Лекция 17.04

Стохастический интеграл Р.Л. Стратоновича

Как было показано на предыдущей лекции, конкретное выражение интеграла Ито существенно отличается от привычных формул математического анализа. Например, мы подробно разобрали вычисление интеграла

$$\int_0^t W(t)dW(t) = \frac{1}{2}W^2(t) - \frac{t}{2}. \quad (1)$$

Отличие от традиционных формул состоит в появлении добавки $-\frac{t}{2}$.

Этот пример, конечно, не является единственным. Как показывает практика вычисления интеграла Ито, практически всегда при вычислении этого интеграла получаются добавочные члены, которые отсутствовали в классической таблице интегралов. Например, для интеграла от функции $\cos[W(t)]$ получаем следующее выражение (см. пример 5.2 в книге [1]):

$$\int_0^t \cos[W(t)]dW(t) = \sin[W(t)] + \frac{1}{2}\int_0^t \sin[W(\tau)]d\tau. \quad (2)$$

Здесь добавочный член имеет более сложный вид, чем в (1): он выражается в виде интеграла и является случайной функцией. Но важно заметить, что добавочный интеграл уже не является стохастическим, а представляет собой обычный интеграл Римана, вычисляемый по приращениям независимого аргумента τ.

Обнаружившееся в приведенных примерах свойство интеграла Ито является весьма нежелательным с точки зрения приложений. Дело в том, что в прикладных задачах никогда не встречаются случайные функции, в точности совпадающие по своим свойствам с винеровским процессом, но часто возникают функции, „напоминающие" винеровский процесс, близкие к нему по своим свойствам, для

---

1. Свешников А.А. Прикладные методы теории марковских процессов. – СПб: Лань, 2007.

которых винеровский процесс может служить хорошей аппроксимацией. Использование в таких задачах интеграла Ито может привести к появлению в формулах добавочных членов, искажающих окончательный результат и не связанных со спецификой решаемой задачи, а порожденных особенностями самого интеграла Ито. Особенно это важно понимать в задачах физического содержания.

Поэтому были разработаны и иные определения стохастического интеграла, для которых классическая таблица вычисления интегралов сохраняет свою силу. Такое определение было предложено Р.Л. Стратоновичем в шестидесятые годы прошлого века.

Рассмотрим интеграл такого же вида, как в случае определения по Ито

$$I = \int_a^b \Phi(t, X(t))\, dW(t), \qquad (3)$$

где винеровский процесс $W(t)$ и связанный с ним случайный процесс $X(t)$ определены на одном и том же вероятностном пространстве (Ω, A, P), а Φ — заданная функция.

Осуществим разбиение интервала $[a, b]$ на n элементарных интервалов так, как это было описано при определении интеграла по Ито, но интегральную сумму построим несколько иначе

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \Phi\left(t_{i-1}, \frac{X(t_{i-1}) + X(t_i)}{2}\right) \Delta W_i. \qquad (4)$$

Если в определении интеграла Ито значение процесса, входящего в подинтегральное выражение, бралось на <u>левом</u> конце каждого из элементарных интервалов (t_{i-1}, t_i), то в интеграле Стратоновича берется <u>полусумма значений</u> на правом и левом конце этого интервала.

В связи с такой особенностью построения интегральной суммы интеграл

Стратоновича часто называют *симметризованным* стохастическим интегралом, так как в каждом из интервалов (t_{i-1}, t_i) оба конца начальный и конечный входят в интегральную сумму совершенно равноправно, в то время, как в интеграле Ито всегда используется только начальный конец интервала.

