Лекция 10.04

Стохастические интегралы и стохастические дифференциальные уравнения

На предыдущей лекции мы разобрали вывод уравнений Колмогорова, определяющих переходную плотность диффузионного процесса. Сама возможность записать некоторое дифференциальное уравнение для закона распределения диффузионного процесса делает этот класс случайных процессов исключительно важным для приложений. Как мы уже отмечали ранее, диффузионные модели в финансовой математике являются одними из наиболее важных, и большинство работ по стохастической финансовой математике посвящено изучению именно таких моделей. Поэтому математический аппарат изучения диффузионных процессов необходимо рассмотреть более подробно.

Для финансовых приложений наиболее важное значение имеют диффузионные процессы, описываемые стохастическими дифференциальными уравнениями (или, сокращенно, СДУ).

Стохастическим дифференциальным уравнением называют дифференциальное уравнение, в которое в качестве возмущения входит процесс белого шума $\xi(t)$, о котором мы говорили на прошлых лекциях. Напомним, что процессом белого шума (точнее говоря, стандартным процессом белого шума) называется гауссовский стационарный центрированный случайный процесс, имеющий нулевое математическое ожидание и корреляционную функцию в виде дельта-функции

$$M[\xi(t)] = 0, \qquad (1)$$

$$K_\xi(t_1,t_2) = \delta(t_2-t_1). \qquad (2)$$

Соотношение (1) говорит, что среднее значение этого процесса равняется нулю, а соотношение (2) — что ординаты процесса независимы.

Общий вид стохастического дифференциального уравнения таков:

$$\dot{U} = \varphi(t,U) + \psi(t,U)\,\xi(t), \qquad (3)$$

где φ и ψ — некоторые заданные функции. Уравнения вида (3) впервые возникли в работах физиков. В частности, еще в начале прошлого века подобные уравнения записывал французский физик Поль Ланжевен, поэтому до сих пор в физических работах дифференциальные уравнения, содержащие процесс белого шума, часто называют уравнениями Ланжевена.

В теории броуновского движения процесс $\xi(t)$ моделировал воздействие на броуновскую частицу со стороны молекул жидкости или газа. Это воздействие имело вид коротких, частых и независимых толчков и хорошо описывалось процессом белого шума.

Ланжевен не смог разработать строгую математическую теорию СДУ вида (3), он трактовал подобные уравнения на качественном, интуитивном уровне. В середине прошлого века исследованием СДУ занялись математики. В частности, большой вклад в разработку этой теории внес американский математик Джон Дуб. Дуб обратил внимание, что трактовка уравнения в форме (3) вызывает математические трудности, так как в уравнение (3) входит процесс $\xi(t)$, являющийся обобщенным процессом и обладающий бесконечной дисперсией (это следует из выражения корреляционной функции ξ в форме (2))

На предыдущих лекциях мы показали, что белый шум ξ можно рассматривать, как обобщенную производную от винеровского процесса

$$\frac{dW(t)}{dt} = \xi(t). \qquad (4)$$

Это соотношение можно переписать в дифференциалах в следующем виде:

$$\xi(t)dt = dW(t). \qquad (5)$$

Дуб предложил, используя равенство (5), переписать уравнение (3) в дифференциалах

$$dU = \varphi(t,U)dt + \psi(t,U)dW, \qquad (6)$$

где dW обозначает приращение винеровского процесса в промежутке $[t, t+dt]$.

Было предложено еще одно усовершенствование. Допустим, что уравнение (3) рассматривается в интервале $t>0$ и ставится начальное условие

$$U(0) = U_0; \qquad (7)$$

причем случайная величина U_0 не зависит от ξ. Тогда, интегрируя уравнение (6) по промежутку $[0,t]$, получаем интегральное уравнение

$$U(t) = U_0 + \int_0^t \varphi(\tau, U(\tau))d\tau + \int_0^t \psi(\tau, U(\tau))dW(\tau) \qquad (8)$$

В этом уравнении первый интеграл есть обычный интеграл Римана, который берется по приращениям переменной интегрирования τ. Такие интегралы подробно изучаются в общих курсах теории случайных функций 1).

