Лекция 15.05

Составление уравнений Колмогорова по стохастическим уравнениям

Как уже отмечалось ранее, основные и наиболее употребительные модели статистической динамики цен активов на бирже основываются на использовании диффузионных моделей процессов. При этом наиболее важный класс диффузионных моделей базируется на использовании стохастических дифференциальных уравнений.

Допустим, что задано некоторое вероятностное пространство (Ω, A, P), на котором определен стандартный винеровский процесс $W(t)$. В математических моделях рынка цены акций моделируются как решение некоторых стохастических дифференциальных уравнений вида:

$$dX = \varphi(t,X)dt + \sigma(t,X)dW, \quad (t>0) \qquad (1)$$

при соответствующем начальном условии

$$X(0) = X_0, \qquad (2)$$

причем X_0 не зависит от W.

Как мы уже знаем, важнейшим преимуществом класса теоретических диффузионных процессов является то, что закон распределения этих процессов удовлетворяет некоторому уравнению в частных производных (уравнению А.Н. Колмогорова) и, следовательно, задача изучения поведения цен активов на бирже сводится к решению этого уравнения, то есть к некоторой задаче математической физики.

Прежде, чем заниматься непосредственно изложением теории математических моделей рынка, покажем, как составляются уравнения Колмогорова для важнейших типовых процессов, применяемых в стохастической финансовой математике.

Пример 1. Стандартный винеровский процесс

Этот процесс можно формально описать с помощью СДУ вида (1), если принять

$$\varphi(t,x) \equiv 0, \quad \psi(t,x) \equiv 1. \tag{2}$$

Для записи уравнения Колмогорова нужно подсчитать коэффициент сноса $a(t,x)$ и коэффициент диффузии рассматриваемого процесса, определяемые так:

$$a(t,x) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} M[\Delta U \,|\, U(t)=x], \tag{3}$$

$$b(t,x) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} M[(\Delta U)^2 \,|\, U(t)=x].$$

Далее все рассматриваемые СДУ будут трактоваться в смысле К. Ито. Как было показано на предыдущих лекциях, для СДУ Ито вида (1) имеем

$$a(t,x) = \varphi(t,x), \quad b(t,x) = \psi^2(t,x). \tag{4}$$

Следовательно, в случае винеровского процесса

$$a(t,x) \equiv 0, \quad b(t,x) \equiv 1 \tag{5}$$

при любых (t,x).

Для диффузионного процесса U с коэффициентами (3) второе уравнение Колмогорова записывается в следующем виде:

$$\frac{\partial f}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial y}\left[a(\tau,y) f\right] - \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(b(\tau,y) f\right) = 0, \tag{6}$$

где $f(t,x;\tau,y)$ обозначает переходную плотность вероятностей исследуемого процесса.

Используя найденные выражения для коэффициентов сноса и диффузии винеровского процесса (5), получаем следующую задачу для определения искомой переходной плотности

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial f}{\partial \tau} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \quad (\tau > t,\ -\infty < y < \infty), \\
&f\big|_{\tau \to t} = \delta(y - x), \qquad\qquad (7) \\
&f\big|_{|y| \to \infty} = 0.
\end{aligned}
$$

Таким образом, переходная плотность винеровского процесса удовлетворяет хорошо известному из математической физики уравнению теплопроводности.

Пример 2. Винеровский процесс с постоянным сносом (процесс Башелье)

Рассмотрим процесс вида:

$$S(t) = S_0 + \mu t + \sigma W(t), \quad (t > 0) \qquad (8)$$

где S_0 обозначает начальное значение процесса, а μ и σ — некоторые постоянные. Как мы знаем, с помощью модели (8) описывается курсовая стоимость акций в модели Л. Башелье.

На предыдущей лекции было показано, что процесс (8) удовлетворяет СДУ:

$$dS = \mu dt + \sigma dW, \qquad (9)$$

следовательно, мы имеем в данном случае постоянные коэффициенты сноса и диффузии, равные следующим значениям

$$a(t,x) \equiv \mu, \quad b(t,x) = \sigma^2. \qquad (10)$$

При таком задании коэффициентов

сноса и диффузии переходная плотность будет подчиняться следующему уравнению Колмогорова:

$$\frac{\partial f}{\partial \tau} + \mu \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0, \ (\tau > t, -\infty < y < \infty),$$

$$f|_{\tau \to t} = \delta(y - x), \qquad (11)$$

$$f|_{|y| \to \infty} = 0.$$

Пример 3. Геометрическое броуновское движение

Рассмотрим процесс вида

$$S(t) = S_0 e^{\mu t - \frac{\sigma^2}{2} t + \sigma W(t)}. \qquad (12)$$

Как известно, в модели П. Самуэльсона этот процесс используется для моделирования курсовой стоимости акций. Данная модель является основной при моделировании курсовой стоимости акций в современных работах по стохастической финансовой математике, в частности, в теории Блэка-Шоулза.

