Первое неравенство этой совокупности не имеет решений (дискриминант отрицателен), а решения второго неравенства составляют отрезок $-7 \leqslant x \leqslant -4$. Пересекая этот отрезок с множеством E, получаем множество $-5 < x \leqslant -4$ решений неравенства (10).

Ответ: $(-5; -4]$.

Задача 7. (*«Ломоносов», 2007*) Решите неравенство

$$\frac{\sqrt{x+8} - |2x+1|}{\sqrt{7-x} - |2x+1|} \geqslant 1. \qquad (11)$$

Решение. Радикалы определены при

$$\begin{cases} x+8 \geqslant 0, \\ 7-x \geqslant 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad -8 \leqslant x \leqslant 7.$$

Поэтому решаем неравенство (11) на множестве $E = [-8; 7]$. Преобразуем:

$$\frac{\sqrt{x+8} - |2x+1|}{\sqrt{7-x} - |2x+1|} - 1 \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\sqrt{x+8} - \sqrt{7-x}}{\sqrt{7-x} - |2x+1|} \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\sqrt{x+8} - \sqrt{7-x}}{\sqrt{7-x} - \sqrt{(2x+1)^2}} \geqslant 0. \qquad (12)$$

Последнее преобразование понадобилось нам вот зачем. Поскольку функция $y = \sqrt{x}$ монотонно возрастает, знак разности $\sqrt{A} - \sqrt{B}$ совпадает со знаком разности $A - B$. Следовательно, неравенство (12) эквивалентно на множестве E неравенству[1]

$$\frac{(x+8)-(7-x)}{(7-x)-(2x+1)^2} \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2x+1}{4x^2+5x-6} \leqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2x+1}{4(x+2)\left(x-\frac{3}{4}\right)} \leqslant 0,$$

которое легко решается методом интервалов:

$$x < -2, \quad -\frac{1}{2} \leqslant x < \frac{3}{4}. \qquad (13)$$

Пересекая множество (13) с множеством E, получаем ответ.

Ответ: $[-8; -2) \cup \left[-\frac{1}{2}; \frac{3}{4}\right)$.

Задачи

При отсутствии словесной формулировки требуется решить уравнение, систему уравнений или неравенство.

1. (*МГУ, биологич. ф-т, 2004*) $\sqrt{x+2} = |x-1|$.

$\boxed{\frac{3\pm\sqrt{13}}{2}}$

2. (*МГУ, химический ф-т, 2007*) $(x^2 - 7|x| + 6)\sqrt{4x+23} = 0$.

$\boxed{-\frac{23}{4};\ \pm 1;\ 6}$

3. (*МГУ, географич. ф-т, 1996*) $\sqrt{2-x^2} = |x| - 1$.

$\boxed{\pm\frac{1+\sqrt{3}}{2}}$

[1] Другие примеры использования подобной процедуры смотрите в статье «Метод рационализации».

4. (*МГУ, географич. ф-т, 1999*)

$$\sqrt{|x^2+14x+47|-1} = |x+7|-1.$$

$\boxed{-9,\ -8,\ -6,\ -5}$

5. (*МГУ, физический ф-т, 2002*) $4+\sqrt{x+9} = |x+5|$.

$\boxed{-9,\ \frac{-1+\sqrt{33}}{2}}$

6. (*МГУ, мехмат, 1994*) $3\sqrt{x+4} = 5-2|x+2|$.

$\boxed{-\frac{15}{4},\ -3,\ -\frac{7}{4}}$

7. (*МФТИ, 1997*) $\left|3\sqrt{x}+2-x\right|+\left|x-3\sqrt{x}+3\right|=9.$

$\boxed{16}$

8. (*МФТИ, 2007*) $\sqrt{25+\left|16x^2-25\right|} = 4+4|x+1|.$

$\boxed{(-\infty; -\frac{5}{4}] \cup \{-\frac{1}{4}\}}$

9. (*МГУ, экономич. ф-т, 1996*)

$$\begin{cases} |-x| - \sqrt[3]{y+3} = 1, \\ \left(-x\sqrt{-x}\right)^2 - y = 10. \end{cases}$$