Второй интеграл (8) не сводится к обычному интегралу Римана и вычисляется по приращениям винеровского процесса $W(t)$. Поскольку винеровский процесс $W(t)$ недифференцируем, то этот второй интеграл не сводится к интегралу Римана, и его теорию приходится разрабатывать

---

1) Свешников А.А. Прикладные методы теории случайных функций. СПб: Лань, 2011.

особо. Интеграл, вычисляемый по приращениям винеровского процесса, называется **стохастическим интегралом**.

Стохастический интеграл напоминает интеграл Стилтьеса, известный из классического математического анализа[1]. Интегралом Стилтьеса от функции $f(x)$ по функции $g(x)$ называют интеграл вида

$$I = \int_a^b f(x)\, dg(x). \tag{9}$$

При этом функция g необязательно быть дифференцируемой. Например, если g представляет собой кусочно-постоянную функцию со скачком в точке $x = \alpha$ вида

$$g(x) = \begin{cases} g_1, & x < \alpha, \\ g_2, & x \geq \alpha, \end{cases} \tag{10}$$

то тогда при $a < \alpha < b$, очевидно, имеем

$$I = f(\alpha)(g_2 - g_1).$$

Стохастический интеграл напоминает интеграл Стилтьеса, вычисляемый по винеровскому процессу $W(t)$. Тот факт, что интегрирование производится по приращениям случайного процесса $W(t)$, придает интегралу новые, необычные свойства. Более того, существует несколько разновидностей стохастических интегралов в зависимости от способа формирования интегральной суммы. Рассмотрим этот вопрос более подробно.

Стохастический интеграл К. Ито

Рассмотрим некоторое вероятностное пространство (Ω, A, P). Допустим, что на этом пространстве задан винеровский процесс $W(t)$ и некоторый связанный с ним случайный процесс $X(t)$. Например, процесс $X(t)$ может определяться с помощью СДУ вида (6), в которое входит винеровский процесс.

1) Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Том 3. М.: Наука, 1969

Дадим определение интеграла

$$I = \int_a^b \Phi(t, X(t), W(t))\,dW(t). \qquad (11)$$

Разобьем промежуток $[a, b]$ на n элементарных интервалов с граничными точками $t_0 = a < t_1 < t_2 < \ldots < t_{n-1} < t_n = b$. Составим интегральную сумму

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \Phi(t_{i-1}, X(t_{i-1}), W(t_{i-1}))\,\Delta W_i, \qquad (12)$$

где $\Delta W_i = W(t_i) - W(t_{i-1})$ есть приращение $W(t)$ на i-м интервале $(t_{i-1}, t_i]$. Обозначим через $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$ длину i-го интервала, а через $\Delta t = \max_{1 \le i \le n} \{\Delta t_i\}$ длину наибольшего из всех интервалов разбиения. Тогда <u>интегралом Ито</u> от функции $\Phi(t, X(t), W(t))$ по промежутку $[a, b]$ называют среднеквадратический предел интегральной суммы (12), когда $n \to \infty$, а $\Delta t \to 0$:

$$I = \underset{\substack{n \to \infty \\ \Delta t \to 0}}{\mathrm{l.i.m.}}\, S_n. \qquad (13)$$

Докажем, что интеграл Ито существует, если выполняется условие

$$\int_a^b M[\Phi^2(t, X(t), W(t))]\,dt < \infty. \qquad (14)$$

Для этого разобьем интервал $[a, b]$ два раза независимым образом вначале на n более мелких интервалов точками $t_0 = a < t_1 < t_2 < \ldots < t_{n-1} < t_n = b$, а затем на m интервалов точками $t_0^* = a < t_1^* < t_2^* < \ldots < t_{m-1}^* < t_m^* = b$. Соответствующие этим разбиениям суммы обозначим через S_n и S_m^*. Наибольший из интервалов разбиения в первой сумме обозначим через Δt, а во второй — через Δt^*.

