Лекция 22.05 – 2

Преобразование фундаментального уравнения Блэка–Шоулза–Мертона

На предыдущей лекции было получено, что рациональная стоимость опциона в модели Блэка–Шоулза–Мертона удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial f(t,s)}{\partial t} + rs\frac{\partial f(t,s)}{\partial s} + \frac{1}{2}\sigma^2 s^2 \frac{\partial^2 f}{\partial s^2} = rf \qquad (1)$$

при „начальном" условии (2)

$$f\big|_{t=T} = f_T(s).$$

Уравнение (1) должно решаться для $0<s<\infty$ и временного интервала $0\le t<T$. Здесь момент $t=0$ соответствует тому моменту, для которого ведется расчет рациональной стоимости опциона. Если обозначить рациональную его стоимость через Q, то тогда (3)

$$Q = f(0, s_0),$$

где s_0 обозначает начальную стоимость базового актива.

Уравнение (1) известно в математической физике, как уравнение Фейнмана–Каца. Существует стандартный метод решения этого уравнения, основанный на таком преобразовании независимых переменных (t, s), при котором уравнение (1) преобразуется к форме уравнения теплопроводности. Покажем это преобразование.

Перейдем от независимых переменных t и s к новым переменным θ и z по формулам: (4)

$$\begin{cases} \theta = \sigma^2(T-t), \\ z = \ln s + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t). \end{cases}$$

Если разрешить уравнение (4) относительно t и s, получим обратные выражения старых переменных через новые:

$$\begin{cases} t = T - \frac{\theta}{\sigma^2}, \\ S = e^{z - (r - \frac{1}{2}\sigma^2)\frac{\theta}{\sigma^2}}. \end{cases} \qquad (5)$$

Кроме того, введем также новую неизвестную функцию

$$V(\theta, z) = e^{r(T-t)} f(t, S). \qquad (6)$$

Старая неизвестная функция связана с ней так:

$$f(t, S) = e^{-r(T-t)} V(\theta, z). \qquad (7)$$

Для получения уравнения, которому будет удовлетворять функция $V(\theta, z)$ нужно подставить выражение (7) в уравнение (1), после чего выразить все производные, входящие в это уравнение, через производные V по новым переменным. При этом следует использовать формулы дифференцирования:

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} = -\sigma^2, \quad \frac{\partial\theta}{\partial S} = 0,$$
$$\frac{\partial z}{\partial t} = (\tfrac{1}{2}\sigma^2 - r), \quad \frac{\partial z}{\partial S} = \frac{1}{S}. \qquad (8)$$

С помощью (8) получаем:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = e^{-r(T-t)}\left[rV + \frac{\partial V}{\partial t}\right] =$$
$$= e^{-r(T-t)}\left[rV + \frac{\partial V}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial t}\right] = \qquad (9)$$
$$= e^{-r(T-t)}\left[rV + (\tfrac{1}{2}\sigma^2 - r)\frac{\partial V}{\partial z} - \sigma^2\frac{\partial V}{\partial \theta}\right],$$

$$\frac{\partial f}{\partial S} = e^{-r(T-t)}\frac{\partial V}{\partial S} = e^{-r(T-t)}\left[\frac{\partial V}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial S} + \frac{\partial V}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial S}\right] =$$
$$= e^{-r(T-t)}\frac{1}{S}\frac{\partial V}{\partial z},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = e^{-r(T-t)}\frac{\partial}{\partial S}\left(\frac{1}{S}\frac{\partial V}{\partial S}\right) =$$
$$= e^{-r(T-t)}\left[-\frac{1}{S^2}\frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{S^2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right].$$

После подстановки выражений для производных (9) в уравнение Блэка –

Шоулза — Мертона (1) вынося за скобки экспоненту в обеих частях уравнения, будем иметь

$$e^{-r(T-t)}\Big[\cancel{rV}+\cancel{\left(\tfrac{1}{2}\sigma^2-r\right)}\frac{\partial V}{\partial z}-\sigma^2\frac{\partial V}{\partial \theta}+\cancel{r}\frac{\partial V}{\partial z}-\cancel{\tfrac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial V}{\partial z}}+\frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\Big]=e^{-r(T-t)}\cancel{rV}. \qquad (10)$$