На предыдущей лекции было показано, что процесс (12) удовлетворяет следующему СДУ типа Ито:

$$dS = \mu S dt + \sigma S dW, \qquad (13)$$

то есть функции φ и ψ в (1) имеют вид

$$\varphi(t,x) = \mu x, \quad \psi(t,x) = \sigma x, \qquad (14)$$

а тогда

$$a(t,x) = \mu x, \quad b(t,x) = \sigma^2 x^2.$$

В результате уравнение Колмогорова и дополнительные условия к нему выразятся в следующем виде:

$$\frac{\partial f}{\partial \tau} + \mu\frac{\partial}{\partial y}(yf) - \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}(y^2 f) = 0, \quad (\tau>t,\ 0<y<\infty),$$

$$f|_{\tau\to t} = \delta(y-x), \qquad (15)$$

$$f|_{y\to\infty} = 0.$$

Граница $y=0$ в данном случае является естественной, и никаких дополнительных ограничений на неё ставить не нужно. Уравнение вида (15) в математической физике называется уравнением Фейнмана-Каца 1).

Пример 4. Процесс Уленбека – Орнштейна

Напомним, что процесс Уленбека – Орнштейна применяется при моделировании стоимости облигаций. Когда мы специально рассматривали этот процесс, было показано, что он определяется СДУ вида:

$$\dot{U} = -\alpha U + \sqrt{2\alpha}\,\sigma\,\xi(t). \qquad (16)$$

Если переписать это уравнение в стандартной форме с использованием дифференциалов, то получим

$$dU = -\alpha U dt + \sqrt{2\alpha}\,\sigma\, dW, \qquad (17)$$

откуда следует, что

$$\varphi(t,x) = -\alpha x, \quad \psi(t,x) \equiv \sqrt{2\alpha}\,\sigma, \qquad (18)$$

а тогда

$$a(t,x) = -\alpha x, \quad b(t,x) = 2\alpha\sigma^2. \qquad (19)$$

В результате переходная плотность этого процесса будет удовлетворять уравнению:

$$\frac{\partial f}{\partial \tau} - \alpha\frac{\partial}{\partial y}(yf) - \alpha\sigma^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0, \quad (\tau>t,\ -\infty<y<\infty),$$

$$f|_{\tau\to t} = \delta(y-x), \qquad (20)$$

$$f|_{|y|\to\infty} = 0.$$

---

1) Соловьев В.И. Стохастические модели математической экономики и финансовой математики. – М.: ГУУ, 2001

Получение закона распределения при произвольных начальных условиях.

Выше были приведены постановки задач (7), (11), (15) и (20), решая которые можно найти переходную плотность диффузионного процесса. На практике часто требуется решить немного иную задачу: получить распределение процесса (1) при заданном начальном условии (2). Поясним, как выразить решение такой задачи через переходную плотность. Закон распределения начального аргумента X_0 обозначим через $f_0(x)$.

Обозначим через $f_2(y_1, y_2; t_1, t_2)$ двумерный закон распределения двух ординат процесса (1) $Y_1 = X(t_1)$ и $Y_2 = X(t_2)$. Примем в качестве первого момента $t_1 = 0$, а в качестве второго — некоторое текущее значение $t_2 = \tau > 0$. Очевидно, в силу марковости процесса (1) будем иметь:

$$f_2(y_0, y; 0, \tau) = f_0(y_0) f(0, y_0; \tau, y), \qquad (21)$$

где $f(t, x; \tau, y)$ обозначает переходную плотность.

Одномерный закон распределения ординаты процесса в момент t может быть получен отсюда путем интегрирования двумерного закона

$$f_1(y; \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f_2(y_0, y; 0, \tau)\, dy_0, \qquad (22)$$

откуда получаем

$$f_1(y; \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f_0(y_0) f(0, y_2; \tau, y)\, dy_0. \qquad (23)$$

Таким образом, если известна переходная плотность и начальное распределение, то распределение в произвольный момент времени находится простым интегрированием по формуле (23).

Решение уравнения Колмогорова для винеровского процесса

Задача нахождения переходной плотности представляет собой некоторую задачу математической физики для уравнения Колмогорова. Конечно, эту задачу можно решать с помощью традиционных методов математической физики, хорошо известных в литературе[1)].

Вместе с тем, ранее мы в нашем курсе уже достаточно подробно изучили многие диффузионные процессы, например, фигурирующие в примерах 1–4 этой лекции, и решение соответствующих задач для уравнения Колмогорова можно выписать сразу на основе чисто вероятностных соображений.

Рассмотрим, например, более подробно задачу (7) для винеровского процесса. Выделим настоящий момент t и будущий момент $\tau > t$, положив при этом $X = W(t)$, $Y = W(\tau)$. Как было показано ранее в разделе про винеровский процесс

$$f_2(x,y;t,\tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x^2}{2t}} \frac{1}{\sqrt{2\pi(\tau-t)}} e^{-\frac{(y-x)^2}{2(\tau-t)}}. \quad (24)$$

одномерный закон распределения X таков:

$$f_1(x;t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x^2}{2t}}. \quad (25)$$

Переходная плотность получается путем деления (24) на (25), что дает

$$f(t,x;\tau,y) = \frac{f_2(x,y;t,\tau)}{f_1(x;t)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi(\tau-t)}} e^{-\frac{(y-x)^2}{2(\tau-t)}}. \quad (26)$$

Убедимся далее непосредственной подстановкой, что эта функция действительно является

---

1) Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1972.

