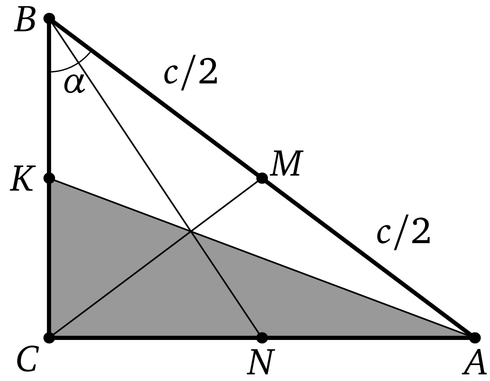
§ 1. Медиана прямоугольного треугольника

Решение задачи 1 из диагностической работы

1. В прямоугольном треугольнике ABC гипотенуза AB равна c и $\angle ABC = \alpha$. Найдите все медианы в этом треугольнике.

Ответ: $\frac{c}{2}$, $\frac{c}{2} \cdot \sqrt{1 + 3\cos^2\alpha}$, $\frac{c}{2} \cdot \sqrt{1 + 3\sin^2\alpha}$.



Р е ш е н и е. Поскольку медиана прямоугольного треугольника, проведённая из вершины прямого угла, равна половине гипотенузы, медиана CM равна $\frac{c}{2}$.

Пусть K — середина BC. Тогда $CK = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}AB\cos\alpha = \frac{1}{2}c\cos\alpha$. По теореме Пифагора из прямоугольного треугольника ACK находим, что

$$AK = \sqrt{AC^2 + CK^2} = \sqrt{(AB\sin\alpha)^2 + \left(\frac{1}{2}AB\cos\alpha\right)^2} = \\ = \frac{c}{2}\sqrt{4\sin^2\alpha + \cos^2\alpha} = \frac{c}{2}\sqrt{4\sin^2\alpha + 1 - \sin^2\alpha} = \frac{c}{2}\sqrt{1 + 3\sin^2\alpha}.$$

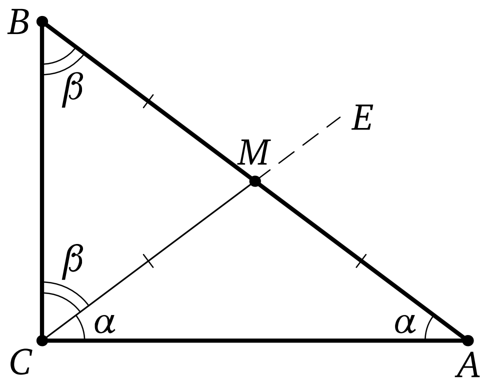
Аналогично находим медиану BN. ◁

* * *

Теорема. *Медиана прямоугольного треугольника, проведённая из вершины прямого угла, равна половине гипотенузы.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть ABC — прямоугольный треугольник с прямым углом при вершине C. Обозначим $\angle BAC = \alpha$, $\angle ABC = \beta$. Тогда $\alpha + \beta = 90°$.

От луча CA в полуплоскость, содержащую точку B, отложим угол ACE, равный α. Тогда луч CE проходит между сторонами угла ACB, так как $\alpha = \angle ACE < \angle ACB = 90°$. Поэтому сторона CE этого угла пересекает гипотенузу AB в некоторой точке M.



Треугольник AMC равнобедренный, поскольку $\angle ACM = \angle CAM$, значит, $CM = AM$. С другой стороны, треугольник BMC также равнобедренный, поскольку

$$\angle BCM = 90^\circ - \angle ACM = 90^\circ - \alpha = \beta = \angle CBM.$$

Значит, $CM = BM$. Следовательно, M — середина гипотенузы AB, т. е. CM — медиана треугольника ABC и $CM = \frac{1}{2}AB$, что и требовалось доказать. □