Сокращая обе части последнего уравнения на экспоненту $e^{-r(T-t)}$, умноженную на σ^2, получаем хорошо известное уравнение теплопроводности[1]

$$\frac{\partial V}{\partial \theta}=\frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}, \qquad (11)$$

причем согласно определению новых переменных (4) переменная θ будет меняться в пределах $0<\theta\leq\sigma^2 T$, а переменная z — на всей числовой оси.

„Начальное" условие (2) согласно определению „новых переменных (4) принимает вид:

$$V\big|_{\theta=0}=f_T\left(e^z\right), \qquad (12)$$

где f_T обозначает ту же платежную функцию, что и в исходном уравнении (2).

Что касается стоимости опциона (3), то для ее выражения через исходные переменные задачи нужно воспользоваться выражением f через V по формуле (7), в которое следует подставить представление новых аргументов θ и z из (4) через старые аргументы, а затем положить $t=0$ и $S=S_0$. Опуская очевидные промежуточные выкладки, находим

$$Q=e^{-rT}V\left(\sigma^2T,\ \ln S_0+\left(r-\tfrac{1}{2}\sigma^2\right)T\right). \qquad (13)$$

Решение фундаментального уравнения Блэка — Шоулза — Мертона при произвольной платежной функции

Хорошо известно[1], что решение уравнения теплопроводности (11) при произвольном начальном условии $V(0,z)$ выражается с помощью так называемого интеграла Пуассона:

1) Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1972

$$V(\theta,z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\theta}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(z-y)^2}{2\theta}} V(0,y)\,dy. \quad (14)$$

Подставляя в интеграл Пуассона начальное условие (12), получаем

$$V(\theta,z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\theta}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(z-y)^2}{2\theta}} f_T(e^y)\,dy. \quad (15)$$

В интеграле (15) удобно проделать замену переменной интегрирования $x=y-z$, что дает

$$V(\theta,z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\theta}}\int_{-\infty}^{\infty} f_T(e^{z+x})\, e^{-\frac{x^2}{2\theta}}\,dx. \quad (16)$$

Возвращаясь к исходной опционной функции f по формуле (7) и выражая новые независимые переменные (θ, z) через старые аргументы (t,s), приходим к результату

$$f(t,s)=e^{-r(T-t)}\int_{-\infty}^{\infty} f_T\left(s e^{x+\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}\right)\cdot \frac{e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2(T-t)}}}{\sqrt{2\pi(T-t)}\,\sigma}\,dx, \quad (17)$$

где $0\le t\le T$, $0<s<\infty$.

Выражение (17) дает стоимость опциона европейского типа в течение всего срока его исполнения. Для нас наиболее интересной является цена опциона в момент его оформления, то есть при $t=0$. Полагая $t=0$ в (17), находим по формуле (3):

$$Q=e^{-rT}\int_{-\infty}^{\infty} f_T\left(S_0 e^{x+\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)T}\right) \frac{e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2 T}}}{\sqrt{2\pi T}\,\sigma}\,dx, \quad (18)$$

где S_0 обозначает начальную цену базового актива.

Это выражение часто переписывают в виде

$$Q=\xi\int_{-\infty}^{\infty} f_T\left(\frac{S_0}{\xi} e^{x-\frac{\sigma^2 T}{2}}\right) \frac{e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2 T}}}{\sqrt{2\pi T}\,\sigma}\,dx, \quad (19)$$

где под ξ понимается так называемый <u>фактор дисконтирования</u>

$$\xi=e^{-rT}. \quad (20)$$

Эта величина показывает скорость обесценивания денег за время T. Если взять в момент $t = 0$ одну денежную единицу, то в момент $t = T$ она в начальных ценах по своей покупательной способности будет эквивалентна всего лишь ξ денежным единицам.

