Лекция 23.03-1

Решение линейного дифференциального уравнения со случайной правой частью и со случайными начальными условиями (продолжение)

На предыдущей лекции мы начали рассматривать решение дифференциального уравнения вида

$$Y^{(n)} + a_1(t)Y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(t)Y' + a_n(t)Y = X(t), \quad (t > t_0) \tag{1}$$

со случайной правой частью $X(t)$ и переменными коэффициентами $a_i(t)$. Для указанного уравнения решается задача Коши с начальными условиями вида

$$Y(t_0) = C_1,\ Y'(t_0) = C_2, \dots, Y^{(n-2)}(t_0) = C_{n-1},\ Y^{(n-1)}(t_0) = C_n, \tag{2}$$

где C_i – заданные случайные постоянные, не зависящие от $X(t)$.

Задача решается в рамках корреляционной теории. Заданы математическое ожидание $\bar{x}(t)$ и корреляционная функция $K_x(t_1, t_2)$ правой части, а также математические ожидания $\bar{C}_i = M[C_i]$ начальных условий и корреляционные моменты

$$k_{ij} = M[\overset{\circ}{C}_i \overset{\circ}{C}_j] = M[(C_i - \bar{C}_i)(C_j - \bar{C}_j)]$$

между всевозможными парами случайных постоянных (C_i, C_j). При сделанных предположениях следует получить математическое ожидание $\bar{y}(t)$ и корреляционную функцию решения уравнения (1) $K_x(t_1, t_2)$.

На предыдущей лекции решение поставленной задаче было представлено в виде суммы двух слагаемых

$$Y(t) = Y_0(t) + Y_*(t), \tag{3}$$

где $Y_0(t)$ обозначает решение однородного уравнения (1), удовлетворяющее начальным условиям (2), а $Y_*(t)$ есть некоторое частное решение неоднородного уравнения (1), удовлетворяющее нулевым начальным условиям.

было показано, что общее решение однородного уравнения $Y_0(t)$ может быть выражено в виде

$$Y_0(t)=\sum_{i=1}^{n} C_i\, y_i(t), \tag{4}$$

где $y_1(t), \ldots, y_n(t)$ обозначает фундаментальную систему линейно независимых решений однородного уравнения (1), а $C_1, \ldots, C_n$ — случайные постоянные, фигурирующие в (2).

Перейдем к построению второго слагаемого в (3). Благодаря линейности уравнения (1) при построении $Y_*(t)$ можно воспользоваться принципом суперпозиции. Будем строить решение в виде линейной комбинации всевозможных значений правой части $X(t)$, известных к моменту наблюдения t

$$Y_*(t)=\int_{t_0}^{t} p(t,t_1)\, X(t_1)\, dt_1. \tag{5}$$

Интеграл (5) называется интегралом Дюамеля, а функция $p(t,t_1)$ - весовой функцией. Она показывает весовой коэффициент с которым значение правой части $X(t_1)$ войдет в решение в момент времени t.

Очевидно, сама функция (5) удовлетворяет нулевому начальному условию при $t=t_0$. Попытаемся подобрать весовую функцию p так, чтобы интеграл (5) удовлетворял неоднородному уравнению (1).

Дифференцируя (5) по t, находим

$$\frac{dY_*}{dt}=p(t,t)X(t)+\int_{t_0}^{t}\frac{\partial p(t,t_1)}{\partial t}X(t_1)\,dt_1. \tag{6}$$

Поскольку мы строим решения Y_*, удовлетворяющее условием обращения в нуль при $t=t_0$, нужно потребовать, чтобы

$$p(t_0,t_0)=p(t,t_1)\Big|_{t=t_1=t_0}=0.$$

При этом будем иметь

$$\frac{dY_*}{dt}=\int_{t_0}^{t}\frac{\partial p(t,t_1)}{\partial t}X(t_1)\,dt_1. \tag{7}$$

