Занятие 8. Применение метода разделения переменных (метода Фурье) к решению задачи о невыходе диффузионного процесса из заданной области

Теория

1°. Допустим, что курсовая стоимость акций моделируется с помощью некоторого диффузионного процесса $U(t)$. Пусть коэффициент сноса равен $b(t,x)$, $a(t,x)$, а коэффициент диффузии $U(0)=U_0$. При отсутствии Начальная стоимость на ординату процесса закон ограничений U определяется уравнением распределения Колмогорова

$$\frac{\partial f}{\partial \tau}+\frac{\partial}{\partial y}\left(a(\tau,y)f\right)-\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(b(\tau,y)f\right)=0 \quad (1)$$

и начальными условиями

$$f|_{\tau=0}=f_0(y), \quad (2)$$

где f_0 — закон распределения U_0. На бесконечности ставятся условия обращения f в нуль.

2°. Усложним задачу. Будем искать вероятность невыхода процесса U за заданные пределы (см. рисунок)

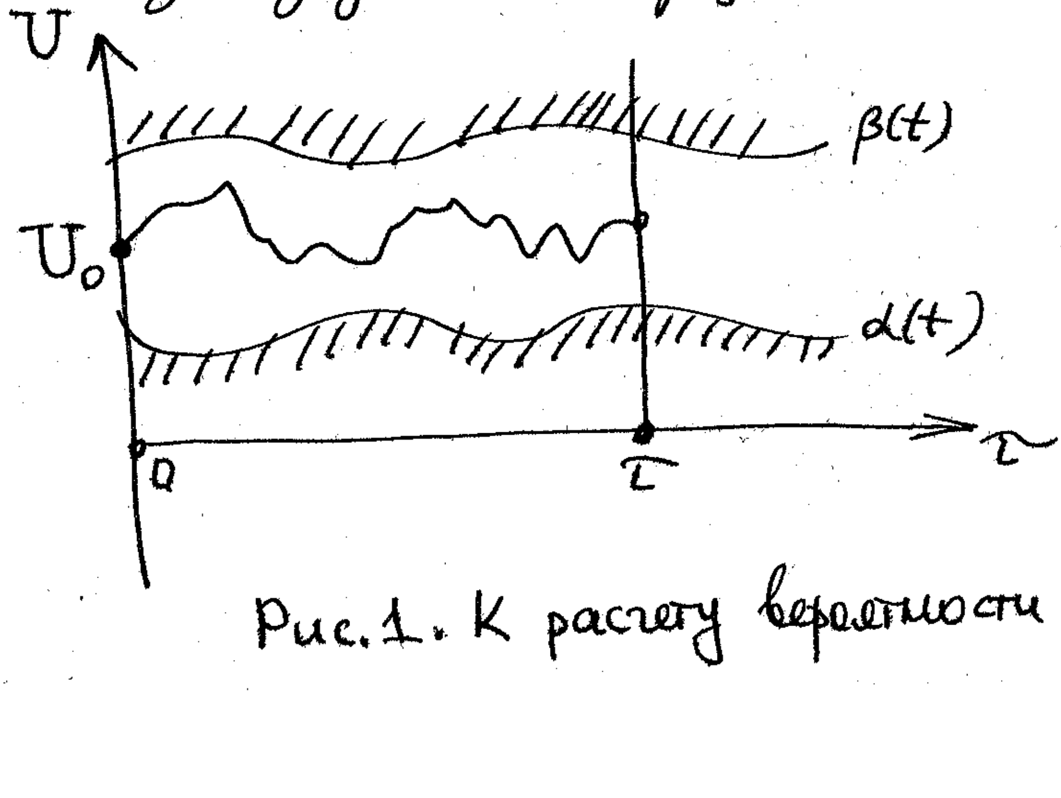

Рис. 1. К расчету вероятности невыхода

Введем две границы: нижнюю $\alpha(t)$ и верхнюю $\beta(t)$ и потребуем, чтобы процесс все время находился, начиная с момента $t=0$ в дозволенных пределах $\alpha(t) < U(t) < \beta(t)$. Область допустимых значений

$$\Omega = \{(\tau, y) : \alpha(\tau) < y < \beta(\tau),\ \tau \geq 0\} \quad (3)$$

3° Вероятность невыхода к моменту τ

$$P(\tau) = \mathcal{P}\{\alpha(s) < U(s) < \beta(s),\ 0 \leq s \leq \tau\}. \quad (4)$$

Это вероятность того, что процесс к моменту τ ни разу не вышел за допустимые пределы

4°. Плотность вероятности невыхода обозначим через $f(y;\tau)$ условную плотность вероятности $U(\tau)$ при условии, что к моменту τ процесс ни разу не покинул область Ω.

$$P(\tau) = \int_{\alpha(\tau)}^{\beta(\tau)} f(y;\tau)\,dy \quad (5)$$

5° Краевая задача для уравнения ФПК, определяющая плотность вероятности невыхода

$$\frac{\partial f}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial y}\left(a(\tau,y) f\right) - \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(b(\tau,y) f\right) = 0,$$

$$(y,\tau) \in \Omega, \quad (6)$$

$$f|_{\tau=0} = f_0(y), \quad (7)$$

$$f|_{y=\alpha(\tau)} = f|_{y=\beta(\tau)} = 0. \quad (8)$$

Плотность вероятности невыхода задана только в разрешенной области, а на ее границе должна обращаться в нуль.

