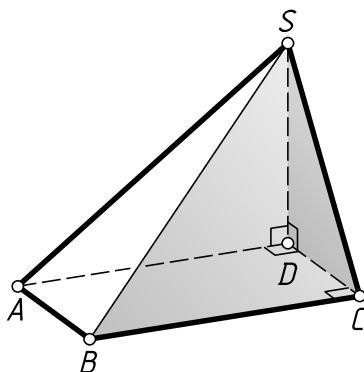


Р е ш е н и е. Прямая BC перпендикулярна плоскости CSD , так как она перпендикулярна двум пересекающимся прямым CD и SD этой плоскости. Плоскость BSC проходит через прямую BC , перпендикулярную плоскости CSD , следовательно, эти плоскости перпендикулярны. \triangleleft



Подготовительные задачи

1. Дан куб $ABCA_1B_1C_1D_1$. Найдите угол между плоскостями: а) BCC_1 и ABC_1 ; б) ABC и CB_1D_1 ; в) BA_1C_1 и AB_1D_1 ; г) ABC_1 и BCD_1 .

2. Дан правильный тетраэдр $ABCD$. Точки K и M — середины рёбер BD и CD соответственно. Найдите углы между плоскостями: а) AKC и ABD ; б) AMB и ABC ; в) AKM и ABC .

3. Дана правильная четырёхугольная пирамида $SABCD$ с вершиной S . Все рёбра пирамиды равны, E — середина бокового ребра SC . Найдите углы между плоскостями: а) SAD и SBC ; б) ABC и SCD ; в) ABC и BDE ; г) BSC и DSC ; д) ABE и ABC .

4. Дана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$. Боковое ребро AA_1 равно стороне основания ABC . Точка M — середина ребра BC . Найдите углы между плоскостями: а) AA_1M и ABC ; б) ABC и CA_1B_1 ; в) ACB_1 и BA_1C_1 ; г) A_1C_1M и $A_1B_1C_1$.

5. Дана правильная шестиугольная призма $ABCDEF A_1B_1C_1D_1E_1F_1$. Боковое ребро AA_1 равно стороне основания $ABCDEF$. Найдите углы между плоскостями: а) ABC и DB_1F_1 ; б) AFF_1 и DEE_1 ; в) AFF_1 и BCC_1 ; г) AFF_1 и BDD_1 .

6. Дана правильная шестиугольная пирамида $SABCDEF$ с вершиной S . Боковое ребро вдвое больше стороны основания. Найдите углы между плоскостями: а) ABC и SEF ; б) SBD и ABC ; в) SBC и SEF ; г) SAF и SBC .

Задачи на доказательство и вычисление

3.1. Основание пирамиды совпадает с одной из граней куба, а вершина — с центром противоположной грани.

- а) Докажите, что пирамида правильная.
- б) Найдите угол между плоскостями её соседних боковых граней.

3.2. Дана правильная треугольная пирамида $DABC$ с вершиной D . Точка M — середина ребра AB , N — основание перпендикуляра, опущенного из точки M на прямую CD .

- а) Докажите, что прямая MN перпендикулярна прямой AB .
- б) Найдите угол между боковыми гранями пирамиды, если угол между боковым ребром и плоскостью основания равен 60° .

3.3. Дана правильная четырёхугольная пирамида $SABCD$ с вершиной S . Точка O — центр основания, K — основание перпендикуляра, опущенного из точки O на прямую SC .

- а) Докажите, что прямая OK перпендикулярна прямой BD .
- б) Найдите двугранный угол при боковом ребре пирамиды, если угол между боковым ребром и плоскостью основания равен 60° .

3.4. Дана правильная шестиугольная пирамида $SABCDEF$ с вершиной S . Диагонали AD и CE основания пересекаются в точке P , Q — основание перпендикуляра, опущенного из точки P на прямую SD .

- а) Докажите, что прямая PQ перпендикулярна прямой CE .
- б) Найдите двугранный угол при боковом ребре пирамиды, если угол между боковым ребром и плоскостью основания равен 60° .

3.5. В правильной четырёхугольной призме $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ стороны основания равны 2, а боковые рёбра равны 3. На ребре AA_1 отмечена точка E так, что $AE : EA_1 = 1 : 2$.

- а) Постройте прямую пересечения плоскостей ABC и BED_1 .
- б) Найдите угол между плоскостями ABC и BED_1 .

3.6. В правильной четырёхугольной призме $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ стороны основания равны 3, а боковые рёбра равны 4. На ребре AA_1 отмечена точка E так, что $AE : EA_1 = 1 : 3$.

- а) Постройте прямую пересечения плоскостей ABC и BED_1 .
- б) Найдите угол между плоскостями ABC и BED_1 .

3.7. Основание пирамиды $SABCD$ — прямоугольник $ABCD$. Высота пирамиды лежит в грани CSD .

