Тогда объём части пирамиды $SABCD$, содержащей точку D, равен

$$V_{MADP} - V_{KCPN} = \frac{1}{2}V - \frac{1}{12}V = \frac{5}{12}V < \frac{1}{2}V.$$

Следовательно, объём большей части равен $\frac{7}{12}V$. ◁

Подготовительные задачи

1. Объём параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равен 1. Найдите:

а) объём пирамиды A_1ABD;

б) объём треугольной пирамиды, отсекаемой от параллелепипеда плоскостью, проходящей через вершины B, D и середину ребра CC_1;

в) объём пирамиды ACB_1D_1;

г) объёмы частей, на которые параллелепипед разбивается плоскостью, проходящей через вершины A, C и середину ребра A_1D_1;

д) объём общей части пирамид ACB_1D_1 и BDA_1C_1.

2. Объём треугольной пирамиды $DABC$ равен 1. Найдите:

а) объёмы частей, на которые пирамида разбивается плоскостью, проходящей через точки A, D и середину ребра BC;

б) объёмы частей, на которые пирамида разбивается плоскостью, проходящей через вершину D и середины рёбер AB и BC;

в) объёмы частей, на которые пирамида разбивается плоскостью, проходящей через середины рёбер AB, BC и BD;

г) объём пирамиды, вершины которой — A, B и середины рёбер AC и BD;

д) объёмы частей, на которые пирамида разбивается плоскостью, проходящей через середины рёбер AB, BC и CD.

3. Основание четырёхугольной пирамиды $SABCD$ — параллелограмм $ABCD$. Объём пирамиды равен 1. Найдите объёмы частей, на которые пирамида разбивается плоскостью, проходящей через:

а) середины рёбер SA, SB и SC;

б) вершину S и середины рёбер AB и BC;

в) точки A, C и середину ребра SB;

г) точку A и середину ребра SC параллельно прямой BD;

д) точки A, B и середину ребра SD.

4. Объём треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равен 1. Найдите:

а) объёмы частей, на которые призма разбивается плоскостью, проходящей через вершины A, C и B_1;

б) объёмы частей, на которые призма разбивается плоскостью, проходящей через вершину C_1 и середины рёбер AC и BC;

в) объёмы частей, на которые призма разбивается плоскостью, проходящей через вершины A, B и середину ребра A_1C_1;

г) объёмы частей, на которые призма разбивается плоскостью, проходящей через вершины C, A_1 и середину ребра BB_1;

д) объём общей части пирамид $ABCB_1$ и $A_1B_1C_1B$.

5. Основания $ABCDEF$ и $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ шестиугольной призмы $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ — правильные шестиугольники. Объём призмы равен 1. Найдите:

а) объём пятиугольной призмы $ABCDEA_1B_1C_1D_1E_1$;

б) объём пирамиды $BCED_1$;

в) объём пирамиды A_1BDF;

г) объёмы частей, на которые призма разбивается плоскостью, проходящей через вершины A, C и D_1;

д) объёмы частей, на которые призма разбивается плоскостью, проходящей через вершины B, C и A_1.

6. Основание $ABCDEF$ шестиугольной пирамиды $SABCDEF$ — правильный шестиугольник. Объём пирамиды равен 1. Найдите:

а) объём четырёхугольной пирамиды, отсекаемой от данной пирамиды плоскостью, проходящей через точки A, S и середину ребра DE;

б) объём пирамиды, отсекаемой от данной пирамиды плоскостью, проходящей через середину ребра SA параллельно диагоналям AD и CE основания;

в) объём пирамиды, отсекаемой от данной пирамиды плоскостью, проходящей через точки B, D и середину ребра SC;

г) объём пирамиды $SBCM$, где M — середина SD;

д) объёмы частей, на которые пирамида разбивается плоскостью, проходящей через точки B, C и середину ребра SE.

Задачи на доказательство и вычисление

8.1. Диагональ прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равна 13, а диагонали двух соседних граней равны $4\sqrt{10}$ и $3\sqrt{17}$.

