

Задачи

1. Вычислите:

а) $2 \sin 15^\circ \cos 15^\circ$;

б) $\sin \frac{\pi}{8} \cos \frac{\pi}{8}$;

в) $4 \sin 75^\circ \cos 75^\circ$;

г) $\frac{1}{2} \sin 105^\circ \cos 105^\circ$;

д) $\left(\cos \frac{\pi}{12} + \sin \frac{\pi}{12} \right)^2$;

е) $\left(\sin \frac{7\pi}{8} - \cos \frac{7\pi}{8} \right)^2$.

$\frac{\pi}{2\sqrt{2}} + 1 \quad \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{8} \right) - \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{8} \right) \left(\frac{\pi}{8} - \frac{\pi}{16} \right) \left(\frac{\pi}{16} - \frac{\pi}{32} \right) \left(\frac{\pi}{32} - \frac{\pi}{64} \right)$

2. Вычислите:

а) $\cos^2 15^\circ - \sin^2 15^\circ$;

б) $\sin^2 \frac{\pi}{8} - \cos^2 \frac{\pi}{8}$;

в) $2 \cos^2 75^\circ - 1$;

г) $1 - 2 \cos^2 \frac{5\pi}{8}$;

д) $1 - 2 \sin^2 \frac{7\pi}{12}$;

е) $2 \sin^2 165^\circ - 1$.

$\frac{\pi}{2\sqrt{2}} - \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) - \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{8} \right) \left(\frac{\pi}{8} - \frac{\pi}{16} \right) - \left(\frac{\pi}{8} - \frac{\pi}{16} \right) \left(\frac{\pi}{16} - \frac{\pi}{32} \right) \left(\frac{\pi}{32} - \frac{\pi}{64} \right)$

3. Упростите выражение:

а) $\frac{\sin 2\alpha}{\cos \alpha}$;

б) $\frac{2 \sin^2 \alpha}{\sin 2\alpha}$;

в) $\frac{1 - \cos 2\beta}{\sin \beta}$;

г) $\frac{1 + \cos 2\beta}{\cos \beta}$;

д) $\frac{\cos 40^\circ + \sin^2 20^\circ}{\cos^2 20^\circ}$;

е) $\frac{\cos 10^\circ}{\cos 5^\circ + \sin 5^\circ} + \sin 5^\circ$.

$\frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{8} \right) \cos \frac{\pi}{8} \left(\frac{\pi}{8} - \frac{\pi}{16} \right) \cos \frac{\pi}{16} \left(\frac{\pi}{16} - \frac{\pi}{32} \right) \cos \frac{\pi}{32} \left(\frac{\pi}{32} - \frac{\pi}{64} \right)$

4. Упростите выражение:

а) $\sin 2\alpha + (\sin \alpha - \cos \alpha)^2$;

б) $\sin 2\alpha \operatorname{ctg} \alpha - 1$;

в) $\frac{2 \sin \alpha - \sin 2\alpha}{1 - \cos \alpha}$;

г) $\frac{\cos 2x - \cos^2 x}{1 - \cos^2 x}$;

д) $(\cos 3\alpha + \sin 3\alpha)(\cos 3\alpha - \sin 3\alpha)$;

е) $1 - 2 \sin^2 4x$.

$\frac{\pi}{8} \cos \frac{\pi}{8} \left(\frac{\pi}{8} - \frac{\pi}{16} \right) \cos \frac{\pi}{16} \left(\frac{\pi}{16} - \frac{\pi}{32} \right) \cos \frac{\pi}{32} \left(\frac{\pi}{32} - \frac{\pi}{64} \right) \cos \frac{\pi}{64} \left(\frac{\pi}{64} - \frac{\pi}{128} \right)$

5. Известно, что $\sin \alpha = \frac{4}{5}$ и $90^\circ < \alpha < 180^\circ$. Найдите $\sin 2\alpha$ и $\cos 2\alpha$.

$\frac{9\pi}{2} - \pi \cos \frac{\pi}{2} - \pi \cos \frac{\pi}{4} - \pi \cos \frac{\pi}{8} - \pi \cos \frac{\pi}{16} - \pi \cos \frac{\pi}{32} - \pi \cos \frac{\pi}{64} - \pi \cos \frac{\pi}{128}$

6. Известно, что $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{5}{12}$ и $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$. Найдите $\sin 2\alpha$ и $\cos 2\alpha$.