Часто выражению (19) придают некий вероятностный смысл. Второй множитель в подынтегральном выражении (19) представляет собой плотность вероятности нормального закона $N(0, \sigma\sqrt{T})$. Поэтому все интегральное представление Q в целом можно трактовать как математическое ожидание вида

$$Q = \xi\, M\left[f_T\left(\frac{S_0}{\xi} e^{\sigma\sqrt{T}X - \frac{\sigma^2 T}{2}}\right)\right], \qquad (21)$$

где $X \in N(0,1)$ есть стандартная нормальная случайная величина с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией.

В заключение отметим, что решение (19) можно было бы получить и непосредственно из выражения (16), минуя переход к старым переменным, если сразу воспользоваться формулой (13). Приведенный выше вывод имеет то преимущество, что он позволил найти выражение стоимости опциона (17), имеющее силу не только для $t = 0$, но также и при произвольных значениях $t \in [0, T]$.

Формула Блэка–Шоулза для опциона колл европейского типа

Перейдем к получению формулы Блэка–Шоулза для классических опционов. Начнем с опциона-колл. Напомним, что это опцион на покупку базового актива, который дает право купить его в момент исполнения опциона T по цене исполнения K. Эта цена является заранее оговоренной, твердой и не зависит от того, сколько будет стоить базовый актив в момент T на спотовом (кассовом) рынке.

Нетрудно понять, что платежная функция такого опциона имеет вид:

$$f_T(S(T)) = (S(T)-K)^+, \qquad (22)$$

где введено обозначение

$$(x)^+ = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases} \qquad (23)$$

Платежную функцию (22) легко пояснить следующими качественными рассуждениями. Если в момент исполнения актив будет стоить дороже цены исполнения K, то тогда опцион выгодно предъявить и купить акцию по гарантированной заниженной цене K. Далее акцию можно продать на спотовом рынке по цене $S(T) > K$, а разность $S(T) - K$ будет представлять доход от оформления опциона! В противном случае, когда в момент T актив стоит дешевле K, опцион предъявлять невыгодно, так как акцию можно дешевле купить на спотовом рынке. При этом доход от предъявления опциона будет равен нулю.

Платежная функция вида (22) показана графически на рисунке 1.

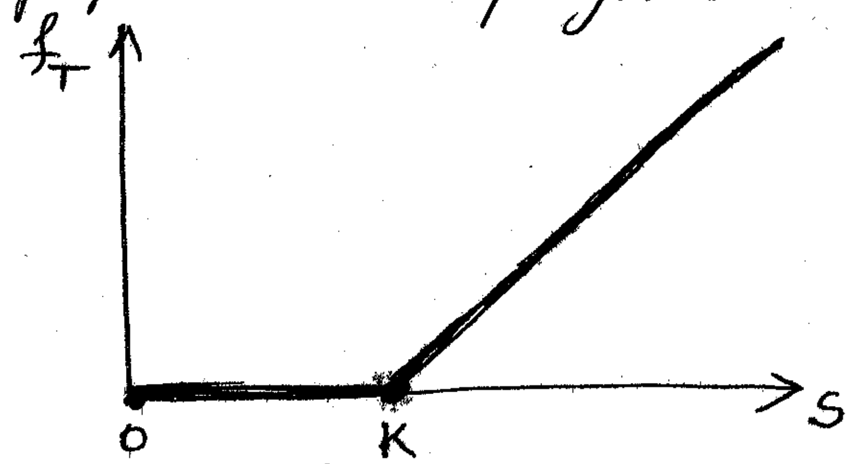

Рис. 1. Платежная функция опциона колл европейского типа с ценой исполнения K

Она имеет вид кусочно-линейной функции с изломом в точке $S=K$, причем эта функция неубывающая, а при $S>K$ она возрастает монотонно по линейному закону.

Получим явное выражение стоимости рассматриваемого опциона по Блэку–Шоулзу–Мертону. В соответствии с общей формулой (18) имеем

$$C = e^{-rT}\int_{-\infty}^{\infty}\left(S_0 e^{rT+x-\frac{\sigma^2 T}{2}}-K\right)^{+}\frac{e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2 T}}}{\sqrt{2\pi T}\,\sigma}dx, \quad (24)$$

где по традиции стоимость колл-опциона обозначена буквой C (от английского call).