Далее вычислим вторую производную

$$\frac{d^2Y_*}{dt} = \frac{\partial P(t,t_1)}{\partial t}\Big|_{t_1=t} X(t) + \int_{t_0}^{t} \frac{\partial^2 p(t,t_1)}{\partial t^2} X(t_1)dt_1. \quad (8)$$

Чтобы эта функция обращалась в нуль при $t=t_0$, нужно потребовать, чтобы

$$\frac{\partial P(t,t_1)}{\partial t}\Big|_{t=t_1=t_0} = 0$$

и тогда

$$\frac{d^2Y_*}{dt^2} = \int_{t_0}^{t} \frac{\partial^2 p(t,t_1)}{\partial t^2} X(t_1)dt_1. \quad (9)$$

Продолжая аналогичным образом процесс вычисления последовательных производных функции Y^* до производной порядка $n-1$, получим

$$\frac{d^K Y_*}{dt^K} = \int_{t_0}^{t} \frac{\partial^K P(t,t_1)}{\partial t^K} X(t_1)dt_1, \quad (0\le K\le n-1). \quad (10)$$

При этом для $t=t_1$ должны выполняться равенства

$$p(t,t_1)\Big|_{t=t_1} = \frac{\partial P(t,t_1)}{\partial t}\Big|_{t=t_1} = \dots = \frac{\partial^{n-2} p(t,t_1)}{\partial t^{n-2}}\Big|_{t=t_1} = 0.$$

Теперь вычислим производную n-го порядка функции Y_*

$$\frac{d^n Y_*}{dt^n} = \frac{\partial^{n-1} P(t,t_1)}{\partial t^{n-1}}\Big|_{t_1=t} X(t) + \int_{t_0}^{t} \frac{\partial^n p(t,t_1)}{\partial t^n} X(t_1)dt_1. \quad (11)$$

Здесь уже нельзя утверждать, что левая часть (10) обращается в нуль при $t=t_0$, однако можно подставить все производные функции Y^* вида (10) и (11) в уравнение (1). Тогда получим

$$\int_{t_0}^{t}\left[\frac{\partial^n p(t,t_1)}{\partial t^n} + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\partial^i p(t,t_1)}{\partial t^i} a_{n-i}(t)\right] X(t_1)dt_1 =$$

$$= \frac{\partial^{n-1} P(t,t_1)}{\partial t^{n-1}}\Big|_{t_1=t} X(t). \quad (12)$$

Потребуем, чтобы в правой части (12)

$(n-1)$-я производная весовой функции удовлетворяла условию

$$\left.\frac{\partial^{n-1} p(t,t_1)}{\partial t^{n-1}}\right|_{t=t_1} = 1.$$

Тогда сама весовая функция согласно (12) будет удовлетворять по аргументу t уравнению (1) при любой правой части X.

Итак, если весовая функция подчиняется условием

$$\left.\frac{\partial^k p(t,t_1)}{\partial t^k}\right|_{t=t_1} = \delta_{k,n-1}, \quad (0 \le k \le n-1), \quad (13)$$

то, во-первых, функция вида (5) будет являться решением уравнения (1) и, во-вторых, она будет удовлетворять нулевым начальным условиям при любом $t=t_0$ для производных $Y_*^{(k)}(t_0)=0$, $(0 \le k \le n-1)$.

Поскольку функция $p(t,t_1)$ является решением (4), ее можно представить в виде разложения по системе линейно независимых решений $y_1, \ldots, y_n$ этого уравнения

$$p(t,t_1) = \sum_{j=1}^{n} b_j(t_1)\, y_j(t). \quad (14)$$

Коэффициенты разложения (14) находятся из условий (13), которые принимают вид

$$\sum_{j=1}^{n} b_j(t_1)\, y_j^{(k)}(t_1) = \delta_{k,n-1}, \quad (0 \le k \le n-1). \quad (15)$$

