Лекция 24.04

Формула К. Ито

Как уже отмечалось, стохастическое дифференциальное и интегральное исчисление Ито, которые принято в стохастической финансовой математике, имеет отличия от классического. При решении типовых задач стохастической финансовой математики, как мы увидим дальше, особую роль играет задача дифференцирования сложной функции, в которой в качестве промежуточного аргумента выступает диффузионный процесс, описываемый некоторым СДУ. Если СДУ понимается в смысле Ито, то результат имеет несколько необычный вид, определяемый специальной формулой Ито. Рассмотрим этот вопрос подробнее.

Пусть задано вероятностное пространство (Ω, A, P) и на нем определен стандартный винеровский процесс $W(t)$. Допустим, что имеется некоторый диффузионный процесс $X(t)$, определяемый СДУ вида

$$dX = \varphi(t,X)dt + \psi(t,X)dW \qquad (1)$$

Предполагается, что функции φ и ψ таковы, что решение СДУ (1) существует, а в остальном они произвольны.

Рассмотрим новый случайный процесс

$$Y(t) = \Phi(t, X(t)), \qquad (2)$$

где $\Phi(t,x)$ – заданная функция. Предполагается, что функция Φ является достаточно гладкой, а именно существуют частные производные $\frac{\partial \Phi}{\partial t}$, $\frac{\partial \Phi}{\partial x}$ и $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}$. Спрашивается, какому СДУ будет удовлетворять вновь построенный процесс (2)?

Отметим, что выражение (1) часто называют <u>стохастическим дифференциалом</u> процесса X. Этот дифференциал обладает рядом отличий от классического дифференциала, известного из детерминированного анализа. В классическом дифференциале, если отбросить все члены более высокого порядка, чем dt, присутствует только <u>одно</u> слагаемое, пропорциональное dt. В стохастическом дифференциале имеются два члена: первый пропорционален dt и напоминает классический дифференциал, а второй пропорционален dW и имеет порядок $\sqrt{dt}$. А.Н. Ширяев, как мне говорил раньше, когда вводил диффузионные процессы, называет этот эффект и эффектом усов, „эффект в 1) при $\sqrt{dt}$". При этом второй член в основном, в последующем при малых dt является наибольший вклад в приращение процесса, так как он имеет меньший порядок относительно dt, чем первый член.

Таким образом, вопрос решаемый с помощью формулы Ито, можно сформулировать так: как преобразуется стохастический дифференциал при функциональном преобразовании процесса.

Рассмотрим дифференциал второго порядка функции $\Phi(t,x)$, рассматриваемой вначале, как детерминированная функция двух вещественных аргументов t и x:

$$d\Phi(t,x) = \left[\frac{\partial \Phi(t,x)}{\partial t}dt + \frac{\partial \Phi(t,x)}{\partial x}dt\right] + \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2\Phi(t,x)}{\partial t^2}(dt)^2 + 2\frac{\partial^2\Phi(t,x)}{\partial t\partial x}dt\,dx + \frac{\partial^2\Phi(t,x)}{\partial x^2}(dx)^2\right]. \quad (3)$$

Подставляя в выражение (3) стохастический дифференциал X из (1), будем иметь:

$$dY = \left[\frac{\partial\Phi(t,X)}{\partial t}dt + \frac{\partial\Phi(t,X)}{\partial X}dX\right] + \tag{4}$$

$$+\frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2\Phi(t,X)}{\partial t^2}(dt)^2 + 2\frac{\partial^2\Phi(t,X)}{\partial t\partial X}dt\,dX + \frac{\partial^2\Phi(t,X)}{\partial X^2}(dX)^2\right],$$

где для краткости под $\frac{\partial\Phi}{\partial X}$, $\frac{\partial^2\Phi}{\partial t\partial X}$ и $\frac{\partial^2\Phi}{\partial X^2}$ обозначены производные функции $\Phi(t,x)$ по аргументу x в которых затем этот аргумент заменен на аргумент случайного процесса X.