$\boxed{(-2, -2)}$

10. (*МГУ, физический ф-т, 2003*)

$$\begin{cases} \sqrt{x-y} = 9-|x+2y|, \\ x(x+4y-2)+y(4y+2) = 41. \end{cases}$$

$\boxed{(5, 1);\ \left(\frac{1}{3}; -\frac{11}{3}\right)}$

11. (*МГУ, физический ф-т, 2005*)

$$\begin{cases} x+4\sqrt{x-y} = y+12, \\ |2(x+1)+y|+2|2x+y-1| = 3. \end{cases}$$

$\boxed{\left(\frac{5}{3}; -\frac{7}{3}\right)}$

12. (*«Физтех», 2016, 9–10*)

$$8\left|x-\sqrt{x}+2\right| + 2x\sqrt{x} < x^2+x+28.$$

$\boxed{[0; 4) \cup (9; +\infty)}$

13. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2014, 10–11*)

$$\sqrt{9-x}\cdot|x^2-1| \leqslant \sqrt{9-x}\cdot|x^2-10x+13|.$$

$\boxed{\left(-\infty; \tfrac{7}{5}\right] \cup [2;3] \cup \{9\}}$

14. (*МГУ, химический ф-т, 2006*) $\sqrt{1-|x|} \geqslant x-2.$

$\boxed{[-1;1]}$

15. (*МГУ, геологич. ф-т, 1997*)

$$\sqrt{|x+1|-1} > \sqrt{|x+1|-1997}\,.$$

$\boxed{(-\infty;-1998] \cup [1996;+\infty)}$

16. (*МГУ, ВШБ, 2003*)

$$\left|\sqrt{x+4}-2\right| > \frac{6}{\sqrt{x+4}-3}\,.$$

$\boxed{[-4;5) \cup (21;+\infty)}$

17. (*МГУ, физический ф-т, 2003*)

$$\sqrt{12x^2+42x+1}+|2x^2+7x| \geqslant 9.$$

$\boxed{(-\infty;-4] \cup \left[\tfrac{1}{2};+\infty\right)}$

18. (*МГУ, мехмат, 1998*)

$$3\sqrt{|x+1|-3} \geqslant \sqrt{x^2-2x-3}\,.$$

$\boxed{\left[3; \tfrac{11+\sqrt{61}}{2}\right]}$

19. (*МГУ, экономич. ф-т, 1993*) $3\sqrt{x+2} \leqslant 6-|x-2|.$

$\boxed{[-2;-1] \cup \{2\}}$

20. (*МГУ, геологич. ф-т, 2001*) $|x-6|+\sqrt{3x+1} \leqslant 5.$

$\boxed{\left[5; \tfrac{25-\sqrt{145}}{2}\right]}$

21. (*МГУ, ф-т психологии, 2003*) $|3x+1|+\sqrt{3x+4} \leqslant 3.$

$\boxed{\left\{-\tfrac{4}{3}\right\} \cup [-1;0]}$

22. (*МГУ, биологич. ф-т, 1997*) $\sqrt{|1-8x|-2} \leqslant x+1.$

$\boxed{\left[-5+\sqrt{23}; -\tfrac{1}{8}\right] \cup \left[\tfrac{3}{8}; 3-\sqrt{5}\right] \cup \left[3+\sqrt{5}; +\infty\right)}$

23. (*МГУ, физический ф-т, 2000*) $\sqrt{x^2+|x-4|-18} > x-4$.

$\boxed{\left(-\infty; \frac{1-\sqrt{57}}{2}\right] \cup \left(\frac{38}{9}; +\infty\right)}$

24. (*МГУ, физический ф-т, 1997*) $\sqrt{x^2+x+4} \leqslant 2x+|3x-2|$.

$\boxed{(-\infty; 0] \cup \left[\frac{7}{8}; +\infty\right)}$

25. (*МГУ, географич. ф-т, 2003*)

$$2\sqrt{9-x^2} < x+3\left(\sqrt{2}+1\right) - \left|x+3\left(\sqrt{2}-1\right)\right|.$$

$\boxed{\left[-3; -\frac{3}{\sqrt{2}}\right) \cup \left(-\frac{3}{\sqrt{2}}; 0\right) \cup (0; 3]}$

26. (*МГУ, ВМК, 1998*)

$$\left|\sqrt{x-4}-3\right| > \left|\sqrt{9-x}-2\right| + 1.$$

$\boxed{\left[4; \frac{13}{2}\right)}$

27. (*МГУ, ИСАА, 1999*)

$$\frac{\sqrt{x^2-3}-3}{|x+2|-5} \geqslant 1.$$

$\boxed{(-\infty; -7) \cup \left[\sqrt{3}; 3\right)}$

28. (*МГУ, ВМК, 2004*)

$$\frac{x^2-4}{\sqrt{15+2x-x^2}} \geqslant |x|-2.$$

$\boxed{(-3; -2] \cup \left[\frac{3-\sqrt{31}}{2}; \frac{\sqrt{23}-1}{2}\right] \cup [2; 5)}$

