

Неравенства вида $|A| < |B|$

Решая неравенство вида $|A| < |B|$ (знак неравенства тут может быть любым), удобно действовать следующим образом: коль скоро обе части неравенства неотрицательны, можно возвести неравенство в квадрат:

$$|A| < |B| \Leftrightarrow A^2 < B^2 \Leftrightarrow A^2 - B^2 < 0 \Leftrightarrow (A - B)(A + B) < 0.$$

Последнее неравенство решается, например, методом интервалов.

ЗАДАЧА 10. (МГУ, экономич. ф-т, 2001) Решить неравенство

$$|x^2 + 10x + 16| \geq |x^2 - 16|.$$

РЕШЕНИЕ. Данное неравенство равносильно неравенству

$$(x^2 + 10x + 16)^2 \geq (x^2 - 16)^2 \Leftrightarrow (10x + 32)(2x^2 + 10x) \geq 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{16}{5}\right)x(x + 5) \geq 0.$$

Дальнейшее элементарно.

ОТВЕТ: $[-5; -\frac{16}{5}] \cup [0; +\infty)$.

5 Задачи

Во всех задачах по умолчанию требуется решить неравенство.

Геометрический смысл модуля

1. а) $|x - 6| \leq 4$; б) $|2x + 3| > 11$.

$$(\infty + ; 4) \cap (2 - ; \infty -) \cap (9 ; 11] \cap (2 ; 4)$$

2. (МГУ, физический ф-т, 1996) $-1 < |x^2 - 7| < 29$.

$$(9 ; 9 -)$$

3. (МГУ, ИСАА, 2007) $|x + 3| \cdot (|x - 1| - 3) \leq 0$.

$$[7 ; 2 -] \cap \{8 -\}$$

4. (МГУ, МШЭ, 2007)

$$\left| \frac{x}{10} - \frac{1}{5} \right| \geq \left| \frac{x}{4} - \frac{1}{2} \right|.$$

$$[2]$$

Замена переменной

5. (МГУ, географич. ф-т, 1997)

$$\frac{|x - 1| + 10}{4|x - 1| + 3} > 2.$$

$$\left(\frac{2}{11} ; \frac{2}{8}\right)$$

6. (МГУ, ф-т почвоведения, 1998)

$$\frac{1}{|x+1|-1} \geq \frac{1}{|x+1|-2}.$$

$$(\mathbf{1}:\mathbf{0}) \cap (\mathbf{z}-:\mathbf{g}-)$$

7. (МГУ, физический ф-т, 2004)

$$\frac{|x-1|}{1-\frac{6}{|x-1|}} < -1.$$

$$(\mathbf{z}:\mathbf{g}) \cap (\mathbf{1}-:\mathbf{g}-)$$

8. (МГУ, ФНМ, 2004)

$$|3x+1|+2+\frac{3}{|3x+1|-2} \leq \frac{1}{|3x+1|+2}.$$

$$\left(\frac{\mathbf{g}}{\mathbf{1}}:\frac{\mathbf{g}}{\mathbf{z}-\mathbf{g}\wedge}\right] \cap \{\frac{\mathbf{g}}{\mathbf{1}}-\} \cap \left[\frac{\mathbf{g}}{\mathbf{g}\wedge}-:\mathbf{1}-\right)$$

9. (МГУ, географич. ф-т, 1987) $x^2+2|x|<8$.

$$(\mathbf{z}:\mathbf{z}-)$$

10. (МГУ, ф-т почвоведения, 2003)

$$\frac{3x^2}{2}-|x| \geq 0.$$

$$(\infty+:\frac{\mathbf{g}}{\mathbf{z}}] \cap \{0\} \cap [\frac{\mathbf{g}}{\mathbf{z}}-\infty-)$$

11. а) $x^2+2x-|x+1|>5$; б) $x^2-4x+8-5|x-2|\leq 0$.