Рассмотрим пример

Пусть стоимость акций задается моделью Башелье

$$U(t) = u_0 + \mu t + \sigma W(t),$$

где u_0 — начальная стоимость, μ — коэффициент роста, σ — волатильность, W — винеровский процесс. Требуется найти вероятность невыхода процесса $U(t)$ из полосы $u_0 - \varepsilon < U(t) < u_0 + \varepsilon$

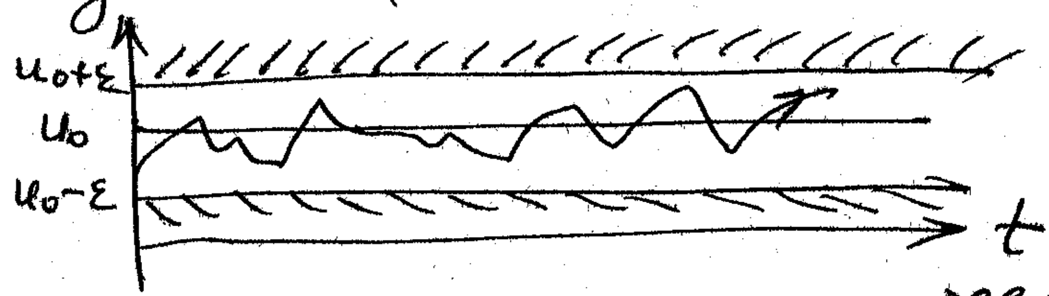

Рис. 2
к условию
примера

Далее для простоты считаем $\mu = 0$.

Очевидно, невыход $U(t)$ за границы $u_0-\varepsilon$, $u_0+\varepsilon$ эквивалентен невыходу винеровского процесса за границу $|W(t)| < \alpha$, где $\alpha = \frac{\varepsilon}{\sigma}$.

Мы показывали, что для винеровского процесса $W(t)$

$$a(t,x) \equiv 0, \quad b(t,x) \equiv 1. \tag{9}$$

Поэтому уравнение (1) примет вид:

$$\frac{\partial f}{\partial \tau} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \tag{10}$$

$$(\tau > 0, \ |y| < \alpha).$$

Краевое условие (8) преобразуется к виду:

$$f|_{y=\alpha} = f|_{y=-\alpha} = 0. \tag{11}$$

Начальное условие для стандартного винеровского процесса таково:

$$f|_{\tau=0} = \delta(y). \qquad (12)$$

Задача (10)–(12) подробно разобрана в книге А. А. Свешникова „Прикладные методы теории марковских процессов" (см. пример 14.1 на стр. 139–142). Далее воспроизводится это решение.

Решение

Будем искать решение в виде произведения двух функций

$$f = T(\tau)\, Y(y), \qquad (13)$$

каждая из которых зависит только от одного аргумента.

Подставляя (13) в (10), получаем

$$T'Y = \frac{1}{2} T Y''. \qquad (14)$$

Делим обе части (14) на $\frac{1}{2} T Y$:

$$\frac{2T'}{T} = \frac{Y''}{Y}. \qquad (15)$$

Поскольку левая часть здесь зависит только от τ, а правая — только от y, то их общее значение должно быть постоянным

$$\frac{2T'}{T} = \frac{Y''}{Y} = -\lambda^2 = const(\tau, y) \qquad (16)$$

В результате получаем два уравнения

$$T' + \frac{\lambda^2}{2} T = 0, \qquad (17)$$

$$Y'' + \lambda^2 Y = 0. \qquad (18)$$

Для выполнения условия (11) нужно потребовать, чтобы

$$Y(-\alpha) = Y(\alpha) = 0. \qquad (19)$$

Решение уравнения (18) имеет вид

$$Y(y) = A\sin(\lambda y) + B\cos(\lambda y). \qquad (20)$$

подставляя (20) в (19), находим

$$\begin{cases} A\sin(\lambda\alpha) + B\cos(\lambda\alpha) = 0; \\ -A\sin(\lambda\alpha) + B\cos(\lambda\alpha) = 0. \end{cases} \qquad (21)$$

определитель этой системы

$$\Delta(\lambda) = 2\sin(\lambda\alpha)\cos(\lambda\alpha) = \sin(2\lambda\alpha). \qquad (22)$$

Приравнивая Δ к нулю, находим собственные числа

$$\lambda_k = \frac{\pi k}{2\alpha}, \quad (k = \overline{1,\infty}). \qquad (23)$$

только при этих значениях λ возможно существование отличного от нуля решения уравнения (18) при краевых условиях (19).

