# Занятие 11. Спектральное разложение стационарных случайных функций

## Теория

### 1° Понятие спектрального разложения

Стационарные случайные функции характеризуются неизменностью целого ряда их вероятностных характеристик. Например, у них не меняется одномерный закон распределения. Двумерный закон одинаков для пар ординат процесса, отстоящих друг от друга на одинаковый временной интервал и т. д. Это наводит на мысль разложить стационарную случайную функцию по некоторым периодическим функциям времени, а затем исследовать коэффициенты такого разложения. Цель введения спектрального разложения — упростить расчеты вероятностных характеристик случайных функций и добиться большей наглядности.

Обычно раскладывают по тригонометрическим функциям (синусам и косинусам). С технической точки зрения удобнее использовать экспоненты с чисто мнимым показателем.

Допустим, что имеется стационарная случайная функция $X(t)$. Предположим, что она центрирована, то есть $\bar{x} = 0$ и кроме того выполняется условие

$$\int_{-\infty}^{\infty} |K_x(\tau)|\, d\tau < \infty.$$

Тогда процесс $X(t)$ можно представить в виде

$$X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t}\, d\Phi_x(\omega). \qquad (1)$$

Здесь экспонента $e^{i\omega t}$ задает случайное колебание с частотой $\omega$, а $d\Phi_x(\omega)$ есть некоторая случайная амплитуда колебаний на частоте $\omega$. Разложение (1) представляет собой суперпозицию случайных колебаний на различных частотах со случайными амплитудами $d\Phi_x(\omega)$.

### 2° Свойства элементарных случайных амплитуд

$$M[d\Phi_x(\omega)] = 0, \qquad (2)$$
$$M[d\Phi_x^*(\omega_1)\, d\Phi_x(\omega_2)] = S_x(\omega_1)\delta(\omega_2-\omega_1)\, d\omega_1 d\omega_2. \qquad (3)$$

Свойство (2) отражает центрированность процесса, а свойство (3) означает, что амплитуды $d\Phi_x(\omega)$ на разных частотах независимы. Коэффициент $S_x(\omega)$ отражает среднюю энергию колебаний на частоте $\omega$. Функция $S_x(\omega)$ называется <u>спектральной плотностью</u> процесса. Она задает среднюю энергию, приходящуюся на единичный интервал диапазона частот.

3° <u>Свойства спектральной плотности по отношению к корреляционной функции</u>

$$K_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau} S_x(\omega)\, d\omega, \qquad (4)$$
$$S_x(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\tau} K_x(\tau)\, d\tau$$

(Теорема Винера – Хинчина).

4° <u>Другие свойства спектральной плотности</u>

$$D(X) = \sigma_x^2 = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega)\, d\omega, \qquad (5)$$
$$S_x(\omega) \geq 0, \qquad (6)$$

(теорема Бохнера – Хинчина),

$$S_x(-\omega) = S_x(\omega) \qquad (7)$$
$$S_x(\omega) = o\left(\frac{1}{|\omega|}\right) \qquad (8)$$

Свойство (6) задает неотрицательность $S_x(\omega)$. Свойство (5) дает распределение энергии колебаний по частотам. Произведение $S_x(\omega)d\omega$ определяет среднюю энергию колебаний, приходящуюся на интервал частот от $\omega$ до $\omega+d\omega$.

5°. <u>Спектральная плотность производной</u>

$$S_{\dot{x}}(\omega) = \omega^2 S_x(\omega) \qquad (9)$$

6°. Спектральная плотность линейной комбинации производных

$$Y(t) = Q_n(p)\, X(t), \qquad (10)$$

$Q_n(x)$ – полином, $p = \frac{d}{dt}$ – оператор дифференцирования

$$S_y(\omega) = |Q_n(i\omega)|^2 S_x(\omega) \tag{11}$$

7°. Спектральная плотность стационарного решения линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами

$$Q_n(p)Y = R_m(p)X, \tag{12}$$

$Q_n(x)$, $R_m(x)$ — полиномы, $p = \frac{d}{dt}$ — оператор дифференцирования

$$S_y(\omega) = S_x(\omega) \left| \frac{R_m(i\omega)}{Q_n(i\omega)} \right|. \tag{13}$$

Последние три свойства показывают удобство использования спектрального анализа при изучении стационарных решений дифференциальных уравнений.

