Лекция 13.04 – 1

Исследование выбросов стационарных нормальных процессов

На предыдущих лекциях были получены расчетные формулы, позволяющие найти характеристики выбросов для целого ряда типовых задач при произвольном законе распределения процесса. Представляет интерес рассмотреть особо важнейший частный случай нормального процесса. Во-первых, этот случай часто встречается на практике. Во-вторых, для случая нормального закона удается получить сравнительно простые и наглядные формулы, позволяющие лучше уяснить особенности решаемой задачи.

Будем рассматривать задачу в постановке, близкой к исходной постановке С. Райса. Допустим, что процесс $X(t)$ с имеется стационарный с математическим ожиданием $\bar{x}$ и корреляционной функцией $K_x(\tau)$. Процесс считаем дифференцируемым, его производную обозначим через $V(t)$. Уровень выброса a считаем постоянным.

В силу стационарности совместный закон распределения X и V не будет зависеть от времени t. Благодаря нормальности процесс и его производная в любой момент t оказываются независимыми, так что

$$f(x,v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_x} e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma_x^2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_v} e^{-\frac{v^2}{2\sigma_v^2}}. \quad (1)$$

Здесь учтено, что математическое ожидание производной согласно корреляционной теории

$$\bar{v}(t) = \frac{d\bar{x}(t)}{dt} \equiv 0. \quad (2)$$

Входящие в выражение (1) дисперсии σ_x и σ_v^2 находятся по формулам корреляционной теории

$$\sigma_x^2 = K_x(0), \tag{4}$$

$$\sigma_v^2 = K_v(0) = -\left.\frac{d^2K_x(\tau)}{d\tau^2}\right|_{\tau=0}. \tag{5}$$

Если выразить корреляционную функцию $K_x(\tau)$ через нормированную корреляционную функцию $k_x(\tau)$, то получим

$$K_x(\tau) = \sigma_x^2 k_x(\tau), \tag{6}$$

то тогда формулу (5) можно переписать так

$$\sigma_v^2 = -\sigma_x^2 \left.\frac{d^2k_x(\tau)}{d\tau^2}\right|_{\tau=0}. \tag{7}$$

Перейдем к вычислению характеристик выбросов. Легко видеть, что интенсивность положительных и отрицательных выбросов

$$\nu_a^+ = \int_0^\infty f(a,v)\,v\,dv = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} e^{-\frac{(a-\bar{x})^2}{2\sigma_x^2}} \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_v} e^{-\frac{v^2}{2\sigma_v^2}} v\,dv,$$

$$\nu_a^- = -\int_{-\infty}^0 f(a,v)\,v\,dv = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} e^{-\frac{(a-\bar{x})^2}{2\sigma_x^2}} \left[-\int_{-\infty}^0 \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_v} e^{-\frac{v^2}{2\sigma_v^2}} v\,dv\right] \tag{8}$$

будут одинаковыми, так как фигурирующие в (8) интегралы равны друг другу

$$\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_v} e^{-\frac{v^2}{2\sigma_v^2}} v\,dv = -\int_\infty^0 \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_v} e^{-\frac{v^2}{2\sigma_v^2}} v\,dv = \frac{\sigma_v}{\sqrt{2\pi}}. \tag{9}$$

Таким образом для интенсивности выбросов получается простое выражение

$$\nu_a^+ = \nu_a^- = \frac{1}{2\pi}\frac{\sigma_v}{\sigma_x} e^{-\frac{(a-\bar{x})^2}{2\sigma_x^2}}. \tag{10}$$

Если воспользоваться выражением (7) для σ_v^2, то последнее выражение преобразуется к виду

$$\nu_a^+ = \nu_a^- = \frac{1}{2\pi}\sqrt{-\left.\frac{d^2k_x(\tau)}{d\tau^2}\right|_{\tau=0}}\; e^{-\frac{(a-\bar{x})^2}{2\sigma_x^2}}. \tag{11}$$

Особенно простое выражение получается при рассмотрении выбросов за уровень математического ожидания $a = \bar{x}$, при этом

$$\nu_a^+ = \nu_a^- = \frac{1}{2\pi}\sqrt{-\ddot{k}_x(0)}. \tag{12}$$

Интенсивность таких выбросов зависит только от нормированной корреляционной функции $k_x(\tau)$. Ни дисперсия σ_x^2, ни среднее процесса $\bar{x}$

на нее не влияют.