Далее интегралом Стратоновича от функции $\Phi(t, X(t))$ по промежутку $[a, b]$ называют среднеквадратический предел интегральной суммы (4), когда число интервалов разбиения стремится к бесконечности, а наибольший из них — к нулю:

$$I = \underset{\substack{n \to \infty \\ \Delta t \to 0}}{\text{l.i.m.}}\ S_n. \tag{5}$$

На первый взгляд кажется, что отличие в формировании интегральной суммы по Ито и Стратоновичу несущественно. Например, если бы мы рассмотрели интеграл Римана от функции вида (3), но по приращениям независимого аргумента t, то оба способа в пределе дали бы один и тот же результат. Но в случае стохастического интеграла построение суммы по правилу (4) позволяет избежать появления добавочных членов, появляющихся при определении по Ито. Покажем это на том же примере, что и в предыдущей лекции.

Вычисление интеграла Стратоновича $\int_0^t W(s)dW(s)$

Рассмотрим интеграл

$$I_C = \int_0^t W(s)\, dW(s), \tag{6}$$

понимаемый в смысле Стратоновича. По определению интеграла Стратоновича имеем

$$I_C = \underset{\substack{n \to \infty \\ \Delta t \to 0}}{\text{l.i.m.}} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2}\left[W(t_i) + W(t_{i-1})\right]\left[W(t_i) - W(t_{i-1})\right] =$$

$$= \underset{\substack{n\to\infty \\ \Delta t\to 0}}{l.i.m.}\ \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left[W^2(t_i) - W^2(t_{i-1})\right] =$$

$$= \underset{\substack{n\to\infty \\ \Delta t\to 0}}{l.i.m.}\ \frac{1}{2}\left[W^2(t_n) - W^2(t_0)\right] = \underset{\substack{n\to\infty \\ \Delta t\to 0}}{l.i.m.}\ \frac{1}{2}\left[W^2(t) - W^2(0)\right]$$

$$= \frac{1}{2}W^2(t), \tag{7}$$

то есть обычная формула интегрального исчисления для интеграла Стратоновича (6) сохраняет силу. Можно доказать, что традиционные формулы интегрирования будут выполняться и для произвольных стохастических интегралов Стратоновича.

Рассмотрим, например, интеграл вида

$$I(t) = \int_0^t \mathcal{F}(t, W(t))\, dW(t). \tag{8}$$

Будем обозначать этот интеграл, понимаемый в смысле Ито через $I_И$, а аналогичный интеграл, понимаемый по Стратоновичу — через I_C.

Разность двух указанных модификаций интеграла представляется следующей интегральной суммой

$$\Delta I = I_C(t) - I_И(t) =$$

$$= \underset{\substack{n\to\infty \\ \Delta t\to 0}}{l.i.m.}\ \sum_{i=1}^{n}\left[\mathcal{F}\left(t_{i-1}, \frac{W(t_{i-1}) + W(t_i)}{2}\right) - \right.$$

$$\left. - \mathcal{F}(t_{i-1}, W(t_{i-1}))\right]\Delta W_i. \tag{9}$$

Представим полусумму ординат винеровского процесса в (9) в виде

$$\frac{W(t_{i-1}) + W(t_i)}{2} = W(t_{i-1}) + \frac{1}{2}\Delta W_i \tag{10}$$

и разложим первое слагаемое в квадратных скобках в ряд Тэйлора по второму аргументу, ограничившись линейными слагаемыми.

После сокращения подобных членов получим:

$$\Delta I = \underset{\substack{n\to\infty \\ \Delta t\to 0}}{l.i.m.}\ \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial \mathcal{F}(t_{i-1}, W(t_{i-1}))}{\partial W}(\Delta W_i)^2. \tag{11}$$

Если здесь выполнить переход к пределу и учесть, что согласно лемме, доказанной не предыдущей лекции, для бесконечно малого временного интеграла выполняется равенство

$$[dW(t)]^2 = dt, \qquad (12)$$

то получим

$$\Delta I = I_c(t) - I_u(t) \doteq \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial F(t,W(t))}{\partial W}\,dt. \qquad (13)$$

Легко заметить, что в разобранном выше примере вычисления интеграла (6) мы имели

$$F(t,W) = W, \qquad (14)$$

а тогда

$$\Delta I = \frac{1}{2}t, \qquad (15)$$

что и было показано прямым вычислением.