Если вычислить b_j из решения системы (15), а затем подставить результат в (14), получим решение в виде отношения двух определителей

$$p(t,t_1) = \frac{\begin{vmatrix} y_1(t_1), \ldots, y_n(t_1) \\ \text{-------------} \\ y_1^{(n-2)}(t_1), \ldots, y_n^{(n-2)}(t_1) \\ y_1(t), \ldots, y_n(t) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1(t_1), \ldots, y_n(t_1) \\ \text{-------------} \\ y_1^{(n-2)}(t_1), \ldots, y_n^{(n-2)}(t_1) \\ y_1^{(n-1)}(t_1), \ldots, y_n^{(n-1)}(t_1) \end{vmatrix}}. \quad (16)$$

Определитель, стоящий в знаменателе выражения (16), представляет собой ничто иное, как определитель Вронского, составленный по системе решений $y_1(t), \dots, y_n(t)$. Если эта система решений линейно независима, то тогда указанный определитель Вронского отличен от нуля, и система (15) имеет единственное решение. Что касается определителя, записанного в числителе (16), то он получается из определителя Вронского путем замены элементов последней строки $y_1^{(n-1)}(t_1), \dots, y_n^{(n-1)}(t_1)$, составленной из производных $(n-1)$-го порядка, взятых при аргументе t_1, на строку из самих функций $y_1(t), \dots, y_n(t)$, взятых при аргументе t.

Из представления весовой функции в виде (16) легко заметить, что она удовлетворяет всем условиям (13) для $k = \overline{0, n-1}$. Для проверки этих условий достаточно разложить определитель, стоящий в числителе (16), по элементам последней строки и выполнить необходимые дифференцирования.

Можно показать, что выражение для весовой функции $p(t, t_1)$ не зависит от выбора системы линейно независимых решений $y_1, \dots, y_n$ и определяется только видом коэффициентов уравнения (1). Поэтому, например, при построении весовой функции $p(t, t_1)$ не обязательно использовать фундаментальную систему решений, можно брать любую линейно независимую их систему.

Если расписать в явном виде полученное решение (3), будем иметь:

$$Y(t) = \sum_{i=1}^{n} C_i y_i(t) + \int_{t_0}^{t} p(t, t_1) X(t_1) dt_1 . \quad (17)$$

Это выражение можно трактовать, как результат применения некоторого линейного неоднородного интегрального оператора к функции $X(t)$, задающей правую часть исходного дифференциального уравнения (1). При этом неоднородность оператора обусловлена наличием первого слагаемого в (17), которое по условию задачи не зависит от X.

В соответствии с общей теорией линейных операторов получаем, что математическое ожидание решения уравнения (1) выражается в виде

$$\bar{y}(t) = \sum_{i=1}^{n} \bar{c}_i\, y_i(t) + \int_{t_0}^{t} p(t,t_1)\, \bar{x}(t_1)\, dt_1\,, \quad (18)$$

где $\bar{c}_i$ обозначает математическое ожидание C_i, а $\bar{x}(t)$ есть математическое ожидание правой части (1).

Для получения корреляционной функции Y следует дважды подействовать оператором, задаваемым (17) на корреляционную функцию $K_x(t_1,t_2)$ и добавить соответствующий неоднородный член:

$$K_y(t_1,t_2) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} k_{ij}\, y_i(t_1)\, y_j(t_2) + \int_{t_0}^{t_1}\int_{t_0}^{t_2} p(t_1,\tau_1)\, p(t_2,\tau_2)\, K_x(\tau_1,\tau_2)\, d\tau_1\, d\tau_2\,, \quad (19)$$

где k_{ij} обозначает корреляционный момент между C_i и C_j.

Приведенные выражения (18) и (19) полностью решают задачу корреляционного анализа решения линейного дифференциального уравнения в переходном режиме работы системы, когда t_1 и t_2 произвольны. Далее рассмотрим установившийся режим, который наступает в системе по прошествии достаточно большого промежутка времени.