В соответствии со стохастическим критерием Коши для существования предела (13) необходимо и достаточно, чтобы существовал предел

$$\underset{\substack{n \to \infty,\, m \to \infty \\ \Delta t \to 0,\, \Delta t^* \to 0}}{\mathrm{l.i.m.}} |S_n - S_m^*| = 0 \qquad (15)$$

при независимом стремлении n и m к бескоратический предел (15) эквивалентен следующему детерминированному пределу

$$\lim_{\substack{n\to\infty, m\to\infty \\ \Delta t\to 0, \Delta t^*\to 0}} M\left[(S_n - S_m^*)^2\right] = 0 \qquad (16)$$

Введем обозначения

$$\Phi_j = \Phi(t_j, X(t_j), W(t_j)), \quad \Phi_e^* = \Phi(t_e^*, X(t_e^*) W(t_e^*)). \qquad (17)$$

Тогда выражение, стоящее под знаком предела в (16) может быть переписано следующим образом:

$$M\left[(S_n - S_m^*)^2\right] = M\left[\left(\sum_{j=1}^{n} \Phi_{j-1} \Delta W_j - \sum_{e=1}^{m} \Phi_{e-1}^* \Delta W_e^*\right)^2\right] =$$

$$= M\Big[\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \Phi_{j-1}\Phi_{k-1} \Delta W_j \Delta W_k +$$

$$+ \sum_{e=1}^{m}\sum_{p=1}^{m} \Phi_{e-1}^* \Phi_{p-1}^* \Delta W_e^* \Delta W_p^* -$$

$$- 2\sum_{j=1}^{n}\sum_{e=1}^{m} \Phi_{j-1}\Phi_{e-1}^* \Delta W_j \Delta W_e^*\Big]. \qquad (18)$$

Из свойств винеровского процесса следует, что приращения этого процесса на непересекающихся временных интервалах независимы и центрированы. Поэтому

$$M[\Delta W_j \Delta W_k] = \begin{cases} \Delta t_j, & k=j, \\ 0, & k\neq j, \end{cases}$$

$$M[\Delta W_e^* \Delta W_p^*] = \begin{cases} \Delta t_e^*, & p=e, \\ 0, & p\neq e, \end{cases} \qquad (19)$$

$$M[\Delta W_j \Delta W_e^*] = (\Delta t_j \wedge \Delta t_e^*),$$

где символ $(\Delta t_j \wedge \Delta t_e^*)$ обозначает длину общей части интервалов $[t_{j-1}, t_j]$ и $[t_{e-1}^*, t_e^*]$.

Учитывая равенства (19), будем иметь:

$$M\left[(S_n - S_m^*)^2\right] = \sum_{j=1}^{n} M[\Phi_{j-1}^2]\Delta t_j + \sum_{e=1}^{m} M[\Phi_{e-1}^{*2}]\Delta t_e^*$$

$$- 2\sum_{j=1}^{n}\sum_{e=1}^{m} M[\Phi_{j-1}\Phi_{e-1}^*](\Delta t_j \wedge \Delta t_e^*). \qquad (20)$$

 Каждое из слагаемых в правой части

равенства (20) представляет собой интегральную сумму для некоторого интеграла, причем при выполнении условия (14) все эти интегралы сходятся. Устремляя независимо друг от друга n и m к бесконечности так, чтобы Δt и Δt^* стремились к нулю, получим

$$\lim_{\substack{n\to\infty\\ \Delta t\to 0}} \sum_{j=1}^{n} M[\Phi_{j-1}^2]\Delta t_j = \lim_{\substack{m\to\infty\\ \Delta t^*\to 0}} \sum_{l=1}^{m} M[\Phi_{l-1}^{*2}]\Delta t_l^* =$$

$$= \int_a^b M[\Phi^2(t, X(t), W(t)]\,dt, \qquad (21)$$

$$\lim_{\substack{n\to\infty,\, m\to\infty\\ \Delta t\to 0,\, \Delta t^*\to 0}} \sum_{j=1}^{n}\sum_{l=1}^{m} M[\Phi_{j-1}\Phi^*_{l-1}](\Delta t_j \wedge \Delta t_l) =$$

$$= \int_a^b\int_a^b M[\Phi(t_1, X(t_1), W(t_1))\,\Phi(t_2, X(t_2) W(t_2))\,\delta(t_2-t_1)\,dt_1 dt_2$$

$$= \int_a^b M[\Phi^2(t, X(t), W(t)]\,dt, \qquad (22)$$

где $\delta(x)$ обозначает дельта-функцию.