Стохастические дифференциальные уравнения

Перед тем, как рассматривать стохастические интегралы, мы уже говорили о стохастических дифференциальных уравнениях (СДУ) и даже упоминали несколько форм записи таких уравнений.

Исторически первой формой записи СДУ является уравнение вида

$$\dot{U} = \varphi(t,U) + \psi(t,U)\,\xi, \qquad (16)$$

где φ и ψ — функции общего вида, а $\xi(t)$ — стандартный процесс белого шума, характеризуемый нормальным законом распределения, нулевым математическим ожиданием и дельтаобразной корреляционной функцией

$$M[\xi(t)] \equiv 0, \quad K_\xi(\tau) = \delta(\tau). \qquad (17)$$

Данная форма записи СДУ

широко используется в работах физиков, однако она не является вполне строгой, так как белый шум является обобщенным случайным процессом, имеющим бесконечную дисперсию. Если писать СДУ в виде (16), то всю теорию придется развивать в рамках теории обобщенных функций, что сильно усложнило бы ее.

Более строгим и корректным является запись СДУ в дифференциалах (впервые ее предложил Дж. Дуб (John Doob)):

$$dU(t) = \varphi(t, U)\,dt + \psi(t, U)\,dW, \tag{18}$$

где $W(t)$ обозначает стандартный винеровский процесс. К уравнению (18) следует добавить соответствующее начальное условие

$$U(0) = U_0, \tag{19}$$

где случайная величина U_0 не зависит от винеровского процесса $W(t)$.

Для того, чтобы воспользоваться теорией стохастических интегралов, уравнение (18) удобно проинтегрировать

$$U(t) = U_0 + \int_0^t \varphi(\tau, U(\tau))\,d\tau + \int_0^t \psi(\tau, U(\tau))\,dW(\tau). \tag{20}$$

В такой интегральной форме удалось доказать существование и единственность решения при весьма общих ограничениях на вид функций φ и ψ. Мы здесь не будем рассматривать теоремы существования и единственности решения СДУ, так как для типовых процессов, которые изучаются в стохастической финансовой математике (винеровский процесс, процесс Башелье, геометрическое броуновское движение, процесс Уленбека–Орнштейна и т.д.) решение СДУ существует и единственно.

Наиболее строгой и корректной формой записи СДУ является интегральная форма (20). В зависимости от того, в каком смысле понимается здесь стохастический интеграл (это третий член в правой части (20)) различают СДУ Ито и СДУ Стратоновича. В физических, и вообще, в технических приложениях обычно предпочитают форму Стратоновича, но в стохастической финансовой математике традиционно используют форму Ито.

Зададимся вопросом: какими качественными свойствами обладает решение СДУ? Прежде всего интересно понять будет ли решение СДУ *марковским процессом*. Дело в том, что у нас уже есть достаточно хорошо разработанная теория марковских процессов, есть уравнения Колмогорова, позволяющие получать распределение таких процессов.

Фиксируем *настоящий момент* времени t. Зададим будущий момент $\tau > t$ и проинтегрируем уравнение (18) по промежутку $[t, \tau]$, что дает

$$U(\tau) = U(t) + \int_t^\tau \varphi(s, U(s))ds + \int_t^\tau \psi(s, U(s))dW(s). \tag{21}$$

Очевидно, ордината $U(\tau)$ в будущий момент τ никак не зависит от значений ординаты процесса до момента t, то есть процесс U, являющийся решением СДУ является *марковским* процессом. Более того, докажем, что он является *диффузионным* процессом. Для этого нужно показать, что решение СДУ непрерывно почти наверное и что у него существуют коэффициенты сноса и диффузии