$\frac{691}{611} = \pi \cos \frac{\pi}{20} - \frac{691}{120} = \pi \cos \frac{\pi}{10} - \frac{691}{240} = \pi \cos \frac{\pi}{5} - \frac{691}{480}$

7. В равнобедренном треугольнике синус угла при основании равен $1/3$. Найдите косинус угла при вершине этого треугольника.

$$\frac{6}{7}$$

8. Вычислите $\sin \frac{\pi}{8}$ и $\cos \frac{\pi}{8}$.

$$\frac{\sqrt{2} + \sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \frac{\pi}{8}, \quad \frac{\sqrt{2} - \sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \frac{\pi}{8}$$

9. Упростите выражение:

а) $\frac{2 \operatorname{tg} 3^\circ}{1 - \operatorname{tg}^2 3^\circ};$

б) $\frac{6 \operatorname{tg} \frac{\pi}{12}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{12}};$

в) $\frac{2}{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} + \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}};$

г) $2 \sin \frac{\pi + x}{2} \cos \frac{\pi + x}{2};$

д) $(1 - \operatorname{tg}^2 \alpha) \cos^2 \alpha;$

е) $\cos^2 \frac{\pi + \alpha}{4} - \sin^2 \frac{\pi + \alpha}{4}.$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \sin \alpha - \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos \alpha \right) \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \sin \alpha \right) - \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \sin \alpha \right) \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos \alpha \right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 2\alpha$$

10. Докажите тождество:

а) $(\cos \alpha + \sin \alpha)^2 = 1 + \sin 2\alpha;$

б) $\cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha = \cos 2\alpha;$

в) $\operatorname{ctg} \alpha - \sin 2\alpha = \operatorname{ctg} \alpha \cos 2\alpha;$

г) $\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} - \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = 2 \operatorname{ctg} \alpha;$

д) $\sin 2\alpha - \operatorname{tg} \alpha = \cos 2\alpha \operatorname{tg} \alpha;$

е) $(\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{tg} \alpha) \sin 2\alpha = 2 \cos 2\alpha;$

ж) $(1 + \cos 2\alpha) \operatorname{tg} \alpha = \sin 2\alpha;$

з) $\sin \alpha \cos^3 \alpha - \sin^3 \alpha \cos \alpha = \frac{1}{4} \sin 4\alpha;$

и) $\frac{\cos 2\alpha}{\sin \alpha \cos \alpha + \sin^2 \alpha} = \operatorname{ctg} \alpha - 1;$

к) $\frac{\sin 2\alpha - 2 \cos \alpha}{\sin \alpha - \sin^2 \alpha} = -2 \operatorname{ctg} \alpha;$

л) $\left(\frac{\cos \alpha}{1 + \sin \alpha} + \frac{\cos \alpha}{1 - \sin \alpha} \right) \sin 2\alpha = 4 \sin \alpha;$

м) $\left(\frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} + \frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha} \right) \sin 2\alpha = 4 \cos \alpha;$

н) $\frac{1 - \cos \alpha + \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha - \sin \alpha} = \operatorname{ctg} \alpha;$

о) $\frac{1 - \cos 2\alpha + \sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha + \sin 2\alpha} = \operatorname{tg} \alpha.$

11. Найдите $\sin 2\alpha$, если $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{1}{2}.$

$$\frac{5}{8}$$

12. Докажите тождество:

$$\frac{\sin 3\alpha}{\sin \alpha} - \frac{\cos 3\alpha}{\cos \alpha} = 2.$$

13. Докажите тождество:

а) $\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2\alpha;$

б) $\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha = 1 - \frac{3}{4} \sin^2 2\alpha.$

14. Выведите формулы тройного угла:

а) $\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha$;

б) $\cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha$;

в) $\operatorname{tg} 3\alpha = \frac{3 \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg}^3 \alpha}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 \alpha}$.

15. Исходя из равенства $\cos 54^\circ = \sin 36^\circ$, вычислите $\sin 18^\circ$.



16. Покажите, что:

а) $\cos \frac{\pi}{5} \cos \frac{2\pi}{5} = \frac{1}{4}$;

б) $\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ = \frac{1}{8}$.