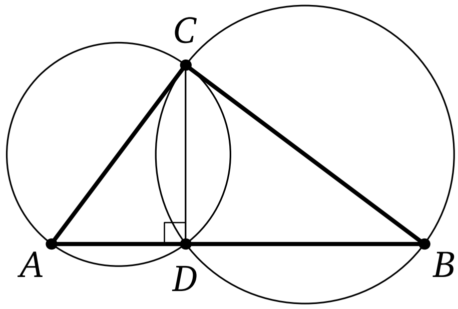
§ 10. Пересекающиеся окружности

Решение задачи 10 из диагностической работы

10. На катетах прямоугольного треугольника как на диаметрах построены окружности. Найдите их общую хорду, если катеты равны 3 и 4.

Ответ: $\frac{12}{5}$.



Р е ш е н и е. Пусть CD — общая хорда окружностей, построенных на катетах $AC=3$ и $BC=4$ прямоугольного треугольника ABC как на диаметрах. Тогда $\angle ADC=\angle BDC=90^\circ$ как вписанные углы, опирающиеся на диаметр. Значит, точка D лежит на гипотенузе AB, а CD — высота прямоугольного треугольника ABC, проведённая из вершины прямого угла.

По теореме Пифагора $AB=\sqrt{9+16}=5$, а поскольку

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AC\cdot BC \quad \text{и} \quad S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot CD,$$

получаем $\frac{1}{2}AC\cdot BC=\frac{1}{2}AB\cdot CD$, откуда находим, что

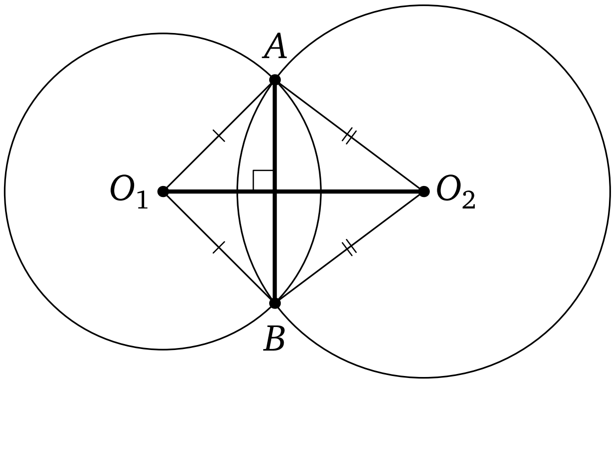
$$CD=\frac{AC\cdot BC}{AB}=\frac{3\cdot 4}{5}=\frac{12}{5}. \qquad \triangleleft$$

* * *

Докажем важнейшее свойство пересекающихся окружностей.

Утверждение. *Линия центров пересекающихся окружностей перпендикулярна их общей хорде и делит её пополам.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть AB — общая хорда пересекающихся окружностей с центрами O_1 и O_2. Точки O_1 и O_2 равноудалены от



концов отрезка AB, поэтому O_1O_2 — серединный перпендикуляр к отрезку AB, что и требовалось доказать. □

Пример 1. Радиусы двух пересекающихся окружностей равны 13 и 15, а общая хорда равна 24. Найдите расстояние между центрами.

Ответ: 14 или 4.

Р е ш е н и е. Пусть окружность радиуса 13 с центром O_1 и окружность радиуса 15 с центром O_2 пересекаются в точках A и B. Тогда $O_1O_2 \perp AB$ и прямая O_1O_2 проходит через середину M отрезка AB.

Из прямоугольных треугольников AMO_1 и AMO_2 по теореме Пифагора находим, что

$$MO_1 = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5, \quad MO_2 = \sqrt{15^2 - 12^2} = 9.$$