Функция, стоящая в скобках в (24), монотонно возрастает относительно аргумента x, причем при $x\to-\infty$ она отрицательна и равняется $-K$, а при $x\to\infty$ она положительна и стремится к бесконечности. Следовательно, по теореме Ролля найдется такое значение аргумента $x=x_*$, при котором указанная функция обратится в нуль. Это значение будет единственным вследствие монотонности функции. Приравнивая к нулю выражение в скобках (24), получаем

$$x_* = \ln\frac{K}{S_0}-\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)T. \quad (25)$$

При $x>x_*$ выражение в скобках положительно, а при $x<x_*$ оно отрицательно, поэтому согласно (23) будем иметь:

$$C = e^{-rT}\int_{\ln\frac{K}{S_0}-(r-\frac{\sigma^2}{2})T}^{\infty}\left(S_0 e^{rT+x-\frac{\sigma^2 T}{2}}-K\right)\frac{e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2 T}}}{\sqrt{2\pi T}\,\sigma}dx=$$

$$=\int_{\ln\frac{K}{S_0}-(r-\frac{\sigma^2}{2})T}^{\infty}\left(S_0 e^{x-\frac{\sigma^2 T}{2}}-Ke^{-rT}\right)\frac{e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2 T}}}{\sqrt{2\pi T}\,\sigma}dx= \quad (26)$$

$$=\int_{\ln\frac{K}{S_0}-(r-\frac{\sigma^2}{2})T}^{\infty}\left(S_0\frac{e^{-\frac{(x-\sigma^2 T)^2}{2\sigma^2 T}}}{\sqrt{2\pi T}\,\sigma}-Ke^{-rT}\frac{e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2 T}}}{\sqrt{2\pi T}\,\sigma}\right)dx.$$

Интеграл (26) целесообразно разбить на два интеграла, причем в первом из них удобно проделать замену переменной $y=x-\sigma^2 T$. Тогда в обоих получившихся интегралах будет одна и та же подынтегральная функция, но в первом интеграле несколько изменится нижний предел интегрирования:

$$C = S_0 \int\limits_{\ln\frac{K}{S_0}-\left(r+\frac{\sigma^2}{2}\right)T} \frac{e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2 T}}}{\sqrt{2\pi T}\,\sigma}\,dy - Ke^{-rT}\int\limits_{\ln\frac{K}{S_0}-\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)T} \frac{e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2 T}}}{\sqrt{2\pi T}\,\sigma}\,dx. \qquad (27)$$

Заменим в первом интеграле (27) переменную интегрирования y на $-\frac{y}{\sigma\sqrt{T}}$, а во втором интеграле x на $-\frac{x}{\sigma\sqrt{T}}$. Тогда выражение (27) можно будет представить в виде

$$C = S_0 F(y_1) - Ke^{-rT}F(y_2), \qquad (28)$$

где $F(y)$ обозначает функцию распределения стандартного нормального закона $N(0,1)$

$$F(y) = \int_{-\infty}^{y} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt, \qquad (29)$$

а значения её аргументов, фигурирующие в (28), задаются в форме

$$y_{1,2} = \frac{\ln\frac{S_0}{K} + \left(r \pm \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}. \qquad (30)$$

Отметим, что часто бывает удобно выразить функцию распределения (29) через интеграл вероятностей

$$\Phi(y) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^y e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt \qquad (31)$$

по формуле

$$F(y) = \frac{1}{2}\left[1 + \Phi(y)\right]. \qquad (32)$$

Формула (28) представляет собой знаменитую <u>формулу Блэка-Шоулза</u>, полученную впервые этими авторами и независимо от них Мертоном в 1973 году. Важно заметить, что в итоговую формулу не входит μ – коэффициент роста стоимости акций. За счет хеджирования опциона с помощью акций базового актива удалось избавиться от зависимости от этого параметра.