Анализ стационарного решения линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами

Допустим, что все коэффициенты уравнения (1) постоянны

$$a_i(t) = a_i = \mathrm{const}(t), \quad (i = \overline{1,n}). \qquad (20)$$

Кроме того предположим, что система, определяемая уравнением (1) устойчива. Это требование означает следующее. Рассмотрим характеристический полином

$$\Delta(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n \qquad (21)$$

и найдем корни характеристического уравнения

$$\Delta(\lambda_s) = 0, \quad (s = \overline{1,n}). \qquad (22)$$

Для простоты будем считать, что все корни λ_s имеют кратность единица, то есть являются простыми. Устойчивость системы означает, что все корни λ_s имеют отрицательную вещественную часть

$$\mathrm{Re}\,\lambda_s < 0, \quad (s = \overline{1,n}). \qquad (23)$$

Вывод об устойчивости системы можно сделать, непосредственно анализируя коэффициенты уравнения (1). Имеются специальные критерии устойчивости, например критерий Рауса-Гурвица 1). В устойчивой системе по прошествии достаточно длительного времени начальные условия перестают влиять на поведение системы, которое стабилизируется и зависит только от свойств самой системы, определяемых коэффициентами $a_1, \ldots, a_n$.

В случае постоянных коэффициентов система линейно независимых решений однородного уравнения имеет вид:

$$y_i(t) = e^{\lambda_i t}, \quad (i = \overline{1,n}). \qquad (24)$$

Подставляя эти выражения в формулу для весовой функции (16), получаем следующее ее представление:

---

1) См., например, Курош А.Г. Курс высшей алгебры. М.: Наука. 1971

$$
p(t,t_1)=\frac{\begin{vmatrix} e^{\lambda_1 t_1}, & \dots, & e^{\lambda_n t_1} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 t_1}, & \dots, & \lambda_n e^{\lambda_n t_1} \\ \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^{n-2} e^{\lambda_1 t_1}, & \dots, & \lambda_n^{n-2} e^{\lambda_n t_1} \\ e^{\lambda_1 t}, & \dots, & e^{\lambda_n t} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^{\lambda_1 t_1}, & \dots, & e^{\lambda_n t_1} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 t_1}, & \dots, & \lambda_n e^{\lambda_n t_1} \\ \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^{n-1} e^{\lambda_1 t_1}, & \dots, & \lambda_n^{n-1} e^{\lambda_n t_1} \end{vmatrix}} \qquad (25)
$$

Теперь вынесем из каждого i-го столбца определителя, стоящего в числителе, и из такого же столбца определителя, стоящего в знаменателе, множитель $e^{\lambda_i t_1}$ для всех $i=\overline{1,n}$. После сокращения на $e^{\sum_{i=1}^{n}\lambda_i t_1}$ получим

$$
p(t,t_1)=\frac{\begin{vmatrix} 1, & \dots, & 1 \\ \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^{n-2}, & \dots, & \lambda_n^{n-2} \\ e^{\lambda_1(t-t_1)}, & \dots, & e^{\lambda_n(t-t_1)} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1, & \dots, & 1 \\ \lambda_1, & \dots, & \lambda_n \\ \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^{n-1}, & \dots, & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix}} . \qquad (26)
$$

Таким образом, в рассматриваемом случае весовая функция $p(t,t_1)=p(t-t_1)$, то есть зависит только от разности аргументов $t-t_1$. Имеет место еще одно упрощение. Благодаря выполнению условия (23) в пределе при $t\to\infty$ имеем

$$
\lim_{t\to\infty} y_i(t)=0, \quad (i=\overline{1,n}), \qquad (27)
$$

а тогда при больших t, превосходящих время переходного процесса

$$
\lim_{t\to\infty} Y_0(t)=0 \qquad (28)
$$

и в равенстве (3) при больших t сохраняется только второе слагаемое

$$
Y(t)\cong Y_*(t)\cong \int_0^t p(t-t_1)\,X(t_1)\,dt_1 . \qquad (29)
$$

Допустим, что возмущение $X(t)$, воздействующее на систему, стационарно. Тогда математическое ожидание x будет постоянно, а корреляционная функция $K_x(\tau)$ будет зависеть только от разности моментов времени $\tau = t_2 - t_1$. Будем считать, что наблюдение за поведением системы начинается с момента времени $t_0 = 0$. Тогда выражения (18) и (19) при больших t в случае стационарного возмущения перепишутся в виде