Решение уравнения (20) при $\lambda = \lambda_k$ принимает вид

$$Y_k(y) = A\sin(\lambda_k y) + B\cos(\lambda_k y), \qquad (24)$$

Из второго уравнения (21) можно выразить B через A:

$$B = A\frac{\sin(\lambda_k\alpha)}{\cos(\lambda_k\alpha)}. \qquad (25)$$

Подставляя это выражение в (20), находим

$$Y_k(y) = \frac{A}{\cos(\lambda_k\alpha)}\sin(\lambda_k(y+\alpha)) = A_k\sin(\lambda_k(y+\alpha)); \qquad (26)$$

$$T_k(\tau) = e^{-\frac{\lambda_k^2\tau}{2}}. \qquad (27)$$

При любом $k \geq 1$ произведение функций (26) и (27) удовлетворяет уравнению (10) и краевым условиям (11).

Будем строить общее решение с помощью принципа суперпозиции, формируя решение в виде линейной комбинации всевозможных произведений $Y_k T_k$ с неизвестными пока постоянными A_k:

$$f(y;\tau) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{-\frac{\lambda_k^2 \tau}{2}} \sin(\lambda_k(y+\alpha)), \quad (28)$$

Осталось удовлетворить начальному условию (12).

Для нахождения A_k воспользуемся свойством ортогональности функций $\sin(\lambda_k(y+\alpha))$

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} \sin(\lambda_k(y+\alpha))\sin(\lambda_j(y+\alpha))\,dy = \begin{cases} \alpha, & j=k, \\ 0, & j\neq k. \end{cases} \quad (29)$$

Допустим, что начальное условие задано в общем виде (7). Полагая в (28) $\tau=0$, имеем

$$f_0(y) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin(\lambda_k(y+\alpha)). \quad (30)$$

Домножая обе части (30) на $\sin(\lambda_j(y+\alpha))$ и используя (29), находим

$$A_j = \frac{1}{\alpha}\int_{-\alpha}^{\alpha} f_0(y)\sin(\lambda_j(y+\alpha))\,dy. \quad (31)$$

В нашем случае $f_0(y)=\delta(y)$, и интеграл (31) легко вычисляется:

$$A_j = \frac{1}{\alpha}\sin(\lambda_j\alpha) = \frac{1}{\alpha}\sin\left(\frac{\pi j}{2}\right). \quad (32)$$

При четных j коэффициенты $A_{2k}\equiv 0$. Значит, в сумме (28) следует удержать только нечетные значения индекса. При этом

$$\sin\left(\frac{\pi j}{2}\right)\Big|_{j=2k+1} = \sin\left(\pi\left(k+\tfrac{1}{2}\right)\right) = (-1)^k. \qquad (33)$$

Таким образом, сумма (28) приобретает вид:

$$f(y;\tau) = \frac{1}{\alpha}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k e^{-\frac{\lambda_{2k+1}^2\tau}{2}}\sin(\lambda_{2k+1}(y+\alpha)). \qquad (34)$$

Осталось подсчитать вероятность невыхода (5)

$$P(\tau) = \int_{-\alpha}^{\alpha} f(y;\tau)\,dy. \qquad (35)$$

Интегрируя согласно (35), находим

$$\int_{-\alpha}^{\alpha}\sin(\lambda_{2k+1}(y+\alpha))\,dy = -\frac{\cos(\lambda_{2k+1}(y+\alpha))}{\lambda_{2k+1}}\Big|_{-\alpha}^{\alpha} = \frac{1-\cos(2\alpha\lambda_{2k+1})}{\lambda_{2k+1}} = \frac{1-\cos(\pi(2k+1))}{\lambda_{2k+1}} = \frac{2}{\lambda_{2k+1}}. \qquad (36)$$

Подставляя это значение в выражение для $P(\tau)$, находим

$$P(\tau) = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty} e^{-\frac{\pi^2(2k+1)^2\tau}{8\alpha^2}}\frac{(-1)^k}{(2k+1)}. \qquad (37)$$

Сумма ряда достаточно хорошо аппроксимируется сравнительно небольшим числом удерживаемых слагаемых, так как ряд сходится очень быстро. Отметим, что $P(0) \equiv 1$.