Среднее число выбросов за время T для стационарной функции X будет пропорционально времени наблюдения

$$\overline{n_a^+}(0,T)=\overline{n_a^-}(0,T)=\nu_a^+ T=\nu_a^- T. \qquad (13)$$

По формулам Райса средняя длительность положительных и отрицательных выбросов выражается в виде:

$$\overline{t_a^+}(0,T)=[1-F_x(a)]T, \qquad (14)$$

$$\overline{t_a^-}(0,T)=F_x(a)T,$$

где $F_x(x)$ обозначает функцию распределения нормального закона

$$F_x(x)=\frac{1}{2}\left[1+\Phi\left(\frac{x-\bar{x}}{\sigma_x}\right)\right], \qquad (15)$$

а $\Phi(x)$ – интеграл вероятностей

$$\Phi(x)=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt. \qquad (16)$$

Таким образом, средняя длительность выбросов за время T будет такой:

$$\overline{t_a^\pm}(0,T)=\frac{1}{2}\left[1\mp\Phi\left(\frac{a-\bar{x}}{\sigma_x}\right)\right]T. \qquad (17)$$

Теперь можно получить среднюю продолжительность одного выброса, поделив среднее время (17) на среднее число (13):

$$\overline{\tau_a^\pm}=\pi\frac{\sigma_x}{\sigma_v}e^{\frac{(a-\bar{x})^2}{\sigma_x^2}}\left[1\mp\Phi\left(\frac{a-\bar{x}}{\sigma_x}\right)\right]. \qquad (18)$$

Из соотношения (18) следует, что при $a>\bar{x}$ положительные выбросы всегда короче отрицательных в среднем, а при $a<x$ они, напротив, в среднем длиннее.

Самым простым для анализа является случай $a=\bar{x}$. При этом длительность выбросов двух направлений одинаковых одинакова и не зависит ни от $\bar{x}$, ни от σ_x^2

$$\overline{\tau_a^+}=\frac{\pi}{\sqrt{-\ddot{k}_x(0)}} \qquad (19)$$

и определяется исключительно поведением нормированной корреляционной функции $k_x(\tau)$ вблизи точки $\tau=0$.

Основы спектральной теории стационарных случайных функций

Напомним, что случайная функция $X(t)$ называется стационарной, если все ее вероятностные характеристики остаются неизменными при произвольном изменении начала отсчета времени. Иначе говоря, с какого бы момента мы не начинали наблюдать за стационарной случайной функцией, мы всегда будем иметь процесс с одними и теми же вероятностными характеристиками.

Это позволяет говорить о том, что стационарные случайные функции имеют квазипериодический характер. В классическом математическом анализе функция $f(x)$ называется периодической периода x_0, если $f(x+x_0) = f(x)$ при всех x. Для стационарной случайной функции $X(t)$ имеет место похожее свойство: функции $X(t)$ и $X(t+t_0)$ имеют одинаковые иерархии законов распределения при любом t_0.

В классическом детерминированном анализе при изучении периодических функций весьма эффективным оказалось введение метода гармонического анализа, при котором функция раскладывается в ряд по тригонометрическим функциям (синусам и косинусам), после чего изучаются коэффициенты этого разложения.

Примерно такая же процедура применяется при обработке стационарных случайных функций. Вначале функция представляется в виде суммы гармонических колебаний со случайными амплитудами, а затем исследуются сами эти амплитуды как функции частоты. Такой способ рассуждений позволяет упростить вычисления и добиться большей наглядности.

Далее начнем с более простого случая, когда спектр случайных колебаний является дискретным.

Случай дискретного спектра частот

Рассмотрим центрированную случайную функцию $X(t)$ специального вида

$$X(t)=\sum_{j=1}^{n}\left(A_j\cos(\omega_j t)+B_j\sin(\omega_j t)\right), \quad (20)$$

где $\omega_1,\dots,\omega_n$ – некоторые заданные частоты, а $A_1,\dots,A_n$ и $B_1,\dots,B_n$ – случайные амплитуды колебаний. Ограничение $\bar{x}=0$ здесь не является принципиальным: если $\bar{x}\neq 0$, то тогда к сумме (20) можно добавить постоянное слагаемое $\bar{x}$.

В сумме (20) удобно перейти от тригонометрических функций $\sin(x)$ и $\cos(x)$ к экспонентам $e^{i\omega_j t}$ и $e^{-i\omega_j t}$ с мнимыми показателями. Для этого следует воспользоваться формулами Эйлера

$$\cos(x)=\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}, \quad \sin(x)=\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}. \quad (21)$$

где i обозначает мнимую единицу.

Перепишем выражение (20) в виде

$$X(t)=\sum_{j=-n}^{n} e^{i\omega_j t}\,\Phi_j, \quad (22)$$

где принимается, что $\omega_{-j}=-\omega_j$ и, кроме того, новые амплитуды Φ_j связаны со старыми амплитудами A_j, B_j следующими соотношениями

$$\Phi_j=\frac{1}{2}(A_j-iB_j), \quad (j=\overline{1,n}),$$
$$\Phi_{-j}=\frac{1}{2}(A_j+iB_j)=\Phi_j^{*}, \quad (j=\overline{1,n}), \quad (23)$$

где звездочка означает знак комплексно сопряженной величины.

Поскольку в разложении (22) были введены экспоненты с чисто мнимыми показателями, которые являются комплексными величинами, то для того, чтобы сумма (22) была вещественной, амплитуды Φ_j также должны быть комплексными.

При этом

$$M[|\Phi_j|^2] = M[\Phi_j \Phi_j^*] = \frac{1}{4} M[A_j^2 + B_j^2] = \sigma_j^2 \geq 0. \quad (24)$$

Поставим вопрос, какими свойствами должны обладать комплексные амплитуды Φ_j в (22), чтобы процесс $X(t)$, во-первых, был бы центрированным и, во-вторых, был бы стационарным.

