Лекция 27.03

Основные уравнения теории диффузионных процессов

Ранее мы отмечали, что наиболее важные и широко распространенные модели курсовой стоимости акций основываются на применении теории непрерывных марковских (диффузионных) процессов. Из ранее рассмотренных моделей курсовой стоимости к этому классу относятся модель Башелье основанная на процессе броуновского движения (винеровском процессе), модель Самуэльсона, основанная на процессе геометрического броуновского движения, модели теории облигаций, использующие процесс Уленбека-Орнштейна. Конечно применяются модели процессов, не являющиеся диффузионными, например, фрактальные модели, подобные процессу фрактального броуновского движения, которые, вообще говоря, не являются диффузионными и даже не являются марковскими моделями, но все-таки диффузионные модели являются наиболее употребительными и широко распространенными.

Основное преимущество диффузионных моделей состоит в том, что плотность вероятности приращения диффузионного процесса удовлетворяет некоторому уравнению в частных производных, и задача ее вычисления сводится к некоторой задаче математической физики. Сейчас мы переходим к выводу основных уравнений, задающих переходную плотность диффузионного процесса (уравнений А.Н. Колмогорова). Предварительно необходимо вывести одно вспомогательное уравнение, играющее центральную роль в теории марковских процессов.

Уравнение Чепмена-Колмогорова

Рассмотрим некоторый непрерывный марковский процесс $U(t)$. В этом параграфе мы не требуем, чтобы он обязательно был диффузионным. Предполагается только, что у него существует плотность вероятности перехода $f(t,x;\tau,y)$. Напомним, что это есть условная плотность вероятности случайной ординаты процесса $Y=U(\tau)$, взятой в момент $\tau>t$, при условии, что $U(t)=x$.

Подсчитаем вероятность того, что, стартуя в момент t из точки x, процесс в момент $\tau>t$ окажется в малом интервале от y до $y+dy$. По определению переходной плотности имеем

$$dP_1=f(t,x;\tau,y)\,dy. \qquad (1)$$

С другой стороны, перейти из точки x в интервал $[y,y+dy]$ можно и немного иначе (см. рис. 1). Выберем некоторый промежуточный момент времени s, удовлетворяющий неравенству $t<s<\tau$. Допустим, что в момент s ордината процесса $U(s)=z$

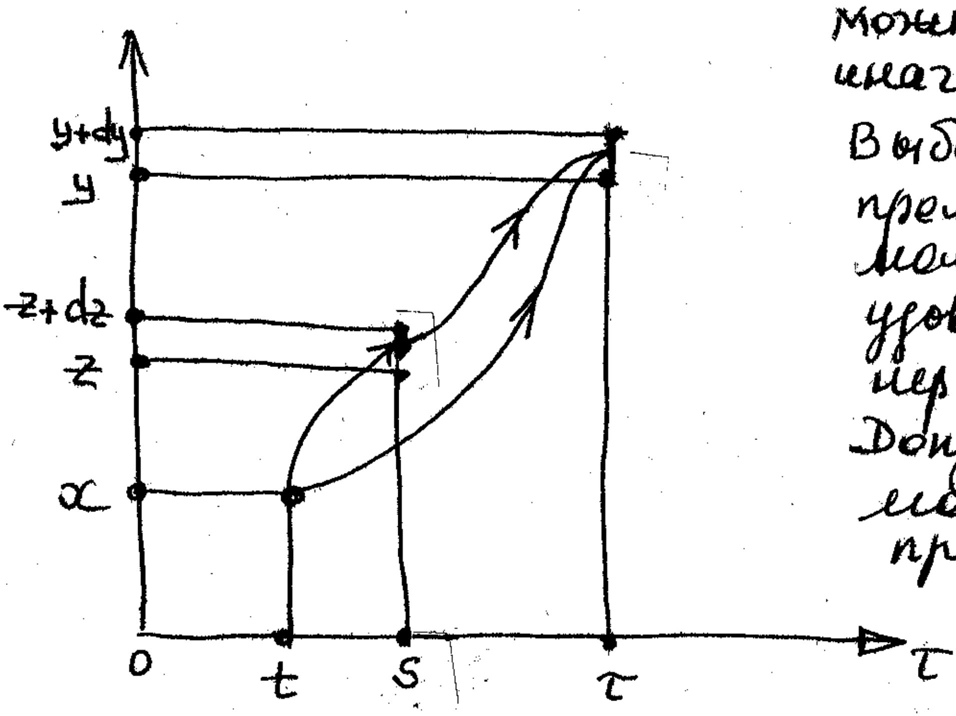

Рис. 1. К выводу уравнения Чепмена-Колмогорова.