$$\bar{y}(t) = \bar{x}\int_0^t p(t-t_1)\,dt_1, \tag{30}$$

$$K_y(t_1,t_2) = \int_0^{t_1}\int_0^{t_2} p(t_1-\tau_1)\,p(t_2-\tau_2)\,K_x(\tau_2-\tau_1)\,d\tau_1 d\tau_2. \tag{31}$$

Проделаем в интеграле (30) замену переменных $s = t - t_1$, после чего перейдем в (30) к пределу при $t \to \infty$. Тогда получим установившееся значение $\bar{y}$ в виде:

$$\bar{y} = \bar{x}\int_0^\infty p(s)\,ds. \tag{32}$$

Интеграл (32) легко выражается через коэффициенты исходного уравнения (1). Вычисляя в установившемся режиме математическое ожидание обеих частей равенства (1) и учитывая, что математические ожидания всех производных процесса Y в установившемся режиме обращаются в нуль, получаем

$$\bar{y} = \frac{1}{a_n}\bar{x}, \tag{33}$$

откуда следует, что всегда

$$\int_0^\infty p(s)\,ds = \frac{1}{a_n}. \tag{34}$$

Аналогичным образом преобразуется и уравнение (31). В двойном интеграле проделывается замена переменных $s_1 = t_1 - \tau_1$, $s_2 = t_2 - \tau_2$, фиксируется разность $\tau = t_2 - t_1$, после чего осуществляется предельный переход при $t_1 \to \infty$, $t_2 \to \infty$. В результате получаем выражение $K_y(\tau)$, зависящее только от разности моментов времени $\tau = t_2 - t_1$

следующего вида

$$K_y(\tau) = \int_0^\infty \int_0^\infty p(s_1)\, p(s_2)\, K_x(\tau + s_1 - s_2)\, ds_1 ds_2 . \quad (35)$$

В частности, при $\tau = 0$ получаем отсюда выражение для дисперсии установившегося решения

$$\sigma_y^2 = \int_0^\infty \int_0^\infty p(s_1)\, p(s_2)\, K_x(s_1 - s_2)\, ds_1 ds_2 . \quad (36)$$

Для справедливости последних формул важно выполнение всех предположений, сделанных по ходу изложения: во-первых, постоянство коэффициентов уравнения (условие (20)), во-вторых, устойчивость системы (условие (23)) и, в-третьих, рассмотрение поведения системы только после окончания переходного процесса, то есть при достаточно больших t.

Лекция 23.03 – 2

Основы теории выбросов случайных функций

Понятие выброса случайной функции является естественным обобщением понятия пересечения функцией определенного уровня, учитывающим направление, в котором произошло пересечение.

