

Монотонность логарифмической функции используется, в частности, для доказательства некоторых неравенств.

Пример 6. Что больше: $\log_2 3$ или $\log_3 5$?

Решение. Оба этих числа находятся между единицей и двойкой. Давайте сравним каждое из них с числом $3/2$.

С одной стороны, имеем:

$$\log_3 5 = \log_3 \sqrt{25} < \log_3 \sqrt{27} = \log_3 3^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2}.$$

С другой стороны:

$$\log_2 3 = \log_2 \sqrt{9} > \log_2 \sqrt{8} = \log_2 2^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2}.$$

Обратите внимание, что в этих оценках мы использовали монотонное возрастание функций $y = \log_2 x$ и $y = \log_3 x$ (большему значению аргумента отвечает большее значение логарифма).

Итак, $\log_3 5 < 3/2$, $\log_2 3 > 3/2$. Следовательно, $\log_3 5 < \log_2 3$.

Задачи

1. Вычислите:

- | | | | | |
|---------------------------|----------------------------|--------------------------|---------------------|---------------------------------------|
| а) $\log_2 16$; | б) $\log_2 128$; | в) $\log_3 81$; | г) $\log_5 125$; | д) $\log_{13} 1$; |
| е) $\log_2 \frac{1}{4}$; | ж) $\log_3 \frac{1}{27}$; | з) $\log_4 2$; | и) $\log_{64} 4$; | к) $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{8}$; |
| л) $\log_5 0,04$; | м) $\lg 0,001$; | н) $\log_{\sqrt{2}} 8$; | о) $\log_{0,5} 4$; | п) $\log_{0,2} 0,008$. |

8 (п ; 2; - (о ; 9 (н ; 8; - (л ; 2; - (л ; 8 (н ; $\frac{8}{1}$ (и ; $\frac{8}{1}$ (е ; 8; - (ж ; 2; - (е ; 0 (л ; 8 (л ; 4 (а ; 2 (б ; 2 (в

2. Вычислите:

- | | | |
|-----------------------|--|---|
| а) $2^{\log_2 7}$; | б) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\log_{\frac{1}{3}} 5}$; | в) $10^{\lg \pi}$; |
| г) $5^{2+\log_5 3}$; | д) $10^{1-\lg 5}$; | е) $6^{\log_6 3 + \log_6 5}$ |
| ж) $4^{2\log_4 7}$; | з) $5^{-4\log_5 3}$; | и) $\left(\frac{1}{2}\right)^{3\log_{\frac{1}{2}} 6}$. |

9 17 (и ; $\frac{18}{1}$ (е ; 67 (ж ; 51 (е ; 7 (л ; 52 (л ; 11 (а ; 5 (б ; 2 (в

3. Вычислите:

- | | |
|--|---------------------------------------|
| а) $\lg 125 + \lg 8$; | б) $\log_3 5 - \log_3 \frac{5}{27}$; |
| в) $\log_{12} 2 + \log_{12} 8 + \log_{12} 9$; | г) $\lg 34 - \lg 2 - \lg 170$. |

1 - (л ; 2 (а ; 8 (б ; 8 (в

4. Вычислите:

а) $\log_{36} 84 - \log_{36} 14$;

б) $\log_2 36 - 2 \log_2 3$;

в) $\log_{49} 84 - \log_{49} 12$;

г) $2 \lg 5 + \frac{1}{2} \lg 16$.

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right)$$

5. Вычислите:

а) $\frac{\lg 8 + \lg 18}{2 \lg 2 + \lg 3}$;

б) $\frac{\log_3 64}{\log_3 4}$;

в) $\frac{\lg 2 + 2 \lg 3}{\lg 27 + \lg 12}$;

г) $\frac{\log_{\frac{1}{2}} 5}{\log_{\frac{1}{2}} 625}$.

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right)$$

6. Найдите x , если выполнено равенство:

а) $\log_5 x = 2 \log_5 3 + \frac{1}{2} \log_5 49 - \frac{1}{3} \log_5 27$;

б) $\log_7 x = 3 \log_7 2 + \frac{1}{3} \log_7 125 - 4 \log_7 3$.

$$\frac{18}{40} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right)$$

7. Вычислите:

а) $\log_{\sqrt{2}} 12 - \log_2 9$;

б) $\log_{2\sqrt{2}} 128$;

в) $\log_{\sqrt{3}} \sqrt{18} - \log_3 2$;

г) $\log_{25\sqrt[4]{5}} \left(125\sqrt[3]{5} \right)$.

$$\frac{18}{40} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right)$$

8. Вычислите:

а) $27^{-\frac{1}{3} \log_3 \frac{1}{2} - \log_{27} 2}$;

б) $5^{\log_{\sqrt{5}} 4 - \log_5 2 + 2 \log_{25} 3}$;

в) $7^{\frac{\lg \lg 2}{\lg 7}}$;

г) $15 \log_{\frac{1}{7}} \left(\sqrt[5]{7} \cdot \frac{1}{49} \cdot 5^{\log_{\sqrt{5}} \sqrt[3]{49}} \right)$.