попадет в интервал от z до $z+dz$. Вероятность этого события аналогично (1) будет выражаться в виде $f(t,x;s,z)\,dz$. Поскольку процесс является марковским, то его эволюция для $\tau > s$ будет полностью определяться значениями s и z, а вероятность перехода из окрестности точки z в момент s в окрестность точки y в момент τ будет равняться $f(s,z;\tau,y)\,dy$. Для марковского процесса переходы в интервалах (t,s) и (s,τ) будут независимыми. Следовательно, вероятность пройти из точки x в окрестность точки y по пути посетив окрестность точки z будет равняться $f(t,x;s,z)\,f(s,z;\tau,y)\,dz\,dy$. Поскольку точка z может быть произвольной, то проинтегрировав по всем z, получим альтернативное выражение для вероятности перехода

$$dP_2 = \int_{-\infty}^{\infty} f(t,x;s,z)\,f(s,z;\tau,y)\,dz\,dy. \tag{2}$$

Очевидно, оба перехода, изображенные на рис. 1, эквивалентны друг другу. Приравнивая выражения (1) и (2) друг к другу и сокращая на dy, получаем

$$f(t,x;\tau,y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t,x;s,z)\,f(s,z;\tau,y)\,dz. \tag{3}$$

Формула (3) носит название формулы (или уравнения) Чепмена — Колмогорова. Некоторые авторы (главным образом физики) называют это уравнение уравнением Смолуховского. Иногда его называют обобщенным уравнением Маркова, потому что похожие уравнения записывал А. А. Марков применительно к вероятностям перехода марковских цепей.

В заключение отметим, что уравнение

Чепмена – Колмогорова представляет собой некоторое функциональное уравнение, которому должна удовлетворять переходная плотность любого марковского процесса (не обязательно диффузионного). Это функциональное уравнение нелинейно (так как в правой его части стоит произведение переходных плотностей при разных значениях их аргументов) и является интегральным. Интересно заметить, что после выполнения интегрирования в (3) должна пропадать зависимость правой части уравнения от параметра s.

Уравнение Чепмена – Колмогорова накладывает довольно жесткие ограничения на вид переходной плотности $f(t,x;\tau,y)$, однако она не определяет однозначно конкретное выражение этой функции. Как оказывается, если марковский процесс является диффузионным и заданы его коэффициенты сноса и диффузии, то тогда переходная плотность может быть найдена из решения некоторого другого уравнения, полученного впервые А.Н. Колмогоровым.

Первое (обратное) уравнение А.Н. Колмогорова

Существуют два различных уравнения Колмогорова, которым удовлетворяет переходная плотность $f(t,x;\tau,y)$. Первое из них определяет зависимость функции f от параметров начального состояния (t,x), а второе – от параметров конечного состояния (τ,y). Начнем с вывода первого уравнения, которое является достаточно естественным и наглядным. Мы здесь приводим классический вывод, предложенный самим Колмогоровым в его элементарной статье [1]. Эта статья первоначально было опубликовано на немецком языке в 1931 году, затем в 1938 году вышел русский перевод [1]. Классический вывод Колмогорова можно найти также в книгах А.А. Свешникова [2] и [3], а также в книге К.В. Гардинера [4].

Вывод уравнения разобьем на несколько шагов.

Шаг 1. Использование определения понятия производной.

По определению частной производной переходной плотности по аргументу t имеем:

$$\frac{\partial f(t,x;\tau,y)}{\partial t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\Big[f(t+\Delta t,x;\tau,y)-f(t,x;\tau,y)\Big]. \qquad (4)$$

Шаг 2. Применение уравнения Чепмена–Колмогорова

Представим второе слагаемое в квадратных скобках (4) с помощью уравнения (3), причем в качестве промежуточного момента времени s в (3) примем $s=t+\Delta t$. Естественно, при этом считаем, что $\Delta t<\tau-t$. При этом получим

$$f(t,x;\tau,y)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t,x;t+\Delta t,z)\,f(t+\Delta t,z;\tau,y)\,dz. \qquad (5)$$

Шаг 3. Разложение функции $f(t+\Delta t,z;\tau,y)$ в ряд по степеням z

Предположим, что функция $f(t,x;\tau,y)$ имеет частные производные по x до третьего порядка включительно и разложим в выражении (5) функцию $f(t+\Delta t,z;\tau,y)$ вблизи точки $z=x$, в ряд по степеням z ограничившись членами до второго порядка относительно разности $(z-x)$. В результате находим:

$$f(t+\Delta t,z;\tau,y)=f(t+\Delta t,x;\tau,y)+\frac{\partial f(t+\Delta t,x;\tau,y)}{\partial x}(z-x)+$$
$$+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f(t+\Delta t,x;\tau,y)}{\partial x^2}(z-x)^2+R_3, \qquad (6)$$

где остаток R_3 имеет относительно $(z-x)$

порядок не ниже третьего

Шаг 4. Подстановка разложения (6) в уравнение (5), а результирующего выражения затем в уравнение (4).

