Лекция 06.04 – 1

Теория выбросов (продолжение)

Применение теории выбросов к исследованию экстремумов случайных функций

Исследование экстремумов случайных функций является одной из тех задач, к решению которых теория выбросов стала применяться с самого момента ее возникновения. Имеется целый ряд задач из этой области исследований, к которым непосредственно применима теория Райса.

Исследование экстремумов представляет интерес для многих приложений. Рассмотрим, например, такую задачу. Имеется тело, которое движется прямолинейно. Перемещение тела в момент t обозначим через $U(t)$, а его скорость $\dot{U}(t) = \frac{dU}{dt}$ – через $V(t)$. В этой задаче экстремумы $U(t)$ достигаются в те моменты времени, когда скорость тела обращается в нуль. Следовательно, число экстремумов $U(t)$ в некотором интервале $[t_1, t_2]$ будет равняться числу моментов мгновенной остановки тела.

При рассмотрении экстремумов некоторого случайного процесса $X(t)$ в качестве базового процесса примем его производную $\dot{X}(t)$. Допустим, что процесс $X(t)$ дважды дифференцируем. Обозначим через $f_{\dot{x}\ddot{x}}(x_1, x_2; t)$ совместный закон распределения первой производной $X_1 = \dot{X}$ и второй производной $X_2 = \ddot{X}$ исходного процесса X в момент t. Будем интересоваться числом <u>минимумов</u> процесса X в интервале $[t_1, t_2]$, которое обозначим через $N_{min}(t_1, t_2)$.

Очевидно, $N_{min}(t_1,t_2)$ будет равняться числу положительных выбросов производной $\dot{X}(t)$ за нулевой уровень $\dot{X}=0$. При этом в точке минимума X обязательно должно выполняться достаточное условие существования минимума $\ddot{X}>0$.

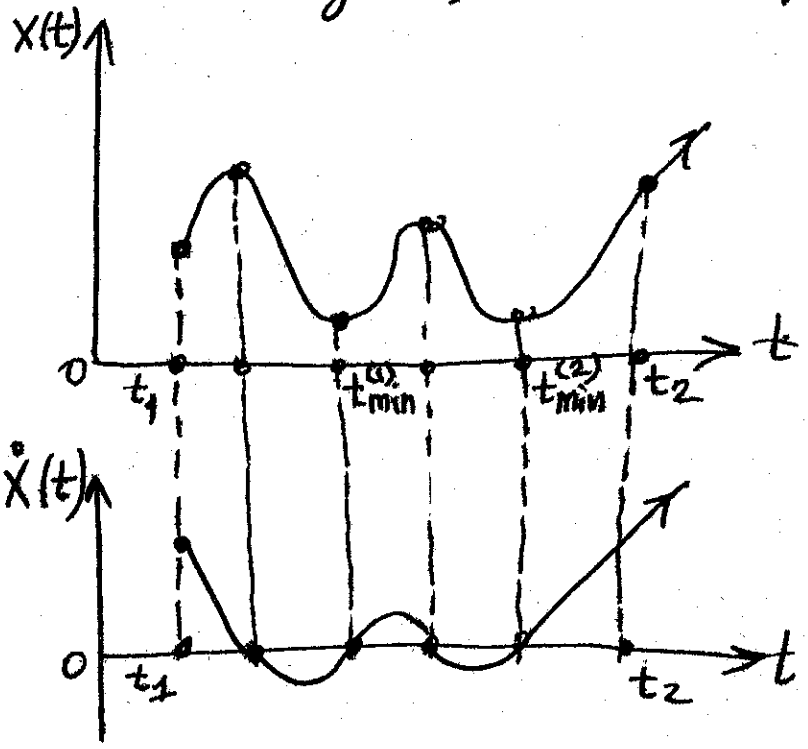

Рис. 1. К вычислению числа минимумов процесса $X(t)$

Легко видеть, что выбросы описанного выше вида могут быть рассчитаны с помощью классической теории Райса, изложенной на предыдущей лекции. Именно, среднее число минимумов в интервале $[t_1,t_2]$ дается интегралом

$$\overline{n}_{min}(t_1,t_2)=M[N_{min}(t_1,t_2)]=\int_{t_1}^{t_2}\nu_{min}(t)dt, \qquad (1)$$

где интенсивность появления минимумов находится по формуле

$$\nu_{min}(t)=\int_0^{\infty}x_2 f_{\dot{x}\ddot{x}}(0,x_2;t)\,dx_2. \qquad (2)$$

