

здесь мы выполнили умножение на отрицательное число $4a$, заменив знак неравенства. Ясно, что все $a < 0$ подходят.

Ответ: $a \leq \frac{1}{8}$. ◀

Наш урок окончен. Оценка выставляется стандартным образом.

Домашнее задание

- 1. Найти все a , при которых квадратный трехчлен

$$p(x) = (a^2 - 1)x^2 + 2(a - 1)x + 1$$

положителен при всех x .

- 2. При каких a оба корня уравнения $(2 - a)x^2 - 3ax + 2a = 0$ больше $1/2$?
- 3. При каких a оба корня уравнения $(2 + a)x^2 - 2ax + 3a = 0$ положительны?
- 4. При каких a оба корня уравнения $x^2 + 4ax + (1 - 2a + 4a^2) = 0$ меньше -1 ?
- 5. При каких a один из корней уравнения
- $$(a^2 + a + 1)x^2 + (2a - 3)x + a - 5 = 0$$
- больше 1, а другой меньше 1?
- 6. Существуют ли такие a , что корни уравнения $x^2 + 2x + a = 0$ различны и лежат между -1 и $+1$?
- 7. При каких a оба корня уравнения $ax^2 - (a + 1)x + 2 = 0$ по модулю меньше 1?
- 8. При каких a оба корня уравнения $x^2 - ax + 2 = 0$ лежат на интервале $(0, 3)$?
- 9. При каких m неравенство $x^2 + mx + m^2 + 6m < 0$ выполняется при всех $x \in (1, 2)$?
- 10. При каких m неравенство $mx^2 - 4x + 3m + 1 > 0$ выполнено при всех $x > 0$?
- 11. При каких a неравенство $(a - 1)x^2 + (2a - 3)x + (a - 3) > 0$ выполнено хотя бы при одном $x < 1$?
- 12. Найти все a , при которых оба корня уравнения $x^2 + x + a = 0$ больше a .
- 13. При каких m из неравенства $x^2 - (3m + 1)x + m > 0$ следует, что $x > 1$?
- 14. При каких p уравнение $\sin^2 x + p \sin x = p^2 - 1$ имеет решения?
- 15. При каких $m \in (-1, 1)$ уравнение $4^{\sin x} + m \cdot 2^{\sin x} + m^2 - 1 = 0$ имеет решения?
- 16. Существуют ли a такие, что неравенство
- $$4^{|\cos x|} + 2(2a + 1) \cdot 2^{|\cos x|} + 4a^2 - 3 < 0$$
- выполнено при всех x ?
- 17. При каких a из неравенства $ax^2 - x + 1 - a < 0$ следует неравенство $0 < x < 1$?

- 18. Найти все a такие, что если x удовлетворяет неравенству

$$ax^2 + (1 - a^2)x - a > 0,$$

то $|x| \leq 2$.

- 19. Найти все a , при которых из неравенства $x^2 - a(1 + a^2)x + a^4 < 0$ следует неравенство $x^2 + 4x + 3 > 0$.

- 20. При каких a неравенство $\sin^6 x + \cos^6 x + a \sin x \cos x \geq 0$ выполнено для всех x ?

- 21. При каких a уравнение

$$(1 + a) \left(\frac{x^2}{1 + x^2} \right)^2 - 3a \cdot \frac{x^2}{x^2 + 1} + 4a = 0$$

имеет корни?

- 22. Для каждого a решить уравнение $x + \sqrt{x} = a$.

- 23. Для каждого a решить уравнение

$$\left(\frac{1 + x}{\sqrt{x}} \right)^2 + 2a \cdot \frac{1 + x}{\sqrt{x}} + 1 = 0.$$

- 24. При каких y неравенство

$$2 \log_{\frac{1}{2}} y^2 - 3 + 2x \log_{\frac{1}{2}} y^2 - x^2 > 0$$

имеет решения?

- 25. Для каждого a решить уравнение $\sqrt{a(2^x - 2) + 1} = 1 - 2^x$.

Урок 37

Логические задачи. Необходимость и достаточность

На этом уроке мы продолжим работу над задачами, зависящими от одного или нескольких параметров. Это — уравнения, неравенства или системы, про которые, в зависимости от параметров, нужно будет что-то выяснить. Это «что-то» будет практически тем же, что и для квадратных трехчленов, т.е. будет ли решение единственным, будет ли вообще оно существовать, будет ли данная система (уравнение, неравенство) эквивалентна какой-то другой и т.п.

Пусть дана система уравнений (или неравенств) с двумя переменными, зависящая от параметра, причем требуется отыскать все значения параметра, при которых она имеет единственное решение. Часто срабатывает следующий прием: экспериментируя, находим, что, если (x_0, y_0) — решение системы, то и $(-x_0, y_0)$ — тоже ее решение (не обязательно будет так, что решение останется решением при замене знака x_0 , может быть, это произойдет при замене y_0 на $y_0 + 1$ и т.п. — поиск такой закономерно-