29. (*МГУ, мехмат, 1996*)

$$\frac{x^3-8+6x(2-x)}{|3-4x|} \leqslant \sqrt{4x-3}.$$

$\boxed{\left(\frac{3}{4}; 7\right]}$

30. (*МФТИ, 2000*)

$$\frac{\sqrt{-x^2+7x-6}}{|x^2-6x+5|-|x^2-2x-3|} \leqslant 0.$$

$\boxed{[1; 2) \cup \left(2+\sqrt{3}; 6\right]}$

31. (*МФТИ, 2005*)

$$\frac{|x^2-5x+6|+|9-2x|-5}{\sqrt{19x^2-4x^3-4x+19}} \leqslant 0.$$

$\boxed{\left[2; \frac{3+\sqrt{41}}{2}\right]}$

32. (*МФТИ, 2002*)

$$\sqrt{\frac{500+30x-2x^2}{2x+5}} > 10-|x|.$$

$\boxed{(-\infty; -10) \cup \left(-\frac{5}{2}; 0\right) \cup \left(\frac{5}{2}; 25\right]}$

33. (*«Физтех», 2013*)

$$\frac{1}{\sqrt{|x-3|-1}} \leqslant \frac{1}{6-x}\,.$$

$\boxed{[5; 6)}$

34. (*«Физтех», 2017, 10*)

$$\sqrt{\frac{|x|-12}{2-x}} > x.$$

$\boxed{(-\infty; -12] \cup (2; 3)}$

35. (*«Физтех», 2017, 10*)

$$\sqrt{\sqrt{x+1}-2} + \sqrt{x+82-18\sqrt{x+1}} > 5.$$

$\boxed{[3; 35) \cup (120; +\infty)}$

36. (*МФТИ, 2003*)

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+4x-5}-4} < \frac{1}{2|x+6|-5}\,.$$

$\boxed{\left(-8-\sqrt{6}; -\frac{17}{2}\right) \cup \left(-7; \frac{-20+\sqrt{22}}{3}\right) \cup [1; 3)}$

37. (*МГУ, ВМК, 1990*)

$$\sqrt{9x^2-48x-21} + \sqrt{9x^2-51x-15} \leqslant |3x-6|.$$

$\boxed{\left[\frac{27-4\sqrt{66}}{9}; \frac{8-\sqrt{85}}{3}\right] \cup \left[\frac{17+\sqrt{349}}{6}; \frac{27+4\sqrt{66}}{9}\right]}$

38. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2011*)

$$\sqrt{x-x^2+2} + x^2 > 4-5|x-2|.$$

$\boxed{[-1; 2)}$

39. (*«Ломоносов», 2005*)

$$x\left(3x+2-2\sqrt{3-2x-x^2}\right) \geqslant 3|x|$$

$\boxed{\left[-3; \frac{8\sqrt{3}-19}{13}\right] \cup \{0\} \cup \left[\frac{11}{13}; 1\right]}$

40. (*«Ломоносов», 2007*)

$$\frac{\sqrt{8-x}-|2x-1|}{\sqrt{x+7}-|2x-1|} \leqslant 1.$$

$\boxed{[-7;-\frac{3}{4}) \cup [\frac{1}{2};2)}$

41. (*«Физтех», 2019, 10*) Найдите все значения переменной x, при каждом из которых оба выражения

$$f(x)=\sqrt{21-x^2-4x} \quad \text{и} \quad g(x)=|x+2|$$

определены, причём $\min(f(x);g(x)) > \frac{x+4}{2}$.

$\boxed{x \in [-7;-\frac{8}{3}) \cup (0;2)}$

42. (*«Физтех», 2019, 10*) Решите неравенство

$$\frac{\sqrt[3]{\frac{x^2}{2}}-\sqrt[6]{4x^2}}{(x^2-4|x|)^2-8x^2+32|x|-48} \geqslant 0.$$

$\boxed{x \in (-\infty;-6) \cup [-4;-2) \cup (-2;2) \cup (2;4] \cup (6;+\infty)}$

43. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2010*) При каких значения параметра a неравенство

$$\frac{1}{3\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{4-x}}+\left|\frac{1}{3\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt{4-x}}\right|+a \leqslant 0$$

имеет единственное решение? Найдите это решение.

$\boxed{a=-\frac{5}{6},\ x=\frac{16}{25}}$