



средняя линия треугольника  $CSF$ ). Поскольку  $SF = SD = SA = 2a$ , треугольник  $FDS$  равнобедренный с основанием  $DF = a\sqrt{3}$ . Следовательно, косинус искомого угла равен

$$\frac{\frac{1}{2}DF}{SF} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{4}. \quad \triangleleft$$

### Подготовительные задачи

1. Дан куб  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ . Найдите углы между прямыми: а)  $AA_1$  и  $BC$ ; б)  $AA_1$  и  $BD$ ; в)  $AA_1$  и  $BD_1$ ; г)  $BA_1$  и  $CB_1$ ; д)  $CA_1$  и  $BC_1$ .

2. Дан правильный тетраэдр  $ABCD$ . Точки  $K$ ,  $M$  и  $N$  — середины рёбер  $BD$ ,  $AB$  и  $AC$  соответственно. Найдите углы между прямыми: а)  $AB$  и  $CD$ ; б)  $DM$  и  $BC$ ; в)  $DM$  и  $BN$ ; г)  $AK$  и  $BN$ .

3. Дана правильная четырёхугольная пирамида  $SABCD$  с вершиной  $S$ . Все рёбра пирамиды равны,  $M$  — середина бокового ребра  $SD$ . Найдите углы между прямыми: а)  $AS$  и  $BD$ ; б)  $AS$  и  $CD$ ; в)  $SA$  и  $CM$ ; г)  $SB$  и  $CM$ .

4. Дана правильная треугольная призма  $ABCA_1 B_1 C_1$ . Боковое ребро  $AA_1$  равно стороне основания  $ABC$ . Точка  $M$  — середина ребра  $BC$ . Найдите углы между прямыми: а)  $AC$  и  $B_1 C_1$ ; б)  $AA_1$  и  $BC_1$ ; в)  $AM$  и  $BC_1$ ; г)  $BC_1$  и  $CA_1$ .

5. Дана правильная шестиугольная призма  $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ . Боковое ребро  $AA_1$  равно стороне основания  $ABCDEF$ . Найдите углы между прямыми: а)  $EA_1$  и  $AB$ ; б)  $BE_1$  и  $AF$ ; в)  $BD_1$  и  $CD$ ; г)  $BE_1$  и  $AB_1$ .

6. Дана правильная шестиугольная пирамида  $SABCDEF$  с вершиной  $S$ . Боковое ребро вдвое больше стороны основания. Найдите углы между прямыми: а)  $SB$  и  $AF$ ; б)  $SC$  и  $AE$ ; в)  $SB$  и  $AE$ ; г)  $SB$  и  $AD$ .

**Задачи на доказательство и вычисление**

**2.1.** Дана треугольная пирамида  $ABCD$ .

а) Постройте её сечение плоскостью, проходящей через середину ребра  $AB$  параллельно рёбрам  $AD$  и  $BC$ .

б) Найдите угол между прямыми  $AD$  и  $BC$ , если  $AD = 24$ ,  $BC = 10$ , а расстояние между серединами рёбер  $BD$  и  $AC$  равно 13.

**2.2.** Точка  $K$  лежит на ребре  $AD$  треугольной пирамиды  $ABCD$ .

а) Постройте сечение пирамиды плоскостью  $\alpha$ , проходящей через точку  $K$  параллельно рёбрам  $AB$  и  $CD$ .

б) Пусть  $M$  — точка пересечения плоскости  $\alpha$  с ребром  $BC$ . Найдите угол между прямыми  $AB$  и  $CD$ , если  $K$  — середина ребра  $AD$ ,  $AB = 8$ ,  $CD = 6$ ,  $KM = 5$ .

**2.3.** В правильной шестиугольной пирамиде  $SABCDEF$  с вершиной  $S$  точка  $M$  — середина бокового ребра  $SC$ .

а) Постройте точку пересечения прямой  $BM$  с плоскостью грани  $ESF$ .

б) Найдите угол между прямыми  $BM$  и  $DE$ .

**2.4.** Точка  $G$  лежит на боковом ребре  $SC$  правильной шестиугольной пирамиды  $SABCDEF$  с вершиной  $S$ .

а) Постройте точку пересечения прямой  $BG$  с плоскостью боковой грани  $ESF$ .

б) Найдите угол между прямыми  $BG$  и  $AD$ , если стороны основания пирамиды равны 6, боковые рёбра равны  $3\sqrt{13}$ , а  $SG : GC = 1 : 2$ .

**2.5.** Основания призмы  $ABCA_1B_1C_1$  — равносторонние треугольники. Точки  $M$  и  $M_1$  — центры оснований  $ABC$  и  $A_1B_1C_1$  соответственно.