$$[\mathbf{g}:\mathbf{g}] \cap [\mathbf{1}:\mathbf{z}-] (\mathbf{g}:(\infty+:\mathbf{z}) \cap (\mathbf{1}-:\infty-)) (\mathbf{g}$$

Перебор промежутков

12. (МГУ, геологич. ф-т, 2005) $(|x|-1)(2x^2+x-1)\leq 0$.

$$[\mathbf{1}:\frac{\mathbf{z}}{\mathbf{1}}] \cap \{\mathbf{1}-\}$$

13. (МГУ, геологич. ф-т, 2006)

$$\frac{x^2-9}{|x|-3} \cdot (x+4) \geq 0.$$

$$(\infty+:\mathbf{g}) \cap (\mathbf{g}:\mathbf{g}-) \cap (\mathbf{g}-:\mathbf{1}-)$$

14. (МГУ, ИСАА, 1998)

$$\frac{3|x|-11}{x-3} > \frac{3x+14}{6-x}.$$

$$(\infty+:\mathbf{g}) \cap (\mathbf{g}:\mathbf{z}) \cap (\mathbf{z}:\mathbf{z}-)$$

15. (МГУ, геологич. ф-т, 2002)

$$\frac{x|x|+1}{x-2}+1\geq x.$$

$$(\infty+!z)\cap[\frac{x}{1}!\infty-)$$

16. (МГУ, геологич. ф-т, 2004)

$$\frac{x-2}{|x-2|}\leq 4-x^2.$$

$$\left(z!\underline{g}\wedge-\right]$$

17. (МГУ, химический ф-т, 2007)

$$\frac{x^2+4x+4}{2x+12}\leq 1-\frac{\sqrt{x^2+8x+16}}{x+4}.$$

$$\{z-\}\cap\left(4-!\underline{g}\wedge z-\right]\cap(9-!\infty-)$$

18. (МГУ, ФНМ, 2003)

$$\frac{4x}{|x-2|-1}\geq 3.$$

$$(\infty+!g)\cap\left(1!\frac{z}{g}\right]$$

19. (МГУ, геологич. ф-т, 2003)

$$\frac{x-2}{|x+2|}+\frac{2x+5}{x+2}\leq 0.$$

$$[1-!z-)\cap(z-!\underline{z}-]$$

20. (МГУ, мехмат, 1985)

$$\frac{1}{x-1}+\frac{3}{|x|+1}\geq \frac{1}{|x|-1}.$$

$$(\infty+!1)\cap(1!1-)\cap[g-!\infty-)$$

21. (МГУ, мехмат, 2004-07.2)

$$\frac{(x^2+x+1)^2-2|x^3+x^2+x|-3x^2}{10x^2-17x-6}\geq 0.$$

$$(\infty+!z)\cap\{1\}\cap\left[\underline{g}\wedge+z-!\frac{01}{g}-\right)\cap\left[\underline{g}\wedge-z-!\infty-\right)$$

22. (МГУ, социологич. ф-т, 1999)

$$\frac{2|2-x|}{2-|x|}\leq |x-2|.$$

$$(\infty+!z)\cap\{0\}\cap(z-!\infty-)$$

23. (МГУ, экономич. ф-т, 1984) $3|x - 2| + |5x - 4| \leq 10.$

$$\left[\frac{7}{8}; 0\right]$$

24. (МГУ, ф-т гос. управления, 2003) $|2x + 8| \geq 8 - |1 - x|.$

$$(\infty + ; 1 -] \cap [9 - ; \infty -)$$

25. (МГУ, ВМК, 2003) $3|x + 2| - 4|x + 1| \geq 2.$

$$\left[0; \frac{4}{8} - \right]$$

26. (МГУ, филологич. ф-т, 1991)

$$\frac{|x + 1| + |x - 2|}{x + 199} < 1.$$

$$(007; 99 -) \cap (661 - ; \infty -)$$

27. (МГУ, геологич. ф-т, 1985)

$$\frac{|x - 2|}{|x - 1| - 1} \geq 1.$$

$$(\infty + ; 7 -) \cap (0 ; \infty -)$$

28. (МГУ, ИСАА, 1992)

