Занятие 10. Понятие (B,S) рынка. Формула Блэка-Шоулза

Теория

1. Понятие (B,S)-рынка

Наиболее употребительные математические модели рынка являются диффузионными. Это означает, что курсовая стоимость ценных бумаг описывается с помощью диффузионных процессов, которые задаются некоторыми стохастическими дифференциальными уравнениями (СДУ).

Допустим, что инвестор имеет возможность: 1) Размещать средства на банковском счете и брать с него в долг. 2) Покупать и продавать ценные бумаги.

Будем считать, что проценты на банковский счет начисляются непрерывно с постоянной процентной ставкой $r(t) \equiv r = const(t)$. Сумму денег на счете обозначим через $B(t)$. При постоянном r имеем

$$dB = rB\,dt. \qquad (1)$$

Считаем, что на рынке обращается n ценных бумаг (акций). Курсовая стоимость i-й ценной бумаги задается геометрическим броуновским процессом движения

$$dS_i = S_i(\mu_i dt + \sigma_i dW_i), \; (i=\overline{1,n}). \qquad (2)$$

1°. Будем предполагать, что операционные издержки, связанные с переводом средств между активами отсутствуют (можно бесплатно покупать либо продавать акции, класть деньги на счет или снимать их с него).

2°. Активы являются безгранично делимыми (можно купить или продать любое, не обязательно целое число ценных бумаг, положить на счёт или снять с него любую его часть).

Функционирующий по таким правилам рынок называется (B, S)-рынком.

<u>Портфелем</u> ценных бумаг на (B,S) рынке называют вектор $\vec{\gamma} = \{\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_n\}$. Здесь γ_0 обозначает количество денежных единиц, <u>положенных</u> на банковский счёт, а γ_i при $i = \overline{1,n}$ есть число акций i-го типа, которыми владеет инвестор. Все γ_i могут зависеть от t.

Стоимость портфеля (капитал портфеля)

$$\Pi(t) = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i(t) S_i(t) + \gamma_0(t) B(t) \tag{3}$$

2° <u>Модель Блэка – Шоулза – Мертона</u>

Допустим, что на (B,S)-рынке вращается одна ценная бумага, стоимость которой меняется по закону геометрического броуновского движения

$$dS(t) = S(t)(\mu dt + \sigma dW). \tag{4}$$

Банковский счёт эволюционирует по закону

$$dB(t) = r B(t) dt, \tag{5}$$

где $r = \text{const}(t)$.

Инвестор оформил опцион европейского типа на акцию со сроком исполнения T. Задается <u>платежная функция</u> опциона, то есть тот доход, который получит инвестор в момент T, если стоимость актива в этот момент окажется равной $S(T)$.

Платежная функция обозначается через $f_T(S(T))$. Например, для опциона-колл (опциона на покупку) с ценой исполнения K

$$f_T(S(T)) = \begin{cases} S(T)-K, & S(T)>K, \\ 0, & S(T)\le K, \end{cases} =$$

$$= (S(T)-K)^{+}. \quad (6)$$

Для опциона-пут (опциона на продажу) с ценой исполнения K

$$f_T(S(T)) = \begin{cases} K-S(T), & S(T)<K, \\ 0, & S(T)\ge K. \end{cases} \quad (7)$$

Считается, что стоимость опциона является некоторой функцией от t и стоимости базового актива $f(t, S(t))$. При $t=T$ функция f должна совпадать с f_T. Задача состоит в том, чтобы определить стоимость опциона при $t=0$, то есть в момент его оформления.

В интервале $[0,T]$ инвестор все время корректирует свой портфель (меняет количество приобретаемых к опциону акций). Портфель формируется по закону

$$\vec{\gamma} = \{0, \Delta, -1\}. \quad (8)$$

Это означает, что в банк деньги не кладутся, покупается один опцион, к нему добавляется Δ штук акций. Величина Δ все время меняется так, чтобы доходность такого портфеля равнялась бы доходности банковского счета.

3° Справедливая цена опциона-колл

$$C = S_0 F(x_1) - Ke^{-rT} F(x_2), \qquad (9)$$

$$x_{1,2} = \frac{\ln \frac{S_0}{K} + \left(r \pm \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}, \qquad (10)$$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{1}{2}\left[1 + \Phi(x)\right], \qquad (11)$$

(функция распределения стандартного нормального закона),

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt, \qquad (12)$$

(интеграл вероятностей),

S_0 — начальная цена базового актива,
K — цена исполнения опциона,
T — срок исполнения опциона, (европейский тип),
r — процентная ставка по банковским вкладам,
σ — волатильность базового актива.

4° Справедливая цена опциона-пут

$$P = -S_0 F(-x_1) + Ke^{-rT} F(-x_2) \qquad (13)$$

5° Формула Стэлла паритета опционов колл и пут

$$P + S_0 = C + Ke^{-rT}. \qquad (14)$$

Здесь Ke^{-rT} — дисконтированная цена исполнения (сколько денег нужно положить в банк при $t=0$, чтобы при $t=T$ эта сумма подросла до цены исполнения K).