Положительным считается выброс, при котором траектория процесса $X(t)$

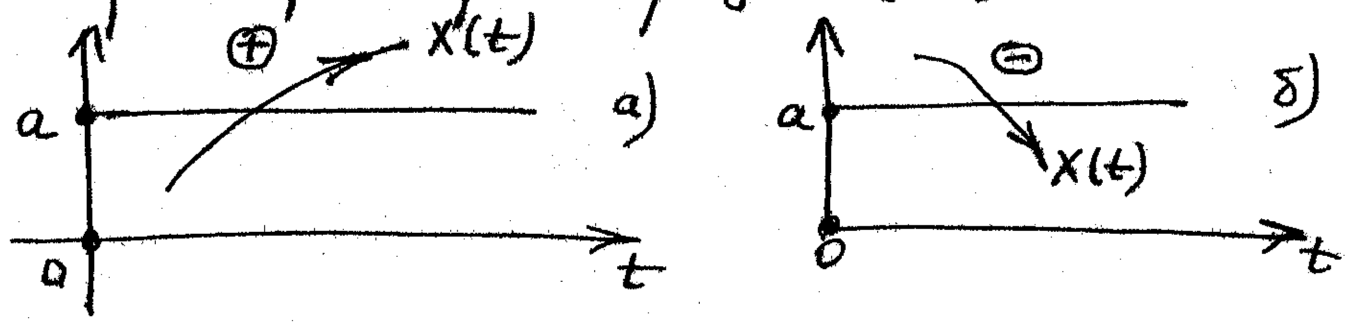

Рис. 1. Выбросы процесса $X(t)$ за уровень a: а) положительный; б) отрицательный

пересекает заданный уровень a снизу вверх, а отрицательным — сверху вниз.

Необходимость определения вероятностных характеристик выбросов возникает во многих приложениях. Например, в задачах теории надежности требуется определить вероятность того, что некоторый процесс ни разу не покинет дозволенную область своего изменения, соответствующую штатному режиму работы системы. В экономических задачах представляет большой интерес, будет ли находиться тот или иной финансовый показатель в указанных пределах. Похожие задачи могут возникать и в биологии.

Получение исчерпывающих характеристик выбросов, таких, как закон распределения числа выбросов в заданном интервале или закон распределения длительности выбросов может вызвать математические трудности, однако вычисление средних характеристик выбросов (среднего числа выбросов, среднего времени пребывания выше или ниже заданного уровня и т.п.) не вызывает принципиальных затруднений. Соответствующая теория была разработана еще в сороковые годы прошлого века английским ученым С.О. Райсом [1]. Имеется перевод этих классических работ на русский язык [2]. Детальное изложение теории выбросов на современном уровне содержится в работах В.И. Тихонова [3,4].

Классическая теория Райса

В теории Райса предполагается, что исследуемый процесс $X(t)$ является дифференцируемым. Обозначим скорость процесса $\dot{X}(t)$ через $V(t)$ и будем считать закон распределения системы случайных функций $(X(t), V(t))$ известным. Обозначим его через $f(x, v; t)$. Уровень a, за который исследуются выбросы, считаем постоянным. При этих предположениях найдем элементарную вероятность того, что в интервале $[t, t+dt]$ имел место, скажем, положительный выброс. Обозначим эту вероятность через $dp_a^+(t)$. Очевидно, эта вероятность является бесконечно малой величиной, чем и объясняется такое обозначение.

В соответствии с определением понятия положительного выброса будем иметь

$$dp_a^+(t) = \mathcal{P}\{X(t) < a, X(t+dt) > a\}. \qquad (1)$$

Поскольку процесс X считается дифференцируемым, то с точностью до бесконечно малых более высокого порядка

$$X(t+dt) = X(t) + V(t)dt + o(dt). \qquad (2)$$

Подставляя выражение (2) в (1), можно переписать последнее в виде:

$$dp_a^+(t) = \mathcal{P}\{a - V(t)dt < X < a\}, \quad (3)$$
причем в последнем равенстве $V(t) > 0$, иначе выброса не произойдет.

Зная совместный закон распределения X и V, вероятность (3) можно представить так:

$$dp_a^+(t) = \int_0^\infty \int_{a-v\,dt}^{a} f(x, v; t)\,dx\,dv. \quad (4)$$

Внутренний интеграл в (4) берется по бесконечно малому промежутку $[a - v\,dt, a]$. Применяя теорему о среднем, получаем

$$dp_a^+(t) = \nu_a^+(t)\,dt, \quad (5)$$

где ν_a^+ дается равенством

$$\nu_a^+(t) = \int_0^\infty f(a, v; t)\,v\,dv \quad (6)$$

Допустим теперь, что нас интересует среднее число положительных выбросов $N_a^+(t_1, t_2)$ в интервале $[t_1, t_2]$. Разобьем этот интервал на n более мелких интервалов точками

$$\tau_0 = t_1 < \tau_1 < \tau_2 < \ldots < \tau_{n-1} < \tau_n = t_2.$$

Рассмотрим интервал с номером i, имеющий границы $[\tau_{i-1}, \tau_i]$. Число выбросов в этом интервале обозначим через ξ_i, а длину интервала $(\tau_i - \tau_{i-1})$ обозначим, как $\Delta\tau_i$.