$$\frac{|x + 3| - 1}{4 - 2|x + 4|} \geq -1.$$

$$(\infty + ; 2 -) \cap (2 - ; 9 -) \cap [8 - ; \infty -)$$

29. (МГУ, ф-т психологии, 1979)

$$\frac{3}{|x + 3| - 1} \geq |x + 2|.$$

$$\left[\frac{9}{2} \wedge + 7 - ; 2 - \right) \cap (4 - ; 9 -]$$

30. (МГУ, химический ф-т, 2000) $|x + |1 - x|| > 3.$

$$(\infty + ; 7 -]$$

31. (МГУ, геологич. ф-т, 1998)

$$\left|\frac{x^2}{2} + x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right| - 3x + 3\frac{\sqrt{2}}{2} < \frac{3x^2}{2} - \left|\frac{x^2}{2} + x - \sqrt{2}\right|.$$

$$\left(\infty + ; \underline{1 + \frac{9}{\sqrt{2}\sqrt{7}}} \wedge + 1 - \right) \cap \left(\underline{1 + \frac{9}{\sqrt{2}\sqrt{7}}} \wedge - 1 - ; \infty - \right)$$

32. («Физтех», 2011)

$$\frac{20 - 4|x|}{|x^2 + 11x + 21| - 3} \leq 1.$$

$$\left((\infty + ; \frac{7}{91 - \frac{7}{99} \sqrt{7}}] \cap (7 - ; 8 -) \cap [4 - ; 8 -) \cap (6 - ; \infty -) \right)$$

Равносильные переходы

33. («Физтех», 2017, 9) $x^2 - 2x + 1 - |x^3 - 1| - 2(x^2 + x + 1)^2 \geq 0.$

$$\left[\frac{7}{1} - ; 1 - \right]$$

34. (МГУ, мехмат, 2000-03.1)

$$\frac{|x - 4| - |x - 1|}{|x - 3| - |x - 2|} < \frac{|x - 3| + |x - 2|}{|x - 4|}.$$

$$(1 ; 4) \cap (4 ; 7)$$

35. (МГУ, геологич. ф-т, 1998) $(x^2 + 5x - 6) \cdot |x + 4|^{-1} < 0.$

$$(1 ; 4 -) \cap (4 - ; 9 -)$$

36. (МГУ, филологич. ф-т, 2006)

$$\frac{5 - 4x}{|x - 2|} \leq |2 - x|.$$

$$(\infty + ; 7) \cap (7 ; 1] \cap [1 - ; \infty -)$$

37. (МГУ, ВШБ, 2004)

$$\frac{x + 1}{|x - 1|} \geq 1.$$

$$(\infty + ; 1) \cap (1 ; 0]$$

38. (МГУ, географич. ф-т, 2003)

$$\frac{6}{|x|} \geq 7 + x.$$

$$\left[\frac{7}{2 - \frac{7}{9} \sqrt{7}} ; 0 \right) \cap (0 ; 1 -) \cap [9 - ; \infty -)$$

39. (МГУ, ВМК, 1998)

$$2x > \frac{5x + 3}{|x + 2|}.$$

$$(\infty + ; \frac{7}{6}) \cap (1 - ; 7 -) \cap \left(7 - ; \frac{7}{29\sqrt{6} + 6} - \right)$$

40. (МГУ, биологич. ф-т, 1999)

$$\frac{3}{|x - 1|} \geq 2x + 5.$$

$$\left[\frac{7}{8 - \frac{7}{9} \sqrt{7}} ; 1 \right) \cap (1 ; \frac{7}{1}] \cap [7 - ; \infty -)$$

41. (МГУ, социологич. ф-т, 2001)

$$\frac{1}{x+1} + \frac{1}{|x|} \geq 2.$$

$$\left[\frac{\pi}{1} \wedge ; 0 \right) \cap (0 ; 1 -)$$

42. (МГУ, геологич. ф-т, 2002)

$$\frac{x+1}{|2-x|} + \frac{x+1}{x-5} \leq 0.$$

$$\left(\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2} \right] \cap [1 - ; \infty -)$$

