

Таким образом, задача сводится к решению уравнений $x^2 - x = -1$, $x^2 - x = 5$. Первое из них не имеет действительных корней, а второе имеет два корня.

Ответ. $x_1 = \frac{1 - \sqrt{21}}{2}$, $x_2 = \frac{1 + \sqrt{21}}{2}$.

Пример 9. Решить уравнение

$$|x^2 + x| + |x + 2| = x^2 - 2. \quad (26)$$

Решение. Функция $x + 2$ меняет знак при $x = -2$, а функция $x^2 + x$ — при $x = -1$ и $x = 0$, причем $x^2 + x \geq 0$ при $x \leq -1$ и $x \geq 0$. Поэтому

$$|x^2 + x| = \begin{cases} x^2 + x & \text{при } x \leq -1 \quad \text{и при } x \geq 0, \\ -x^2 - x & \text{при } -1 < x < 0; \end{cases}$$

$$|x + 2| = \begin{cases} x + 2 & \text{при } x \geq -2, \\ -x - 2 & \text{при } x < -2, \end{cases}$$

а уравнение (26), записанное без знака модуля на промежутках $x < -2$, $-2 \leq x \leq -1$, $-1 < x < 0$, $x \geq 0$, равносильно совокупности следующих систем:

$$\begin{cases} x < -2, \\ x^2 + x - x - 2 = x^2 - 2; \end{cases} \quad \begin{cases} -2 \leq x \leq -1, \\ x^2 + x + x + 2 = x^2 - 2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} -1 < x < 0, \\ -x^2 - x + x + 2 = x^2 - 2; \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq 0, \\ x^2 + x + x + 2 = x^2 - 2. \end{cases}$$

Первой из этих систем удовлетворяют все значения x из промежутка $x < -2$, второй системе — значение $x = -2$, остальные две системы не имеют решений.

Ответ. $x \leq -2$.

Задачи

Решить уравнение (1–18):

1. $\sqrt{5x^2 + 3x - 1} - 2x = 1$.
2. $\sqrt{x - 1} + \sqrt{11 - x} = 4$.
3. $\sqrt{x + 17} - \sqrt{x - 7} = 4$.
4. $\sqrt{2x - 15} - \sqrt{x + 16} = -1$.
5. $\sqrt{3x^2 + 6x + 1} + x^2 + 2x = 13$.
6. $\sqrt{2x^2 + 3x + 2} - \sqrt{2x^2 + 3x - 5} = 1$.
7. $2\sqrt{x^2 - 4x + 7} - \sqrt{x^2 - 4x + 12} = 1$.
8. $\frac{\sqrt{3+x} + \sqrt{3-x}}{\sqrt{3+x} - \sqrt{3-x}} = 2$.
9. $\sqrt[3]{5+x} - 2\sqrt[3]{5-x} = \sqrt[6]{25-x^2}$.
10. $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{x+2} = 0$.
11. $\sqrt{x+6} - 4\sqrt{x+2} + \sqrt{11+x} - 6\sqrt{x+2} = 1$.
12. $|2x+3| = |2x-5|$.
13. $x^2 - 4x - 4 = 2|x-2|$.
14. $|x^2 + x + 1| + |x^2 + x - 3| = 6$.
15. $|x^3 - 3x^2 + x| = x - x^3$.
16. $|x^2 - x| + |x+1| = x^2 - 2x - 1$.
17. $\sqrt{x-1} + |x-2| = |x-3|$.
18. $\frac{3x^2 + 2 - |2x+3|}{|x|-1} = 0$.