а) Докажите, что угол между прямыми  $BM$  и  $C_1M_1$  равен  $60^\circ$ .

б) Найдите угол между прямыми  $BM_1$  и  $C_1M$ , если призма прямая и  $AB : AA_1 = 3 : 2$ .

**2.6.** Основание прямой призмы  $ABCA_1B_1C_1$  — равнобедренный прямоугольный треугольник  $ABC$  с прямым углом при вершине  $C$ . Точка  $M$  — середина ребра  $AB$ . Известно, что  $AB = 2AA_1$ .

а) Докажите, что прямые  $A_1C$  и  $MB_1$  перпендикулярны.

б) Найдите угол между прямыми  $AC_1$  и  $MB_1$ .

**2.7.** Дана правильная шестиугольная призма  $ABCDEF A_1B_1C_1D_1E_1F_1$  со стороной основания  $\sqrt{3}$  и боковым ребром 1.

а) Докажите, что плоскости  $ACA_1$  и  $B_1CE_1$  перпендикулярны.

б) Найдите угол между прямыми  $BF_1$  и  $CD_1$ .

**2.8.** Дана правильная шестиугольная призма  $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ .

а) Докажите, что плоскости  $AB_1 F$  и  $ACC_1$  перпендикулярны.

б) Найдите угол между прямыми  $AB_1$  и  $CF_1$ , если  $AA_1 = AB\sqrt{2}$ .

**2.9.** Основание пирамиды  $SABCD$  — параллелограмм  $ABCD$ . Точка  $K$  лежит на ребре  $SD$  и отлична от  $S$  и  $D$ .

а) Может ли сечение пирамиды плоскостью, проходящей через прямую  $AB$  и точку  $K$ , быть параллелограммом?

б) Пусть  $K$  — середина ребра  $SD$ ,  $M$  — середина ребра  $AB$ , а пирамида  $SABCD$  правильная, причём все её рёбра равны. Найдите угол между прямыми  $AK$  и  $SM$ .

**2.10.** Основание пирамиды  $SABCD$  — параллелограмм  $ABCD$ . Точка  $K$  — середина ребра  $SD$ .

а) Плоскость проходит через точку  $K$  параллельно медианам  $BM$  и  $SN$  граней  $BSC$  и  $ASD$ . Постройте прямую пересечения этой плоскости с плоскостью основания пирамиды.

б) Найдите угол между прямыми  $BM$  и  $SN$ , если пирамида  $SABCD$  правильная, причём все её рёбра равны.

**2.11.** Дан прямоугольный параллелепипед  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ . Точки  $K$  и  $L$  — центры граней  $BB_1 C_1 C$  и  $A_1 B_1 C_1 D_1$  соответственно.

а) Докажите, что точка пересечения прямой  $KL$  с плоскостью основания  $ABCD$  равноудалена от вершин  $B$  и  $C$ .

б) Пусть  $M$  — середина ребра  $CD$ . Найдите котангенс угла между прямыми  $MD_1$  и  $KL$ , если известно, что  $AB = 2AA_1$ .

**2.12.** Дан параллелепипед  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ . Точка  $M$  — середина ребра  $A_1 B_1$ .

а) Докажите, что любая плоскость, проведённая через точку  $M$  параллельно диагонали  $CA_1$  параллелепипеда, проходит через центр грани  $BB_1 C_1 C$ .

б) Найдите угол между прямыми  $BM$  и  $CB_1$ , если параллелепипед прямоугольный,  $AB = 2BC$  и  $CC_1 : BC = 4 : 3$ .

**2.13.** Основание пирамиды  $SABCD$  — квадрат  $ABCD$ , высота пирамиды проходит через точку  $D$ .

а) Докажите, что все боковые грани пирамиды — прямоугольные треугольники.

б) Пусть  $M$  — середина бокового ребра  $SC$ . Найдите угол между прямыми  $AM$  и  $BC$ , если известно, что отношение высоты пирамиды к стороне её основания равно  $\sqrt{11}$ .

**2.14.** Дана правильная четырёхугольная пирамида  $SABCD$  с вершиной  $S$ . Точки  $M$  и  $N$  — середины рёбер  $AB$  и  $SC$ .

а) Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через прямую  $MN$  параллельно  $SA$ .

б) Найдите угол между прямыми  $SA$  и  $MN$ , если боковое ребро пирамиды равно стороне основания.

**2.15.** В основании пирамиды  $DABC$  лежит прямоугольный треугольник  $ABC$  с прямым углом при вершине  $C$ . Высота пирамиды проходит через точку  $B$ .

а) Докажите, что отрезок, соединяющий середины рёбер  $BC$  и  $AD$ , равен отрезку, соединяющему середины рёбер  $AB$  и  $CD$ .

