

$$\begin{aligned} \Rightarrow S_{\triangle PQR} &= S_{\triangle ABC} \left(\frac{mn}{bc} + \frac{kn}{ac} + \frac{mk}{ab} \right) \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle PQR}} &= \frac{1}{\frac{mn}{bc} + \frac{kn}{ac} + \frac{mk}{ab}} = \frac{abc}{amn + bkn + cmk}. \end{aligned}$$

О т в е т. $\frac{abc}{amn + bkn + cmk}$.

Задачи

1. В остроугольном треугольнике площади S известны величины α и β углов A и B . Найдите длину высоты, опущенной на сторону, прилежащую к углам A и B .
2. В треугольнике KMN , в котором $\sin \widehat{KNM} = \sqrt{3}/2$, $\cos \widehat{KMN} = 1/3$, проведены высоты NP и MQ . Найдите значение отношения $|NP| : |MQ|$.
3. Длины сторон AB , BC и AC треугольника ABC образуют в указанном порядке геометрическую прогрессию. Найдите знаменатель этой прогрессии, если известно, что отношение длины высоты треугольника ABC , проведённой из вершины A , к длине радиуса вписанной в этот треугольник окружности равно 3.
4. В равнобедренном треугольнике ABC $|AB| = |BC|$, AD – биссектриса, $|BD| = b$, $|DC| = c$. Найдите длину биссектрисы AD .
5. Известно, что длины высот треугольника равны h_1 , h_2 и h_3 . Найдите его площадь.
6. Точка M лежит внутри равнобедренного треугольника ABC с основанием AC на расстоянии 6 от его боковых сторон и на расстоянии $\sqrt{3}$ от его основания. Найдите длину этого основания, если $\widehat{B} = 2\pi/3$.
7. В треугольнике BCE известно, что $|CE| : |BC| = 3$, а величина угла BCE равна $\pi/3$. Отрезок CK – биссектриса треугольника. Найдите $|KE|$, если длина радиуса окружности, описанной около треугольника BCE , равна $8\sqrt{3}$.
8. В треугольнике ABC градусная мера угла B равна 30° , $|AB| = 4$, $|BC| = 6$. Биссектриса угла B пересекает сторону AC в точке D . Найдите площадь треугольника ABD .
9. В треугольнике ABC проведена биссектриса CD , при этом величины углов ADC и CDB относятся как 7 : 5. Найдите длину отрезка AD , если известно, что $|BC| = 1$, $\widehat{BAC} = \pi/6$.
10. В треугольнике ABC биссектрисы BD и CE пересекаются в точке O , $|AB| = 14$, $|BC| = 6$, $|AC| = 10$. Найдите длину отрезка OD .
11. В тупоугольном треугольнике ABC на стороне AB длины 14 выбрана точка L , равноудаленная от сторон AC и BC , а на отрезке AL – точка K , равноудаленная от вершин A и B . Найдите синус величины угла ACB , если $|KL| = 1$, $\widehat{CAB} = \pi/4$.

12. Величины углов A, B и C треугольника ABC составляют арифметическую прогрессию с разностью $\pi/7$. Биссектрисы этого треугольника пересекаются в точке D . Точки A', B' и C' находятся на продолжениях отрезков DA, DB, DC за точки A, B, C соответственно на одинаковом расстоянии от точки D . Доказать, что величины углов A', B', C' треугольника $A'B'C'$ также образуют арифметическую прогрессию. Найдите её разность.
13. В треугольнике ABC биссектриса угла ABC пересекает сторону AC в точке K . Известно, что $|BC| = 2$, $|KC| = 1$, $|BK| = \frac{3\sqrt{2}}{2}$. Найдите площадь треугольника ABC .
14. Треугольник ABC вписан в окружность, длина радиуса которой равна $\sqrt{3} - 1$. Градусная мера угла BAC равна 60° , а длина радиуса окружности, касающейся стороны BC и продолжений сторон AB и AC , равна 1. Найдите градусные меры углов ABC и ACB .
15. Величина одного из углов треугольника равна $2\pi/3$, длина противолежащей ему стороны равна 6, а длина одного из отрезков, на которые она разделена проведённой к ней биссектрисой этого треугольника, равна 2. Найдите величины двух других углов треугольника.
16. Среди треугольников KLM , у которых длина радиуса описанной окружности равна 10, длина стороны KL равна 16, а длина высоты MH равна 3,9, выбирается тот, у которого длина медианы MN наименьшая. Найдите величину его угла KML .
17. В треугольнике ABC проведена медиана AD , $|AD| = m$, $|AB| = c$, $|AC| = b$. Найдите \widehat{BAC} .
18. Найдите величину угла A треугольника ABC , если известно, что $|AB| = 2$, $|AC| = 4$, а длина медианы AM равна $\sqrt{7}$.
19. В треугольнике ABC проведена медиана AM . Найдите площадь треугольника ABC , если $|AB| = |BC| = 2|AC|$, $|AM| = 4$.
20. Найдите величины углов, образованных медианой BB_1 треугольника ABC со сторонами AB и BC , если $|AB| = 6$, $|BC| = 8$, $|BB_1| = 5$.
21. В треугольнике ABC проведена прямая, пересекающая стороны AB и BC в точках P и Q соответственно. Известно, что $|AB| = 3$, $|AC| = \sqrt{5}$, длина медианы, проведённой из вершины A к стороне BC , равна $\sqrt{6}$, а длины отрезков AP , PQ и QC равны между собой. Найдите длину отрезка PQ .
22. В треугольнике ABC проведены биссектриса BK и медиана BM . Найдите длину отрезка KM , если $\widehat{ABM} = \pi/4$, $\widehat{CBM} = \pi/6$, $|AK| = 6$.
23. В треугольнике ABC проведены биссектриса BD и медиана AE . Известно, что $|AB| = 8$, $|BC| = |BD| = 6$. Найдите длину медианы AE .
24. В треугольнике ABC проведены биссектриса AL и медиана AM . Известно, что $|AL| = 6$, $|AM| = 8$, $|AC| = 2 \cdot |AB|$. Найдите длину стороны BC .