Переходя в равенстве (20) к пределу при $n\to\infty$, $m\to\infty$, $\Delta t\to 0$, $\Delta t^*\to 0$ и учитывая предельные соотношения (21) и (22), получаем в правой части (20) разность двух одинаковых слагаемых, каждое из которых равняется удвоенному значению интеграла (14). Следовательно, условие (16) выполняется, а значит интеграл Ито вида (11) существует.

Интеграл Ито обладает целым рядом свойств более привычного для детерминированного анализа интеграла Римана. Например, постоянную можно выносить из-под знака интеграла, интеграл от суммы функций равняется сумме интегралов от каждого из слагаемых, знак интеграла меняется на обратный, если поменять местами пределы интегрирования и т.п. Вместе с тем, при фактическом вычислении значений интеграла Ито возникают неожиданные результаты, так как общепринятые формулы для табличных интегралов, справедливые для интеграла Римана, теряют силу. Для интеграла Ито фактически приходится выводить новую таблицу интегрирования.

Для иллюстрации сказанного рассмотрим простой пример.

Вычисление интеграла Ито $\int_0^t W(s)\,dW(s)$

Разберем вычисление интеграла

$$I_n = \int_0^t W(s)\,dW(s), \tag{23}$$

понимаемого в смысле Ито. Если бы вместо недифференцируемого стохастического винеровского процесса в подинтегральном выражении стояла бы какая-то гладкая дифференцируемая функция, то тогда по обычным правилам, принятым в классическом анализе, мы бы получили значение интеграла, равное $1/2\, W^2(t)$. При трактовке (23) в смысле Ито приходим к другому результату. Покажем это. Предварительно докажем вспомогательную лемму.

Лемма

Рассмотрим временной интервал $[0,t]$ и поделим его на n более мелких подинтервалов точками $t_0=0<t_1<\dots<t_{n-1}<t_n=t$. Обозначим через $\Delta W_i = W(t_i)-W(t_{i-1})$ приращение стандартного винеровского процесса $W(t)$ на i-м отрезке (t_{i-1}, t_i), $(i=\overline{1,n})$. Сформируем сумму квадратов приращений

$$Z_n(t) = \sum_{i=1}^{n} (\Delta W_i)^2. \tag{24}$$

Обозначим через $\Delta t = \max\limits_{1\le i\le n}\{t_i - t_{i-1}\}$ длину наибольшего из интервалов. Тогда

$$\underset{n\to\infty,\,\Delta t\to 0}{l.i.m.}\ Z_n(t) = t. \tag{25}$$

Доказательство.

Для доказательства нужно установить, что

$$\lim_{n\to\infty,\,\Delta t\to 0} M\left[(Z_n(t)-t)^2\right] = 0. \tag{26}$$

В соответствии со свойствами винеровского процесса

$$\overline{Z}_n(t) = M[Z_n(t)] = \sum_{i=1}^{n} M[(\Delta W_i)^2] = \\ = \sum_{i=1}^{n} \Delta t_i = t. \quad (27)$$

