Занятие 7. Вычисление стоимости производных финансовых инструментов в модели Башелье

Теория

1°. Курсовая стоимость акций в модели Башелье

$$S(t) = S_0 + \mu t + \sigma W(t), \quad (t \geqslant 0), \quad (1)$$

S_0 — начальная стоимость,
μ — коэффициент роста стоимости,
σ — волатильность,
$W(t)$ — стандартный винеровский процесс.

2°. Процесс Башелье как диффузионный процесс

Процесс $S(t)$ характеризуется следующими коэффициентами

$$a(t,x) = \mu \quad \text{(коэффициент сноса)}$$
$$b(t,x) = \sigma^2 \quad \text{(коэффициент диффузии)} \quad (2)$$

3° Уравнение Колмогорова

$$\frac{\partial f}{\partial \tau} + \mu \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0, \quad (3)$$
$$(\tau > t, \quad -\infty < y < \infty).$$

$f(t,x;\tau,y)$ — переходная плотность процесса $S(t)$

$$f\big|_{\tau=t} = \delta(y-x) \quad (4)$$

$$f(t,x;\tau,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(\tau-t)}\,\sigma} e^{-\frac{(y-x-\mu(\tau-t))^2}{2\sigma^2(\tau-t)}} \quad (5)$$

4°. Распределение стоимости (1) при произвольном начальном значении S_0, распределенном по закону f_0

$$f(s;\tau) = \int\limits_0^\infty f_0(s_0)\,\frac{e^{-\frac{(s-s_0-\mu\tau)^2}{2\sigma^2\tau}}}{\sqrt{2\pi\tau}\,\sigma}\,ds_0 . \qquad (6)$$

5°. Понятие опциона.

Опционом называют ценную бумагу, представляющую собой соглашение, по которому одна из сторон (продавец) продает опцион за определенную цену, а другая (покупатель или владелец) получает право в определенный момент T (срок исполнения опциона) купить (или продать) определенный актив (например, акцию) по заранее оговоренной цене (цена исполнения). При этом владелец опциона не обязан производить покупку или продажу, он лишь имеет право предъявить опцион к исполнению.

Различают опционы европейского и американского типа. Европейский опцион можно предъявлять только в момент его исполнения $t = T$. Американский опцион разрешается предъявлять в любой момент $t \le T$.

Опцион на покупку актива называется опцион-колл (call). Опцион на продажу называют опцион-пут (put).

6°. Платежная функция опциона

Платежной функцией $f_T(T, S(T))$ называется, которая задает доход от предъявления опциона в момент T при условии, что актив будет стоить в этот момент $S(T)$. Для европейского опционе колл со сроком T и ценой исполнения K имеем

$$f_T(T, S(T)) = \begin{cases} S(T)-K, & S(T) \geq K, \\ 0, & S(T) < K. \end{cases} \qquad (7)$$

Для европейского опциона-пут

$$f_T(T, S(T)) = \begin{cases} 0, & S(T) > K, \\ K - S(T), & S(T) \leq K. \end{cases} \qquad (8)$$

Примеры

Пример 1

Начальная цена акции S_0 распределена по показательному закону с параметром α

$$f_0(s_0) = \alpha e^{-\alpha s_0}$$

Найти закон распределения $f(s;\tau)$, считая $\mu=0$.

Решение

По формуле (6) имеем

$$f(s;\tau) = \int_0^\infty \alpha e^{-\alpha s_0} \frac{e^{-\frac{(s-s_0)^2}{2\sigma^2\tau}}}{\sqrt{2\pi\tau}\,\sigma} ds_0. \qquad (9)$$

Выделим в показателе экспоненты полный квадрат

$$\frac{(s-s_0)^2}{2\sigma^2\tau} + \alpha s_0 = \frac{(s-s_0)^2}{2\sigma^2\tau} + \alpha(s_0 - s) + \alpha s =$$

$$= \alpha s + \frac{(s_0-s)^2 + 2\sigma^2\alpha\tau(s_0-s)}{2\sigma^2\tau} =$$

$$= \alpha s + \frac{(s_0 - s + \sigma^2\alpha\tau)^2}{2\sigma^2\tau} - \frac{1}{2}\sigma^2\alpha^2\tau.$$

Тогда выражение (9) преобразуется к виду

$$f(s;\tau)=\alpha e^{-\alpha s}\, e^{\frac{1}{2}\sigma^2\alpha^2\tau}\int_0^{\infty}\frac{e^{-\frac{(s_0-s+\sigma^2\alpha\tau)^2}{2\sigma^2\tau}}}{\sqrt{2\pi\tau}\,\sigma}\,ds_0 \qquad (10)$$

Полученный интеграл есть вероятность попадания на положительную полуось для нормальной случайной величины, распределенной по закону $N(s-\sigma^2\alpha\tau, \sigma\sqrt{\tau})$. Поэтому

$$f(s;\tau)=\frac{1}{2}\alpha e^{-\alpha s+\frac{1}{2}\sigma^2\alpha^2\tau}\left[1-\Phi\left(\frac{0-s+\sigma^2\alpha\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right)\right]$$

$$=\alpha e^{-\alpha s+\frac{1}{2}\sigma^2\alpha^2\tau}\left[1+\Phi\left(\frac{s-\sigma^2\alpha\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right)\right]. \qquad (11)$$

Пример 2

В модели Башелье получить цену опциона-колл C при сроке исполнения T и цене исполнения K, считая S_0 заданным. Цена опциона считается справедливой, если она равняется среднему выигрышу от предъявления этого опциона.

