрезков  $AD$  и  $BE$ . Площадь треугольника  $BOD$  больше площади треугольника  $AOE$  на 0,5. Известно, что  $|AD| = \sqrt{10}$ . Найдите длину гипотенузы  $AB$ .
3. В равнобедренном треугольнике длины высот, опущенных на основание и на боковую сторону, равны соответственно  $m$  и  $n$ . Найдите длины сторон этого треугольника.
4. В прямоугольном треугольнике длина гипотенузы равна  $c$ , а величина одного из его острых углов равна  $\alpha$ . Найдите длину биссектрисы прямого угла этого треугольника.
5. В треугольнике  $ABC$  угол  $A$  – прямой,  $|AB| = 1$ ,  $|BC| = 2$ . Биссектриса угла  $ABC$  пересекает сторону  $AC$  в точке  $L$ .  $G$  – точка пересечения медиан треугольника  $ABC$ . Что больше,  $|BL|$  или  $|BG|$ ?
6. В треугольнике  $ABC$   $|AB| = c$ ,  $|BC| = a$ , а медианы  $AD$  и  $CE$  взаимно перпендикулярны. Найдите длину стороны  $AC$ .
7. В треугольнике  $ABC$  угол  $A$  – прямой, величина угла  $B$  равна  $\pi/6$ . В треугольник вписана окружность, длина радиуса которой равна  $\sqrt{3}$ . Найдите расстояние от вершины  $C$  до точки касания этой окружности с катетом  $AB$ .
8. В треугольнике  $ABC$  величина угла  $BAC$  равна  $\pi/3$ , длина высоты, опущенной из вершины  $C$  на сторону  $AB$ , равна  $\sqrt{3}$ , а длина радиуса окружности, описанной около треугольника  $ABC$ , равна 5. Найдите длины сторон треугольника  $ABC$ .
9. В прямоугольном треугольнике отношение длины радиуса вписанной окружности к длине радиуса описанной окружности равно  $2/5$ . Найдите величины острых углов треугольника.
10. В треугольнике  $ABC$  угол  $B$  – тупой, продолжения высот  $AM$  и  $CN$  пересекаются в точке  $O$ ,  $\widehat{BAC} = \alpha$ ,  $\widehat{BCA} = \gamma$ ,  $|AC| = b$ . Найдите расстояние от точки  $O$  до прямой  $AC$ .
11. В треугольнике, величина одного из углов которого равна разности величин двух других его углов, длина меньшей стороны равна 1, а сумма площадей квадратов, построенных на двух других сторонах, в два раза больше площади описанного около треугольника круга. Найдите длину большей стороны треугольника.
12. В прямоугольном треугольнике  $KLM$  проведён отрезок  $MD$ , соединяющий вершину прямого угла  $KML$  с точкой  $D$ , лежащей на гипотенузе  $KL$  таким образом, что  $|DL| = 1$ ,  $|DM| = \sqrt{2}$ ,  $|DK| = 2$ . Найдите величину угла  $KMD$ .

13. В треугольнике  $ABC$  угол  $C$  прямой, катет  $BC$  разделён точками  $D$  и  $E$  на три равные части. Найдите сумму величин углов  $AEC$ ,  $ADC$  и  $ABC$ , если известно, что  $|BC| = 3|AC|$ .
14. В прямоугольном треугольнике  $ABC$  расстояние от середины гипотенузы  $AB$  до катета  $BC$  равно 5, а расстояние от середины этого катета до гипотенузы равно 4. Найдите площадь треугольника  $ABC$ .
15. В прямоугольный треугольник  $ABC$  вписана окружность, касающаяся его сторон в точках  $P$ ,  $Q$  и  $R$ . Найдите площадь треугольника  $PQR$ , если длины катетов треугольника  $ABC$  равны 3 и 4.
16. В треугольнике  $ABC$  угол  $C$  прямой,  $CD$  – высота. Найдите длину радиуса окружности, вписанной в треугольник  $ABC$ , если длины радиусов окружностей, вписанных в треугольники  $ACD$  и  $BCD$ , равны 6 и 8 соответственно.
17. Расстояния от центра окружности, вписанной в прямоугольный треугольник  $ABC$ , до его вершин  $A$  и  $B$  равны  $\sqrt{5}$  и  $\sqrt{10}$  соответственно. Найдите длины катетов треугольника  $ABC$ .
18. В треугольнике  $ABC$  точка  $M$  расположена на стороне  $AC$  таким образом, что  $|AM| : |MC| = 1 : 3\sqrt{3}$ . Величина угла  $ABM$  равна  $\pi/6$ ,  $|BM| = 6$ , угол  $B$  прямой. Найдите величину угла  $BAC$ .
19. Дан треугольник  $KLM$ . Через точки  $K$  и  $L$  проведена окружность, центр которой лежит на высоте  $LF$ , опущенной на сторону  $KM$ . Известно, что точка  $F$  лежит на стороне  $KM$ . Найдите площадь круга, ограниченного этой окружностью, если  $|KL| = 1$ ,  $|KM| = \sqrt{3}/2$ ,  $|FM| = \sqrt{3}/6$ .