После указанных подстановок уравнение (4) примет вид:

$$\frac{\partial f(t,x;\tau,y)}{\partial t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t}\Big\{ f(t+\Delta t, x;\tau,y) -$$

$$-\int_{-\infty}^{\infty} f(t,x;t+\Delta t,z)\Big[f(t+\Delta t,x;\tau,y) +$$

$$+\frac{\partial f(t+\Delta t,x;\tau,y)}{\partial x}(z-x) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f(t+\Delta t,x;\tau,y)}{\partial x^2}(z-x)^2 +$$

$$+R_3\Big]dz\Big\}. \tag{7}$$

Первый член в квадратных скобках не зависит от z, и его можно вынести за знак интеграла. Оставшийся в качестве множителя при этом члене интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t,x;t+\Delta t,z)\,dz = 1 \tag{8}$$

тождественно равен единице в силу определения переходной плотности. Поэтому первые два члена в фигурных скобках (7) взаимно уничтожают друг друга, и равенство (7) приобретает вид:

$$\frac{\partial f(t,x;\tau,y)}{\partial t} = -\lim_{\Delta t \to 0}\frac{1}{\Delta t}\int_{-\infty}^{\infty} f(t,x;t+\Delta t,z)\cdot$$

$$\cdot\Big[\frac{\partial f(t+\Delta t,x;\tau,y)}{\partial x}(z-x) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f(t+\Delta t,x;\tau,y)}{\partial x^2}(z-x)^2 +$$

$$+R_3\Big]dz. \tag{9}$$

Шаг 5. Использование предположения, что процесс $U(t)$ является диффузионным процессом.

Допустим, что процесс $U(t)$ является диффузионным процессом. Тогда, как известно, существуют локальные моменты всех порядков, причем локальные моменты всех порядков, начиная с третьего, обращаются в нуль. Для диффузионного процесса

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\int_{-\infty}^{\infty} f(t,x;t+\Delta t,z)(z-x)\,dz = a(t,x), \quad (10)$$

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\int_{-\infty}^{\infty} f(t,x;t+\Delta t,z)(z-x)^2\,dz = b(t,x), \quad (11)$$

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\int_{-\infty}^{\infty} f(t,x;t+\Delta t,z)(z-x)^k\,dz = 0, \ (k\geq 3), \quad (12)$$

где $a(t,x)$ – коэффициент сноса, а $b(t,x)$ – коэффициент диффузии процесса U.

В равенстве (9) производные f не зависят от z и выносятся за знак интеграла. Что касается остатка R_3, то он содержит разности $(z-x)$ в степенях, превосходящих два. Поэтому согласно (12) после перехода к пределу при $\Delta t\to 0$ получаем

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\int_{-\infty}^{\infty} f(t,x;t+\Delta t,z)R_3\,dz = 0. \quad (13)$$

Выполняя с учетом (10), (11), (13) предельный переход согласно (9) и перенося все слагаемые в левую часть уравнения, получаем

$$\frac{\partial f(t,x;\tau,y)}{\partial t} + a(t,x)\frac{\partial f(t,x;\tau,y)}{\partial x} + \frac{1}{2}b(t,x)\frac{\partial^2 f(t,x;\tau,y)}{\partial x^2} = 0, \quad (14)$$
$$(t<\tau, \quad -\infty<x<\infty).$$

Это уравнение называется первым, или обратным уравнением Колмогорова, так как оно справедливо лишь для $t<\tau$, то есть для всех моментов времени, предшествующих τ. В направлении уменьшения t может не ограничиваться.

„Начальное" условие имеет вид

$$f\big|_{t\to\tau} = \delta(y-x). \quad (15)$$

Краевые условия к (14) имеют вид

$$f\big|_{|x|\to\infty} = 0. \quad (16)$$

Уравнение (14) понимается здесь в классическом смысле. Все производные, входящие в уравнение, а именно, $\frac{\partial f}{\partial t}$, $\frac{\partial f}{\partial x}$ и $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ считаются непрерывными.