Если учесть, что процесс X удовлетворяет СДУ вида (1), то получим следующее выражение дифференциала (4):

$$dY = \left[\frac{\partial\Phi(t,X)}{\partial t}dt + \frac{\partial\Phi(t,X)}{\partial X}\big(\varphi(t,X)dt + \psi(t,X)dW\big)\right] +$$

$$+\frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2\Phi(t,X)}{\partial t^2}(dt)^2 + 2\frac{\partial^2\Phi(t,X)}{\partial t\partial X}dt\big(\varphi(t,X)dt + \psi(t,X)dW\big)\right.$$

$$\left.+\frac{\partial^2\Phi(t,X)}{\partial X^2}\big(\varphi(t,X)dt + \psi(t,X)dW\big)^2\right]. \tag{5}$$

Теперь воспользуемся ранее доказанной на предыдущих лекциях леммой, согласно которой $(dW)^2 = dt$ и выделим в представлении (5) слагаемые, имеющие порядок $\sqrt{dt}$ и dt. Все слагаемые более старших порядков $(dt)^{3/2}$ и $(dt)^2$ отбросим, так как они не входят в стохастический дифференциал процесса Y. Очевидно, вся первая квадратная скобка в (5) при этом сохранится, а из второй квадратной скобки придется сохранить только тот член, который содержит $(dW)^2 = dt$. Легко видеть, что коэффициент при $(dW)^2$ во второй квадратной скобке будет равным $\frac{\partial^2\Phi}{\partial X^2}\psi^2$.

После указанных преобразований получаем следующее представление для стохастического дифференциала процесса Y:

$$dY=\left[\frac{\partial\Phi(t,X)}{\partial t}+\varphi(t,X)\frac{\partial\Phi(t,X)}{\partial X}+\frac{1}{2}\psi^2(t,X)\frac{\partial^2\Phi(t,X)}{\partial X^2}\right]dt + \psi(t,X)\frac{\partial\Phi(t,X)}{\partial X}dW. \qquad (6)$$

Эта формула носит название *формулы Ито*. Отличие формулы Ито от формул классического анализа состоит в присутствии третьего слагаемого в квадратных скобках при dt. Если бы СДУ (1) понималось бы в смысле Стратоновича, то этот дополнительный член отсутствовал бы.

Отметим, что в физических работах обычно используют трактовку СДУ по Стратоновичу, и формула преобразования приобретает классический вид. Первоначально физики тоже использовали определение Ито и пользовались формулой, аналогичной (6), которая называлась формулой Новикова – Фурутцу, но по физическим соображениям это оказалось неудобным, и перешли к определению СДУ по Стратоновичу. В работах по финансовой математике повсеместно применяется определение Ито и формула Ито (6).

Отметим важный частный случай применения формулы Ито, когда в роли процесса X выступает сам базовый винеровский процесс W. Пусть

$$Y(t)=\Phi(t,W(t)), \qquad (7)$$

Тогда $\varphi\equiv 0$, $\psi\equiv 1$ и по формуле Ито получаем:

$$dY=\left[\frac{\partial\Phi(t,W)}{\partial t}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2\Phi(t,W)}{\partial W^2}\right]dt+\frac{\partial\Phi(t,W)}{\partial W}dW. \qquad (8)$$

Некоторые примеры применения формулы Ито

Пример 1. Стохастическая экспонента.

Вначале рассмотрим пример на применение более простой формулы (8). Под стохастической экспонентой

экспонентой здесь называется ... стандартного геометрического броуновского движения вида

$$Y(t)=\Phi(t,W)=e^{-\frac{t}{2}+W} \qquad (9)$$

Это частный случай геометрического броуновского движения, отвечающий $S_0=1$, $\mu=0$, $\sigma=1$.

По формуле Ито в форме (8) находим:

$$dY=\left[\Phi\left(-\tfrac{1}{2}\right)+\tfrac{1}{2}\Phi\right]dt+\Phi\,dW=Y\,dW. \qquad (10)$$

Таким образом, стохастическая экспонента удовлетворяет уравнению:

$$dY=Y\,dW. \qquad (11)$$

Полученный результат можно трактовать так: если задано СДУ Ито вида (11), то его решением является функция (9). Иначе говоря, применение формулы Ито можно рассматривать как способ решения СДУ Ито: если мы „угадали" решение, подставили его в формулу Ито и получили уравнение СДУ, то тем самым мы решили исходное.

