При $x \in (0; 1)$ неравенство $f(x) > g(x)$ (а значит, и данное неравенство) решений не имеет, так как $f(x) < 1$, а $g(x) > 1$.

При $x \in (2; +\infty)$ неравенство $f(x) > g(x)$ (а значит, и данное неравенство) решений не имеет, так как $f(x) < 2$, а $g(x) > 2$.

Осталось рассмотреть отрезок $[1; 2]$. Здесь доказательство не столь очевидно (предыдущие легко следуют из свойств функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$ и простейших неравенств), но рисунок «подсказывает» идею доказательства: каждая из функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$ возрастает на этом отрезке, достигая своего наименьшего значения в левом конце отрезка, а наибольшего — в правом, но похоже, что

$$\max_{[1;2]} f(x) = f(2) < \min_{[1;2]} g(x) = g(1).$$

Если это так, то и на отрезке $[1; 2]$ данное неравенство не будет иметь решений. Сравним $f(2) = \frac{7}{5}$ и $g(1) = \log_2 3$. Предположим, что $f(2) \geqslant g(1)$. Тогда $\frac{7}{5} \geqslant \log_2 3$ и, следовательно, $2^{\frac{7}{5}} \geqslant 3$, откуда $2^7 \geqslant 3^5$, т. е. $128 \geqslant 729$, что невозможно. Значит, допущение неверно. Поэтому и на отрезке $[1; 2]$ данное неравенство не имеет решений.

Ответ: $(-0{,}5; 0)$.

Упражнения к § 4.2

1. а) Постройте график функции $y = \frac{2x+1}{2x^2+x}$ и определите, при каких значениях k прямая $y = kx$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

б) Постройте график функции $y = \frac{x-2}{2x-x^2}$ и определите, при каких значениях k прямая $y = kx$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

2. а) Постройте график функции $y = x^2 - 2x - 4|x|$ и определите, при каких значениях c прямая $y = c - 2$ имеет с графиком не менее одной, но не более трёх общих точек.

б) Постройте график функции $y = 3|x| + x - x^2$ и определите, при каких значениях c прямая $y = c - 3$ имеет с графиком не менее одной, но не более двух общих точек.

3. а) Найдите все значения параметра a, для каждого из которых имеет единственный корень уравнение

$$3a + \sqrt{-3 - 4x - x^2} = ax + 1.$$

б) Найдите все значения параметра a, для каждого из которых имеет единственный корень уравнение

$$ax + \sqrt{-5 - 6x - x^2} = 5a + 2.$$

4. а) Найдите все значения параметра a, для каждого из которых имеет единственный корень уравнение

$$ax+2a+3=\sqrt{-7+8x-x^2}.$$

б) Найдите все значения параметра a, для каждого из которых имеет единственный корень уравнение

$$6a+\sqrt{-24-10x-x^2}=ax+1.$$

5. а) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$12|x^2-4|=2a+|a-12x+12|+36$$

имеет ровно три различных корня.

б) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$6|x^2-4|=2a+|a+6x+6|+18$$

имеет ровно три различных корня.

6. а) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\frac{1}{2}ax+\left|\frac{1}{x}+2\right|=2a$ имеет хотя бы один корень, и укажите число корней уравнения для каждого значения a.

б) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\frac{1}{3}ax+\left|\frac{1}{x}+1\right|=a$ имеет хотя бы один корень, и укажите число корней уравнения для каждого значения a.

7. а) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $ax|x|+|3x+2|=2a|x|$ имеет ровно один корень.

б) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $ax|x|+|5x+2|=6a|x|$ имеет ровно три различных корня.

8. а) Решите неравенство $\frac{3}{x+2}>\frac{\log_2(x+8)-1}{x}$.

б) Решите неравенство $\frac{3}{x+4}>\frac{\log_2(x+16)-2}{x}$.

9. а) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $2+\left|\frac{5}{x}-3\right|=ax$ имеет более двух положительных корней.

б) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $4+\left|\frac{5}{x}-6\right|=2ax$ имеет более двух положительных корней.

10. а) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $a|x-3|=\frac{5}{x+2}$ имеет более двух неотрицательных корней.

б) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $a|x-6|=\dfrac{10}{x+4}$ имеет более двух неотрицательных корней.

11. а) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых имеет единственное решение система уравнений

$$\begin{cases} y=\sqrt{5+4x-x^2}+2, \\ y=\sqrt{9-a^2+2ax-x^2}+a. \end{cases}$$

б) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых имеет единственное решение система уравнений

$$\begin{cases} y=\sqrt{5-8x-4x^2}+2, \\ y+2a=\sqrt{9-4a^2+8ax-4x^2}. \end{cases}$$

12. а) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $|x+3|-a|x-1|=4$ имеет хотя бы один корень, и укажите корни уравнения для каждого значения a.

б) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $a|x+3|+2|x+4|=2$ имеет хотя бы один корень, и укажите корни уравнения для каждого значения a.

13. а) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $ax=12a+\sqrt{6|x|+2x-x^2}$ имеет нечётное число различных корней.

б) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $ax=24a+\sqrt{12|x|+4x-x^2}$ имеет отличное от нуля чётное число различных корней.

14. а) а) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} y^2-(x^2+\sqrt{2|x|-x^2}-4)y+(x^2-4)\sqrt{2|x|-x^2}=0, \\ a+2x=y, \end{cases}$$

имеет нечётное число различных решений.

б) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} y^2-(x^2+\sqrt{4|x|-x^2}-16)y+(x^2-16)\sqrt{4|x|-x^2}=0, \\ a+4x=y, \end{cases}$$

имеет нечётное число различных решений.

15. а) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$(5x+a)^2-(|x|+\sqrt{6|x|-x^2}-6)(5x+a)+(|x|-6)\sqrt{6|x|-x^2}=0$$

имеет отличное от нуля чётное число различных корней.

б) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$(3x+a)^2-(|x|+\sqrt{10|x|-x^2}-10)(3x+a)+(|x|-10)\sqrt{10|x|-x^2}=0$$

имеет нечётное число различных корней.

16. а) а) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{(y^2-xy+3x-y-6)\sqrt{x+2}}{\sqrt{6-x}}=0, \\ x+y=a \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

б) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{(y^2-xy+2x-4y+4)\sqrt{x+4}}{\sqrt{5-y}}=0, \\ x+y=a \end{cases}$$

имеет единственное решение.

17. а) а) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{xy^2-2xy-4y+8}{\sqrt{x+4}}=0, \\ y=ax \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

б) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{xy^2-3xy-3y+9}{\sqrt{x+3}}=0, \\ y=ax \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.