Второе (прямое) уравнение А.Н. Колмогорова, или уравнение Фоккера–Планка–Колмогорова (уравнение ФПК)

По сравнению с первым уравнением (14) второе уравнение Колмогорова доказывается более сложным и искусственным путем. Здесь также нужно потребовать, чтобы процесс $U(t)$ был диффузионным, то есть должны выполняться условия (10)–(12). Дополнительно к этому потребуем, следуя работе Колмогорова [1], чтобы коэффициент сноса $a(t,x)$ был непрерывно дифференцируем по x, а у коэффициента диффузии $b(t,x)$ существовала непрерывная вторая производная по x. Математически эти условия записываются так:

$$a(t,x)\in C^{(1)}(-\infty,\infty),\quad b(t,x)\in C^{(2)}(-\infty,\infty). \tag{17}$$

Условия (17) иногда называют условиями регулярности коэффициентов уравнения Колмогорова.

Второе уравнение Колмогорова описывает зависимость переходной плотности f от параметров конечного состояния (τ, y). Чтобы сделать вывод более наглядным, как и при выводе первого уравнения, разобьем его на ряд шагов.

Шаг 1. Введение некоторого функционала от переходной плотности

Введем функционал вида

$$I(t,x;\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f(t,x;\tau,y)}{\partial \tau}\,\rho(y)\,dy, \tag{18}$$

где $\rho(y)$ — произвольная функция, удовлетворяющая условиям: 1) ρ дважды непрерывно дифференцируема; 2) сама функции ρ, ее первая ρ' и вторая ρ'' производные обращаются в нуль, когда $|y| \to \infty$.

Шаг 2. Использование определения понятия производной

Выразим производную переходной плотности по τ в виде соответствующего предела. Имеем

$$\frac{\partial f(t,x;\tau,y)}{\partial \tau} = \lim_{\Delta\tau \to 0} \frac{1}{\Delta\tau}\left[f(t,x;\tau+\Delta\tau,y) - f(t,x;\tau,y)\right]. \quad (19)$$

Шаг 3. Применение уравнения Чепмена-Колмогорова

В данном случае с помощью уравнения Чепмена-Колмогорова выражается первое слагаемое в квадратных скобках (19), причем за начальный момент берется t, за промежуточный τ, а за конечный $\tau+\Delta\tau$, что дает

$$f(t,x;\tau+\Delta\tau,y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t,x;\tau,z) f(\tau,z;\tau+\Delta\tau,y)\,dz. \quad (20)$$

Шаг 4. Подстановка представления (20) в формулу (19) с последующей подстановкой производной в функционал (18)

Если после указанных преобразований поменять местами порядок выполнения операций интегрирования и переходя к пределу при $\Delta\tau \to 0$, то получим:

$$I = \lim_{\Delta\tau \to 0} \frac{1}{\Delta\tau}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t,x;\tau,z) f(\tau,z;\tau+\Delta\tau,y)\,dz\right]\rho(y)\,dy - \int_{-\infty}^{\infty} f(t,x;\tau,y)\rho(y)\,dy\right\}. \quad (21)$$

Шаг 5. Переобозначение переменных

В двойном интеграле (21) заменим переменную интегрирования z на y и обратно y заменяем на z. После этого в обоих интегралах появляется плотность $f(t,x;\tau,y)$. В двойном интеграле внешний интеграл сделаем интегралом по y, после чего объединим оба интеграла и в интеграле по y вынесем за скобки множитель $f(t,x;\tau,y)$. Получим тогда:

$$I = \lim_{\Delta\tau\to 0}\frac{1}{\Delta\tau}\int_{-\infty}^{\infty} f(t,x;\tau,y)\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau,y;\tau+\Delta\tau,z)\rho(z)\,dz - \rho(y)\right]dy \qquad (22)$$

Шаг 6. Разложение функции $\rho(z)$ в ряд по степеням $z-y$

Во внутреннем интеграле (22) разложим $\rho(z)$ по степеням $z-y$ вблизи точки $z=y$:

$$\rho(z) = \rho(y) + \frac{d\rho(y)}{dy}(z-y) + \frac{1}{2}\frac{d^2\rho(y)}{dy^2}(z-y)^2 + R_3, \qquad (23)$$

где R_3 имеет порядок не ниже третьего относительно разности $(z-y)$.