а) Докажите, что треугольник AC_1D_1 прямоугольный.

б) Найдите объём параллелепипеда.

8.2. Диагональ прямоугольного параллелепипеда равна $4\sqrt{2}$ и образует с боковыми гранями углы 30° и 45°.

а) Докажите, что одна из этих граней — квадрат.

б) Найдите объём параллелепипеда.

8.3. Сторона основания ABC правильной треугольной пирамиды $ABCD$ равна 6, а площадь сечения, проходящего через ребро AB и середину бокового ребра CD, равна $6\sqrt{6}$.

а) Докажите, что плоскость сечения образует с плоскостью основания угол $45°$.

б) Найдите объём пирамиды $ABCD$.

8.4. Сторона основания $ABCDEF$ правильной шестиугольной пирамиды $SABCDEF$ равна 4, а площадь сечения, проходящего через прямую CF и середину бокового ребра SD, равна $10\sqrt{3}$.

а) Докажите, что плоскость сечения образует с плоскостью основания угол $60°$.

б) Найдите объём пирамиды $SABCDEF$.

8.5. Точки M и N — середины рёбер соответственно CC_1 и B_1C_1 треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ с основаниями ABC и $A_1B_1C_1$.

а) Докажите, что плоскость BA_1M делит отрезок AN в отношении $4:3$, считая от точки A.

б) В каком отношении плоскость BA_1M делит объём призмы?

8.6. Основания $ABCDEF$ и $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ шестиугольной призмы $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ — правильные шестиугольники, M — точка пересечения BD и FC.

а) Докажите, что плоскость BDF_1 делит отрезок FC_1 в отношении $3:4$, считая от точки F.

б) В каком отношении плоскость BDF_1 делит объём призмы?

8.7. Точка P — середина медианы BK основания ABC треугольной пирамиды $ABCD$.

а) Докажите, что плоскость α, проходящая через точку B и середины рёбер AD и CD, делит отрезок DP в отношении $2:1$, считая от вершины D.

б) Найдите расстояние от вершины C до плоскости α, если объём пирамиды $ABCD$ равен 16, а площадь её сечения плоскостью α равна 3.

8.8. Через вершину D треугольной пирамиды $DABC$ и точку M пересечения медиан грани ABC проведена плоскость α, параллельная ребру AC. На медиане DN грани ACD отмечена точка P, причём $DP : PN = 2 : 3$.

а) Докажите, что прямая BP проходит через середину отрезка DM.

б) Найдите расстояние от точки C до плоскости α, если объём пирамиды $ABCD$ равен 18, а площадь её сечения плоскостью α равна 4.

8.9. Точка M — середина ребра BD правильного тетраэдра $ABCD$. Плоскость, проходящая через точку M перпендикулярно ребру AD, пересекает это ребро в точке K, а ребро CD — в точке N.

а) Докажите, что N — середина ребра CD.

б) Найдите объём тетраэдра $ABCD$, если объём пирамиды $DKMN$ равен V.

8.10. Точка P лежит на ребре AD правильного тетраэдра $ABCD$, причём $AP:PD = 1:2$. Плоскость, проходящая через точку P перпендикулярно ребру CD, пересекает это ребро в точке M, а ребро BD — в точке Q.

а) Докажите, что плоскость PMQ делит высоту пирамиды пополам.

б) Найдите объём треугольной пирамиды $QABC$, если объём пирамиды $DPMQ$ равен V.

8.11. Плоскость α проходит через середины рёбер AD, CD и BB_1 параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

а) Докажите, что эта плоскость делит ребро CC_1 в отношении $1:5$, считая от вершины C.

б) Найдите объём меньшего из многогранников, на которые плоскость α разбивает параллелепипед, если объём параллелепипеда равен V.

8.12. Плоскость α проходит через вершину D и центры граней AA_1B_1B и BB_1C_1C параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

а) Докажите, что эта плоскость делит ребро BB_1 в отношении $2:1$, считая от вершины B.

б) Найдите объёмы многогранников, на которые плоскость α разбивает параллелепипед, если его объём равен V.

