Лекция 22.05-1

Производные финансовые инструменты

Приблизительно до середины прошлого века финансовые рынки отличались весьма большой стабильностью. Процентные ставки по банковским вкладам были устойчивыми. Обменные курсы валют вообще были практически фиксированными, начиная с Бреттон-Вудской конференции, состоявшейся в 1944 году. Такое положение сохранялось вплоть до шестидесятых годов.

В семидесятые годы прошлого века произошли события, которые кардинально изменили ситуацию на финансовых рынках. Первым таким событием стал всемирный нефтяной кризис, который последовал за арабо-израильской войной 1973 года. Западные страны поддержали Израиль, а страны ОПЕК (организация стран экспортеров нефти) отказались поставлять им нефтепродукты, в результате чего цена нефти существенно возросла, а ее колебания заметно усилились.

Второй причиной был отказ Государственного казначейства США от практики покупки и продажи золота по фиксированной цене в 1971 году. Это решение было принято вскоре после того, как президент Франции генерал де Голль добился обмена большой партии бумажных американских долларов на золото, что привело к обесцениванию американской валюты.

В результате всех этих событий в 1973 году Бреттон-Вудская система фиксированных валютных курсов была отменена, и на смену ей пришли современные плавающие валютные курсы. В результате существовавшие к тому времени математические методы финансовых расчетов и финансового прогнозирования перестали давать адекватный результат. Эти методы основывались на математической статистике, прежде всего на регрессионном анализе. Торговать на бирже непосредственно пакетами акций, как это делалось раньше, стало слишком рискованно. Инвесторы стали нести большие потери.

На бирже стали применяться новые методы снижения риска. Одним из важнейших среди них является хеджирование. Суть хеджирования состоит в том, что инвестор создает так называемый инвестиционный портфель, в котором к активу, которым он владеет, добавляются так называемые производные финансовые инструменты. Эти инструменты подбираются таким образом, чтобы их цена менялась иначе, чем цена базового актива. В результате стоимость портфеля будет в меньшей степени зависеть от случайных факторов, риск потерь снижается. Если покупка акций происходит на спотовом рынке (в момент заключения сделки), то производные инструменты являются срочными контрактами, то есть относятся к покупке или продаже активов в будущем, через некоторое время.

Наиболее распространенными типами производных инструментов являются фьючерсы и опционы.

Фьючерсом называется ценная бумага, представляющая контракт на приобретение или продажу некоторого актива в будущем по фиксированной цене, определяемой в момент заключения контракта.

Опционом называют ценную бумагу, которая дает право купить или продать в будущем некий актив по фиксированной цене, определяемой в момент заключения контракта. Отличие опциона от фьючерса состоит в том, что второй представляет собой обязательство купить или продать актив, а первый — только лишь право, от которого владелец опциона может отказаться, если сочтет нужным.

Опцион на покупку актива называется опционом-колл, а опцион на продажу — опционом-пут. Если опцион можно предъявить только в строго определенный, заранее оговоренный момент, называемый сроком исполнения, то такой опцион называется европейским. Если же опцион разрешается предъявлять в любой момент вплоть до срока исполнения, то опцион называют американским.

Следует отметить, что на бирже для удобства инвесторов разрешается оформлять не только производные финансовые инструменты на базовые активы (акции), но также и на другие производные инструменты. Получаются производные от производных, например, опцион на фьючерс, опцион на опцион и т.д. В результате на бирже торгуется огромное количество финансовых инструментов, большинство из которых являются производными инструментами. Они еще называются деривативами.

Фьючерсы и опционы используются давно, но организованная на бирже торговля деривативами началась в начале семидесятых годов. В настоящее время на крупных биржах дневной оборот составляет миллионы опционных и фьючерсных контрактов.

Если определение стоимости фьючерсов не вызывает вопросов и сводится к способности инвестора предвидеть, как будет меньше цена актива в будущем, то стоимость оформления опциона с самого начала вызывала неоднозначное толкование, так как здесь речь идет не о полноценной покупке или продаже объекта сделки, а всего лишь о покупке права совершение соответствующей сделки. Конечно, на бирже стихийно формировались определенные цены на опционы, но строгая математическая теория длительное время отсутствовала.

Первая математическая модель получения стоимости опционов была предложена еще в 1900 году Л. Башелье в его докторской диссертации, но она базировалась на достаточно грубой аппроксимации временной структуры стоимости акций, которую мы разбирали в начале нашего курса. Современная математическая теория стоимости опционов возникла в начале семидесятых годов в работах Ф. Блэка и М. Шоулза[1], а также Р. Мертона[2]. Интересно заметить, что эти статьи были опубликованы в том же 1973 году, когда была организована торговля этими инструментами на бирже. Теория Блэка-Шоулза-Мертона достаточно хорошо описывала реальную стоимость опционов на бирже, и ее появление было расценено как триумф стохастической финансовой математики. Авторы этой теории М. Шоулз и Р. Мертон были удостоены Нобелевской премии в области экономики за 1997 год (Ф. Блэк не дожил до этого момента, он скончался в 1995 году). Их результаты причисляют к самым крупным достижениям экономической науки XX века.