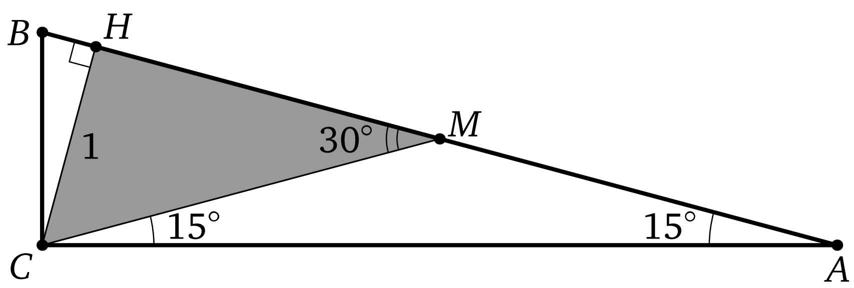
Теорема (обратная). *Если медиана треугольника равна половине стороны, к которой она проведена, то треугольник прямоугольный.*

Рассмотрим несколько примеров применения доказанного выше свойства медианы прямоугольного треугольника, проведённой из вершины прямого угла.

Пример 1. Найдите гипотенузу прямоугольного треугольника с острым углом 15°, если известно, что высота треугольника, опущенная на гипотенузу, равна 1.

Ответ: 1.

Р е ш е н и е. Пусть CH — высота прямоугольного треугольника ABC, проведённая из вершины прямого угла C, $\angle A = 15^\circ$. Проведём медиану CM. Тогда $\angle CMH$ — внешний угол равнобедренного треугольника AMC, поэтому $\angle CMH = 30^\circ$. Из прямоугольного тре-

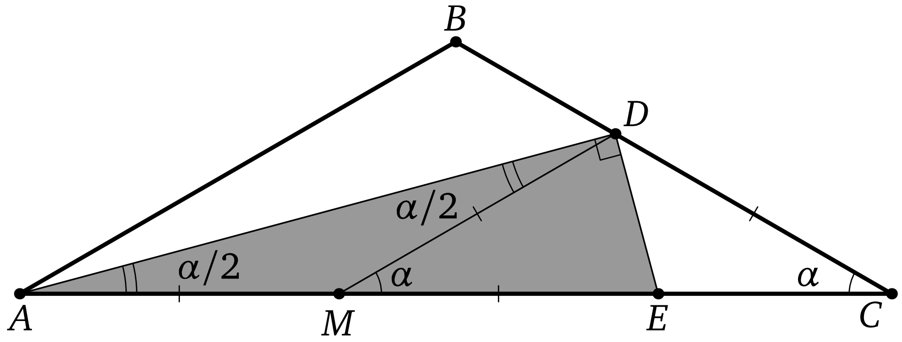


угольника CMH находим, что $CM = 2CH = 2$. Следовательно, $AB = 2CM = 4$. ◁

Пример 2. Через основание биссектрисы AD равнобедренного треугольника ABC с вершиной B проведён перпендикуляр к этой биссектрисе, пересекающий прямую AC в точке E. Найдите отрезок AE, если известно, что $CD = 4$.

Ответ: 8.

Р е ш е н и е. Отметим середину M отрезка AE. Отрезок DM — медиана прямоугольного треугольника ADE, проведённая из вершины прямого угла, поэтому $AM = DM = ME$.



Обозначим $\angle BAC = \angle BCA = \alpha$. По теореме о внешнем угле треугольника

$$\angle DME = \angle DAC + \angle ADM = \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2} = \alpha = \angle DCM,$$

значит, треугольник CDM равнобедренный. Следовательно, $AE = 2DM = 2DC = 8$. ◁

Подготовительные задачи

1.1. Гипотенуза прямоугольного треугольника равна 4. Найдите радиус описанной окружности.

1.2. Медиана, проведённая к гипотенузе прямоугольного треугольника, равна m и делит прямой угол в отношении $1:2$. Найдите стороны треугольника.

1.3. Медиана прямоугольного треугольника, проведённая к гипотенузе, разбивает его на два треугольника с периметрами 8 и 9. Найдите стороны треугольника.