Совершенно аналогично вычисляется среднее число максимумов в $[t_1,t_2]$:

$$\overline{n}_{max}(t_1,t_2)=M[N_{max}(t_1,t_2)]=\int_{t_1}^{t_2}\nu_{max}(t)dt. \qquad (3)$$

Здесь интенсивность появления максимумов ν_{max} подсчитывается по формуле Райса для интенсивности появления отрицательных выбросов за нулевой уровень:

$$\nu_{max}(t) = -\int_{-\infty} x_2 f_{\dot{x}\ddot{x}}(0,x_2;t)\,dx_2 . \qquad (4)$$

Если интересоваться общим числом экстремумов $N_{extr}[t_1,t_2]$ безотносительно к тому, какие именно экстремумы имеют место, то

$$N_{extr}[t_1,t_2] = N_{min}(t_1,t_2) + N_{max}(t_1,t_2). \qquad (5)$$

Среднее число экстремумов находится аналогично (1), (3)

$$\overline{n}_{extr}(t_1,t_2) = \int_{t_1}^{t_2} \nu_{extr}(t)\,dt, \qquad (6)$$

где интенсивность появления экстремумов

$$\nu_{extr}(t) = \nu_{min}(t) + \nu_{max}(t) \qquad (7)$$

выражается в виде

$$\nu_{extr}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} |x_2|\, f_{\dot{x}\ddot{x}}(0,x_2;t)\,dx_2 . \qquad (8)$$

Далее рассмотрим решение ряда типовых задач теории выбросов, которые хотя и несколько отличаются от первоначальных задач, решенных Райсом, но с методической точки зрения не выходят за рамки классической теории.

Случай переменного уровня выбросов

Вначале рассмотрим ситуацию, когда уровень a, за которым рассматриваются выбросы, является заданной детерминированной функцией $a(t)$. Если предположить, что функция $a(t)$ дифференцируема, то тогда в этой задаче применим стандартный подход Райса.

Рассмотрим для определенности случай положительных выбросов, представленный на рис. 2. Как и ранее, введем в рассмотрение элементарную вероятность $dp_a^+(t)$ того, что в промежутке $[t, t+dt]$ имел место положительный выброс.

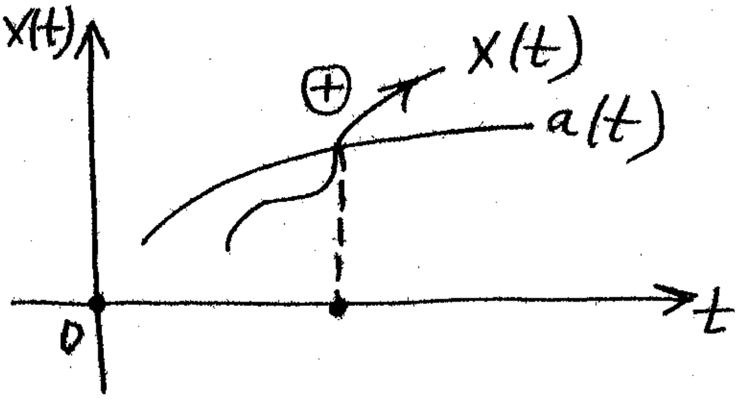

Рис. 2. Положительный выброс процесса $X(t)$ за переменный уровень $a(t)$

Аналогично предыдущей лекции можно записать

$$dp_a^+(t) = \mathcal{P}\{X(t) < a(t),\ X(t+dt) > a(t+dt)\}. \qquad (9)$$

Далее, благодаря тому, что и сам процесс $X(t)$, и движущаяся граница $a(t)$ предполагаются дифференцируемыми функциями, разложим их по степеням бесконечно малой величины dt, ограничившись только членами первого порядка

$$X(t+dt) = X(t) + V(t)dt + o(dt), \qquad (10)$$

$$a(t+dt) = a(t) + \mathring{a}(t)dt + o(dt). \qquad (11)$$

Подставляя последние выражения в (9), будем иметь

$$dp_a^+(t) = \mathcal{P}\{a(t) - (V(t) - \mathring{a}(t))dt < X(t) < a(t)\}, \qquad (12)$$

причем для существования выброса нужно, чтобы «скорость» процесса $V(t)$ превосходила «скорость» границы $\mathring{a}(t)$, иначе процесс «не догонит» убегающую от него границу.

Если теперь буквально повторить все рассуждения, относящиеся к случаю $a(t) = const(t)$, то тогда приходим к выражению

$$dp_a^+(t) = \nu_a^+(t)dt, \qquad (13)$$

где

$$\nu_a^+(t) = \int_{\mathring{a}(t)}^{\infty} f(a(t), v; t)(v - \mathring{a}(t))\,dv \qquad (14)$$

обозначает интенсивность положительных выбросов за подвижную границу $a(t)$.

