Занятие 11. Обобщенная формула Блэка-Шоулза

Теория

В этой теории делается ряд обобщений по сравнению с классической теорией Блэка-Шоулза, представляющих практический интерес. Доказательство результирующих формул достаточно сложное, его можно найти в книге Оксендала, которую я рекомендовал вначале, но сами результирующие формулы довольно простые и очень напоминают классические формулы Блэка-Шоулза

1° Предположения о (B,S)-рынке

1.1 Процентная ставка по банковскому вкладу $r = \rho(t)$ может быть переменной, но она неслучайная

$$dB(t) = \rho(t)\,B(t)\,dt \qquad (1)$$

1.2 Волатильность $\sigma(t)$ переменная, но неслучайная, а коэффициент роста стоимости $\mu(t)$ может быть случайным

$$dS(t) = S(t)\left[\mu(t)dt + \sigma(t)\,dW(t)\right]. \qquad (2)$$

1.3 Ограничение на случайную функцию $\mu(t)$ имеет вид

$$M\left[e^{\frac{1}{2}\int_0^T \frac{[\mu(t)-\rho(t)]^2}{\sigma^2(t)}dt}\right] < \infty. \qquad (3)$$

1.4 Платежная функция опциона (прибыль от предъявления опциона в момент T) фактически не зависит явно от T, но зависит от $S(T)$

$$f = f(T, S(T)) = f_T(S(T)) \qquad (4)$$

1.5 Ограничение на вид функции f_T

$$M(f_T(S(T))) < \infty. \qquad (5)$$

2° Рациональная стоимость опциона

2.1 Обозначим цену опциона с платежной

функцией f_T через Q. Тогда

$$Q = \xi \int_{-\infty}^{\infty} f_T\left(\frac{S_0}{\xi} e^{y-\frac{\delta^2 T}{2}}\right) \frac{e^{-\frac{y^2}{2\delta^2 T}}}{\sqrt{2\pi T}\,\delta}\, dy \,. \quad (6)$$

2.2 Начальная стоимость базового актива

$$S(0) = S_0 \,. \quad (7)$$

2.3 Фактор дисконтирования

$$\xi = e^{-\int_0^T \rho(s)ds} = e^{-rT} \quad (8)$$

Он определяет скорость обесценивания денег.

2.4 Среднеквадратическая волатильность

$$\delta = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T \sigma^2(s)ds} \,. \quad (9)$$

2.5 Средняя процентная ставка по банковскому счету за срок исполнения опциона

$$r = \frac{1}{T}\int_0^T \rho(s)ds \quad (10)$$

3. Рациональная стоимость классических опционов европейского типа. Опцион колл

3.1 Платежная функция опциона-колл

$$f_T(x) = (x-K)^+ \quad (11)$$

3.2 Справедливая цена опциона-колл

$$C = S_0 F(y_1) - K e^{-rT} F(y_2), \quad (12)$$

$$y_{1,2} = \frac{\ln\frac{S_0}{K} + \left(r \pm \frac{\delta^2}{2}\right)T}{\delta\sqrt{T}},$$

K – цена исполнения,
T – срок исполнения
$F(x)$ – функция распределения стандартного нормального закона

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\frac{1}{2}\left[1+\Phi(x)\right],$$
где $\Phi(x)$ — интеграл вероятностей
$$\Phi(x)=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt.$$

4. Случай опциона-пут

4.1 Платежная функция опцион-пут
$$f_T(x)=(K-x)^+ \tag{13}$$
4.2 Справедливая цена опцион-пут
$$P=-S_0F(-y_1)+Ke^{-rT}F(-y_2) \tag{14}$$

Примеры

Пример 1

Доказать формулу (12), основываясь на общем выражении для цены опциона (6)

Решение

Подставляя в формулу (6) выражение для платежной функции опцион-колл, получаем
$$C=e^{-rT}\int_{-\infty}^{\infty}\left(S_0e^{rT+y-\frac{\sigma^2T}{2}}-K\right)^+\frac{e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2T}}}{\sqrt{2\pi T}\,\sigma}dy. \tag{15}$$
Воспользуемся выражением платежной функции (11). Напомним, что по определению
$$(x)^+=\begin{cases}x, & x\geq 0,\\ 0, & x<0.\end{cases} \tag{16}$$
Функция, стоящая в скобках в (15), монотонно возрастает, причем при $y\to-\infty$ она отрицательна и равняется $-K$, а при $y\to\infty$ стремится к бесконечности. При этом она непрерывна. Поэтому найдется такое значение $y=y_*$, при котором эта функция обращается в нуль.