6°. Случай $K = S_0$

$$C = S_0\left[F\left(\frac{(r+\frac{\sigma^2}{2})\sqrt{T}}{\sigma}\right) - e^{-rT}F\left(\frac{(r-\frac{\sigma^2}{2})\sqrt{T}}{\sigma}\right)\right],$$

$$P = S_0\left[-F\left(-\frac{(r+\frac{\sigma^2}{2})\sqrt{T}}{\sigma}\right) + e^{-rT}F\left(-\frac{(r-\frac{\sigma^2}{2})\sqrt{T}}{\sigma}\right)\right]. \quad (15)$$

7°. Случай $K = S_0$, $r = 0$

Это постановка, аналогичная задаче Башелье

$$C = P = S_0\,\Phi\left(\frac{\sigma\sqrt{T}}{2}\right) \quad (16)$$

8°. Задание параметра r для различных видов активов:

8.1) Для акций, по которым не выплачиваются дивиденды, — банковский процент.

8.2) Для акций, по которым выплачиваются дивиденды, — банковский процент минус ставка дивидендов.

8.3) Валютные опционы: ставка в национальной валюте минус ставка в иностранной валюте.

8.4) Опционы на акционные индексы — банковский процент минус осредненная ставка дивидендов по всем акциям, включенным в индекс.

9°. Стоимость опциона в произвольный момент времени

$$C(t) = S_0F(\hat{x}_1) - Ke^{-r(T-t)}F(\hat{x}_2), \quad (17)$$

$$P(t) = -S_0F(-\hat{x}_1) + Ke^{-r(T-t)}F(-\hat{x}_2),$$

$$\hat{x}_{1,2}(t) = \frac{\ln\frac{S_0}{K} + (r \pm \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}.$$

Пример 1

При сроке исполнения $T = 0.5$ года банковский процент составил 25% годовых, волатильность акции 33.5%, начальная цена акции 40 денежных единиц, цена исполнения 42 денежных единицы. Определить рациональные стоимости C и P опционов колл и пут европейского типа.

Решение

Так как r дано в годовом исчислении, то единицей измерения времени должен быть один год.

Исходные данные:

$T = 0{,}5$, $r = 0.25$, $\sigma = 0.335$, $K = 42$, $S_0 = 40$.

$$x_{1,2} = \frac{\ln\frac{20}{21} + \left(0.25 \pm \frac{0.335^2}{2}\right)0{,}5}{0.335\sqrt{0.5}}$$

$$\ln\frac{20}{21} = -0.0488$$

$$0.335^2 = 0.112\ ;\quad 0.25 \pm \frac{0.335^2}{2} = \begin{pmatrix} 0.306 \\ 0.194 \end{pmatrix}$$

$$x_1 = 0.440\ ,\quad x_2 = 0.220$$

$$C = 5.051\ ,\quad P = 1.050$$

Пример 2

Пусть $K = S_0$, причем $r > \frac{\sigma^2}{2}$. Определить, при каком сроке исполнения T стоимость опциона-колл будет в k раз больше, чем стоимость аналогичного опциона-пут, где $k > 1$.

Решение

Найдем такое значение T, что при заданном $k > 1$ получим

$$C = kP.$$

Это значение T находится из уравнения (см. формулу (15))

$$F\left(\frac{(r+\frac{\sigma^2}{2})\sqrt{T}}{\sigma}\right) - e^{-rT}F\left(\frac{(r-\frac{\sigma^2}{2})\sqrt{T}}{\sigma}\right) =$$

$$= k\left[-F\left(-\frac{(r+\frac{\sigma^2}{2})\sqrt{T}}{\sigma}\right) + e^{-rT}F\left(-\frac{(r-\frac{\sigma^2}{2})\sqrt{T}}{\sigma}\right)\right].$$

Выразим функцию распределения по формуле (11). С учетом свойств нечетности $\Phi(x)$ получаем:

$$\frac{1}{2}\left[1+\Phi\left(\frac{(r+\frac{\sigma^2}{2})\sqrt{T}}{\sigma}\right)\right] - e^{-rT}\frac{1}{2}\left[1+\Phi\left(\frac{(r-\frac{\sigma^2}{2})\sqrt{T}}{\sigma}\right)\right] =$$

$$= k\left\{-\frac{1}{2}\left[1-\Phi\left(\frac{(r+\frac{\sigma^2}{2})\sqrt{T}}{\sigma}\right)\right] + e^{-rT}\frac{1}{2}\left[1-\Phi\left(\frac{(r-\frac{\sigma^2}{2})\sqrt{T}}{\sigma}\right)\right]\right\}.$$