С помощью совершенно аналогичных рассуждений для интенсивности отрицательных выбросов за точно такую же границу получаем следующее выражение

$$\nu_a^-(t) = -\int_{-\infty}^{\dot a(t)} f(a(t), v; t)(v - \dot a(t))\, dv. \quad (15)$$

Среднее число положительных, либо отрицательных выбросов по-прежнему будет вычисляться по формулам Райса

$$\overline{n}_a^{\pm}(t_1,t_2) = \int_{t_1}^{t_2} \nu_a^{\pm}(t)\, dt, \quad (16)$$

причем индекс при интенсивности выбросов берется таким же, как в левой части (16).

Далее используем прием, описанный на предыдущей лекции. Представим интенсивности (14) и (15) в единообразной форме

$$\nu_a^{\pm}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{[\operatorname{sign}(v - \dot a(t)) \pm 1]}{2} f(a(t), v; t)(v - \dot a(t))\, dv. \quad (17)$$

тогда для интенсивности пересечения подвижной границы $a(t)$

$$\mu_a(t) = \nu_a^+(t) + \nu_a^-(t) \quad (18)$$

находим следующее выражение

$$\mu_a(t) = \int_{-\infty}^{\infty} |v - \dot a(t)|\, f(a(t), v; t)\, dv. \quad (19)$$

Число пересечений $M_a(t_1,t_2)$ процесса $X(t)$ с кривой $a(t)$ в интервале $[t_1,t_2]$

$$M_a(t_1,t_2) = N_a^+(t_1,t_2) + N_a^-(t_1,t_2) \quad (20)$$

в среднем составит

$$\overline{m}_a(t_1,t_2) = M[M_a(t_1,t_2)] = \int_{t_1}^{t_2} \mu_a(t)\, dt. \quad (21)$$

В заключение этого раздела приведем выражения для средних значений длительности положительных $T_a^+(t_1,t_2)$ и отрицательных $T_a^-(t_1,t_2)$ выбросов за движущуюся границу

$$\overline{t}_a^{+}(t_1,t_2)=M[T_a^{+}(t_1,t_2)]=\int_{t_1}^{t_2}[1-F_x(a(t);t)]dt, \quad (22)$$

$$\overline{t}_a^{-}(t_1,t_2)=M[T_a^{-}(t_1,t_2)]=\int_{t_1}^{t_2}F_x(a(t);t)\,dt, \quad (23)$$

где $F_x(x;t)$ обозначает функцию распределения процесса $X(t)$. Отличие формул (22) и (23) от соответствующих формул предыдущей лекции состоит только в том, что во вновь полученных формулах первый аргумент функции F_x содержит некоторую функцию времени, задающую форму подвижной границы.

Конечно, зная среднюю длительность всех выбросов $\overline{t}_a^{\pm}$ на отрезке $[t_1,t_2]$ и среднее число $\overline{n}_a^{\pm}$ таких выбросов можно было бы подсчитать и среднюю длительность одного выброса по формуле

$$\overline{\tau}_a^{\pm}(t_1,t_2)=\frac{\overline{t}_a^{\pm}(t_1,t_2)}{\overline{n}_a^{\pm}(t_1,t_2)}, \quad (24)$$

однако для нестационарных процессов и подвижной границы формулы (24) менее интересны и полезны, чем в случае стационарного процесса, пересекающего постоянную границу. Дело в том, что только для установившегося по времени процесса и стабильной границы средняя продолжительность одного выброса имеет непосредственное наглядное значение. В нестационарном случае эта величина носит в значительной степени условный характер.

Вычисление дисперсии числа выбросов

Как уже отмечалось ранее, получение закона распределения числа выбросов представляет весьма сложную математическую задачу. В теории Райса все дело ограничивалось вычислением только среднего числа выбросов. [illegible] тем, существуют задачи, где требуется располагать и более детальной информацией о вероятностных характеристиках числа выбросов.

Например, если изучать число выбросов для достаточно длинного интервала наблюдения, то можно использовать аппроксимацию закона распределения $N_a^{\pm}$ с помощью нормального закона. Но тогда недостаточно знать только лишь среднее значение $N_a^{\pm}$, необходимо знать и соответствующую дисперсию.

Для определенности покажем вычисление $D(N_a^{+})$ на примере <u>положительных</u> выбросов. По общим правилам имеем

$$D(N_a^{+}) = M\left[(N_a^{+})^2\right] - \left(\overline{N}_a^{+}\right)^2, \qquad (25)$$

причем вычисление второго члена в (25) детально было разобрано ранее.