1.4. В треугольнике ABC к стороне AC проведены высота BK и медиана MB, причём $AM = BM$. Найдите косинус угла KBM, если $AB = 1$, $BC = 2$.

1.5. Окружность, построенная на катете прямоугольного треугольника как на диаметре, делит гипотенузу в отношении $1:3$. Найдите острые углы треугольника.

1.6. Точка D — середина гипотенузы AB прямоугольного треугольника ABC. Окружность, вписанная в треугольник ACD, касается отрезка CD в его середине. Найдите острые углы треугольника ABC.

1.7. В прямоугольном треугольнике ABC из вершины прямого угла C проведены биссектриса CL и медиана CM. Найдите площадь треугольника ABC, если $LM = a$, $CM = b$.

1.8. Вне прямоугольного треугольника ABC на его катетах AC и BC построены квадраты $ACDE$ и $BCFG$. Продолжение медианы CM треугольника ABC пересекает прямую DF в точке N. Найдите отрезок CN, если катеты равны 1 и 4.

1.9. Высота прямоугольного треугольника, проведённая из вершины прямого угла, равна a и образует угол α с медианой, проведённой из той же вершины. Найдите катеты треугольника.

Тренировочные задачи

1.10. Медиана прямоугольного треугольника, проведённая к гипотенузе, разбивает его на два треугольника с периметрами m и n. Найдите стороны треугольника.

1.11. В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C = 90^\circ$) проведены высота CD и медиана CE. Площади треугольников ABC и CDE равны соответственно 10 и 3. Найдите AB.

1.12. В прямоугольном треугольнике ABC катеты AB и AC равны 4 и 3 соответственно. Точка D делит гипотенузу BC пополам. Найдите расстояние между центрами окружностей, вписанных в треугольники ADC и ABD.

1.13. Катет прямоугольного треугольника равен 2, а противолежащий ему угол равен 30°. Найдите расстояние между центрами окружностей, вписанных в треугольники, на которые данный треугольник делится медианой, проведённой из вершины прямого угла.

1.14. В четырёхугольнике $ABCD$ диагонали AC и BD перпендикулярны и пересекаются в точке P. Отрезок, соединяющий вершину C с серединой M отрезка AD, равен $\frac{5}{4}$, $AP = 1$. Расстояние от точки P до отрезка BC равно $\frac{1}{2}$. Найдите AD, если известно, что вокруг четырёхугольника $ABCD$ можно описать окружность.

1.15. Средняя линия трапеции равна 5, а отрезок, соединяющий середины оснований, равен 3. Углы при большем основании трапеции равны 30° и 60°. Найдите основания и меньшую боковую сторону трапеции.

1.16. Средняя линия трапеции равна 4, углы при одном из оснований равны 40° и 50°. Найдите основания трапеции, если отрезок, соединяющий середины оснований, равен 1.

1.17. Диагонали трапеции перпендикулярны. Одна из них равна 6. Отрезок, соединяющий середины оснований, равен 4,5. Найдите площадь трапеции.

1.18. Прямая, параллельная гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC, пересекает катет AC в точке D, а катет BC — в точке E, причём $DE=2$, а $BE=1$. На гипотенузе взята такая точка F, что $BF=1$. Известно также, что $\angle FCB=\alpha$. Найдите площадь треугольника ABC.

1.19. Гипотенуза AB прямоугольного треугольника ABC является хордой окружности радиуса 10. Вершина C лежит на диаметре окружности, который параллелен гипотенузе. Угол CAB равен 75°. Найдите площадь треугольника ABC.

1.20. Гипотенуза KM прямоугольного треугольника KMP является хордой окружности радиуса $\sqrt{7}$. Вершина P находится на диаметре, который параллелен гипотенузе. Расстояние от центра окружности до гипотенузы равно $\sqrt{3}$. Найдите острые углы треугольника KMP.

1.21. В треугольнике ABC известно, что $AB=c$, $AC=b$ $(b>c)$, AD — биссектриса. Через точку D проведена прямая, перпендикулярная AD и пересекающая AC в точке E. Найдите AE.