Приравнивая к нулю выражение в квадратных скобках (15)

$$S_0 e^{rT+y-\frac{\delta^2 T}{2}} - K = 0, \qquad (17)$$

находим

$$y_* = \ln\frac{K}{S_0} - \left(r-\frac{\delta^2}{2}\right)T. \qquad (18)$$

При $y > y_*$ выражение в скобках (15) будет положительным, поэтому с учетом (15)

$$C = e^{-rT}\int_{\ln\frac{K}{S_0}-(r-\frac{\delta^2}{2})T}^{\infty}\left(S_0 e^{y+rT-\frac{\delta^2 T}{2}} - K\right)\frac{e^{-\frac{y^2}{2\delta^2 T}}}{\sqrt{2\pi T}\,\delta}dy =$$

$$= \int_{\ln\frac{K}{S_0}-(r-\frac{\delta^2}{2}T)}^{\infty}\left(S_0 e^{y-\frac{\delta^2 T}{2}} - Ke^{-rT}\right)\frac{e^{-\frac{y^2}{2\delta^2 T}}}{\sqrt{2\pi T}\,\delta}dy = \qquad (19)$$

$$= S_0\int_{\ln\frac{K}{S_0}-(r-\frac{\delta^2}{2})T}^{\infty}\frac{e^{-\frac{(y-\delta^2 T)^2}{2\delta^2 T}}}{\sqrt{2\pi T}\,\delta}dy - Ke^{-rT}\int_{\ln\frac{K}{S_0}-(r-\frac{\delta^2}{2})T}^{\infty}\frac{e^{-\frac{y^2}{2\delta^2 T}}}{\sqrt{2\pi T}\,\delta}dy.$$

Заменим в интеграле (19) переменную интегрирования y на $-y$. Тогда оба интеграла от y_* до ∞ превратятся в интегралы от $-\infty$ до $-y_*$. Перепишем их в виде

$$C = S_0\int_{-\infty}^{\ln\frac{S_0}{K}+(r-\frac{\delta^2}{2})T}\frac{e^{-\frac{(y+\delta^2 T)^2}{2\delta^2 T}}}{\sqrt{2\pi T}\,\delta}dy - \qquad (20)$$

$$-e^{-rT}K\int_{-\infty}^{\ln\frac{S_0}{K}+(r-\frac{\delta^2}{2})T}\frac{e^{-\frac{y^2}{2\delta^2 T}}}{\sqrt{2\pi T}\,\delta}dy.$$

Далее в первом интеграле заменим y на $y+\delta^2 T$, что дает:

$$C = S_0\int_{-\infty}^{\ln\frac{S_0}{K}+(r+\frac{\delta^2}{2})T}\frac{e^{-\frac{y^2}{2\delta^2 T}}}{\sqrt{2\pi T}\,\delta}dy - \qquad (21)$$

$$-e^{-rT}K\int_{-\infty}^{\ln\frac{S_0}{K}+(r-\frac{\delta^2}{2})T}\frac{e^{-\frac{y^2}{2\delta^2 T}}}{\sqrt{2\pi T}\,\delta}dy.$$

Если теперь проделать в обоих интегралах

 (21) замену переменной интегрирования y

на $x = \frac{y}{\sigma\sqrt{T}}$, то приходим к искомой формуле (12).

Отметим, что при постоянной процентной ставке $\rho(t) = \rho = const(t)$ и постоянной волатильности $\sigma(t) = \sigma = const(t)$ получаем $r \equiv \rho$, $\delta \equiv \sigma$, и формула (12) переходит в классическую формулу Блэка-Шоулза.

<u>Пример 2</u>

Рассмотрим опцион-колл при классических предположениях Блэка-Шоулза-Мертона, но допустим, что в момент $T_0 = \theta T$ меняется от значения банковский процент r_1 до значения r_2, где $\Delta r = r_2 - r_1$ является малой величиной ($\frac{\Delta r}{r_1} << 1$). Требуется определить, как это повлияет на стоимость опциона.

<u>Решение</u>

Вычислим средний банковский процент за весь срок исполнения по формуле (10):

$$\hat{r} = \frac{1}{T}\left(\int_0^{T_0} r_1 ds + \int_{T_0}^{T} r_2 ds\right) = \frac{1}{T} T_0 r_1 + \frac{1}{T}(T - T_0) r_2$$

$$= \theta r_1 + (1-\theta) r_2. \quad (22)$$

Подсчитаем по обобщенной формуле (12) Блэка-Шоулза для опциона колл новую стоимость опциона

$$\hat{C} = S_0 F(\hat{y}_1) - K e^{-\hat{r}T} F(\hat{y}_2), \quad (23)$$

$$\hat{y}_{1,2} = \frac{\ln\frac{S_0}{K} + (\theta r_1 + (1-\theta) r_2)T \pm \frac{\sigma^2}{2} T}{\sigma\sqrt{T}}, \quad (24)$$

где учтено, что σ считается постоянной, как в классической модели Блэка — Шоулза

Найдем приращение банковского процента

$$\hat{r} - r_1 = \theta r_1 + (1-\theta) r_2 - r_1 = (1-\theta)(r_2 - r_1) = (1-\theta)\Delta r, \quad (25)$$

Далее вычислим приращение величин (24) по сравнению со стандартной моделью Блэка–Шоулза

$$\hat{y}_{1,2} - y_{1,2} = \frac{(1-\theta)\Delta r \sqrt{T}}{\sigma}; \quad (26)$$

Естественно, приращения (26) будут мелкими из-за мелкости Δr.