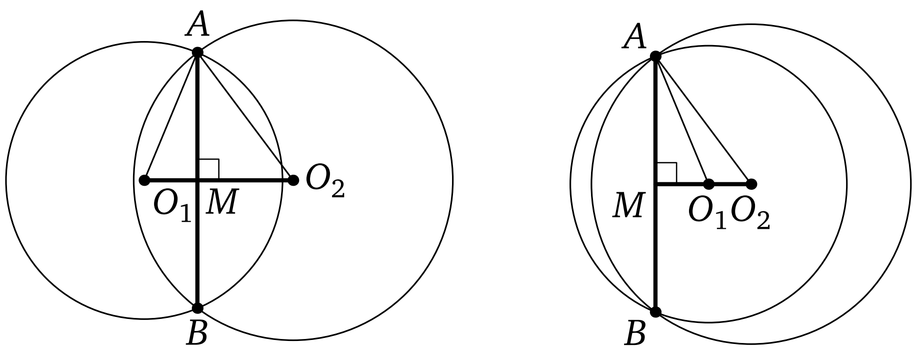


Рис. 1 Рис. 2

Если точки O_1 и O_2 лежат по разные стороны от прямой AB (рис. 1), то

$$O_1O_2 = MO_1 + MO_2 = 5 + 9 = 14.$$

Если же точки O_1 и O_2 лежат по одну сторону от прямой AB (рис. 2), то

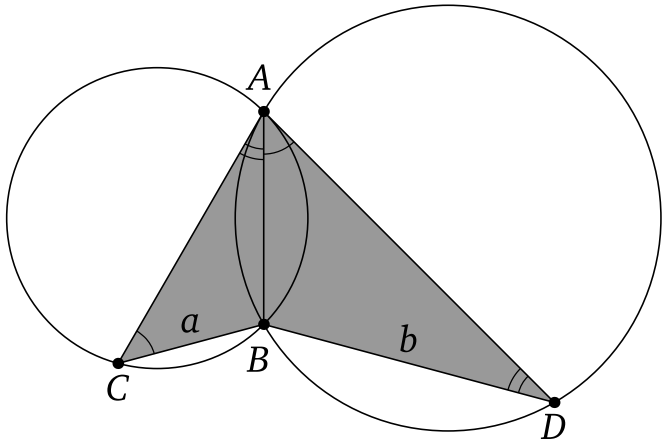
$$O_1O_2 = MO_2 - MO_1 = 9 - 5 = 4. \quad \triangleleft$$

Пример 2. Две окружности пересекаются в точках A и B. В каждой из этих окружностей проведены хорды AC и AD, причём хорда одной окружности касается другой окружности. Найдите AB, если $CB = a$, $DB = b$.

Ответ: $\sqrt{ab}$.

Р е ш е н и е. Из теоремы об угле между касательной и хордой следует, что

$$\angle BAC = \angle BDA, \quad \angle BAD = \angle BCA,$$



поэтому треугольники ABC и DBA подобны по двум углам. Следовательно,

$$\frac{AB}{BD} = \frac{BC}{AB},$$

откуда находим, что

$$AB^2 = BC \cdot BD = ab, \quad AB = \sqrt{ab}. \qquad \lhd$$

Подготовительные задачи

10.1. Прямая, проходящая через общую точку A двух окружностей, вторично пересекает эти окружности в точках B и C. Расстояние между проекциями центров окружностей на эту прямую равно 12. Найдите BC, если известно, что точка A лежит на отрезке BC.

10.2. Окружности с центрами O_1 и O_2 пересекаются в точках A и B. Известно, что $\angle AO_1B = 90°$, $\angle AO_2B = 60°$, $O_1O_2 = a$. Найдите радиусы окружностей.

10.3. Отрезок, соединяющий центры двух пересекающихся окружностей, делится их общей хордой на отрезки, равные 5 и 2. Найдите общую хорду, если известно, что радиус одной окружности вдвое больше радиуса другой.

10.4. Через вершину A остроугольного треугольника ABC проведена прямая, параллельная стороне BC, равной a, и пересекающая окружности, построенные на сторонах AB и AC как на диаметрах, в точках M и N, отличных от A. Найдите MN.

10.5. Две окружности пересекаются в точках A и B. Через точку A проведены диаметры AC и AD этих окружностей. Найдите расстояние между центрами окружностей, если $BC = a$ и $BD = b$.

10.6. В треугольнике ABC на наибольшей стороне BC, равной b, выбирается точка M. Найдите наименьшее расстояние между центрами окружностей, описанных около треугольников BAM и ACM.

Тренировочные задачи

10.7. Две окружности радиусов 3 и 4, расстояние между центрами которых равно 5, пересекаются в точках A и B. Через точку B проведена прямая, пересекающая окружности в точках C и D, причём $CD = 8$ и точка B лежит между точками C и D. Найдите площадь треугольника ACD.