Если n достаточно велико, а все $\Delta\tau_i$ малы, то вероятность получить в элементарном интервале больше, чем один выброс, будет бесконечно малой величиной более высокого порядка малости, чем $\Delta\tau_i$. Воспользуемся так называемым „методом счетчиков пересечений“ [5], представив $N_a^+(t_1, t_2)$ в виде

$$N_a^+(t_1, t_2) = \sum_{j=1}^{n} \xi_j. \quad (7)$$

Целочисленная величина ξ_j характеризуется следующим распределением:

$\mathcal{P}\{\xi_j = 1\} = \nu_a^+(\tau_j)\Delta\tau_j$, $\mathcal{P}\{\xi_j = 0\} = 1 - \nu_a^+(\tau_j)\Delta\tau_j$, $\mathcal{P}\{\xi_j > 1\} = o(\Delta\tau_j)$

Вычисляя математическое ожидание суммы (7) с точностью до бесконечно малых более высокого порядка, чем $\Delta\tau_j$, получаем

$$\overline{n}_a^+(t_1,t_2) = M[N_a^+(t_1,t_2)] \cong \sum_{j=1}^{n} \nu_a^+(\tau_j)\Delta\tau_j. \qquad (8)$$

Сумма (8) представляет собой интегральную сумму для интеграла от функции $\nu_a^+(\tau)$ по промежутку от t_1 до t_2. Положим $\Delta\tau = \max\limits_{1\le k\le n}\{\Delta\tau_k\}$. Переходя к пределу при $n\to\infty$, $\Delta\tau\to 0$, будем иметь

$$\overline{n}_a^+(t_1,t_2) = \int_{t_1}^{t_2} \nu_a^+(\tau)\,d\tau, \qquad (9)$$

что позволяет трактовать ранее введенную величину $\nu_a^+(t)$ как интенсивность появления положительных выбросов за уровень a в момент t.

При рассмотрении отрицательных выбросов вводят вероятность

$$dp_a^-(t) = \mathcal{P}\{X(t)>a,\ X(t+dt)<a\}, \qquad (10)$$

затем вновь используют разложение (2), в котором теперь следует принять $V(t)<0$ и вместо (3) будем иметь

$$dp_a^-(t) = \mathcal{P}\{a < X(t) < a - V(t)dt\}. \qquad (11)$$

В результате получаем

$$dp_a^-(t) = \int_{-\infty}^{0}\int_{a}^{a+vdt} f(x,v;t)\,dx\,dv. \qquad (12)$$

Результирующее выражение таково

$$dp_a^-(t) = \nu_a^-(t)dt, \qquad (13)$$

где $\nu_a^-(t)$ имеет смысл интенсивности отрицательных выбросов и задается выражением

$$\nu_a^-(t) = -\int_{-\infty}^{0} f(a,v;t)\,v\,dv. \qquad (14)$$

Среднее число выбросов в заданном интервале находится аналогично (9)

$$\overline{n}_a^-(t_1,t_2) = \int_{t_1}^{t_2} \nu_a^-(\tau)\,d\tau. \qquad (15)$$

Интенсивности положительных и отрицательных выбросов можно записать в единообразной форме

$$\nu_a^{\pm}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{[\operatorname{sign}(v) \pm 1]}{2} f(a, v; t)\, v\, dv. \quad (16)$$

Это представление удобно использовать при интенсивности пересечений (без учета знака выброса), а также среднего числа пересечений.