---

1) Black F., Scholes M. The pricing of options and corporate liabilities // Journal of political economy, 1973, vol. 81, no. 3, p. 637–659.

2) Merton R.C. Theory of rational option pricing // Bell Journal of economic and management

Фундаментальное уравнение Блэка-Шоулза-Мертона

Рассмотрим более подробно задачу вычисления справедливой цены опциона, впервые решенную Блэком и Шоулзом, а также независимо от них Мертоном. Вначале сформулируем предположения о (B,S)-рынке в теории Блэка-Шоулза-Мертона.

Допустим, что банковский процент r является постоянным, так что при непрерывном начислении процентов банковский счет будет эволюционировать по закону

$$dB(t) = r\,B(t)dt. \qquad (1)$$

На (B,S)-рынке обращается один вид ценных бумаг (для определенности будем считать, что речь идет об акциях. Курсовая стоимость акций описывается моделью Самуэльсона, то есть подчиняется СДУ

$$dS(t) = S(t)[\mu dt + \sigma dW(t)]. \qquad (2)$$

Иначе говоря, $S(t)$ есть процесс геометрического броуновского движения с коэффициентом роста стоимости μ и волатильностью σ (обе эти параметра считаются <u>постоянными</u>). Начальная стоимость акции известна:

$$S(0) = S_0. \qquad (3)$$

Пусть на (B,S)-рынке обращается также производный финансовый инструмент (опцион) европейского типа со сроком исполнения T и платежной функцией $f_T(S(T))$, зависящей от стоимости базового актива в момент T. Отметим, что в рассматриваемой теории платежная функция, в принципе, могла бы зависеть от двух аргументов: $S(T)$ и T, однако явную зависимость от T мы не будем выписывать для сокращения записей формул.

Будем считать, что в любой момент

времени $t \in [0,T]$ стоимость опциона $f(t, S(t))$ является функцией двух аргументов: момента t и стоимости базового актива в этот момент. Задача состоит в том, чтобы получить конкретный вид функции f.

Будем считать также, что рынок является <u>нейтральным по отношению к риску</u>[1]. Этот термин означает, что доходность различных финансовых инструментов, которые обращаются на рынке, должна быть одинаковой. В нашем случае доходность банковского счета постоянна и равна процентной ставке по нему r. Следовательно, доходность опциона, если к нему добавить в портфель соответствующее число акций, также должна равняться r. Смысл понятия риск-нейтральности состоит в том, что, если бы какой-то из активов обладал бы повышенной доходностью по отношению к другим, то все инвесторы на рынке выбирали бы его и получали максимально возможный доход. Раз на реальном рынке существуют разные виды активов, значит их доходности близки друг к другу.

На риск-нейтральном рынке исключается возможность <u>арбитража</u>. Под арбитражем понимается извлечение дохода без риска, когда можно купить какой-либо инструмент рынка по низкой цене и тут же перепродать по более высокой цене.

На описанном рынке обращаются три вида активов: банковский счет, акция и опцион на нее. Следовательно, инвестор может сформировать портфель $\vec{\gamma} = \{\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2\}$, состоящий из трех позиций: γ_0 — количество средств, помещаемых на банковский счет, γ_1 — число акций в портфеле, γ_2 — число опционов. Будем считать, что у нас имеется <u>один</u> опцион, и он хеджируется с помощью покупки $\Delta(t)$ акций. Тогда инвестиционный портфель будет иметь следующий вид:

---

1) Халл Д.К. Опционы, фьючерсы и другие производные финансовые инструменты. М.: Вильямс, 2008.

$$\vec{\gamma}(t) = \{0, \Delta(t), -1\} \qquad (3)$$

Нуль в первой позиции означает, что на счет деньги не переводятся, число акций $\Delta(t)$ все время меняется по правилам, описанным ниже. Минус единица в третьей позиции означает, что имеется один опцион, который не торгуется на рынке, деньги на него уже потрачены, и эта сумма должна вычитаться из стоимости портфеля (см. предыдущую лекцию)!

$$\Pi(t) = \gamma_0 + \sum_{i=1}^{n} \gamma_i S_i(t) = -f(t, S(t)) + \Delta(t) S(t) \qquad (4)$$

где $n=2$, $S_1 = S$, $S_2 = f$.