Пример 1

Имеется процесс Уленбека — Орнштейна $U(t)$, характеризуемый математическим ожиданием $\bar{u} = 0$ и корреляционной функцией

$$K_u(\tau) = \sigma^2 e^{-\alpha|\tau|}, \tag{1.1}$$

Получить $S_u(\omega)$.

Решение

По теореме Винера — Хинчина (4) имеем:

$$S_u(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\tau} e^{-\alpha|\tau|} d\tau =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\int_0^{\infty} e^{-(\alpha+i\omega)\tau} d\tau + \int_{-\infty}^{0} e^{(\alpha-i\omega)\tau} d\tau\right] =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{\alpha+i\omega} + \frac{1}{\alpha-i\omega}\right] = \frac{\alpha\sigma^2}{\pi(\omega^2+\alpha^2)}. \tag{1.2}$$

Пример 2

Спектральная плотность процесса $X(t)$ представлена в дробно-рациональном виде с помощью разложения на простейшие дроби

$$S_x(\omega) = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{(\omega^2+\alpha_k^2)}. \tag{2.1}$$

Найти корреляционную функцию $K_x(\tau)$.

Решение

По теореме Винера-Хинчина (4)

$$K_x(\tau)=\sum_{k=1}^{n} a_k \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau}\frac{d\omega}{\omega^2+\alpha_k^2}. \qquad (2,2)$$

Рассмотрим вычисление интеграла

$$I_k=\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau}\frac{d\omega}{\omega^2+\alpha_k^2}. \qquad (2,3)$$

Такие интегралы вычисляются с помощью методов теории вычетов. Особенностью интеграла (2,3) является то, что в нем подынтегральная функция представляет собой дробно-рациональную функцию $\omega$, умноженную на экспоненту с чисто мнимым показателем. Метод вычисления таких интегралов описан, например, в книге:

Свешников А.Г., Тихонов А.Н. Теория функций комплексной переменной. М.: Наука, 1970

Допустим, что в (2,3) $\tau>0$. Тогда интеграл (2,3) представим как предел при $R\to\infty$ интеграла по отрезку $\mathcal{L}_R=[-R,R]$ вещественной оси (см. рис. 1):

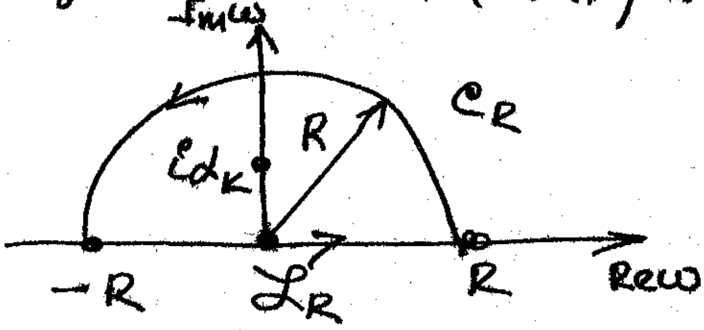


Рис. 1

$$I_k=\lim_{R\to\infty} I_k^{(R)}=\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} e^{i\omega\tau}\frac{d\omega}{\omega^2+\alpha_k^2}=\lim_{R\to\infty}\int_{\mathcal{L}_R} e^{i\omega\tau}\frac{d\omega}{\omega^2+\alpha_k^2}.$$

Будем рассматривать $\omega$ как комплексную переменную и введем в плоскости комплексного переменного $\omega$ контур $\Gamma_R$, состоящий из отрезка прямой $\mathcal{L}_R$ и и дуги окружности $C_R$ радиуса $R$ с центром в начале координат

$$\Gamma_R=\mathcal{L}_R+C_R.$$

Радиус $R$ возьмем достаточно большим для того, чтобы окружность $C_R$ полностью охватывала особую точку $\omega = i\alpha_k$, являющуюся полюсом подынтегральной функции в интеграле $I_R$.

