

В уравнениях с параметрами перед решением необходимо внимательно изучить пример, обратить внимание на четность функции, попробовать отыскать инвариант (особенно если в задании просят найти значения, при которых уравнение имеет единственный корень).

Инвариантность – когда мы можем заменить аргумент нашей функции на какое-либо выражение. Четность – самый простой вариант инварианта:

Мы можем заменить x на $(-x)$: $f(x) = f(-x)$

Так же необходимо обратить внимание на монотонность функции, иногда это дает путь к решению примера, для исследования монотонности проще всего найти производную.

Добавлю сюда ещё одну очень полезную теоремку:

Если $f(x)$ – монотонно возрастает, то $f(x) = x$ и $f(f(x)) = x$ имеют одно и то же множество корней.

1. Найдите все значения a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} a(x^4 + 1) = y + 2 - |x| \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

2. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $\sqrt{(x+7)^2 + (a-5)^4} = |x+a+2| + |x-a+12|$ имеет единственный корень.
3. Решите уравнение $3^{-x} = \log_3(x+11) + 7$
4. Найдите все значения параметра a , для каждого из которых уравнение $27x^6 + (3a-4x)^3 + 3x^2 + 3a = 4x$ имеет хотя бы один корень
5. Решите уравнение $x^3 - 7\sqrt[3]{7x-6} + 6 = 0$