Из условия центрированности процесса сразу же находим

$$M[\Phi_j] = 0, \quad (j = \overline{-n, n}). \quad (25)$$

Для проверки стационарности нужно подсчитать корреляционную функцию

$$K_x(t_1, t_2) = M[\overset{\circ}{X}{}^*(t_1) \overset{\circ}{X}(t_2)], \quad (26)$$

где звездочка обозначает символ комплексного сопряжения. Поскольку мы ввели комплексные экспоненты и комплексные амплитуды, то нужно использовать общее определение корреляционной функции, допускающее возможность комплексных значений X.

Подставляя разложение (22) в (26), получим

$$K_x(t_1, t_2) = M\left[\sum_{j=-n}^{n} \sum_{l=-n}^{n} e^{-i\omega_j t_1 + i\omega_l t_2} \Phi_j^* \Phi_l\right]. \quad (27)$$

Нужно потребовать, чтобы выражение (27) зависело только от разности $\tau = t_2 - t_1$, а не порознь от t_1 и t_2.

Очевидно, сумма (27) будет зависеть только от разности $\tau = t_2 - t_1$ тогда и только тогда, когда комплексные амплитуды Φ_j удовлетворяют условию

$$M[\Phi_j^* \Phi_l] = \begin{cases} \sigma_j^2, & j = l \\ 0, & j \neq l \end{cases} = \sigma_j^2 \delta_{jl}, \qquad (28)$$

где σ_j^2 определена (24) и представляет собой средний квадрат модуля Φ_j, а δ_{jl} обозначает дельта-символ Кронекера.

При выполнении условия (28) корреляционная функция (27) принимает вид

$$K_x(\tau) = \sum_{j=-n}^{n} e^{i\omega_j \tau} \sigma_j^2, \qquad (29)$$

где σ_j^2 имеет смысл средней энергии колебаний, приходящейся на частоту ω_j.

Итак, для центрированности процесса (22) требуется центрированность всех комплексных амплитуд Φ_j (условие (25)), а для стационарности этого процесса нужна некоррелированность амплитуд, относящихся к разным частотам (условие (28)).

Предельный переход к непрерывному спектру частот

В предыдущем параграфе была рассмотрена стационарная случайная функция частного вида (20), представляющая собой конечную сумму гармонических функций со случайными амплитудами. Попытаемся теперь разложение стационарной случайной функции общего вида. Приводимые далее рассуждения можно строго обосновать при соблюдении дополнительного

$$\int_{-\infty}^{\infty} |K_x(\tau)|\, d\tau < \infty. \qquad (30)$$

Будем исходить из дискретного спектра частот $0<\omega_1<\omega_2<\dots<\omega_n$. Теперь, во-первых, устремим число частот в спектре n к бесконечности. Во-вторых, потребуем, чтобы максимальный интервал между частотами $\Delta\omega = \max|\omega_{j+1}-\omega_j|$ стремился к нулю, так что частоты непрерывно заполнили бы всю числовую ось. Наконец, в-третьих, будем считать, что суммарная средняя энергия случайных колебаний

$$\sigma_x^2 = K_x(0) = \sum_{j=-n}^{n} \sigma_j^2 \qquad (31)$$

при предельном переходе $n \to \infty$, $\Delta\omega \to 0$ остается ограниченной.

При описанном предельном переходе сумма (22) трансформируется в интеграл

$$X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t}\, d\Phi_x(\omega). \qquad (32)$$

Появление интеграла (32) можно пояснить следующим образом. Если сумма (31) при предельном переходе остается ограниченной, то средняя энергия σ_j^2, приходящаяся на частоту ω_j, должна стремиться к нулю. Для любого интервала частот вида $(\omega, \omega+d\omega)$ амплитуда колебаний будет бесконечно малой величиной. Обозначим через $d\Phi_x(\omega)$ сумму всех амплитуд Φ_j, попавших в интервал $(\omega, \omega+d\omega)$. При этом с точностью до бесконечно малых более высокого порядка все экспоненты вида $e^{i\omega_j t}$ можно будет приближенно заменить на $e^{i\omega t}$.

Ограничения на элементарные случайные амплитуды $d\Phi_x(\omega)$ вводятся по аналогии с предыдущим параграфом. Из центрированности $X(t)$ вытекает требование центрированности элементарных амплитуд

$$M\left[d\Phi_x(\omega)\right] = 0, \qquad (33)$$

а из стационарности $X(t)$ вытекает некоррелированность этих амплитуд для разных частот

$$M\left[d\Phi_x^*(\omega_1)\, d\Phi_x(\omega_2)\right] = S_x(\omega_1)\delta(\omega_2-\omega_1)\, d\omega_1 d\omega_2 \qquad (34)$$

где $\delta(x)$ обозначает дельта-функцию, а введенный в (34) коэффициент перед произведением длин интервалов $d\omega_1$ и $d\omega_2$ на дельта функцию $\delta(\omega_2-\omega_1)$ называется спектральной плотностью процесса $X(t)$.