Решение

Используя закон распределения цены акции (6) согласно условиям задачи

$$f(s;\tau)=\frac{e^{-\frac{(s-s_0-\mu\tau)^2}{2\sigma^2\tau}}}{\sqrt{2\pi\tau}\,\sigma} \qquad (12)$$

Для опциона-колл с помощью его платежной функции (7) находим при $\tau=T$

$$C=\int_K^{\infty}(s-K)\,\frac{e^{-\frac{(s-s_0-\mu T)^2}{2\sigma^2 T}}}{\sqrt{2\pi T}\,\sigma}\,ds. \qquad (13)$$

Представим интеграл (13) в виде

$$C = \int_K^{\infty} (s - s_0 - \mu T) \frac{e^{-\frac{(s-s_0-\mu T)^2}{2\sigma^2 T}}}{\sqrt{2\pi T}\,\sigma}\, ds +$$

$$+ \int_K^{\infty} (s_0 + \mu T - K) \frac{e^{-\frac{(s-s_0-\mu T)^2}{2\sigma^2 T}}}{\sqrt{2\pi T}\,\sigma}\, ds =$$

$$= \frac{\sigma\sqrt{T}}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-\frac{(K-s_0-\mu T)^2}{2\sigma^2 T}}}{\sqrt{2\pi T}\,\sigma} +$$

$$+ (s_0 + \mu T - K)\, \frac{1}{2}\left[1 - \Phi\left(\frac{K - s_0 - \mu T}{\sigma\sqrt{T}}\right)\right] =$$

$$= \frac{\sigma\sqrt{T}}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-\frac{(s_0+\mu T-K)^2}{2\sigma^2 T}}}{\sqrt{2\pi T}\,\sigma} + (s_0 + \mu T - K)\frac{1}{2}\left[1 + \Phi\left(\frac{s_0 + \mu T - K}{\sigma\sqrt{T}}\right)\right]$$

Если обозначить через $\varphi(x)$ плотность стандартного нормального закона $N(0,1)$

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}},$$

а через $F(x)$ - функцию распределения этого закона

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt,$$

то тогда решению можно придать вид

$$C = \sigma\sqrt{T}\, \varphi\left(\frac{s_0 + \mu T - K}{\sigma\sqrt{T}}\right) + (s_0 + \mu T - K) F\left(\frac{s_0 + \mu T - K}{\sigma\sqrt{T}}\right). \quad (14)$$

Пример 3

Получить закон распределения выигрыша от приобретения опциона-колл европейского типа по цене C со сроком исполнения T и ценой исполнения K.

Решение

Обозначим через Z выигрыш от приобретения опциона. Поскольку цена актива $S(T)$ в момент T случайна и распределена по закону

$$f(s;T) = \frac{e^{-\frac{(s-S_0-\mu T)^2}{2\sigma^2 T}}}{\sqrt{2\pi T}\,\sigma}. \qquad (15)$$

Выигрыш определяется доходом от предъявления опциона (7) за вычетом стоимости самого опциона

$$Z = \begin{cases} S(T)-K-C, & S(T)\geq K \\ -C, & S(T)<K \end{cases} \qquad (16)$$

Обозначим через q вероятность того, что опцион предъявлять не придется. Это произойдет, если окажется, что $S(T)<K$. Поэтому

$$q = P\{S(T)<K\} = \int_{-\infty}^{K} \frac{e^{-\frac{(s-S_0-\mu T)^2}{2\sigma^2 T}}}{\sqrt{2\pi T}\,\sigma}\,ds =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\Phi\left(\frac{K-S_0-\mu T}{\sigma\sqrt{T}}\right)+1\right]. \qquad (17)$$

Если $S(T) \geq K$, то при этом условии выигрыш Z согласно (16) будет распределен по усеченному нормальному закону с математическим ожиданием $S_0 + \mu T - K - C$. Следовательно, закон распределения выигрыша будет таким:

$$\boxed{f(z)} = q\,\delta(z+c) + \begin{cases} \dfrac{e^{-\frac{(z - S_0 - \mu T + K + C)^2}{2\sigma^2 T}}}{\sqrt{2\pi T}\,\sigma}, & z \geq -c \\ 0, & z < c \end{cases}$$