Вычисление коэффициентов сноса и диффузии решения СДУ

В этом параграфе для двух типов

коэффициенты сноса и диффузии. Пусть вначале уравнение (20) понимается в смысле Ито. Рассмотрим приращение процесса $\Delta U = U(t+\Delta t) - U(t)$. Имеем,

$$\Delta U = \int_t^{t+\Delta t} \varphi(s, U(s))\,ds + \int_t^{t+\Delta t} \psi(s, U(s))\,dW(s). \quad (22)$$

Согласно определению коэффициента сноса

$$a(t,x) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} M[\Delta U \,|\, U(t) = x]. \quad (23)$$

Первый интеграл в (22) представляет обычный интеграл Римана, и его можно вычислить по теореме о среднем

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} M\left[\int_t^{t+\Delta t} \varphi(s, U(s))\,ds \,/\, U(t) = x\right] =$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} M\left[\varphi\left(t+\theta\Delta t, U(t+\theta\Delta t)\right)\Delta t \,|\, U(t) = x\right] =$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} M\left[\varphi\left(t+\theta\Delta t, U(t+\theta\Delta t)\right) | U(t) = x\right] =$$

$$= \varphi(t,x), \quad (24)$$

где $0<\theta<1$. Последний переход в (24) обосновывается с учетом непрерывности процесса $U(t)$, вытекающей из (22).

При вычислении предела (23) от второго слагаемого в (22) нужно учесть, что интеграл (22) понимается в смысле Ито, и поэтому с точностью до бесконечно малых величин более высокого порядка малости, чем Δt, получаем

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} M\left[\int_t^{t+\Delta t} \psi(s, U(s))\,dW(s) | U(t) = x\right] =$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} M[\psi(t,x)\Delta W] = 0 \quad (25)$$

 Таким образом, по Ито

$$a(t,x) = \varphi(t,x). \qquad (26)$$

Для вычисления коэффициента диффузии

$$b(t,x) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} M\left[(\Delta U)^2 \,\middle|\, U(t) = x\right] \qquad (27)$$

возводим обе части (22) в квадрат, что даст

$$b(t,x) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} M\Big[\Big(\int_t^{t+\Delta t} \varphi(s,U(s))\,ds \Big)^2 +$$
$$+ 2 \int_t^{t+\Delta t} \varphi(s,U(s))\,ds \int_t^{t+\Delta t} \psi(s,U(s))\,dW(s) + \qquad (28)$$
$$+ \Big(\int_t^{t+\Delta t} \psi(s,U(s))\,dW(s) \Big)^2 \,\Big|\, U(t) = x \Big].$$

Первое слагаемое в квадратных скобках имеет относительно Δt порядок малости $(\Delta t)^2$ и при переходе к пределу даст нуль. Во втором слагаемом первый множитель имеет первый порядок по Δt, а второй стремится к нулю, поэтому после предельного перехода он также обратится в нуль.

Осталось подсчитать предел от третьего слагаемого. Перепишем его в виде

$$b(t,x) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} M\Big[\int_t^{t+\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} \psi(s_1,U(s_1))\,\psi(s_2,U(s_2)) \cdot$$
$$\cdot\, dW(s_1)\,dW(s_2) \,\Big|\, U(t) = x \Big] =$$
$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} \psi(s_1,x)\,\psi(s_2,x)\,\delta(s_2 - s_1)\,ds_1\,ds_2 =$$
$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} \psi^2(s,x)\,ds = \psi^2(t,x), \qquad (29)$$

где $\delta(x)$ обозначает дельта-функцию. Первый переход в (29) учитывает независимость приращений винеровского процесса, второй переход использует свойства дельта-функции, а третий переход основан на теореме о среднем.

