Занятие 12. Фрактальная формула Блэка–Шоулза

Теория

С математической точки зрения вывод фрактальной формулы Блэка–Шоулза гораздо более сложный, чем классической формулы и использует усложненный математический аппарат, однако результирующие формулы получаются достаточно простыми и по своему внешнему виду вполне аналогичны классическим формулам. Поэтому предлагается включить фрактальную формулу в расчетную часть курсового проекта.

Соответствующие теоретические результаты были получены Б. Оксенделем (B. Oksendal) совместно с Я. Ж. Ху (Y. Zh. Hu) в 1999 году.

1° Предположения о (B,S)-рынке

1.1 Процентная ставка постоянна

$$dB(t) = r\,B(t)dt\,,\quad r = const(t) \tag{1}$$

1.2. Курсовая стоимость акций описывается процессом геометрического фрактального броуновского движения

$$dS(t) = S(t)\left[\mu dt + \sigma dW_H(t)\right], \tag{2}$$

где $W_H(t)$ есть фрактальное броуновское движение с показателем Харста H.

1.3 Платежная функция $f_T(S(T))$ зависит от $S(T)$, но не зависит явно от T,

1.4 Активы безгранично делимы, операционные издержки отсутствуют

1.5 Хеджирование производится точно также, как в классической модели Блэка–Шоулза

2°. Справедливая цена опциона с платежной функцией f_T в случае опциона европейского типа

$$Q=e^{-rT}\int_{-\infty}^{\infty} f_T\left(S_0 e^{y+rT-\frac{1}{2}\sigma^2T^{2H}}\right)\frac{e^{-\frac{y^2}{2T^{2H}\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi}\,\sigma T^H}\,dy. \quad (3)$$

3°. Случай опциона — колл

$$C=e^{-rT}\int_{-\infty}^{\infty}\left(S_0 e^{y+rT-\frac{1}{2}\sigma^2T^{2H}}-K\right)^+\frac{e^{-\frac{y^2}{2T^{2H}\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi}\,\sigma T^H}\,dy=$$

$$=e^{-rT}\int_{\ln\frac{K}{S_0}-rT+\frac{1}{2}\sigma^2T^{2H}}^{\infty}\left(S_0 e^{y+rT-\frac{1}{2}\sigma^2T^{2H}}-K\right)\frac{e^{-\frac{y^2}{2T^{2H}\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi}\,\sigma T^H}\,dy=$$

$$=S_0F(y_1)-Ke^{-rT}F(y_2), \quad (4)$$

$$y_{1,2}=\frac{\ln\frac{S_0}{K}+rT\pm\frac{\sigma^2T^{2H}}{2}}{\sigma T^H} \quad (5)$$

4° Случай опциона — пут

$$P=-S_0F(-y_1)+Ke^{-rT}F(-y_2). \quad (6)$$

Отличие в постановке задачи состоит только в задании временной структуры курсовой стоимости акций. В уравнении (2) вместо обычного винеровского процесса W появляется фрактальное броуновское движение W_H.

Результирующие формулы (4) и (6) сохраняются, но несколько меняются выражения для y_1 и y_2.

Ясно, что при $H=1/2$ новые формулы совпадают со старыми (это следует из свойств фрактального броуновского движения)