20. В прямоугольнике  $ABCD$  длины отрезков  $AB$  и  $BD$  равны 3 и 6 соответственно. На продолжении биссектрисы  $BL$  треугольника  $ABD$  за точку  $L$  взята точка  $N$  такая, что отношение  $|BL| : |LN|$  равно 10 : 3. Что больше: длина отрезка  $BN$  или длина отрезка  $CL$ ?
21. В прямоугольном треугольнике  $ABC$  угол  $B$  – прямой,  $AM$  – медиана,  $BH$  – высота. Найдите величину угла  $BAM$ , если известно, что величина угла между прямыми  $AM$  и  $BH$  равна  $\varphi$ . При каких  $\varphi$  задача имеет решение?
22. В треугольнике  $ABC$  угол  $C$  – прямой, отношение длины медианы  $CM$  к длине биссектрисы  $CL$  равно  $\sqrt{6} : 1$ , длина высоты  $CH$  равна 2. Найдите площадь треугольника  $ABC$ .
23. В прямоугольном треугольнике  $ABC$   $ED$  – отрезок, соединяющий середины сторон  $AB$  и  $BC$ . Точка  $F$  лежит на стороне  $BC$ , отрезки  $AF$  и  $ED$  пересекаются в точке  $M$ . Известно, что отношение площадей четырёхугольника  $AMDC$  и треугольника  $ABC$  равно  $7/10$ , а длины катетов  $BC$  и  $AC$  равны  $a$  и  $b$  соответственно. Найдите длину отрезка  $AM$ .
24. В треугольнике  $ABC$  проведены высота  $BH$  и медиана  $BM$ . Найдите  $|BM|$ , если известно, что  $|BH| = h$ ,  $\widehat{ABH} = \widehat{CBM}$ ,  $\widehat{HBM} = 2 \cdot \widehat{CBM}$ .

25. В треугольник  $ABC$  вписана окружность, длина радиуса которой равна 2.  $D$  – точка касания этой окружности со стороной  $AC$ ,  $|AD| = 2$ ,  $|DC| = 4$ . Найдите длину биссектрисы треугольника  $ABC$ , проведённой из вершины  $B$ .
26. В прямоугольном треугольнике  $ABC$  угол  $B$  – прямой,  $AL$  – биссектриса. Известно, что  $|AC| = 5$ ,  $|AL| = 5/\sqrt{3}$ . Найдите  $|LC|$ .
27. Треугольники  $ABC$  и  $ABD$  имеют общую сторону  $AB$  и не имеют общих внутренних точек, углы  $BAC$  и  $ADB$  прямые. Найдите  $|CD|$ , если  $|AD| = 3$ ,  $|BC| = 13$ ,  $|AC| + |BD| = 16$ .
28. В треугольнике  $ABC$  сторона  $AB$  имеет длину 3, а высота  $CD$ , опущенная на сторону  $AB$ , имеет длину  $\sqrt{3}$ . Также известно, что основание  $D$  высоты  $CD$  лежит на стороне  $AB$  и  $|AD| = |BC|$ . Найдите длину стороны  $AC$ .
29. В прямоугольном треугольнике  $ABC$  длина катета  $AB$  равна 4, а длина катета  $AC$  равна 3. Точка  $D$  делит гипотенузу пополам. Найдите расстояние между центром окружности, вписанной в треугольник  $ACD$ , и центром окружности, вписанной в треугольник  $ABD$ .
30. В равнобедренном треугольнике длина боковой стороны равна 20, а длина диаметра описанной около него окружности равна 25. Найдите длину радиуса окружности, вписанной в этот треугольник.
31. Из середины  $D$  гипотенузы  $AB$  прямоугольного треугольника  $ABC$  проведён луч, перпендикулярный гипотенузе и пересекающий один из его катетов. На этом луче отложен отрезок  $DE$ , длина которого равна половине длины отрезка  $AB$ . Длина отрезка  $CE$  равна 1 и совпадает с длиной одного из катетов треугольника  $ABC$ . Найдите площадь треугольника  $ABC$ .
32. Прямая, параллельная гипотенузе  $AB$  прямоугольного треугольника  $ABC$ , пересекает катет  $AC$  в точке  $D$ , а катет  $BC$  – в точке  $E$ , причем длина отрезка  $DE$  равна 2, а длина отрезка  $BE$  равна 1. На гипотенузе взята точка  $F$  так, что  $|BF| = 1$ . Известно также, что величина угла  $FCB$  равна  $\alpha$ . Найдите площадь треугольника  $ABC$ .
33. Гипотенуза  $AB$  прямоугольного треугольника  $ABC$  является хордой окружности, длина радиуса которой равна 10. Вершина  $C$  лежит на диаметре этой окружности, параллельном гипотенузе. Градусная мера угла  $CAB$  равна  $75^\circ$ . Найдите площадь треугольника  $ABC$ .
34. Длины катетов прямоугольного треугольника равны 36 и 48. Найдите расстояние от центра окружности, вписанной в этот треугольник, до его высоты, проведённой к гипотенузе.
35. Середины высот треугольника лежат на одной прямой. Какое максимальное значение может принимать его площадь, если длина его наибольшей стороны равна 10?