Все особые точки оказались внутри контура $\Gamma_R$. По теореме Коши о вычетах

$$\int_{\Gamma_R} e^{i\omega\tau} \frac{d\omega}{\omega^2+\alpha_k^2} = 2\pi i \sum_{j=1}^{N} \operatorname*{Res}_{\omega=\omega_j} \left[\frac{e^{i\omega\tau}}{\omega^2+\alpha_k^2}\right]. \qquad (2.4)$$

Здесь $N$ — число особых точек, попавших внутрь контура $\Gamma_R$ (у нас $N=1$, $\omega_1 = i\alpha_k$)

Если функция $f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, причем $z=z_0$ есть простой полюс $f$ и является корнем знаменателя $\psi$, то тогда

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}. \qquad (2.5)$$

Если же $z=z_0$ является полюсом порядка $m$, то формула несколько усложняется

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z\to z_0} \left[f(z)(z-z_0)^m\right]^{(m-1)}. \qquad (2.6)$$

Вычисляя по формуле (2.5) вычет (2.4), находим

$$\int_{\Gamma_R} e^{i\omega\tau} \frac{d\omega}{\omega^2+\alpha_k^2} = \frac{\pi}{\alpha_k} e^{-\alpha_k\tau} \qquad (2.7)$$

Представим (2.7) в виде

$$\int_{\mathcal{L}_R} e^{i\omega\tau} \frac{d\omega}{\omega^2+\alpha_k^2} + \int_{C_R} e^{i\omega\tau} \frac{d\omega}{\omega^2+\alpha_k^2} = \frac{\pi}{\alpha_k} e^{-\alpha_k\tau} \qquad (2.8)$$

Перейдем здесь к пределу при $R\to\infty$. Тогда

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} e^{i\omega\tau} \frac{d\omega}{\omega^2+\alpha_k^2} = 0, \quad (\tau > 0)$$

по лемме Жордана, а интеграл по $\mathcal{L}_R$ будет стремиться к искомому интегралу вида (2.3).

Окончательно получим

$$I_k = \frac{\pi}{\alpha_k} e^{-\alpha_k \tau}, \quad (\tau > 0),$$

$$K_x(\tau) = \pi \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{\alpha_k} e^{-\alpha_k |\tau|}.$$

При $\tau < 0$ корреляционная функция доопределена по свойству четности.

## Задача 3

Пусть $U(t)$ обозначает процесс Уленбека-Орнштейна из примера 1. Требуется найти спектральную плотность процесса $V(t) = U^2(t)$

## Решение

Поскольку процесс Уленбека-Орнштейна нормален, то для него сохраняет силу формула

$$K_v(\tau) = 2K_u^2(\tau). \tag{3.1}$$

Тогда по теореме Винера-Хинчина

$$S_v(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\tau} K_v(\tau)\,d\tau =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\tau} K_u^2(\tau)\,d\tau. \tag{3.2}$$

Выражая корреляционную функцию через спектральную плотность имеем

$$S_v(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\tau}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega_1\tau} S_u(\omega_1)\,d\omega_1 \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega_2\tau} S_u(\omega_2)\,d\omega_2\,d\tau \tag{3.3}$$

Воспользуемся интегральным представлением для дельта-функции

$$\delta(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau}\,d\tau,$$

получаем

$$S_v(\omega) = 2\iint_{-\infty}^{\infty} S_u(\omega_1) S_u(\omega_2)\,\delta(\omega_1+\omega_2-\omega)\,d\omega_1 d\omega_2 =$$

$$= 2\int_{-\infty}^{\infty} S_u(\omega_1) S_u(\omega-\omega_1)\,d\omega_1 \tag{3.4}$$



Формула (3.4) справедлива для

любого нормального процесса. В частном случае процессе Уленбеке-Орнштейна, когда $S_u(\omega)$ задается равенством (1.2), получаем

$$S_v(\omega)=\frac{2\alpha^2\sigma^4}{\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\omega_1}{(\omega_1^2+\alpha^2)[(\omega-\omega_1)^2+\alpha^2]} \qquad (3.5)$$

В подынтегральном выражении интеграла

$$I=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\omega_1}{(\omega_1+i\alpha)(\omega_1-i\alpha)(\omega_1-\omega-i\alpha)(\omega_1-\omega+i\alpha)} \qquad (3.6)$$

присутствуют четыре полюса: $\pm i\alpha$, $\omega\pm i\alpha$. Все полюса показаны на рис. 2.