решением задачи (7)

Вначале продифференцируем (26) по τ:

$$\frac{\partial f}{\partial \tau} = -\frac{1}{2}\frac{1}{(\tau-t)} f + \frac{(y-x)^2}{2(\tau-t)^2} f. \qquad (27)$$

Затем находим производные по y:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{(y-x)}{(\tau-t)} f, \qquad (28)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{(y-x)^2}{(\tau-t)^2} f - \frac{1}{(\tau-t)} f. \qquad (29)$$

Подставляя (27) и (29) в (7), убеждаемся, что функция (26) удовлетворяет уравнению Колмогорова и всем дополнительным условиям.

Понятие (B,S)-рынка акций

При построении математической модели рынка ценных бумаг (акций) предполагается, что инвестор может производить два вида операций: 1) размещать денежные средства на банковском счете и брать деньги в банке в долг; 2) покупать и продавать акции. В этой ситуации говорят, что имеется один безрисковый актив (банковский счет) и некоторое количество рисковых активов (ценных бумаг).

В наименовании модели рынка букве B (от английского bank) относится к банковскому счету. Считается, что проценты на банковский счет начисляются непрерывно во времени с некоторой процентной ставкой $r(t)$, так что сумма средств, находящихся на банковском счете к моменту t изменяется по закону

$$dB(t) = r(t)B(t)dt. \qquad (30)$$

Смысл этой формулы в том, что

приращение банковского счета в малом интервале времени $[t, t+dt]$ пропорционально размеру вклада в момент t, длине интервала dt, а также процентной ставке $r(t)$ на момент начисления. В простейшем случае ставка $r(t)$ считается детерминированной и постоянной, может быть также и переменной, в общем случае $r(t)$ — стохастический процесс.

Предполагается, что на рынке обращается n ценных бумаг (акций). В общих диффузионных моделях рынка курсовая стоимость произвольной i-й ценной бумаги может описываться произвольным СДУ вида:

$$dS_i = \varphi_i(t, S_i) + \psi_i(t, S_i)\, dW_i, \qquad (31)$$

однако такая модель является весьма сложной для исследования и чаще всего ограничиваются моделью Самуэльсона, то есть моделью геометрического броуновского движения

$$dS_i = S_i(\mu_i dt + \sigma_i dW_i), \quad (i=\overline{1,n}). \qquad (32)$$

Винеровские процессы W_i могут быть как независимыми, так и заданным образом зависящими друг от друга.

В процессе функционирования рынка инвестор может покупать и продавать ценные бумаги, формировать из них так называемый портфель ценных бумаг.

В классических моделях рынка делаются два упрощающих дело предположения. Во-первых, считается, что операционные издержки при покупке и продаже ценных бумаг отсутствуют (в реальных условиях они есть и пропорциональны сумме покупки или продажи). Во-вторых, активы считаются бесконечно делимыми (можно купить или продать в любой момент произвольное, не обязательно целое число акций). В действительности акции, конечно, продаются только целочисленными партиями (лотами).

Функционирующий по таким правилам рынок называется (B,S)-рынком. Здесь вторая буква S относится к акциям (от английского stock — акция).

Портфелем ценных бумаг на (B,S)-рынке называют вектор $\vec{\gamma}=\{\gamma_0,\gamma_1,\dots,\gamma_n\}$. Здесь $\gamma_0(t)$ обозначает сумму, которая в момент t лежит на банковском счете, а $\gamma_i(t)$ есть число акций i-го типа, которое входит в портфель в момент t. Благодаря сделанным выше двум предположениям инвестор может постоянно корректировать содержимое своего портфеля, причем он может это делать совершенно бесплатно.

Стоимость акций $S_i(t)$ постоянно меняется, меняется и состав портфеля $\vec{\gamma}(t)$. Поэтому стоимость портфеля на (B,S)-рынке будет представлять собой некоторый случайный процесс

$$\Pi(t)=\gamma_0(t)+\sum_{i=1}^{n}\gamma_i(t)S_i(t). \qquad (33)$$

Инвестор может влиять на этот процесс, покупая или продавая акции и снимая или докладывая деньги на банковский счет.

Далее рассмотрим некоторые частные случаи (B,S)-рынка.

Рынок Блэка – Шоулза

На этом рынке считается, что банковский процент $r(t)=r=\mathrm{const}(t)$ сохраняет постоянное значение, отражающее скорость обесценивания денег, а все рисковые активы описываются моделью

Самуэльсона (32), то есть представляют собой процессы геометрического броуновского движения.

Рынок Башелье

Башелье не учитывал фактор обесценивания денег, считая $r \equiv 0$. Что касается временной структуры стоимости акций, то использовалась более простая и грубая модель Башелье

$$dS_i = \mu_i dt + \sigma_i dW_i, \quad (i = \overline{1,4}). \qquad (34)$$