Подсчитаем доходность портфеля (4). Для этого найдем приращение капитала портфеля на интервале $[t, t+dt]$. Считаем, что в этом промежутке число акций $\Delta(t)$ не меняется и сохраняет свое значение в начале интервала, получим

$$\boxed{d\Pi(t) = -df(t, S(t)) + \Delta(t) dS(t).} \qquad (5)$$

В финансовой математике все СДУ понимаются в смысле Ито. Это касается и первого дифференциала в выражении (5). Применяя формулу Ито, получаем

$$df = \left[\frac{\partial f(t,S)}{\partial t} + \mu S \frac{\partial f(t,S)}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f(t,S)}{\partial S^2}\right] dt$$

$$+ \sigma S \frac{\partial f}{\partial S} dW(t). \qquad (6)$$

Здесь при записи производных по аргументу S принято то же соглашение, что и в лекции по формуле Ито. Именно, под производной f по S понимается выражение вида:

$$\frac{\partial f}{\partial S} = \left.\frac{\partial f(t,s)}{\partial s}\right|_{s=S(t)} \qquad (7)$$

и аналогично для второй производной по S.

Подставляя выражение (6) в (5), будем иметь:

$$d\Pi(t) = \left[-\frac{\partial f(t,S)}{\partial t} + \mu S\left(\Delta - \frac{\partial f(t,S)}{\partial S}\right) - \right.$$

$$-\frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f(t,S)}{\partial S^2}\Big] dt + \sigma S\Big[\Delta - \frac{\partial f(t,S)}{\partial S}\Big] dW(t). \quad (8)$$

Потребуем, чтобы портфель (3) был безрисковым, то есть в выражении для приращения его стоимости (8) отсутствовал бы член, пропорциональный dW. Из требования безрисковости получим

$$\Delta(t) = \frac{\partial f(t,S)}{\partial S}. \quad (9)$$

Если количество хеджирующих акций $\Delta(t)$ изменяется по закону (9), то тогда приращение стоимости портфеля (8) примет вид:

$$d\Pi(t) = -\Big[\frac{\partial f(t,S)}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f(t,S)}{\partial S^2}\Big] dt. \quad (10)$$

Теперь потребуем, чтобы портфель был риск-нейтральным, то есть его доходность была бы идентична доходности банковского счета (1)

$$d\Pi(t) = r\,\Pi(t)\,dt. \quad (11)$$

Отметим, что такое равенство принципиально может выполняться только для безрисковых портфелей, у которых в (8) отсутствует второе слагаемое.

Если теперь подставить в равенство (11) выражение Π из (4), выражение $d\Pi$ из (10) и выражение Π из (4), причем в последнем заменить Δ согласно (9), то получим

$$-\Big[\frac{\partial f(t,S)}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f(t,S)}{\partial S^2}\Big] dt = \quad (12)$$
$$= r\Big[-f(t,S) + S\frac{\partial f(t,S)}{\partial S}\Big] dt.$$

Перенося все члены в правую часть и сокращая на dt, с учетом соглашения (7) приходим к равенству

$$\Big[\frac{\partial f(t,S)}{\partial t} + rS\frac{\partial f(t,S)}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f(t,S)}{\partial S^2} - r f(t,S)\Big]_{S=S(t)} = 0 \quad (13)$$

Равенство (13) должно выполняться

на любой траектории $S(t)$ процесса курсовой стоимости акций. Этот процесс является случайным и, в принципе, может принимать в любой момент t произвольные значения. Для выполнения (13) при любом $S(t)$ потребуем обращения в нуль выражения, стоящего в квадратных скобках. Отсюда выводим уравнение, которому должна удовлетворять стоимость опциона

$$\frac{\partial f(t,s)}{\partial t} + rs\frac{\partial f(t,s)}{\partial s} + \frac{1}{2}\sigma^2 s^2 \frac{\partial^2 f}{\partial s^2} = rf. \qquad (14)$$

Уравнение (14) называется фундаментальным уравнением Блэка – Шоулза – Мертона. Оно должно выполняться в интервале $0 \le t < T$ при любых $0 < s < \infty$.

При $t = T$ должно выполняться „начальное" условие

$$f|_{t=T} = f_T(s), \qquad (15)$$

где f_T обозначает платежную функцию опциона. Равенство (15) отражает порядок выполнения опциона по прошествии срока его исполнения.

Обозначим через Q справедливую цену опциона в момент его оформления $t = 0$. Очевидно,

$$Q = f(0, s_0), \qquad (16)$$

где функция f находится из решения уравнения (14) при дополнительном условии (15), а s_0 обозначает начальную цену базового актива.

Таким образом, для определения рациональной стоимости опциона необходимо решить некоторую задачу математической физики для уравнения Блэка – Шоулза – Мертона (14) при „начальном" условии (15), равном платежной функции опциона.