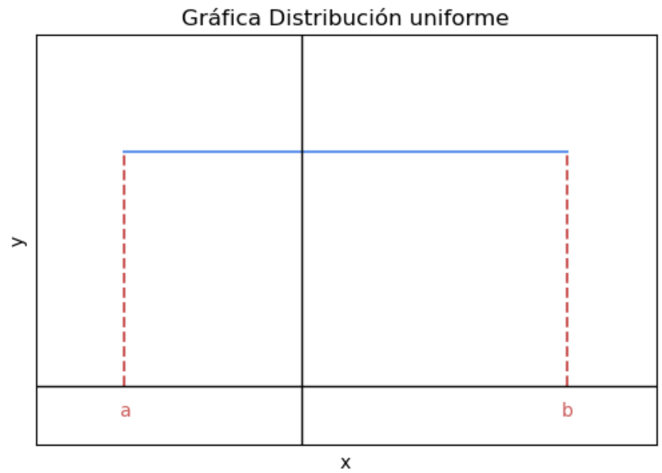
Distribución uniforme

Definición: Una V.A. x tiene una distribución uniforme, si su función de probabilidad es:

$$f(x) = \frac{1}{b-a}, x \in [a, b]$$



Ejemplo: Una V.A. y uniforme con dominio [3,9] tiene una función de probabilidad

$$f(x) = \frac{1}{6}$$

Si la V.A. W es uniforme con densidad $f(W) = 4$ el dominio debe ser $\left[0, \frac{1}{4}\right], \left[1, \frac{5}{4}\right], \left[\frac{3}{2}, \frac{7}{4}\right]$, etc.

Definición: La función F(x) llamada función de distribución (o distribución acumulativa de probabilidades) se define como:

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_a^x f(t)dt$$

Ejemplo: Si $x \sim U(3,9)$

$$F(x) = \int_3^x \frac{1}{6} dt = \frac{1}{6}(t)_3^x = \frac{x-3}{6}$$

$$Si\ x \sim U\left(0, \frac{3}{4}\right)$$

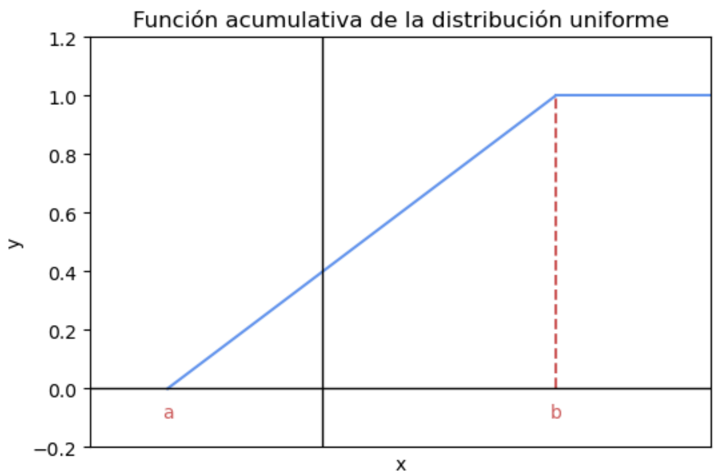
$$F(x) = \int_0^x \frac{4}{3} dt = \frac{4}{3}(t)_0^t = \frac{4x}{3}$$

En general: $Si\ x \sim U(a, b)$

$$F(x) = \int_a^x \frac{1}{b-a} dt = \frac{x-a}{b-a}$$

Formalmente:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 1 & x > b \end{cases}$$



Ejemplo su $x \sim U(1{,}9)$, determina:

a) $P(3 \leq x \leq 5) = \int_3^5 \frac{1}{8} dt = \frac{5-3}{8} = \frac{1}{4}$ $\quad = F(5) - F(3) = \frac{5-1}{8} - \frac{3-1}{8} = \frac{1}{4}$

b) $P(x \leq 7) = \int_1^7 \frac{1}{8} dt = \frac{7-1}{8} = \frac{3}{4}$ $\quad = F(7) - F(1) = \frac{7-1}{8} - \frac{1-1}{8} = \frac{3}{4}$

c) $P(x > 6) = \int_6^9 \frac{1}{8} dt = \frac{9-6}{8} = \frac{3}{8}$ $\quad = F(9) - F(6) = \frac{9-1}{8} - \frac{6-1}{8} = \frac{3}{8}$

d) $F(x) = \int_1^x \frac{1}{8} dt = \frac{x-1}{8}$

Media, Varianza y Función generadora de momentos

a) $\mu = E[x] = \int_a^b x f(x) dx$ $\quad \mu_{g(x)} = E[g(x)] = \int_a^b g(x) f(x) dx$

b) $E[x^2] = \int_a^b x^2 f(x) dx$ $\quad \sigma^2 = E[x^2] - E[x]^2$

c) $M(t) = E[e^{xt}] = \int_a^b e^{xt} f(x) dx$

Dado una función uniforme:

a) $E[x] = \int_a^b x \left(\frac{1}{b-a}\right) dx = \frac{1}{b-a}\left(\frac{x^2}{2}\right)_a^b = \frac{b^2-a^2}{2(b-a)} = \frac{b+a}{2}$