43. (МГУ, геологич. ф-т, 2007)

$$|x-12| \leq \frac{x}{12-x}.$$

$$(\pi 1 ; 6]$$

44. («Физтех», 2017, 9) $|x^3 - 2x^2 + 2| \geq 2 - 3x.$

$$(\infty + ; 0] \cap \left[\frac{\pi}{21} \wedge - 1 ; \infty - \right)$$

45. (МГУ, физический ф-т, 1998) $|x^2 + 2x - 7| < 2x.$

$$\left(\frac{\pi}{2} \wedge ; 11 \wedge + \pi - \right)$$

46. (МГУ, физический ф-т, 2003) $|x^2 + 3x| + x^2 - 2 \geq 0.$

$$(\infty + ; \frac{\pi}{1}] \cap [\frac{\pi}{e} - ; \infty -)$$

47. $||x^3 - x - 1| - 5| \geq x^3 + x + 8.$

$$\left[\frac{9}{e} \wedge - ; \infty - \right)$$

48. (МГУ, ВМК, 2000) $||x^2 + 3x - 8| - x^2| \geq 8 - x.$

$$(\infty + ; \frac{\pi}{4}] \cap [0 ; 1 -) \cap [\frac{\pi}{4} - ; \infty -)$$

49. (МГУ, ф-т глобальных процессов, 2006)

$$\frac{|x^2 + x - 12|}{x-3} \geq 1.$$

$$(\infty + ; \frac{\pi}{8})$$

50. (МГУ, ф-т почвоведения, 2005) $|x-1| \leq |x|.$

$$(\infty + ; \frac{\pi}{1}]$$

51. (Моск. матем. регата, 2001, 8) $|x+2000| < |x-2001|.$

$$\left(\frac{\pi}{1} ; \infty - \right)$$

52. (МГУ, экономич. ф-т, 2001) $|x^2 - 8x + 15| \leq |15 - x^2|.$

$$(\infty+; \textcolor{teal}{4}] \cap [\frac{\textcolor{teal}{p}}{\textcolor{teal}{q}}; 0]$$

53. (МГУ, химический ф-т, 2001)

$$\frac{1}{|x-1|} > \frac{1}{|x+1|}.$$

$$(\infty+; \textcolor{teal}{1}) \cap (\textcolor{teal}{1}; 0)$$

54. (МГУ, биологич. ф-т, 1998) $|x^2 + 3x| + |x + 5| \leq x^2 + 4x + 9.$

$$(\infty+; \textcolor{teal}{1}-] \cap [\textcolor{teal}{z}-; \textcolor{teal}{L}-]$$

55. («Покори Воробьёвы горы!», 2006) $|x + 3| - |x^2 + x - 2| \geq 1.$

$$[\textcolor{teal}{z}; 0] \cap \{\textcolor{teal}{z}-\}$$

56. (МГУ, мехмат, 2008) $||1 - x^2| - |x^2 - 3x + 2|| \geq 3|x - 1|.$

$$(\infty+; \textcolor{teal}{z}] \cap \{\textcolor{teal}{1}\} \cap [\textcolor{teal}{1}-; \infty-)$$

57. («Покори Воробьёвы горы!», 2012, 10–11)

$$||2 + x - x^2| - |x + 1|| \geq |x^2 - 2x - 3|.$$

$$(\infty+; \textcolor{teal}{z}] \cap \{\textcolor{teal}{1}-\}$$

58. (МГУ, мехмат, 1999-05.3) Найти все x , при которых хотя бы одно из двух выражений

$$|x - 3| (|x - 5| - |x - 3|) - 6x \quad \text{и} \quad |x| (|x| - |x - 8|) + 24$$

неположительно, а его модуль не меньше модуля другого.

$$[\textcolor{teal}{g}; \textcolor{teal}{g}]$$