10.8. Дан ромб $ABCD$. Радиусы окружностей, описанных около треугольников ABC и BCD, равны 1 и 2. Найдите расстояние между центрами этих окружностей.

10.9. Две окружности радиусов $\sqrt{5}$ и $\sqrt{2}$ пересекаются в точке A. Расстояние между центрами окружностей равно 3. Через точку A проведена прямая, пересекающая окружности в точках B и C так, что $AB = AC$ (точка B не совпадает с C). Найдите AB.

10.10. Первая из двух окружностей проходит через центр второй и пересекает её в точках A и B. Касательная к первой окружности, проходящая через точку A, делит вторую окружность на дуги, градусные меры которых относятся как $m : n$ $(m < n)$. В каком отношении вторая окружность делит первую?

10.11. Через общую точку C двух равных окружностей проведены две прямые, пересекающие данные окружности в точках A, B и M, N соответственно. Прямая AB параллельна линии центров, а прямая MN образует угол α с линией центров. Известно, что $AB = a$. Найдите MN.

10.12. В параллелограмме $ABCD$ известны стороны $AB = a$, $BC = b$ и угол $\angle BAD = \alpha$. Найдите расстояние между центрами окружностей, описанных около треугольников BCD и DAB.

10.13. Две окружности пересекаются в точках A и K. Их центры расположены по разные стороны от прямой, содержащей отрезок AK. Точки B и C лежат на разных окружностях. Прямая, содержащая отрезок AB, касается одной окружности в точке A. Прямая, содержащая отрезок AC, касается другой окружности также в точке A. Длина отрезка BK равна 1, длина отрезка CK равна 4, а тангенс угла CAB равен $\frac{1}{\sqrt{15}}$. Найдите площадь треугольника ABC.

Задачи на доказательство и вычисление

10.14.1. Дан треугольник ABC с наибольшим углом при вершине A. Окружности, построенные на сторонах AB и AC как на диаметрах, пересекаются в точке D, отличной от A.

а) Докажите, что точка D лежит на прямой BC.

б) Найдите угол BAC, если $\angle ACB = 30°$, а $DB : DC = 1 : 3$.

10.14.2. Окружности, построенные на сторонах AB и BC треугольника ABC с тупым углом при вершине A как на диаметрах, пересекаются в точке P, отличной от B.

а) Докажите, что точка P лежит на прямой AC.

б) Найдите угол ABC, если $\angle ACB = 30°$, а $AP : CP = 1 : 3$.

10.15.1. Окружность с центром O вписана в угол, равный $60°$. Окружность большего радиуса с центром O_1 также вписана в этот угол и проходит через точку O.

а) Докажите, что радиус второй окружности вдвое больше радиуса первой.

б) Найдите длину общей хорды этих окружностей, если радиус первой окружности равен $2\sqrt{15}$.

10.15.2. Окружность с центром O вписана в угол, равный $2\arcsin\frac{2}{3}$. Окружность большего радиуса с центром O_1 также вписана в этот угол и проходит через точку O.

а) Докажите, что радиус второй окружности втрое больше радиуса первой.

б) Найдите длину общей хорды этих окружностей, если радиус первой окружности равен 3.

10.16.1. Две окружности пересекаются в точках P и Q. Прямая, проходящая через точку P, второй раз пересекает первую окружность в точке A, а вторую — в точке D. Прямая, проходящая через точку Q параллельно AD, второй раз пересекает первую окружность в точке B, а вторую — в точке C.

а) Докажите, что четырёхугольник $ABCD$ — параллелограмм.

б) Найдите отношение $BP : PC$, если радиус первой окружности вдвое больше радиуса второй.

10.16.2. Две окружности пересекаются в точках A и B. Прямая, проходящая через точку A, вторично пересекает эти окружности в точках C и D, причём точка A лежит между C и D, а хорды AC и AD пропорциональны радиусам своих окружностей.

а) Докажите, что биссектрисы углов ADB и ACB пересекаются на отрезке AB.

б) Найдите AB, если радиус одной окружности вдвое больше радиуса другой, а хорды AC и BC меньшей окружности равны 3 и 5 соответственно.

10.17.1. Окружности с центрами O_1 и O_2 разных радиусов пересекаются в точках A и B. Хорда AC большей окружности пересекает меньшую окружность в точке M и делится этой точкой пополам.