8.13. Основание четырёхугольной пирамиды $SABCD$ — параллелограмм $ABCD$. Через середины рёбер SC и AB проведена плоскость, параллельная диагонали BD основания.

а) Докажите, что эта плоскость делит ребро SB в отношении $3:1$, считая от вершины пирамиды.

б) В каком отношении эта плоскость делит объём пирамиды?

8.14. Основание четырёхугольной пирамиды $SABCD$ — параллелограмм $ABCD$. Через середину ребра SC и точку A проведена плоскость, параллельная диагонали BD основания. Пусть P — точка пересечения этой плоскости с прямой CD.

а) Докажите, что D — середина отрезка CP.

б) Найдите объём большей из частей, на которые эта плоскость разбивает пирамиду, если объём пирамиды равен V.

8.15. Высота SH правильной треугольной пирамиды $SABC$ относится к высоте основания ABC как $4:9$. Плоскость α проходит через ребро AB и делит пополам двугранный угол пирамиды при этом ребре.

а) Докажите, что плоскость α делит высоту пирамиды в отношении $3:5$, считая от точки H.

б) Найдите объём меньшей из частей, на которые пирамида разбивается плоскостью α, если сторона основания пирамиды равна 6.

8.16. Дана правильная четырёхугольная пирамида $SABCD$ с вершиной S. Апофема пирамиды вдвое больше стороны основания. Плоскость α проходит через ребро AB и делит пополам двугранный угол пирамиды при этом ребре.

а) Докажите, что плоскость α делит высоту пирамиды в отношении $4:1$, считая от вершины S.

б) Найдите объём большей из частей, на которые пирамида разбивается плоскостью α, если сторона основания пирамиды равна $\sqrt{15}$.

8.17. Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. На лучах AB, AD и AA_1 отмечены точки K, L и M соответственно, причём $AK=\frac{5}{2}AB$, $AL=\frac{5}{2}AD$ и $AN=\frac{5}{2}AA_1$.

а) Докажите, что плоскость KLM делит ребро B_1C_1 пополам.

б) В каком отношении плоскость KLM делит объём параллелепипеда?

8.18. На диагонали BD_1 параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ отмечена точка M, причём $BM:MD_1=1:3$. Через точку M проведена плоскость α, параллельная прямым AB_1 и CB_1.

а) Докажите, что плоскость α делит ребро AB в отношении $1:3$, считая от вершины A.

б) В каком отношении плоскость α делит объём параллелепипеда?

8.19. Точка M — середина ребра B_1C_1 правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ с основаниями ABC и $A_1B_1C_1$. Прямые BA_1 и CB_1 перпендикулярны.

а) Докажите, что треугольник BMA_1 равнобедренный.

б) Найдите объём призмы, если расстояние между прямыми BA_1 и CB_1 равно 2.

8.20. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ грань $ABCD$ — квадрат. Точка M лежит на ребре BC, причём $CM:MB=1:2$. Известно, что диагональ DB_1 параллелепипеда перпендикулярна отрезку C_1M.

а) Докажите, что угол между прямой CB_1 и плоскостью $A_1B_1C_1$ равен 30°.

б) Найдите объём параллелепипеда, если расстояние между прямыми DB_1 и C_1M равно $\sqrt{\frac{3}{7}}$.

8.21. Точки M и N — середины рёбер AA_1 и CC_1 параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Прямые A_1C, B_1M и BN попарно перпендикулярны.

а) Докажите, что расстояние между плоскостями BND и B_1MD_1 вдвое меньше диагонали A_1C.

б) Найдите объём параллелепипеда, если известно, что $A_1C=a$, $B_1M=b$, $BN=c$.

8.22. Основание пирамиды $SABCD$ — параллелограмм $ABCD$, точки M и N — середины рёбер SC и SD соответственно. Прямые SA, BM и CN попарно перпендикулярны.

а) Докажите, что отрезок CN делится плоскостью BMD в отношении $2:1$, считая от точки C.

б) Найдите объём пирамиды, если $SA=a$, $BM=b$, $CN=c$.