

**Пример 13.** Решить уравнение  $x^{\lg x - 1} = 100$ .

*Решение.* Логарифмируя обе части уравнения по основанию 10, получим равносильное уравнение  $(\lg x - 1)\lg x = 2$ . Полагая  $\lg x = t$ , запишем это уравнение в виде  $t^2 - t - 2 = 0$ , откуда  $t_1 = -1$ ,  $t_2 = 2$ . Решив уравнения  $\lg x = -1$ ,  $\lg x = 2$ , найдем  $x_1 = 0,1$ ;  $x_2 = 100$ .

*Ответ.*  $x_1 = 0,1$ ;  $x_2 = 100$ .

**Пример 14.** Решить уравнение

$$15^{\log_5 3} x^{\log_5(45x)} = 1. \quad (34)$$

*Решение.* Уравнение (34) равносильно каждому из следующих уравнений:

$$\begin{aligned} 5^{\log_5 3} \cdot 3^{\log_5 3} \cdot x^{\log_5 3 + 1 + \log_5(3x)} &= 1, \\ (3x)^{\log_5 3 + 1} x^{\log_5(3x)} &= 1. \end{aligned} \quad (35)$$

Логарифмируя уравнение (35) по основанию 5, получаем

$$(1 + \log_5 3) \log_5(3x) + \log_5(3x) \log_5 x = 0,$$

или

$$\log_5(3x)(1 + \log_5(3x)) = 0.$$

Если  $\log_5(3x) = 0$ , то  $x = \frac{1}{3}$ , а если  $\log_5(3x) = -1$ , то  $x = \frac{1}{15}$ .

*Ответ.*  $x_1 = \frac{1}{3}$ ,  $x_2 = \frac{1}{15}$ .

## Задачи

Решить уравнение (1–28):

1.  $\log_3(x^2 - 6) = \log_3 x$ .
2.  $\log_2(98 - x^3) = 3 \log_2(2 - x)$ .
3.  $\lg \sqrt{x - 5} + \lg \sqrt{2x - 3} + 1 = \lg 30$ .
4.  $2 \log_2 x + \log_2(x + 1) = 2 + \log_2(1 - x^2)$ .
5.  $\log_5(x^2 + x + 1) + \log_5(x^2 - x - 1) = \log_5(1 - 2x)$ .
6.  $2 \log_3 \frac{x - 3}{x - 7} + \log_3 \frac{x - 1}{x - 3} = -1$ .
7.  $x(1 - \lg 5) = \lg(4^x - 12)$ .
8.  $\log_2(2^x - 5) - \log_2(2^x - 2) = 2 - x$ .
9.  $\log_2(x - 5) = \log_4(x + 1)$ .
10.  $\log_2 x + \log_x 2 = \frac{5}{2}$ .
11.  $\log_2 \frac{x - 2}{x + 2} + \log_{\frac{1}{2}} \frac{2x - 1}{6x + 7} = 0$ .
12.  $\log_4 [\log_3(\log_2 x)] = \frac{1}{2}$ .
13.  $\sqrt{5 \log_2(-x)} = \log_2 \sqrt{x^2}$ .
14.  $\log_2(2^x + 1) \cdot \log_2(2^{x+1} + 2) = 2$ .
15.  $\lg \lg x + \lg(\lg x^2 - 1) = 1$ .
16.  $\log_3(\log_2 x - 9) = 2 + \log_3(1 - 4 \log_x 4)$ .
17.  $\log_2(\log_2 x) = \log_2(1 + \log_x 16) + 1$ .
18.  $\sqrt{3 + \log_x 5\sqrt{5}} \cdot \log_{\sqrt{5}} x = -\sqrt{6}$ .
19.  $\log_{16x} x^3 + \log_{\frac{x}{2}} \sqrt{x} = 2$ .
20.  $\log_x 2 \cdot \log_{\frac{x}{16}} 2 = \log_{\frac{x}{64}} 2$ .
21.  $\log_{3x} \left(\frac{3}{x}\right) + \log_3^2 x = 1$ .

$$22. x^{\lg 9} + 9^{\lg x} = 6. \quad 23. \lg^2 \left(1 + \frac{4}{x}\right) + \lg^2 \left(1 - \frac{4}{x+4}\right) = 2 \lg^2 \left(\frac{2}{x-1} - 1\right).$$

$$24. \log_2 x \cdot \log_2(x-3) + 1 = \log_2(x^2 - 3x).$$

$$25. 1 + \log_6 \frac{x+3}{x+7} = \frac{1}{4} \log_{\sqrt{6}}(x-1)^2.$$

$$26. 3 \log_{3x} x = 2 \log_{9x} x^2.$$

$$27. \log_{2x-1}(2x-3) = \log_{2x-3}(2x-1).$$

$$28. x^{\log_2 \frac{x}{98}} \cdot 14^{\log_2 7} = 1.$$

29. Найти все значения  $a$ , при которых уравнение  $\frac{\lg(ax)}{\lg(x+1)} = 2$  имеет ровно один корень.

30. При каких значениях  $a$  уравнение  $\frac{\lg x}{\lg(x-a-a^2)} = 2$  имеет хотя бы один корень? Найти все корни этого уравнения.

## Ответы

1. 3. 2. -3. 3. 6. 4.  $2(\sqrt{2}-1)$ . 5.  $-\sqrt{2}$ . 6. -5. 7. 2. 8. 3. 9. 8.  
 10.  $x_1 = 4, x_2 = \sqrt{2}$ . 11. 3. 12. 512. 13.  $x_1 = -1, x_2 = -32$ . 14. 0. 15.  $10^{\frac{5}{2}}$ .  
 16.  $2^{12}$ . 17. 16. 18.  $\frac{1}{5}$ . 19.  $x_1 = 4, x_2 = 4^{\frac{4}{3}}$ . 20.  $x_1 = 4, x_2 = 8$ .  
 21.  $x_1 = 3, x_2 = 1, x_3 = \frac{1}{9}$ . 22.  $\sqrt{10}$ . 23.  $x_1 = \sqrt{2}, x_2 = \sqrt{6}$ . 24. 5.  
 25.  $x_1 = -11, x_2 = -1, x_3 = 5$ . 26.  $x_1 = 1, x_2 = 9$ . 27.  $1 + \frac{1}{\sqrt{2}}$ .  
 28.  $x_1 = 7, x_2 = 14$ . 29.  $a = 4, a < 0$ .  
 30. При  $a = 0$  и  $a = -1$  уравнение не имеет корней; при  $a < -1$  — один корень  $x = a^2$ ; при  $a > 0$  — один корень  $x = (a+1)^2$ ; при  $a = -\frac{1}{2}$  — один корень  $x = \frac{1}{4}$ ; при  $-1 < a < 0, a \neq -\frac{1}{2}$  — два корня  $x_1 = a^2, x_2 = (a+1)^2$ .