а) Докажите, что проекция отрезка O_1O_2 на прямую AC в четыре раза меньше AC.

б) Найдите O_1O_2, если радиусы окружностей равны 5 и 17, а $AC=16$.

10.17.2. Окружности с центрами O_1 и O_2 разных радиусов пересекаются в точках P и Q. Хорда PM большей окружности пересекает меньшую окружность в точке K, причём $MK=2PK$.

а) Докажите, что проекция отрезка O_1O_2 на прямую PM в три раза меньше PM.

б) Найдите O_1O_2, если радиусы окружностей равны 13 и 25, а $PM=30$.

10.18.1. На диагоналях трапеции как на диаметрах построены окружности.

а) Докажите, что их общая хорда перпендикулярна основаниям трапеции.

б) Найдите длину этой хорды, если основания трапеции равны 1 и 11, а диагонали — 6 и 8.

10.18.2. На диагоналях трапеции как на диаметрах построены окружности.

а) Докажите, что общая хорда этих окружностей делится пополам средней линией трапеции.

б) Найдите основания трапеции, если её диагонали перпендикулярны, равны 10 и 24, а расстояние между центрами окружностей равно 1.

10.19.1. Две равные окружности с центрами O_1 и O_2 пересекаются в точках M и N. Лучи O_1M и O_1N вторично пересекают окружность с центром O_2 в точках A и B соответственно, причём M — середина O_1A.

а) Докажите, что точки A, B и O_2 лежат на одной прямой.

б) Окружности пересекают отрезок O_1O_2 в точках C и D. Найдите отношение отрезка CD к радиусу окружностей.

10.19.2. Даны две равные окружности с центрами O_1 и O_2, пересекающиеся в точках P и Q. Отрезок O_1O_2 делится этими окружностями на три равные части. Лучи O_1P и O_1Q вторично пересекают окружность с центром O_2 в точках C и D соответственно.

а) Докажите, что отрезок O_1P в четыре раза больше отрезка CP.

б) В каком отношении отрезок O_1O_2 делится прямой CD?

10.20.1. Дана трапеция с основаниями AD и BC. Окружности, построенные на боковых сторонах AB и CD как на диаметрах, пересекаются в точках M и N.

а) Докажите, что $MN \perp AD$.

б) Найдите MN, если боковые стороны трапеции равны 12 и 16, а сумма проекций диагоналей на большее основание равна 20.

10.20.2. Дана трапеция $KLMN$ с основаниями KN и LM. Окружности, построенные на боковых сторонах KL и MN как на диаметрах, пересекаются в точках A и B.

а) Докажите, что средняя линия трапеции лежит на серединном перпендикуляре к отрезку AB.

б) Найдите AB, если боковые стороны трапеции равны 26 и 28, а средняя линия трапеции равна 15.

10.21.1. Отрезок AB — диаметр окружности с центром O. Вторая окружность с центром в точке B пересекается с первой окружностью в точках C и D. Касательная, проведённая в точке C к первой окружности, вторично пересекает вторую окружность в точке P.

а) Докажите, что треугольники AOC и CBP подобны.

б) Найдите AP, если $BC=15$ и $PC=24$.

10.21.2. Отрезок KL — диаметр окружности с центром O. Вторая окружность с центром в точке L пересекается с первой окружностью в точках P и Q. Касательная, проведённая в точке P к первой окружности, вторично пересекает вторую окружность в точке M.

а) Докажите, что треугольники KOP и PLM подобны.

б) Найдите площадь треугольника KPM, если $KP=10$ и $PL=5$.

10.22.1. Точка M — середина гипотенузы AB прямоугольного треугольника ABC. Около треугольников ACM и BCM описаны окружности с центрами O_1 и O_2 соответственно.

а) Докажите, что треугольник O_1MO_2 прямоугольный.

б) Найдите расстояние между центрами окружностей, если $AC=72$, $BC=96$.

10.22.2. Точка M — середина катета BC прямоугольного треугольника ABC с прямым углом при вершине C. Около треугольников ACM и ABM описаны окружности с центрами O_1 и O_2 соответственно, P — середина отрезка BM.

а) Докажите, что $\angle PO_2O_1=\angle AMC$.

б) Найдите расстояние между центрами окружностей, если $AC=2\sqrt{2}$, $BC=4\sqrt{2}$.