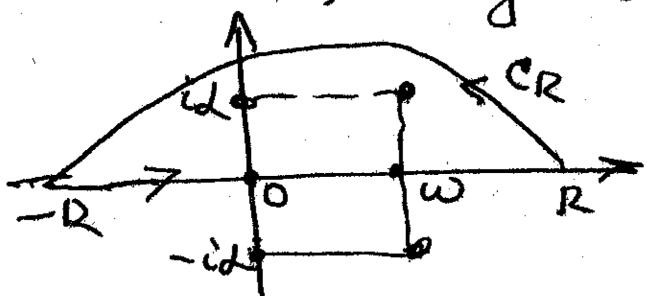


Рис. 2. Полюса в примере 3

Вновь вычисляя интеграл (3.6) с помощью теории вычетов, находим для интеграла $I$ следующее выражение:

$$I=2\pi i\left[\frac{1}{2i\alpha[(\omega-i\alpha)^2+\alpha^2]}+\frac{1}{2i\alpha[(\omega+i\alpha)^2+\alpha^2]}\right]$$

$$=\frac{\pi}{\alpha}\left[\frac{1}{\omega^2-2i\alpha\omega}+\frac{1}{\omega^2+2i\alpha}\right]=$$

$$=\frac{2\pi}{\alpha}\,\frac{1}{\omega^2+4\alpha^2}, \qquad (3.7)$$

окончательно

$$S_v(\omega)=\frac{2\alpha^2\sigma^4\cdot 2\pi}{\alpha\pi^2\alpha(\omega^2+4\alpha^2)}=\frac{4\alpha\sigma^4}{\pi(\omega^2+4\alpha^2)}. \qquad (3.8)$$

По сравнению с формулой (1.2) в выражении (3.8) $\alpha$ заменено на $2\alpha$, а $\sigma$ — на $2\sigma^2$.

## Пример 4

На вход динамического элемента первого порядка

$$\dot Y+\beta Y=X \qquad (4.1)$$

поступает процесс Уленбеке-Орнштейна $X(t)$ с корреляционной функцией

$$K_x(\tau) = \sigma^2 e^{-\alpha|\tau|}. \qquad (4.2)$$

Определить дисперсию $\sigma_y^2$.

Решение

По свойству (13) находим

$$S_y(\omega) = \frac{\alpha\sigma^2}{\pi(\omega^2+\alpha^2)(\omega^2+\beta^2)}, \qquad (4.3)$$

а по свойству (5)

$$\sigma_y^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha\sigma^2}{\pi(\omega^2+\alpha^2)(\omega^2+\beta^2)}\, d\omega. \qquad (4.4)$$

Интеграл (4.4) можно было бы вычислить с помощью теории вычетов, однако проще воспользовавшись готовыми формулами, полученными в примере 1 для процесса Уленбеке-Орнштейна, имеем

$$\sigma_y^2 = \frac{\alpha\sigma^2}{\pi(\beta^2-\alpha^2)} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{\omega^2+\alpha^2} - \frac{1}{\omega^2+\beta^2}\right] d\omega =$$

$$= \frac{\sigma^2}{(\beta^2-\alpha^2)} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\alpha}{\pi(\omega^2+\alpha^2)} - \frac{\alpha}{\pi(\omega^2+\beta^2)}\right] d\omega =$$

$$= \frac{\sigma^2}{(\beta^2-\alpha^2)} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\alpha}{\pi(\omega^2+\alpha^2)} - \frac{\beta}{\pi(\omega^2+\beta^2)}\,\frac{\alpha}{\beta}\right] d\omega =$$

$$= \frac{\sigma^2}{(\beta^2-\alpha^2)} \left[1 - \frac{\alpha}{\beta}\right] = \frac{\sigma^2}{\beta(\alpha+\beta)}.$$