1.22. Точка E лежит на стороне AC равностороннего треугольника ABC; точка K — середина отрезка AE. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно прямой AB, и прямая, проходящая через точку C перпендикулярно прямой BC, пересекаются в точке D. Найдите углы треугольника BKD.

1.23. В трапеции $ABCD$ точка K — середина основания AB, M — середина основания CD. Найдите площадь трапеции, если известно, что DK — биссектриса угла D, BM — биссектриса угла B, наибольший из углов при основании AB равен 60°, а периметр трапеции равен 30.

1.24*. В треугольнике ABC известны углы: $\angle A=45^\circ$, $\angle B=15^\circ$. На продолжении стороны AC за точку C взята точка M, причём $CM=2AC$. Найдите угол AMB.

1.25*. В треугольнике ABC известно, что $AB=AC$ и угол BAC тупой. Пусть BD — биссектриса треугольника ABC, M — основание перпендикуляра, опущенного из точки A на сторону BC, E — основание перпендикуляра, опущенного из точки D на сторону BC. Через точку D проведён также перпендикуляр к BD до пересечения со стороной BC в точке F. Известно, что $ME=FC=a$. Найдите площадь треугольника ABC.

1.26*. Острый угол при вершине A ромба $ABCD$ равен 40°. Через вершину A и середину M стороны CD проведена прямая, на которую опущен перпендикуляр BH из вершины B. Найдите угол AHD.

Задачи на доказательство и вычисление

1.27.1. В трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC известно, что $AB = BC = CD = \frac{1}{2}AD$.

а) Докажите, что $AC \perp CD$.

б) Найдите углы трапеции.

1.27.2. Диагональ равнобедренной трапеции перпендикулярна боковой стороне, а угол при основании трапеции равен $120°$.

а) Докажите, что одно из оснований трапеции вдвое больше другого.

б) Найдите стороны трапеции, если её диагональ равна $2\sqrt{3}$.

1.28.1. Точка M — середина гипотенузы AB прямоугольного треугольника ABC с углом $30°$ при вершине A. Окружность, вписанная в треугольник BMC, касается его сторон BC и BM в точках P и Q.

а) Докажите, что $PQ \parallel CM$.

б) Найдите PQ, если $AB = 8$.

1.28.2. Точка E — середина гипотенузы ML прямоугольного треугольника KLM с углом $30°$ при вершине M. Окружность, вписанная в треугольник KME, касается катета MK в точке A, а окружность, вписанная в треугольник KLE, касается катета KL в точке B.

а) Докажите, что $KE = AB$.

б) В каком отношении точка касания большей из этих окружностей делит гипотенузу?

1.29.1. На катетах AC и BC прямоугольного треугольника ABC вне треугольника построены квадраты $ACDE$ и $BFKC$. Точка M — середина гипотенузы AB, H — точка пересечения прямых CM и DK.

а) Докажите, что $CM \perp DK$.

б) Найдите MH, если катеты треугольника ABC равны 30 и 40.

1.29.2. На катетах KL и ML прямоугольного треугольника KLM вне треугольника построены квадраты $ABKL$ и $CDLM$, LP — высота треугольника ADL.

а) Докажите, что прямая PL проходит через середину E гипотенузы KM.

б) Найдите EP, если катеты треугольника KLM равны 10 и 24.

1.30.1. Из вершины C тупого угла треугольника ABC проведена высота CH. Точку H соединили с серединами M и N сторон AC и BC.

а) Докажите, что в четырёхугольник $CMHN$ можно вписать окружность.

б) Найдите её радиус, если сумма сторон AC и BC равна 20, а площадь треугольника ABC равна 24.

1.30.2. Точка P — основание высоты BP равнобедренного треугольника ABC, опущенной на боковую сторону AC. Точки E и F — середины основания BC и боковой стороны AB соответственно.