Действительно, определим число пересечений

$$M_a(t_1,t_2) = N_a^{+}(t_1,t_2) + N_a^{-}(t_1,t_2). \quad (17)$$

Ясно, что с учетом (9) и (15) среднее число пересечений

$$\overline{m_a}(t_1,t_2) = M[M_a(t_1,t_2)] = \int_{t_1}^{t_2} \mu_a(t)\,dt, \quad (18)$$

где интенсивность пересечений

$$\mu_a(t) = \nu_a^{+}(t) + \nu_a^{-}(t), \quad (19)$$

что с учетом выражения (16) приводит к простой формуле

$$\mu_a(t) = \int_{-\infty}^{\infty} |v|\, f(a, v; t)\, dv. \quad (20)$$

Методом Райса легко получить также среднюю длительность выбросов в заданном интервале. Подсчитаем, например $T_a^{+}(t_1,t_2)$ – время пребывания выше уровня a в интервале (t_1,t_2). Вновь воспользуемся методом счетчиков пересечений, но вместо суммы вида (7) рассмотрим сумму вида

$$T_a^{+}(t_1,t_2) = \sum_{j=1}^{n} \eta\left(X(\tau_j) - a\right) \Delta\tau_j, \quad (21)$$

где $\eta(x)$ обозначает функцию единичного скачка Хевисайда

$$\eta(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x \le 0. \end{cases} \quad (22)$$

Вычисляя математическое ожидание суммы (21) и переходя к пределу при $n\to\infty$, $\Delta t\to 0$, приходим к результату

$$\overline{t}_a^{+}(t_1,t_2)=M\left[T_a^{+}(t_1,t_2)\right]=\int_{t_1}^{t_2}\left[1-F_x(a;t)\right]dt, \quad (23)$$

где $F_x(x;t)$ обозначает функцию распределения $X(t)$. После совершенно аналогичных рассуждений для средней длительности отрицательных выбросов выводим немного иную формулу

$$\overline{t}_a^{-}(t_1,t_2)=M\left[T_a^{-}(t_1,t_2)\right]=\int_{t_1}^{t_2}F_x(a;t)\,dt. \quad (24)$$

Используя полученные результаты, можно найти среднюю длительность одного выброса $\overline{\tau}_a^{+}$ и $\overline{\tau}_a^{-}$, соответственно, в положительном и отрицательном направлении по формулам

$$\overline{\tau}_a^{\pm}(t_1,t_2)=\frac{\overline{t}_a^{\pm}(t_1,t_2)}{\overline{n}_a^{\pm}(t_1,t_2)}, \quad (25)$$

причем в числителе и знаменателе дроби берется один и тот же знак, соответствующий нужному направлению единичного выброса.

Формулы (25) являются наиболее наглядными для случая стационарного процесса $X(t)$, когда двумерный закон распределения $f(x,v;t)$ и одномерный закон $F_x(x;t)$ фактически не зависят от t. При этом согласно формулам (6) и (14) интенсивности появления выбросов ν_a^{+} и ν_a^{-} будут постоянными, среднее число выбросов $\overline{n}_a^{\pm}(t_2-t_1)$ будет пропорционально длине интервала наблюдения (t_2-t_1), причем средние длительности выбросов (23) и (24) также будут пропорциональны (t_2-t_1). В результате получим

$$\overline{\tau}_a^{+}=\frac{1-F_x(a)}{\nu_a^{+}}, \quad \overline{\tau}_a^{-}=\frac{F_x(a)}{\nu_a^{-}} \quad (26)$$

и эти средние длительности будут совершенно одинаковы для любого единичного выброса.

Литература

1. Rice S.O. Mathematical analysis of random noise // Bell system technical journal, 1944, vol. 23, no.3; 1945, vol. 24, no. 1
2. Теория передачи электрических сигналов при наличии помех (под. ред. Н.А. Железнова). М.: Издательство иностранной литературы, 1953, с. 88-238.
3. Тихонов В.И. Выбросы случайных процессов. М.: Наука, 1970, 392с.
4. Тихонов В.И., Хименко В.И. Выбросы траекторий случайных процессов. М.: Наука, 1987, 304с.
5. Фомин Я.А. Теория выбросов случайных процессов. М.: Связь, 1980, 216с.