Пример 2. Стохастическая формула интегрирования по частям.

Рассмотрим в качестве второго примера функцию, линейную относительно W с произвольным коэффициентом, зависящим от t:

$$Y(t)=\Phi(t,W)=f(t)W(t), \qquad (12)$$

где $f(t)$ – произвольная дифференцируемая функция.

По формуле (8) находим:

$$dY=\left[f'(t)W(t)+\tfrac{1}{2}\cdot 0\right]dt+f(t)\,dW. \qquad (13)$$

Перепишем это равенство в виде:

$$d\big(f(t)W(t)\big)=f'(t)W(t)\,dt+f(t)\,dW \qquad (14)$$

и проинтегрируем последнее уравнение

текущего (значения) времени.

Учитывая, что $W(0)=0$ и перенося члены в полученном уравнении, имеем:

$$\int_0^t f'(s)W(s)\,ds = f(t)W(t) - \int_0^t f(s)\,dW(s). \qquad (15)$$

Эта формула напоминает классическую формулу интегрирования по частям с той разницей, что классическая формула справедлива только для дифференцируемых функций, а винеровский процесс $W(t)$ недифференцируем. При этом интеграл в правой части (15) фактически является стохастическим, так как вычисляется по приращениям винеровского процесса.

Пример 3. Процесс Башелье.

Рассмотрим функцию, линейную так же, как и в (12), но относительно W, добавив свободный член, линейно зависящий от t:

$$Y(t) = \Phi(t, W) = S_0 + \mu t + \sigma W(t), \qquad (16)$$

где S_0 — заданная случайная величина, не зависящая от W, а μ и σ — некоторые постоянные. Мы узнаем в процессе (16) модель курсовой стоимости акций ещё Л. Башелье. Такой процесс называют винеровским процессом с постоянным сносом.

По формуле Ито (8) легко находим

$$dY = \left[\mu + \frac{1}{2}\cdot 0\right]dt + \sigma\,dW. \qquad (17)$$

Следовательно, процесс Башелье удовлетворяет простейшему СДУ вида

$$dY = \mu\,dt + \sigma\,dW, \qquad (18)$$

отвечающему постоянным значениям

$$\varphi(t,Y) \equiv \mu, \quad \psi(t,Y) \equiv \sigma \qquad (19)$$

коэффициентов в СДУ (1).

Отметим, что, поскольку функция φ в (18) не зависит от Y, то неважно, как трактовать СДУ(18) — по Ито или по Стратоновичу, результат будет одинаков.

<u>Пример 4. Геометрическое броуновское движение.</u>

Этот пример строится аналогично предыдущему с той разницей, что вместо модели курсовой стоимости акций Башелье берется модель Самуэльсона:

$$Y(t)=\Phi(t,W)=S_0\, e^{\mu t-\frac{\sigma^2}{2}t+\sigma W(t)}. \qquad (20)$$

Этот пример обобщает пример 1 на случай произвольных S_0, μ и σ.

По формуле Ито (8) находим:

$$dY=\left[\Phi\left(\mu-\cancel{\frac{\sigma^2}{2}}\right)+\cancel{\frac{1}{2}\sigma^2\Phi}\right]dt+\Phi\sigma\, dW. \qquad (21)$$

Если вспомнить определение (20), то последнее равенство можно переписать в виде

$$dY=Y(\mu dt+\sigma dW). \qquad (22)$$

Таким образом, обе функции φ и ψ в (1) в данном случае линейно зависят от ординаты искомого процесса.

СДУ можно переписать в виде

$$\frac{dY}{Y}=\mu dt+\sigma dW \qquad (23)$$

или

$$d(\ln Y)=\mu dt+\sigma dW. \qquad (24)$$

Это показывает, что логарифм стоимости акций в модели Самуэльсона ведет себя точно также, как сама стоимость в модели Башелье. Если в модели Башелье стоимость активов нормальна, то в модели Самуэльсона она уже будет <u>логарифмически нормальной</u>, что гораздо точнее описывает реальную ситуацию на бирже.