б) Найдите угол между прямой  $BD$  и прямой, проходящей через середины рёбер  $BC$  и  $AD$ , если известно, что  $BD = AC$ .

**2.16.** Дана правильная треугольная призма  $ABCA_1B_1C_1$ . На ребре  $BC$  взята точка  $M$ , причём  $BM : CM = 1 : 2$ .

а) Докажите, что плоскость, проходящая через центры граней  $A_1B_1C_1$  и  $BB_1C_1C$  параллельно ребру  $AC$ , проходит через точку  $M$ .

б) Пусть  $K$  — середина ребра  $A_1C_1$ ,  $N$  — центр грани  $BB_1C_1C$ . Найдите угол между прямыми  $B_1K$  и  $MN$ , если  $AC = 18\sqrt{3}$ ,  $AA_1 = \sqrt{13}$ .

**2.17.** Основание призмы  $ABCDEF A_1B_1C_1D_1E_1F_1$  — правильный шестиугольник  $ABCDEF$ .

а) Постройте точку пересечения прямой  $B_1E$  с плоскостью  $ACD_1$ .

б) Найдите угол между прямыми  $AB_1$  и  $BD_1$ , если призма правильная, а  $AA_1 : AB = \sqrt{3} : 1$ .

**2.18.** Дана прямая призма  $ABCA_1B_1C_1$ . Плоскость, проходящая через центр основания  $A_1B_1C_1$  и середину  $K$  ребра  $BC$ , параллельна прямой  $AB$ . Эта плоскость пересекает прямую  $CC_1$  в точке  $L$ .

а) Докажите, что  $CL = 3CC_1$ .

б) Найдите угол между прямыми  $KL$  и  $AC_1$ , если  $\angle ACB = 90^\circ$  и  $AA_1 = AC = \frac{1}{4}BC$ .

**2.19.** В основании пирамиды  $SABCD$  лежит трапеция  $ABCD$  с основаниями  $AD$  и  $BC$  и прямым углом при вершине  $A$ , причём  $BC = 2AD$ . Высота пирамиды проходит через точку  $A$ .

а) Докажите, что сечение пирамиды плоскостью, проходящей через прямую  $AD$  и середину  $M$  ребра  $SC$ , — прямоугольник.

б) Найдите косинус угла между прямыми  $AM$  и  $CD$ , если известно, что  $AD = AB$  и  $SA = \sqrt{3}AB$ .

**2.20.** В основании пирамиды  $SABCD$  лежит равнобедренная трапеция  $ABCD$  с основаниями  $AD$  и  $BC$ . Высота пирамиды проходит че-

рез точку  $A$ ,  $SH$  — высота треугольника  $BSC$ . Известно, что  $BC = 2AD$ ,  $AB = AD = 2SA$ .

а) Докажите, что  $SH = CD$ .

б) Найдите косинус угла между прямыми  $CD$  и  $SH$ .

**2.21.** Основание  $ABCD$  прямой призмы  $ABCDA_1B_1C_1D_1$  — ромб с острым углом  $60^\circ$  при вершине  $A$ . Точка  $M$  — середина ребра  $CD$ , точка  $H$  лежит на стороне  $AB$ , причём  $DH$  — высота ромба  $ABCD$ .

а) Докажите, что  $D_1M \perp DH$ .

б) Найдите угол между прямыми  $MD_1$  и  $BC_1$ , если  $\angle ABA_1 = 60^\circ$ .

**2.22.** Основание прямой призмы  $ABCDA_1B_1C_1D_1$  — равнобедренная трапеция  $ABCD$  с основаниями  $AD = 2BC$  и боковой стороной  $AB = BC$ .

а) Докажите, что  $AB \perp DB_1$ .

б) Найдите угол между прямыми  $CD_1$  и  $DB_1$ , если боковая грань  $AA_1D_1D$  — квадрат.

**2.23.** Две правильные пирамиды  $DABC$  и  $FABC$  имеют общее основание  $ABC$  и расположены по разные стороны от него. Все плоские углы при вершинах  $D$  и  $F$  прямые.

а) Докажите, что угол между плоскостями  $ADB$  и  $AFB$  равен углу между прямыми  $CD$  и  $CF$ .

б) Найдите угол между прямыми  $AD$  и  $BF$ , если боковые рёбра каждой пирамиды равны 1.

**2.24.** Две правильные четырёхугольные пирамиды  $EABCD$  и  $FABCD$  имеют общее основание  $ABCD$  и расположены по разные стороны от него. Точки  $M$  и  $N$  — середины рёбер  $BC$  и  $AB$  соответственно. Все рёбра пирамид равны.

а) Докажите, что угол между прямыми  $AE$  и  $BF$  равен  $60^\circ$ .

б) Найдите угол между прямыми  $EM$  и  $FN$ .