Это позволяет записать математическое ожидание в (26) так:

$$M[(Z_n(t)-t)^2] = D[Z_n(t)]. \quad (28)$$

По теоремам о дисперсии дисперсия суммы независимых слагаемых (24) равняется сумме дисперсий

$$D[Z_n(t)] = \sum_{i=1}^{n} D[(\Delta W_i)^2]. \quad (29)$$

По обычным правилам вычисления дисперсии

$$D[(\Delta W_i)^2] = M[(\Delta W_i)^4] - (M[(\Delta W_i)^2])^2. \quad (30)$$

Хорошо известно, что для нормального закона[1]

$$M[(\Delta W_i)^4] = 3(M[(\Delta W_i)^2])^2. \quad (31)$$

Следовательно,

$$D[(\Delta W_i)^2] = 2(M[(\Delta W_i)^2])^2 = 2(\Delta t_i)^2. \quad (32)$$

Подставляя это выражение в (29), получим

$$D[Z_n(t)] = 2\sum_{i=1}^{n}(\Delta t_i)^2 \leq 2\Delta t \sum_{i=1}^{n} \Delta t_i = \\ = 2(\Delta t)t \xrightarrow[\Delta t \to 0]{} 0, \quad (33)$$

что с учетом (26) и (28) доказывает лемму.

Теперь непосредственно перейдем к вычислению интеграла (23). Сформируем для интеграла (23) интегральную сумму согласно определению интеграла Ито (12)

$$S_n = \sum_{j=1}^{n} W(t_{j-1}) \Delta W_j. \quad (34)$$

Представим первый множитель во всех слагаемых суммы (34) в виде суммы приращений ΔW_j:

$$W(t_{j-1}) = \sum_{\ell=1}^{j-1} \Delta W_\ell. \quad (35)$$

---

1) Свешников А. А. Прикладные методы теории вероятностей. СПб: Лань, 2012

Таким образом, интегральная сумма (34) представляется в виде

$$S_n = \sum_{j=1}^{n} \sum_{l=1}^{j-1} \Delta W_l \, \Delta W_j . \tag{36}$$

Двойную сумму (36) можно выразить через однократные суммы, если заметить, что суммирование в (36) осуществляется по значениям (j, l), соответствующим нижнему заштрихованному треугольнику на рис. 1. Очевидно, что сумма по нижнему треугольнику равняется сумме по верхнему треугольнику и может быть представлена, как сумма по всему квадрату за вычетом всех диагональных элементов, деленная пополам!

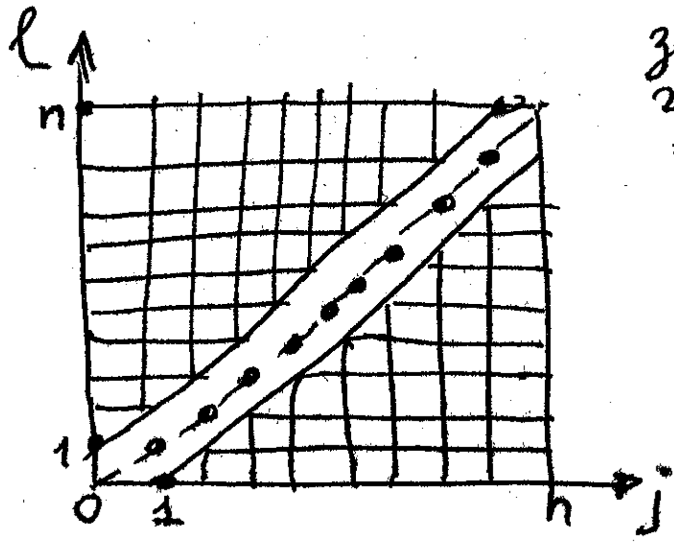

Рис. 1 Область суммирования в сумме (36).

Итак, окончательное выражение интегральной суммы (34) таково

$$S_n = \frac{1}{2} \left[\left(\sum_{j=1}^{n} \Delta W_j \right)^2 - \sum_{j=1}^{n} (\Delta W_j)^2 \right]. \tag{37}$$

По построению

$$\sum_{j=1}^{n} \Delta W_j = W(t), \tag{38}$$

а тогда переходя в (37) к среднеквадратическому пределу и пользуясь леммой находим для интеграла (23)

$$\int_0^t W(s)\, dW(s) = \frac{1}{2} W^2(t) - \frac{t}{2}, \tag{39}$$

то есть по сравнению с классической формулой интегрирования появляется добавочный член, равный $-\frac{t}{2}$.