а) Докажите, что в четырёхугольник $BEPF$ можно вписать окружность.

б) Найдите её радиус, если $BC = 12$ и $AB = AC = 10$.

1.31.1. Точка E расположена вне квадрата $ABCD$ с центром O, причём треугольник BEC прямоугольный ($\angle E = 90°$) и неравнобедренный. Точка M — середина стороны BC.

а) Докажите, что треугольник OME равнобедренный.

б) Прямая EO пересекает сторону AD квадрата в точке K. Найдите отношение $AK : KD$, если $\angle CBE = 30°$.

1.31.2. Точка A расположена вне квадрата $KLMN$ с центром O, причём треугольник KAN прямоугольный ($\angle A = 90°$) и $AK = 2AN$. Точка B — середина стороны KN.

а) Докажите, что $BM \parallel AN$.

б) Прямая AO пересекает сторону ML квадрата в точке P. Найдите отношение $LP : PM$.

1.32.1. Две стороны треугольника равны 1 и 5, площадь треугольника равна 2. Медиана, проведённая к его третьей стороне, меньше её половины.

а) Докажите, что треугольник тупоугольный.

б) Найдите радиус окружности, описанной около этого треугольника.

1.32.2. Две стороны треугольника равны 6 и 5, площадь треугольника равна 9. Медиана, проведённая к его третьей стороне, больше её половины.

а) Докажите, что треугольник остроугольный.

б) Найдите его наибольшую высоту.

1.33.1. Высоты AA_1 и BB_1 остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H. Точки M и N — середины отрезков AB и CH соответственно.

а) Докажите, что треугольники A_1MB_1 и A_1NB_1 равнобедренные.

б) Найдите площадь четырёхугольника A_1MB_1N, если $A_1B_1 = 6$ и $MN = 4$.

1.33.2. Продолжения высот PP_1 и QQ_1 треугольника PQR с тупым углом при вершине R пересекаются в точке H. Точки A и B — середины отрезков PQ и RH соответственно.

а) Докажите, что $P_1Q_1 \perp AB$.

б) Найдите диагонали четырёхугольника AP_1BQ_1, если $PQ = 10$, $RH = 6$ и $AM = 3BM$, где M — точка пересечения диагоналей.

1.34.1. Дан треугольник ABC. Точки M_1, M_2, M_3 — середины сторон AB, BC и AC, а точки H_1, H_2, H_3 — основания высот, лежащие на тех же сторонах.

а) Докажите, что из отрезков H_1M_2, H_2M_3 и H_3M_1 можно построить треугольник.

б) Найдите его периметр, если периметр треугольника ABC равен a.

1.34.2. Медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M, причём $BB_1 \perp CC_1$.

а) Докажите, что из отрезков A_1M, A_1B_1 и A_1C_1 можно построить треугольник.

б) Найдите площадь этого треугольника, если $BB_1 = 18$ и $CC_1 = 9$.

1.35.1. Высота AH и медиана AM треугольника ABC делят угол BAC треугольника ABC на три равные части, причём точка H лежит между B и M. Из точки M опущен перпендикуляр MK на сторону AC.

а) Докажите, что $MK = BH$.

б) Найдите углы треугольника ABC.

1.35.2. Из вершины прямого угла C прямоугольного треугольника ABC проведены высота CH, медиана CM и биссектриса CL, причём $\angle HCM = \angle BCH + \angle ACM$.

а) Докажите, что $\angle ABC = 3\angle BAC$.

б) Найдите отношение $HL : LM$.

1.36.1. Медианы AM и BN треугольника ABC перпендикулярны и пересекаются в точке P.

а) Докажите, что $CP = AB$.

б) Найдите площадь треугольника ABC, если $AC = 3$ и $BC = 4$.

1.36.2. Медианы LP и MQ треугольника KLM перпендикулярны и пересекаются в точке G.

а) Докажите, что отрезок PQ равен медиане GE треугольника LGM.

б) Найдите PQ, если $KL = 22$ и $KM = 31$.