определяемые точками пересечения L и K — это решения $(8; 6)$ и $(-2; 6)$.

2) Одна из сторон угла L касается окружности K, а другая пересекает K в двух точках (на рис. 43.19 представлен случай, когда прямая $y = x - a + 1$ касается окружности K в точке B, а другая пересекает K в точках E_1 и E_2).

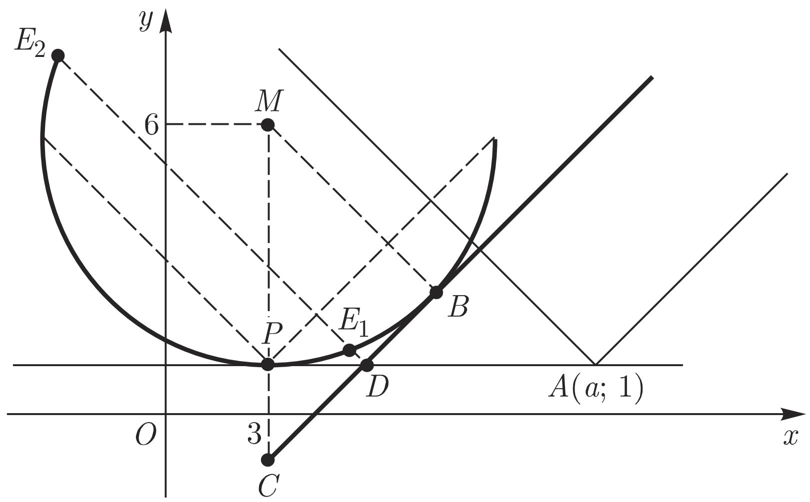

Рис. 43.19

Пусть D и C — точки пересечения прямой $y = x - a + 1$ (проходит через точку B) с прямыми $y = 1$ и $x = 3$. Так как $\triangle BMC$ — равнобедренный и прямоугольный (угловой коэффициент прямой $y = x - a + 1$ равен 1), а $MP = MB = 5$, то $MC = 5\sqrt{2}$, $PC = 5\sqrt{2} - 5 = PD$. Но $OD = 3 + PD = 5\sqrt{2} - 2 = a_1$ — искомое значение a.

Случаю касания прямой $y = x - a + 1$ и K соответствует точка D', симметричная D относительно прямой $x = 3$ (соответствующее значение параметра $a_2 = 3 - PD = 3 - (5\sqrt{2} - 5) = 8 - 5\sqrt{2}$).

Ответ. $a = 3$, $a = 5\sqrt{2} - 2$, $a = 8 - 5\sqrt{2}$.

Задачи

1. Найти все значения a, при которых уравнение

$$\frac{a(x+1)^2}{x} + (a-1)^2 = 0$$

имеет корни, и решить это уравнение.

2. Найти все значения a, при которых уравнение

$$\frac{x^2 + (3a+1)x + 2a^2 - 2}{x^2 - 3x - 4} = 0$$

имеет только один корень.

3. Найти все значения a, при которых уравнение

$$(a+1)x^2 - 2ax + a - 2 = 0$$

имеет два различных положительных корня.

4. Каким условиям должны удовлетворять коэффициенты a, b, c уравнения

$$ax^4 + bx^2 + c = 0,$$

чтобы это уравнение имело четыре различных действительных корня?

5. Найти все значения a, при которых каждый корень уравнения
$(a-3)x^2 - 2(a+1)x + a = 0$
больше -1.

6. Найти все значения a, при которых каждый корень уравнения
$2ax^2 + 2(5-a)x + 5(a-1) = 0$
меньше -1.

7. Найти все значения a, при которых уравнение
$x^2 + (a+2)x + 1 - a = 0$
имеет два действительных корня x_1 и x_2 такие, что
$x_1x_2 < 0, \quad |x_1| < 4, \quad |x_2| < 4.$

8. Найти все значения a, при которых уравнение
$(2a+3)x^2 + (3a+5)x + a + 6 = 0$
имеет на отрезке $[-1, 1]$ хотя бы один корень.

9. Найти все значения a, при которых уравнение
$9^x + (1-a)3^x + 2a + 3 = 0$
имеет единственный корень.

10. Найти все значения a, при которых уравнение
$25^x + (a^2+5)5^x + 9 - a^2 = 0$
не имеет корней.

11. Найти все значения a, при которых уравнение
$$\frac{x(x-1)}{x-2} + \frac{a(x-2)}{x^2-x} = 1$$
имеет хотя бы один корень.

12. Найти все значения a, при которых уравнение
$$\frac{\sqrt{x+a} - x - 1}{x^2 - x} = 0$$
имеет единственный корень.

13. Найти все значения a, при которых уравнение
$x^3 + 5x^2 + 3x + a = 0$
имеет хотя бы два корня, больших a.

14. Найти все значения a, при которых уравнение
$$\frac{x^4}{x-1} + a(x-1) = 6x^2$$
имеет более двух различных корней.

15. Найти все значения a, при которых уравнение
$\sqrt{6x - x^2} = x + a$
имеет хотя бы один корень.

16. Найти все значения a, при которых уравнение
$$\log_{2x}(1 - ax) = \frac{1}{2}$$
имеет единственное решение.

17. Найти все значения a, при которых уравнение
$\sqrt{x-8} = -ax + 3a + 2$
имеет единственное решение.

18. Найти все значения a, при которых уравнение
$\log_2(x + \sqrt{3-a}) + \log_{\frac{1}{2}}(a + 1 - x) = \log_4 9$
имеет решение.

19. Найти все значения a, при которых уравнение
$x^2 - 6|x| + 6 - a = 0$
имеет два различных корня.