Сокращая на $1/2$ и группируя члены, получаем

$$(k-1)\Phi\left(\frac{(r+\frac{\sigma^2}{2})\sqrt{T}}{\sigma}\right) - (k-1)e^{-rT}\Phi\left(\frac{(r-\frac{\sigma^2}{2})\sqrt{T}}{\sigma}\right) =$$

$$=(k+1) - (k+1)e^{-rT}.$$

или

$$\Phi\left(\frac{(r+\frac{\sigma^2}{2})\sqrt{T}}{\sigma}\right) - e^{-rT}\Phi\left(\frac{(r-\frac{\sigma^2}{2})\sqrt{T}}{\sigma}\right) =$$

$$= \left(\frac{k+1}{k-1}\right)\left(1-e^{-rT}\right).$$

Обозначим левую часть последнего уравнения через $\varphi(T)$. Тогда уравнение перепишется так:

$$\varphi(T) = \frac{(k+1)}{(k-1)}\left(1-e^{-rT}\right). \qquad (*)$$

Рассмотрим производную $\varphi'(T)$:

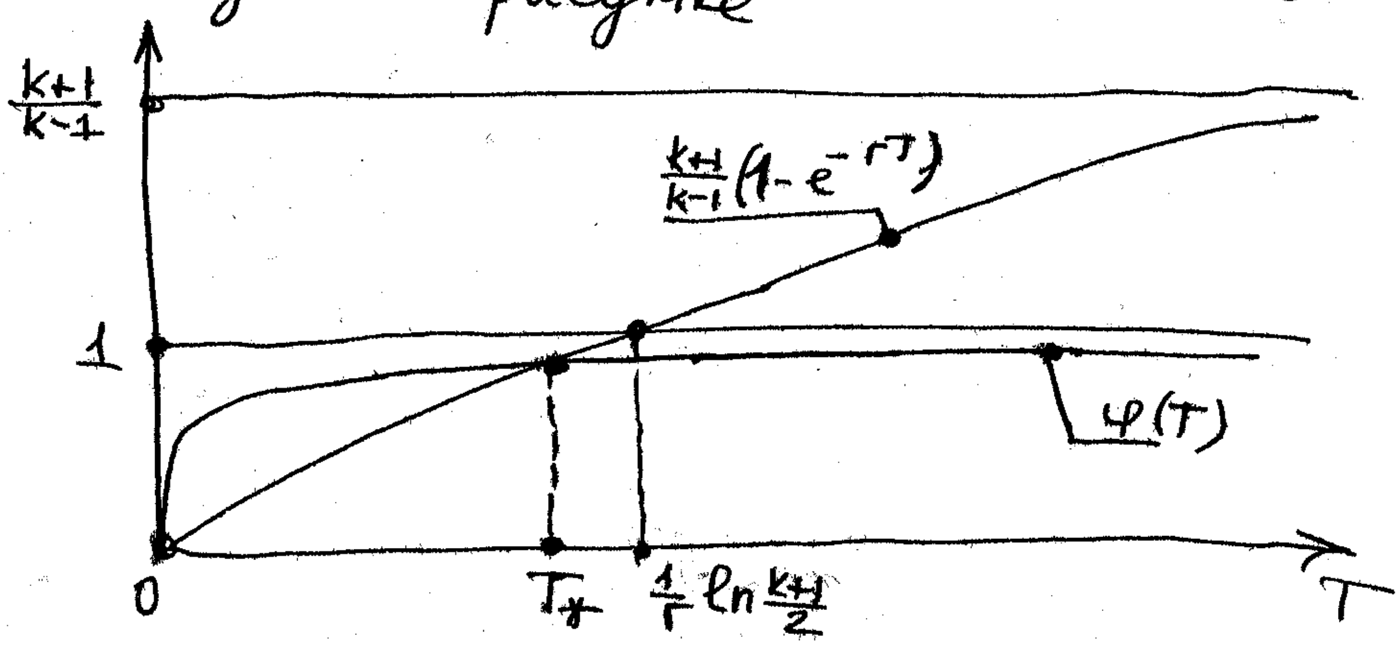
$$\varphi'(T) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\frac{\left(r+\frac{\sigma^2}{2}\right)}{\sigma}\frac{1}{2\sqrt{T}}\, e^{-\frac{\left(r+\frac{\sigma^2}{2}\right)^2 T}{2\sigma^2}} -$$

$$- \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\frac{\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)}{\sigma}\frac{1}{2\sqrt{T}}\, e^{-\frac{\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)^2}{2\sigma^2}} e^{-rT} +$$

$$+ r e^{-rT}\Phi\left(\frac{\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)\sqrt{T}}{\sigma}\right).$$

При $T \to 0$ производная $\varphi'(T)$ обращается в бесконечность, следовательно, график $\varphi(T)$ круто поднимается вверх при малых T. При неограниченном увеличении T функция φ стремится к единице. Вместе с тем правая часть уравнения (*) монотонно возрастает от нуля до $\frac{k+1}{k-1} > 1$

Качественный вид зависимости правой и левой частей уравнения (*) показан на рисунке



По графику видно, что всегда существует корень T_* уравнения (*), который не превосходит $\frac{1}{r}\ln\frac{k+1}{2}$