Полагая $\operatorname{tg} x = t$, получаем $y = \dfrac{1+t^2}{t^2(1-t)}$, где $0 < t < 1$. Заметим, что

$$\frac{1+t^2}{t} > 2 \qquad \text{при} \quad 0 < t < 1,$$

$$t(1-t) = \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2} - t\right)^2 \leqslant \frac{1}{4},$$

и поэтому

$$y = \frac{1+t^2}{t} \cdot \frac{1}{t(1-t)} > 2 \cdot \frac{1}{\frac{1}{4}} = 8,$$

т. е. $y > 8$, что и требовалось доказать.

Задачи

Решить неравенство (1–16):

1. $\cos x < \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **2.** $\cos x \geqslant -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. **3.** $\sin x < \dfrac{1}{2}$. **4.** $\sin 2x > \dfrac{1}{2}$.

5. $\cos 3x \leqslant \dfrac{1}{2}$. **6.** $\operatorname{tg} x > 1$. **7.** $\cos^2 x > \dfrac{3}{4}$. **8.** $\sin^2 x < \dfrac{1}{2}$.

9. $2\sin^2 x - \sin x - 3 < 0$. **10.** $4\sin^2 x - 8\sin x + 3 \leqslant 0$.

11. $2\cos^2 x - 3\cos x - 2 > 0$. **12.** $\sin x > \cos^2 x$.

13. $2\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} x - 1 > 0$. **14.** $\dfrac{\sin^2 x - \frac{1}{4}}{\sqrt{3} - (\sin x + \cos x)} > 0$.

15. $\operatorname{tg}\dfrac{x}{2} > \dfrac{\operatorname{tg} x - 2}{\operatorname{tg} x + 2}$. **16.** $\cos^3 x \cos 3x - \sin^3 x \sin 3x > \dfrac{5}{8}$.

17. Найти все решения неравенства $\cos x - \sin x - \cos 2x > 0$ на интервале $(0, 2\pi)$.

18. Найти все решения неравенства $\sin x \sin 2x < \sin 3x \sin 4x$ на интервале $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

19. Решить неравенство $\sqrt[4]{\dfrac{7 - \cos 4x}{2}} > -2\cos x$.

20. Доказать, что при всех $x \in \mathbf{R}$ справедливо неравенство
$$\frac{\sin x - 1}{\sin x - 2} + \frac{1}{2} \geqslant \frac{2 - \sin x}{3 - \sin x}.$$

21. Доказать, что при всех допустимых значениях x справедливо неравенство $(1 - \operatorname{tg}^2 x)(1 - 3\operatorname{tg}^2 x)(1 + \operatorname{tg} 2x \operatorname{tg} 3x) > 0$.

Ответы

1. $\frac{\pi}{6} + 2\pi k < x < \frac{11\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in \mathbf{Z}$. **2.** $-\frac{3\pi}{4} + 2\pi k \leqslant x \leqslant \frac{3\pi}{4} + 2\pi k,\ k \in \mathbf{Z}$.

3. $\frac{5\pi}{6} + 2\pi k < x < \frac{13\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in \mathbf{Z}$. **4.** $\frac{\pi}{12} + \pi k < x < \frac{5\pi}{12} + \pi k,\ k \in \mathbf{Z}$.