Подсчитаем приращение стоимости опциона по сравнению с первоначальной ставкой r_1

$$\Delta \hat{C} = \hat{C} - C. \quad (27)$$

Имеем

$$\Delta \hat{C} = S_0 [F(\hat{y}_1) - F(y_1)] - K e^{-\hat{r}T} F(\hat{y}_2) + K e^{-r_1 T} F(y_2). \quad (28)$$

Добавим и вычтем в правой части (28) слагаемое вида $K e^{-r_1 T} F(\hat{y}_2)$. Тогда приращение (28) можно будет представить в виде (см. (25)):

$$\Delta \hat{C} = S_0 [F(\hat{y}_1) - F(y_1)] - K e^{-r_1 T} [F(\hat{y}_2) - F(y_2)] + K e^{-r_1 T} F(\hat{y}_2)\left(1 - e^{-\Delta r (1-\theta) T}\right). \quad (29)$$

Представим разности значений функции распределения

$$F(\hat{y}_{1,2}) - F(y_{1,2}) = \int_{y_{1,2}}^{\hat{y}_{1,2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \quad (30)$$

по теореме о среднем благодаря малости данных интервалов $(y_1, \hat{y}_1)$ и $(\hat{y}_2, y_2)$. Имеем

$$\int_{y_1}^{\hat{y}_1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y_1^2}{2}} (\hat{y}_1 - y_1),$$
$$\int_{y_2}^{\hat{y}_2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y_2^2}{2}} (\hat{y}_2 - y_2). \quad (31)$$

используя ранее полученную формулу (26), можем записать

$$\Delta\hat{C} = \frac{(1-\theta)\Delta r\sqrt{T}}{\sigma}\left(S_0\frac{e^{-\frac{y_1^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} - Ke^{-r_1T}\frac{e^{-\frac{y_2^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\right)$$

$$+ Ke^{-r_1T}F(\hat{y}_2)\left(1-e^{-\Delta r(1-\theta)T}\right). \quad (32)$$

Далее представим выражение, стоящее в первых скобках (32), в виде

$$A = S_0\frac{e^{-\frac{y_1^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} - Ke^{-r_1T}\frac{e^{-\frac{y_2^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} =$$

$$= \frac{e^{-\frac{y_2^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\left(S_0 e^{-\frac{(y_1^2-y_2^2)}{2}} - Ke^{-r_1T}\right). \quad (33)$$

Вспомним определение величин y_1 и y_2 по Блэку-Шоулзу (при начальной ставке r_1)

$$y_{1,2} = \frac{\ln\frac{S_0}{K} + r_1T \pm \frac{\sigma^2}{2}T}{\sigma\sqrt{T}}. \quad (34)$$

Имеем

$$y_1+y_2 = \frac{2\left(\ln\frac{S_0}{K}+r_1T\right)}{\sigma\sqrt{T}},$$

$$y_1-y_2 = \frac{\sigma^2T}{\sigma\sqrt{T}} = \sigma\sqrt{T}, \quad (35)$$

$$\frac{y_1^2-y_2^2}{2} = \frac{2\left(\ln\frac{S_0}{K}+r_1T\right)\sigma\sqrt{T}}{2\sigma\sqrt{T}} = \ln\frac{S_0}{K}+r_1T.$$

Подставляя выражение (35) в (33), приходим к результату

$$A = \frac{e^{-\frac{y_2^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\left(S_0e^{-\ln\frac{S_0}{K}-r_1T} - Ke^{-r_1T}\right) =$$

$$= \frac{e^{-\frac{y_2^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\left(\cancel{S_0}\frac{K}{\cancel{S_0}}e^{-r_1T} - Ke^{-r_1T}\right) = 0. \quad (36)$$

Таким образом, для приращения стоимости опциона-колл согласно (32) получаем выражение

$$\Delta \hat{C} = K e^{-r_1 T} F(\hat{y}_2)\left(1 - e^{-\Delta r(1-\theta)T}\right), \qquad (37)$$

откуда следует, что при $\Delta r > 0$, когда ставка повышается, $\Delta \hat{C} > 0$, то есть опцион повышается в цене, а при $\Delta r < 0$, наоборот, имеем $\Delta \hat{C} < 0$, то есть опцион будет удешевляться.