В результате получаем по Ито

$$b(t,x) = \psi^2(t,x). \qquad (30)$$

Далее подсчитаем те же самые коэффициенты (23) и (27) по Стратоновичу. При вычислении коэффициента сноса первое слагаемое в (22), представляющее собой интеграл Римана и не зависящее от способа определения стохастических интегралов, очевидно, дает тот же результат (24). Вычисление предела от второго слагаемого изменится по сравнению с (25). Стохастический интеграл (25) будет равняться при малом Δt не произведению значения подинтегральной функции на левом конце промежутка на ΔW, а произведению полусуммы граничных значений на то же самое ΔW.

В результате получим вместо (25)

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} M\left[\int_t^{t+\Delta t} \psi(s, U(s))\, dW(s) \,\Big|\, U(t) = x\right] =$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} M\left[\psi\left(t, x + \frac{\Delta U}{2}\right)\Delta W \,\Big|\, U(t) = x\right] =$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} M\left[\left(\psi(t,x) + \frac{1}{2}\frac{\partial \psi(t,x)}{\partial x}\Delta U\right)\Delta W\right]. \qquad (31)$$

В этом соотношении ΔU следует брать из соотношения

$$\Delta U = \varphi(t,x)\Delta t + \psi\left(t, x + \frac{\Delta U}{2}\right)\Delta W, \qquad (32)$$

вытекающего из определения интеграла Стратоновича, так как при соблюдении условия $U(t) = x$ полусумма граничных значений функции U выражается в виде

$$\frac{[U(t) + U(t+\Delta t)]}{2} = x + \frac{\Delta U}{2}. \qquad (33)$$

Если теперь подставить (32) в (31) и учесть, что $M[\Delta W] = 0$, а $M[(\Delta W)^2] = \Delta t$, то получим вместо (25)

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}M\left[\int_t^{t+\Delta t}\psi(s,U(s))\,dW(s)\,\Big|\,U(t)=x\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\frac{\partial\psi(t,x)}{\partial x}\psi(t,x). \qquad (34)$$

В результате при вычислении коэффициента сноса по формуле (23) помимо первого слагаемого, задаваемого (24), появляется добавочный член (34), и выражение коэффициента сноса по Стратоновичу принимает вид

$$a(t,x)=\varphi(t,x)+\frac{1}{2}\psi(t,x)\frac{\partial\psi(t,x)}{\partial x}. \qquad (35)$$

Легко видеть, что коэффициент диффузии при толковании второго интеграла в (22) по Стратоновичу сохраняет прежнее значение, определяемое (29) и равное $\psi^2(t,x)$.

Здесь нужно сделать два замечания. Во-первых, в случае, когда интенсивность случайных возмущений $\psi(t,x)$ не зависит явно от x, в соотношении (35) второе слагаемое обращается в нуль и тогда оба способа интерпретации стохастических уравнений эквивалентны друг другу.

Второе замечание касается выражения для приращения ΔU процесса, описываемого СДУ. В случае СДУ Ито оно имеет вид

$$\Delta U=\varphi(t,x)\Delta t+\psi(t,x)\Delta W. \qquad (36)$$

Это уравнение задает явную разностную схему для определения значений процесса U. В пределе при $\Delta t\to 0$ получаем отсюда СДУ Ито. Уравнение (32), напротив, задает неявную разностную схему. В пределе при $\Delta t\to 0$ оно переходит в уравнение Стратоновича.

В заключение лекции обсудим вопрос о непрерывности траекторий процесса почти наверное. Для проверки этого требования нужно убедиться, что все локальные моменты процесса

$$\alpha_k(t,x) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} M[(\Delta U)^k \,|\, U(t)=x] \qquad (37)$$

обращаются в нуль при всех $k \geq 3$. Для этого обратимся к выражениям для приращения процесса (36) в случае СДУ Ито и (32) в случае СДУ Стратоновича. Каждое из этих выражений содержит два слагаемых, первое из которых имеет первый порядок по Δt, а второе имеет порядок $1/2$. Следовательно, для $k \geq 3$ все локальные моменты имеют порядок не ниже $k/2$, то есть автоматически обращаются в нуль. Значит, решение любого СДУ есть диффузионный процесс.