Обратимся к первому слагаемому в (25). Воспользуемся методом счетчиков пересечений, описанным в предыдущей лекции. Для этого разобьем отрезок $[t_1, t_2]$ на n более мелких интервалов с помощью следующего разбиения:

$$t_1 = \tau_0 < \tau_1 < \tau_2 < \ldots < \tau_{n-1} < \tau_n = t_2.$$

Число выбросов, попавших в интервал с номером $j = \overline{1,n}$, обозначим через ξ_j.

Ясно, что

$$N_a^{+}(t_1, t_2) = \sum_{j=1}^{n} \xi_j. \qquad (26)$$

Границами j-го интервала являются τ_{j-1} и τ_j, а его длина равняется $\Delta\tau_j = \tau_j - \tau_{j-1}$.

В дальнейшем будет осуществляться предельный переход, когда $n \to \infty$, а $\Delta\tau = \max\limits_{1 \le j \le n} \{\Delta\tau_j\}$ стремится к нулю.

Рассмотрим элементарную вероятность

$dp_{aa}^{++}(\tau_j,\tau_k)$ того, что в двух интервалах с номерами j и k имели место положительные выбросы за уровень a. Сам уровень точно так же, как в теории Райса, в этом параграфе считаем постоянным.

Введенная вероятность математически определяется так:

$$dp_{aa}^{++}(\tau_j,\tau_k)=\mathcal{P}\{X(\tau_{j-1})<a,\, X(\tau_j)>a,\, X(\tau_{k-1})<a,\, X(\tau_k)>a\}. \quad (27)$$

Если воспользоваться методом Райса и подсчитать вероятность (27), считая $\Delta\tau_j$ и $\Delta\tau_k$ бесконечно малыми величинами, то совершенно аналогично предыдущему получим

$$dp_{aa}^{++}(\tau_j,\tau_k)=\nu_{aa}^{++}(\tau_j,\tau_k)\,\Delta\tau_j\,\Delta\tau_k, \quad (28)$$

где коэффициент при $\Delta\tau_j\Delta\tau_k$ выражается в виде

$$\nu_{aa}^{++}(s_1,s_2)=\int_0^\infty\!\!\int_0^\infty f_{x_1x_2\dot{x}_1\dot{x}_2}(a,a,v_1,v_2;s_1,s_2)\,v_1v_2\,dv_1\,dv_2. \quad (29)$$

В последнем равенстве под функцией $f_{x_1x_2\dot{x}_1\dot{x}_2}(x_1,x_2,v_1,v_2;s_1,s_2)$ понимается совместный закон распределения системы случайных величин $X_1=X(s_1)$, $X_2=X(s_2)$, $V_1=\dot{X}(s_1)$, $V_2=\dot{X}(s_2)$.

Допустим, что число интервалов разбиения n неограниченно увеличивается, а длина наибольшего из этих интервалов стремится к нулю. Тогда в каждый из интервалов вида $[\tau_{j-1},\tau_j]$ попадет не более одного выброса, причем

$$\mathcal{P}\{\xi_j=1,\ \xi_k=1\}=dp_{aa}^{++}(\tau_j,\tau_k)=\nu_{aa}^{++}(\tau_j,\tau_k)\Delta\tau_j\Delta\tau_k \quad (30)$$

Представим $(N_a^+)^2$ в виде двойной суммы следующего вида:

$$\left(N_a^+(t_1,t_2)\right)^2 = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \xi_j \xi_k . \qquad (31)$$

Вычисляя математическое ожидание обеих частей (31) с учётом (30) получим

$$M\left[\left(N_a^+(t_1,t_2)\right)^2\right] = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \nu_{aa}^{++}(\tau_j,\tau_k)\Delta\tau_j\Delta\tau_k . \qquad (32)$$

Переходя в (32) к пределу при $n\to\infty$, $\Delta\tau\to 0$, получаем

$$M\left[\left(N_a^+(t_1,t_2)\right)^2\right] = \int_{t_1}^{t_2}\int_{t_1}^{t_2} \nu_{aa}^{++}(s_1,s_2)\,ds_1 ds_2 , \qquad (33)$$

а тогда согласно выражению (25) получаем окончательное значение дисперсии положительных выбросов

$$D(N_a^+) = \int_{t_1}^{t_2}\int_{t_1}^{t_2} \nu_{aa}^{++}(s_1,s_2)\,ds_1 ds_2 - \left[\int_{t_1}^{t_2} \nu_a^+(s)\,ds\right]^2 . \qquad (34)$$