25. В треугольнике KMN проведены высота NA , биссектриса NB и медиана NC , которые делят угол KNM на четыре равные части. Найдите длины высоты NA , биссектрисы NB и медианы NC , если длина радиуса описанной около треугольника KMN окружности равна R .
26. В треугольнике ABC проведены высоты CH и AK . Найдите длину стороны AC , если $|AB| = c$, $|CH| = h$, $|AK| = k$.
27. В треугольнике ABC проведена высота BH , при этом оказалось, что длины отрезков CH и AH относятся как $10 : 3$. Найдите площадь треугольника ABC , если известно, что $|BH| = h$, $\widehat{ABC} = \pi/6$.
28. В треугольнике ABC проведена биссектриса BL , длина которой равна l . Найдите длины сторон треугольника ABC , если известно, что расстояния от точек A и C до прямой BL равны p и q соответственно.
29. Вычислите величину угла A треугольника ABC , если величина угла B равна $\pi/5$ и известно, что биссектриса угла C делит пополам угол между медианой и высотой, проведёнными из этой вершины.
30. На продолжении стороны BC треугольника ABC за точку B расположена точка E так, что биссектрисы углов AEC и ABC пересекаются в точке K , лежащей на стороне AC . Длина отрезка BE равна 1, длина отрезка BC равна 2, градусная мера угла EKB равна 30° . Найдите длину стороны AB .
31. В треугольнике ABC известно, что $|AC| = |BC| = 12$, $|AB| = 6$, AD – биссектриса. Найдите длину радиуса окружности, описанной около треугольника ADC и сравните эту длину с числом $13/2$.
32. В треугольнике ABC на сторонах AB и BC отмечены точки M и N соответственно, причем $|BM| = |BN|$. Через точку M проведена прямая, перпендикулярная BC , а через точку N – прямая, перпендикулярная AB . Эти прямые пересекаются в точке O . Продолжение отрезка BO пересекает сторону AC в точке P , $|AP| = 5$, $|PC| = 4$. Найдите длину отрезка BP , если известно, что $|BC| = 6$.
33. Вокруг треугольника MKN описана окружность с центром в точке O , длина её радиуса равна r . Длина стороны HM равна a . Известно, что справедливо равенство $|HK|^2 - |HM|^2 = |HM|^2 - |MK|^2$. Найдите площадь треугольника OLK , где L – точка пересечения медиан треугольника MKN .
34. В треугольнике KLM проведены биссектрисы KA и MB , которые пересекаются в точке O . Диагонали четырехугольника $AOBL$ пересекаются в точке C . Найдите численные значения отношений $|BC| : |CA|$ и $|LC| : |CO|$, если известно, что $|KL| = m$, $|KM| = l$, $|LM| = k$.
35. Отрезки AM и BP являются медианами треугольника ABC . Известно, что угол APB равен углу BMA , $|BP| = 1$, косинус величины угла ACB равен $4/5$. Найдите площадь треугольника ABC .
36. Внутри прямоугольного треугольника ABC с прямым углом C взята точка O таким образом, что $|OA| = |OB| = b$. CD – высота треугольника ABC , точка E – середина отрезка OC , $|DE| = a$. Найдите $|CE|$.