Шаг 7. Подстановка разложения (23) в интеграл (22)

Если проделать указанную подстановку, а затем учесть условие нормировки переходной плотности (8), а так же определение локальных моментов (10)–(12), получим

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} f(t,x;\tau,y)\left[a(\tau,y)\frac{d\rho(y)}{dy} + \frac{1}{2}b(\tau,y)\frac{d^2\rho(y)}{dy^2}\right]dy \qquad (24)$$

Шаг 8. Применение формулы интегрирования по частям.

Формула интегрирования по частям выглядит для конечного интервала $[a,b]$ так [5]:

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)\,dx. \qquad (25)$$

Она справедлива в предположении, что сами функции u, v, а также их производные u', v' непрерывны на $[a,b]$. Если интервал $[a,b]$ бесконечен и при этом $uv \to 0$, когда $x \to \pm\infty$, то формула (25) упрощается

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(x)v'(x)\,dx = -\int_{-\infty}^{\infty} v(x)u'(x)\,dx. \qquad (26)$$

Воспользуемся формулой (26) в правой части равенства (24) таким образом, чтобы избавиться от производных функции $\rho(y)$. Если предположить, что переходная плотность f дважды непрерывно дифференцируема и применить формулу (26) к первому слагаемому в квадратных скобках один раз, а ко второму слагаемому два раза, то получим:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \Big[-\frac{\partial}{\partial y}\big(a(\tau,y) f(t,x;\tau,y)\big) + \qquad (27)$$

$$+ \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\big(b(\tau,y) f(t,x;\tau,y)\big)\Big] \rho(y)\, dy.$$

Шаг 9. Применение леммы Дюбуа-Реймона [6]

Если вспомнить определение функционала (18), то ~~равенство~~ равенство (27) можно переписать в форме интеграла от произведения некоторой комбинации производных переходной плотности на произвольную функцию $\rho(y)$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Big[\frac{\partial f(t,x;\tau,y)}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial y}\big(a(\tau,y) f(t,x;\tau,y)\big) - \qquad (28)$$

$$- \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\big(b(\tau,y) f(t,x;\tau,y)\big)\Big] \rho(y)\, dy = 0.$$

На функцию $\rho(y)$ при ее введении в функционал (18) накладывались ограничения самого общего вида. Требовалось, чтобы она была достаточно гладкой и обращалась в нуль на бесконечности вместе со своими младшими производными. В остальном она совершенно произвольна. Поэтому на основании леммы Дюбуа-Реймона [6], известной из вариационного исчисления, можно утверждать, что выражение в квадратных скобках [28] должно обращаться в нуль.

Таким образом, должно выполняться уравнение:

$$\frac{\partial f(t,x;\tau,y)}{\partial \tau}+\frac{\partial}{\partial y}\Big(a(\tau,y)f(t,x;\tau,y)\Big)-\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\Big(b(\tau,y)f(t,x;\tau,y)\Big)=0,$$

$$(\tau>t,\ -\infty<y<\infty). \qquad (29)$$

Это уравнение носит название второго или прямого уравнения Колмогорова. Оба уравнения (14) и (29) впервые были получены Колмогоровым в 1931 году в работе [1].

Если первое уравнение (14) до Колмогорова в научной литературе не было известно, то уравнение, аналогичное (29) ранее были получены немецкими физиками А. Фоккером (в 1915 году) и М. Планком (в 1917 году для многомерного процесса).

Начальные и краевые условия к уравнению (29) аналогичные условиям (15) - (16). При $\tau \to t$ ставится дельтаобразное начальное условие (30)

$$f\big|_{\tau\to t}=\delta(y-x),$$

а при неограниченном увеличении $|y|$ плотность вероятности должна обращаться в нуль (31)

$$f\big|_{|y|\to\infty}=0.$$

В заключение отметим, что оператор, стоящий во втором уравнении Колмогорова (29) является сопряженным по отношению к оператору, входящему в первое уравнение (14).

Литература

1. Колмогоров А.Н. Об аналитических методах в теории вероятностей // Успехи математических наук, 1938, №5, с. 5-41
2. Свешников А.А. Прикладные методы теории случайных функций. СПб: Лань, 2011, 464с
3. Свешников А.А. Прикладные методы теории марковских процессов. СПб: Лань, 2007, 192с.
4. Гардинер К.В. Стохастические методы в естественных науках. М.: Мир, 1986, 528с.
5. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа. Часть 1. М.: Наука, 1971.
6. Лаврентьев М.А., Люстерник Л.А. Курс вариационного исчисления. М.-Л.: Физматгиз, 1959.