20. Найти все значения a, при которых уравнение

$$9^x - (a+2)3^{x-\frac{1}{x}} + 2a \cdot 3^{-\frac{2}{x}} = 0$$

имеет ровно два корня.

21. Найти все значения a, при которых уравнение

$$|2x^2 - 5x - 3| = a:$$

а) имеет ровно два корня;

б) имеет ровно три корня;

в) имеет ровно четыре корня.

22. Найти все значения a, при которых уравнение

$$|x^2 - 1| + |x^2 - 4| = a:$$

а) имеет ровно два корня;

б) имеет ровно три корня;

в) имеет ровно четыре корня.

23. Найти все значения a, при которых уравнение

$$|x - 2| + a|x + 3| = 5$$

имеет ровно два корня, и найти эти корни.

24. Найти все значения a, при которых уравнение

$$(a - 6 + |x - 1|)(a - x^2 + 2x) = 0$$

имеет: а) ровно три корня; б) ровно два корня.

25. Найти все значения a, при которых уравнение

$$x^2 + 4x - 2|x + a| + 2 + a = 0$$

имеет ровно два действительных и различных корня.

26. Найти все значения a, при которых уравнение

$$ax^2 - (a^2 + a - 6)(|x| - 1) + 6 = 0$$

имеет единственный корень.

27. Найти все значения a и b, при которых уравнения

$$x(x^2 + x - 8) = a \quad \text{и} \quad x(x^2 - 6) = b$$

имеют два общих различных корня.

28. Найти все значения a, при которых уравнение

$$2ax^2 + 5x + 4a^2 + 5 = 0$$

имеет только целые корни.

29. Найти все значения a, при которых уравнение

$$|x^2 + 2x| + |x^2 + 3x + 2| = x^2 + 4x + a$$

имеет ровно три различные корня.

30. Пусть p и q — целые числа и пусть рациональное число x_0 является корнем уравнения $x^2 + px + q = 0$. Доказать, что x_0 — целое число.

31. Пусть коэффициенты уравнений $x^2 + p_1x + q_1 = 0$ и $x^2 + p_2x + q_2 = 0$ являются целыми числами. Доказать, что если эти уравнения имеют общий нецелый корень, то $p_1 = p_2$, $q_1 = q_2$.

32. Найти все значения a, при которых найдется хотя бы одна пара действительных чисел $(x; y)$, удовлетворяющих уравнению

$$5x^2 + axy + y^2 + 8ax + 8y + 20 = 0.$$

33. Найти все значения a, при которых уравнение

$$\sin^4 x + \cos^4 x = a$$

имеет корни, и решить это уравнение.

34. Найти все значения a, при которых уравнение

$$4\sin^2 x + 2(a - 3)\cos x + 3a - 4 = 0$$

имеет корни, и решить это уравнение.

35. Найти все значения a, при которых уравнение
$4\cos 2x + (2-4a)\sin x = a+3$
имеет единственный корень на интервале $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$.

36. Найти все значения a, при которых уравнение
$(1-a)\operatorname{tg}^2 x - \frac{2}{\cos x} + 1 + 3a = 0$
имеет не более одного корня не интервале $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

37. Найти все значения a, при которых уравнение
$(a^2+2)\sin^2 x + 4a\sin x\cos x + a^2 + 3 = 0$
имеет корни, и решить это уравнение.

38. Найти все значения a, при которых уравнение
$\cos^8 x + \sin^8 x = a$
имеет корни, и решить это уравнение.

39. Найти все значения a, при которых уравнение
$\sin^{10} x + \cos^{10} x = a$
имеет корни, и решить это уравнение.

40. Найти все значения a, при которых уравнение
$(x^2 - 6|x| - a)^2 + 12(x^2 - 6|x| - a) + 37 = \cos\frac{18\pi}{a}$
имеет ровно два корня.

41. Найти все значения p, при которых сумма всех действительных корней уравнения
$\left(x - \frac{9}{4}p\right)^4 - 4p(p-1)\left(x - \frac{9}{4}p\right)^2 - p^3(2p-3) = 0$
меньше $-5p^2 + 11p + 7$.

42. Корни уравнения
$x^3 - (\log_{\frac{p}{8}} p)x^2 + \left|\frac{5}{2}\log_4 p\right| x - \frac{15}{8} = 0$
являются длинами сторон некоторого треугольника, а корни уравнения
$x^3 - \frac{2}{3}\sqrt{p}x^2 + \frac{2p}{15}x - \frac{p}{p+14} = 0$
— длинами высот этого треугольника. Найти p и площадь треугольника.

43. При каких значениях a уравнение
$\log_3 x + (a^2 - 4)\log_{3x}\frac{1}{3} - 3 = 0$
имеет два корня, расстояние между которыми больше 8?

44. Множество M состоит из точек $(a; b)$ координатной плоскости, для которых
$|a| \neq 2$ и уравнение
$(4a - 3b + 40)x^4 + (3a - 4b + 30)x^2 + |a^2 - 4| + a^2 - 4 = 0$
имеет ровно три корня. Доказать, что в многоугольник, внутренней областью которого является множество M, можно вписать окружность, и найти координаты центра этой окружности.

45. На координатной плоскости рассматривается множество N всех точек, координаты $(a; b)$ которых удовлетворяют условиям $a < b$, $|a| < 3$, $|b| < 3$ и таковы, что уравнение
$(a^3 - b^3)x^4 + (3a + b)x^2 + \frac{1}{a-b} = 0$
не имеет корней. Требуется:
а) установить, принадлежит ли точка $P(-2; -1)$ множеству N;
б) найти площадь многоугольника, внутренней областью которого является множество N.