- а) Докажите, что прямые AD и SC перпендикулярны.
- б) Известно, что $AB : BC = 2\sqrt{3} : 1$, высота пирамиды проходит через середину ребра CD , а угол между боковой гранью BSC и плоско-

стью основания равен 45° . Найдите углы, которые образуют с плоскостью основания плоскости остальных боковых граней.

3.8. Основание пирамиды $ABCD$ — прямоугольный треугольник ABC . Высота пирамиды проходит через середину гипотенузы AB .

а) Докажите, что боковые рёбра пирамиды образуют равные углы с плоскостью основания.

б) Известно, что $BC:AC = \sqrt{3}:1$, а угол между боковой гранью BDC и плоскостью основания равен 60° . Найдите углы, которые образуют с плоскостью основания плоскости двух других боковых граней.

3.9. Точки M и N — середины боковых рёбер соответственно AA_1 и CC_1 прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$.

а) Докажите, что отрезок, соединяющий вершину B_1 с серединой ребра AC , делится плоскостью BMN в отношении $2:1$, считая от точки B_1 .

б) Найдите угол между плоскостями AA_1C_1 и MBN , если $AB = BC = 15$, $AC = 24$ и $AA_1 = 144$.

3.10. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ стороны основания равны 5, боковые рёбра равны 2, точка D — середина ребра CC_1 .

а) Постройте прямую пересечения плоскостей ABC и ADB_1 .

б) Найдите угол между плоскостями ABC и ADB_1 .

3.11. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ с вершиной S все рёбра равны.

а) Постройте прямую пересечения плоскости SAD с плоскостью, проходящей через точку B перпендикулярно прямой AS .

б) Найдите угол между плоскостью SAD и плоскостью, проходящей через точку B перпендикулярно прямой AS .

3.12. Дана правильная шестиугольная призма $ABCDEF A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ со стороной основания $\sqrt{3}$ и боковым ребром 1.

а) Докажите, что плоскости ACA_1 и B_1CE_1 перпендикулярны.

б) Найдите угол между плоскостями B_1CE_1 и ABC .

3.13. В основании прямой призмы $ABCD A_1B_1C_1D_1$ лежит квадрат $ABCD$ со стороной 2, а высота призмы равна 1. Точка E лежит на диагонали BD_1 , причём $BE = 1$.

а) Постройте сечение призмы плоскостью A_1C_1E .

б) Найдите угол между плоскостью сечения и плоскостью ABC .

3.14. На ребре AA_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1B_1C_1D_1$ взята точка E так, что $A_1E:EA = 4:3$. Точка T — середина ребра B_1C_1 . Известно, что $AB = 5$, $AD = 8$, $AA_1 = 14$.

а) Докажите, что плоскость ETD_1 делит ребро BB_1 в отношении $2:5$.

б) Найдите угол между плоскостью ETD_1 и плоскостью AA_1B_1 .

3.15. В основании прямой призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ лежит квадрат $ABCD$ со стороной 4, а высота призмы равна $\sqrt{17}$. Точка E лежит на диагонали BD_1 , причём $BE = 1$.

а) Постройте сечение призмы плоскостью $A_1 C_1 E$.

б) Найдите угол между этой плоскостью и плоскостью ABC .

3.16. В правильной четырёхугольной призме $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ со стороной основания 4 и высотой 7 на ребре AA_1 взята точка M так, что $AM = 2$. На ребре BB_1 взята точка K так, что $B_1 K = 2$.

а) Постройте сечение призмы плоскостью $A_1 C_1 E$.

б) Найдите угол между плоскостью $D_1 MK$ и плоскостью $CC_1 D_1$.

3.17. В треугольной пирамиде $SABC$ с основанием ABC точка M — середина ребра SA , точка K — середина ребра SB , O — точка пересечения медиан основания.

а) Докажите, что плоскость CMK делит отрезок SO в отношении $3:2$, считая от вершины S .

б) Найдите угол между плоскостями CMK и ABC , если пирамида правильная, $SC = 6$, $AB = 4$.

3.18. Основание четырёхугольной пирамиды $SABCD$ — параллелограмм $ABCD$ с центром O . Точка M — середина ребра SC , K — середина ребра SA .

а) Докажите, что плоскость BMK делит ребро SD в отношении $1:2$, считая от вершины S .

б) Найдите угол между плоскостями BMK и ABC , если пирамида правильная, $AB = 10$, $SC = 8$.

3.19. Дан прямоугольный параллелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Через прямую BD_1 проведена плоскость α , параллельная прямой AC .

а) Постройте сечение параллелепипеда плоскостью α .

б) Найдите угол между плоскостью α и плоскостью ABC , если $AB = a$, $BC = b$, $CC_1 = c$.

3.20. Дан прямоугольный параллелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Через прямую BD_1 проведена плоскость α , параллельная прямой AC . Сечение параллелепипеда плоскостью α — ромб.

а) Докажите, что грань $ABCD$ — квадрат.

б) Найдите угол между плоскостью α и плоскостью BCC_1 , если $AA_1 : AB = 3:2$.