b) $E[x^2] = \int_a^b x^2 \left(\frac{1}{b-a}\right) dx = \frac{1}{b-a}\left(\frac{x^3}{3}\right)_a^b = \frac{b^3-a^3}{3(b-a)} = \frac{(b-a)(b^2+ab+a^2)}{3(b-a)} = \frac{b^2+ab+a^2}{3}$

c) $M(t) = E[e^{xt}] = \int_a^b \frac{e^{xt}}{b-a} dx = \frac{1}{b-a}\left(\frac{1}{t}e^{xt}\right)_a^b = \frac{e^{bt}-e^{at}}{t(b-a)}$

$$\sigma^2 = \frac{b^2+ab+a^2}{3} - \left(\frac{b+a}{2}\right)^2 = \frac{b^2+ab+a^2}{3} - \frac{b^2+2ab+a^2}{4}$$
$$= \frac{4(b^2+ab+a^2) - 3(b^2+2ab+a^2)}{12}$$
$$= \frac{4b^2+4ab+4a^2-3b^2-6ab-3a^2}{12} = \frac{b^2+2ab-a^2}{12} = \frac{(b-a)^2}{12}$$

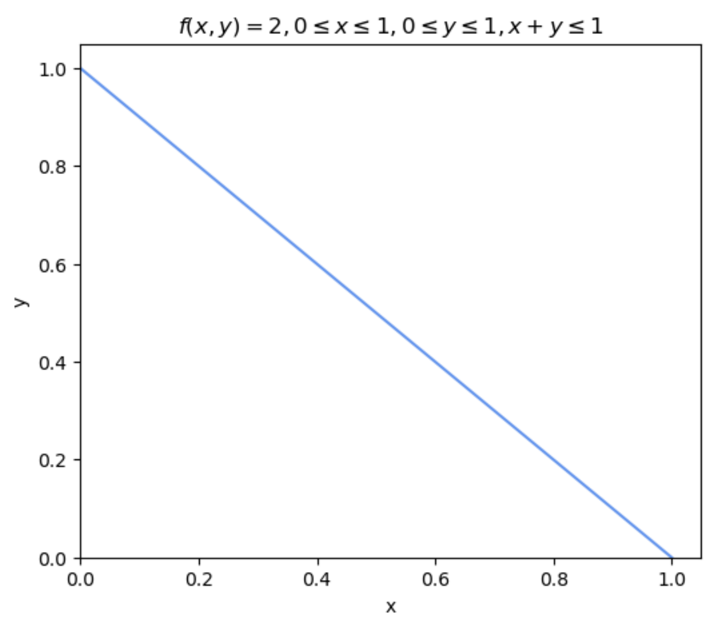
Propiedad:

Dos V.A. con distribución conjunta ($f(x,y)$ son independientes si:

a) $f(x,y) = g(x)h(y)$
ó
b) $Cov[x,y] = 0$ donde $Cov[x,y] = E[xy] - E[x]E[y]$

Ejemplo: Si $f(x,y) = 2, 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1, x+y \le 1$

Demostraremos que las V.A. no son independientes



$$g(x) = \int_0^{1-x} 2dy = 2(y)_0^{1-x} = 2(1-x), 0 \le x \le 1$$
$$h(y) = \int_0^{1-y} 2dx = 2(x)_0^{1-y} = 2(1-y)$$
$$f(x,y) \neq g(x)h(h) \rightarrow x, y \text{ no son independientes}$$

Ejemplo: si $x \sim U(a,b)$ con Función Generadora de Momentos (FGM)

$$M(t) = \frac{e^{bt} - e^{at}}{t(b-a)}$$

Determina $M'(0)$

$$M'(t)=\frac{(be^{bt}-ae^{bt})\big(t(b-a)\big)-(b-a)(e^{bt}-e^{at})}{t^2(b-a)^2}$$

$$=\frac{b^2te^{bt}-abte^{bt}-abte^{at}+a^2te^{at}-be^{bt}+be^{at}+ae^{bt}-ae^{at}}{t^2(b-a)^2}$$

$$M'(0)=\frac{(b-a)0(b-a)-(b-a)0}{0^2(b-a)^2}\rightarrow Indeterminado$$

$$M'(0)=\lim_{t\to 0}\frac{(b^2e^{bt}-a^2e^{at})t(b-a)+(be^{bt}-ae^{at})(b-a)-(b-a)(be^{bt}-ae^{at})}{2t(b-a)^2}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{b^2te^{bt}-a^2te^{at}+be^{bt}-ae^{at}-be^{bt}+ae^{at}}{2t(b-a)}=\lim_{t\to 0}\frac{b^2e^{bt}-a^2e^{at}}{2(b-a)}$$

$$=\frac{b^2-a^2}{2(b-a)}=\frac{b+a}{2}=\mu$$

Ejercicio: Si $x\sim U(-2{,}4)$

a) $F(x)=\frac{x-a}{b-a}=\frac{x+2}{6}$
b) $P(1\leq x\leq 3)=F(3)-F(1)=\frac{5}{6}-\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$
c) $\mu=\frac{b+a}{2}=\frac{4-2}{2}=1$
d) $\sigma^2=\frac{(b-a)^2}{12}=\frac{(4+2)^2}{12}=3$
e) $M(t)=\frac{e^{bt}-e^{at}}{t(b-a)}=\frac{e^{4t}-e^{-2t}}{6t}$