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right)$$

9. Вычислите:

$$\sqrt{\log_2^2 3 + 1 - \log_2 9 - \log_2 (12\sqrt{2})}.$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right)$$

10. Вычислите:

$$6 \log_2 125 \cdot \log_5 2 + 2^{\lg 7} 5^{\lg 7}.$$

57

11. Вычислите:

$$\left((1 - \log_2^2 7) \log_{14} 2 + \log_2 7 \right) \cdot 3^{\log_3 14}.$$

14

12. Вычислите:

$$\frac{\log_2 40}{\lg 2} - \frac{\log_2 5}{\log_{80} 2}.$$

3

13. Вычислите:

$$4^{3 - \log_5 10} \cdot 4^{\log_5 2}.$$

91

14. Вычислите:

$$\log_{\sqrt{3}} (3\sqrt{3} + 2\sqrt{6}) + \log_{\sqrt{3}} (3\sqrt{3} - 2\sqrt{6}).$$

7

15. Вычислите:

$$\sqrt{25^{\frac{1}{\log_6 5}} + 49^{\frac{1}{\log_8 7}}}.$$

101

16. Вычислите:

$$81^{\frac{1}{\log_5 3}} + 27^{\log_9 36} + 3^{\frac{4}{\log_7 9}}.$$

068

17. Вычислите:

$$\text{a) } \log_2 \log_2 \sqrt[4]{2}; \quad \text{б) } \log_3 \log_3 \sqrt[3]{3}.$$

7- (9; 3- (8

18. Вычислите:

$$\frac{\left(27^{\frac{1}{\log_2 3}} + 5^{\log_{25} 49} \right) \left(81^{\frac{1}{\log_4 9}} - 8^{\log_4 9} \right)}{3 + 5^{\frac{1}{\log_{16} 25}} \cdot 5^{\log_5 3}}.$$

11-

19. Вычислите:

$$36^{\log_6 5} + 10^{1 - \lg 2} - 3^{\log_9 36}.$$

24

20. Вычислите:

$$\left(81^{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\log_9 4} + 25^{\log_{125} 8}\right) \cdot 49^{\log_7 2}.$$

61

21. Вычислите:

$$\frac{81^{\frac{1}{\log_5 9}} + 3^{\frac{3}{\log_{\sqrt{6}} 3}}}{409} \left(\left(\sqrt{7} \right)^{\frac{2}{\log_{25} 7}} - 125^{\log_{25} 6} \right).$$

1

22. Известно, что $\log_a 27 = b$. Найдите $\log_{\sqrt{3}} \sqrt[6]{a}$.

$q/1$

23. Известно, что $\lg 5 = a$ и $\lg 3 = b$. Найдите $\log_{30} 8$.

$\frac{q+1}{v\xi-\xi}$

24. Известно, что $\lg 2 = a$ и $\log_2 7 = b$. Найдите $\lg 56$.

$v\xi + qv$

25. Известно, что $\log_{60} 2 = a$ и $\log_{60} 5 = b$. Найдите $\log_{60} 27$.

$(q - v\xi - 1)\xi$

26. Известно, что $\log_{12} 27 = a$. Найдите $\log_6 16$.

$\frac{v+\xi}{v-\xi} \frac{4(3-a)}{v}$

27. Известно, что $\lg 2 = a$ и $\lg 13 = b$. Найдите $\log_5 3,38$.

$\frac{v-1}{2-q\xi+v}$

28. Вычислите:

$$\log_3 12 - \log_3 7 \cdot \log_7 5 \cdot \log_5 4.$$

1

29. Вычислите:

$$\log_3 2 \cdot \log_4 3 \cdot \log_5 4 \cdot \log_6 5 \cdot \log_7 6 \cdot \log_8 7.$$

$\frac{\xi}{1}$

30. Вычислите:

$$\log_{15} 20 \cdot \log_{16} 15 \cdot \log_{17} 16 \cdot \log_{18} 17 \cdot \log_{19} 18 \cdot \log_{20} 19.$$

1

