Занятие 12. Взаимная спектральная плотность

Теория

1° Совместное спектральное представление двух стационарных случайных функций и понятие взаимной спектральной плотности

Рассмотрим две стационарные и стационарно связанные случайные функции $X(t)$ и $Y(t)$. Допустим, что обе эти функции центрированы и удовлетворяют условиям (см. предыдущее занятие):

$$\int_{-\infty}^{\infty}|K_x(\tau)|d\tau<\infty, \quad \int_{-\infty}^{\infty}|K_y(\tau)|d\tau<\infty,$$

обеспечивающим существование спектрального представления для каждой из этих функций в отдельности

$$X(t)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\omega t}\,d\Phi_x(\omega), \tag{1}$$

$$Y(t)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\omega t}\,d\Phi_y(\omega), \tag{2}$$

где $d\Phi_x$ и $d\Phi_y$ – элементарные случайные амплитуды, соответствующие колебаниям на частоте ω.

Напомним, что для каждой из двух рассматриваемых функций амплитуды $d\Phi_x$ и $d\Phi_y$ строятся так, чтобы, во-первых, они были центрированы, а, во-вторых, случайные были бы независимы для случайных колебаний, относящихся к разным частотам. Математически эти условия записываются так:

$$M[d\Phi_x(\omega)]=M[d\Phi_y(\omega)]=0,$$

$$M[d\Phi_x^*(\omega_1)\,d\Phi_x(\omega_2)]=S_x(\omega_1)\delta(\omega_2-\omega_1)d\omega_1 d\omega_2,$$

$$M[d\Phi_y^*(\omega_1)\,d\Phi_y(\omega_2)]=S_y(\omega_1)\,\delta(\omega_2-\omega_1)\,d\omega_1\,d\omega_2,$$

где звездочкой помечена операция вычисления комплексно сопряженной величины, $\delta(\omega)$ обозначает дельта-функцию, а функции

$S_x(\omega)$ и $S_y(\omega)$ называются спектральными плотностями, соответственно, процессов X и Y.

В том случае, когда одновременно рассматриваются два процесса, случайные амплитуды можно было бы выбирать по-разному. Как мы видели ранее, в случае одного процесса очень удобно брать амплитуды независимыми друг от друга для разных частот. Эту идею используют и в совместном спектральном представлении.

Потребуем, чтобы в представлениях (1) и (2) амплитуды $d\Phi_x$ и $d\Phi_y$ также были бы независимы на разных частотах. Математически это записывается в виде:

$$M[d\Phi_x^*(\omega_1)\, d\Phi_y(\omega_2)] = S_{xy}(\omega_1)\,\delta(\omega_2-\omega_1)\,d\omega_1 d\omega_2 \quad (3)$$

где функция $S_{xy}(\omega)$ называется взаимной спектральной плотностью процессов X и Y.

2° Связь с взаимной корреляционной функцией

$$R_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau} S_{xy}(\omega)\,d\omega. \quad (4)$$

Это соотношение, как и в случае индивидуальной спектральной плотности отдельно взятого процесса, также часто называют теоремой Винера-Хинчина. Если предположить, что взаимная корреляционная функция $R_{xy}(\tau)$ абсолютно интегрируема, то есть

$$\int_{-\infty}^{\infty} |R_{xy}(\tau)|\,d\tau < \infty,$$

то тогда справедливо и обратное выражение спектральной плотности через корреляционную функцию

$$S_{xy}(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\tau} R_{xy}(\tau)\,d\tau. \quad (5)$$

3°. Другие свойства взаимной спектральной плотности

Ряд свойств взаимной спектральной плотности вытекает из соответствующих свойств взаимной корреляционной функции. В частности, полагая в (4) $\tau=0$, получим

$$k_{xy}=R_{xy}(0)=\int_{-\infty}^{\infty} S_{xy}(\omega)\,d\omega, \tag{6}$$

где k_{xy} обозначает корреляционный момент между X и Y.

Свойство четности спектральной плотности отдельно взятого процесса видоизменения так:

$$S_{xy}(-\omega)=S^{*}_{xy}(\omega). \tag{7}$$

Для доказательства (7) в выражении (5) следует заменить ω на $-\omega$ и одновременно перейти от переменной интегрирования τ к новой переменной интегрирования $s=-\tau$.

Что касается изменения порядка индексов, то

$$S_{yx}(\omega)=S_{xy}(-\omega), \tag{8}$$

или

$$S_{yx}(\omega)=S^{*}_{xy}(\omega). \tag{9}$$

4°. Спектральная плотность решения системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

Рассмотрим систему линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\dot{Y}_j+\sum_{l=1}^{n} a_{jl}Y_l = X_j, \quad (j=\overline{1,n}). \tag{10}$$

Допустим, что система (10) устойчива

характеристического уравнения

$$\Delta(\lambda_s) = 0, \quad (s = \overline{1,n}) \qquad (11)$$

имеют отрицательные вещественные части. В явном виде характеристический полином выражается в форме

$$\Delta(\lambda) = \det(A + \lambda E), \qquad (12)$$

где матрица A есть матрица системы (10):

$$A = \left\| \frac{a_{11}, \dots, a_{1n}}{a_{n1}, \dots, a_{nn}} \right\|, \qquad (13)$$

а E – единичная матрица порядка n.

Допустим, что все случайные возмущения X_j, стоящие в правой части уравнений (10), стационарны и стационарно связаны. Предположим, что взаимные спектральные плотности $S_{x_e x_k}(\omega)$ известны при всех l и k. Рассмотрим стационарное решение системы (10). Можно показать, что спектральные плотности компонент Y_j даются равенством:

$$S_{y_j}(\omega) = \frac{\sum_{e=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} A^*_{ej}(\omega) A_{kj}(\omega) S_{x_e x_k}(\omega)}{|\Delta(i\omega)|^2}, \qquad (14)$$

а взаимные спектральные плотности между Y_j и Y_m таковы

$$S_{y_j y_m}(\omega) = \frac{\sum_{e=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} A^*_{ej}(\omega) A_{km}(\omega) S_{x_e x_k}(\omega)}{|\Delta(i\omega)|^2}. \qquad (15)$$

В приведенных выражениях $\Delta(i\omega)$ представляет собой характеристический полином (12), взятый при аргументе $\lambda = i\omega$, а $A_{ke}(\omega)$ обозначает алгебраическое дополнение элемента (k, e) в определителе $\Delta(i\omega)$.

Таким образом, спектральный анализ позволяет изучить стационарное решение общей линейной системы вида:

$$\dot{\vec{Y}} + A\vec{Y} = \vec{X}. \qquad (16)$$

Примеры решения задач спектрального анализа линейных систем

Пример 1

Имеется процесс Уленбека — Орнштейна

$$\dot{U} + \alpha U = \sqrt{2\alpha}\,\sigma\,\xi(t), \quad (\alpha > 0, \sigma > 0). \quad (1.1)$$

Получить взаимную спектральную плотность $S_{u\xi}(\omega)$ между стационарным решением этого уравнения и стандартным гауссовским белым шумом ξ.

Решение

Запишем спектральные представления процессов U и ξ:

$$U(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t}\, d\Phi_u(\omega), \quad (1.2)$$

$$\xi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t}\, d\Phi_\xi(\omega).$$

Подставляя представления (1.2) в (1.1), имеем:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t}(i\omega + \alpha)\, d\Phi_u(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t}\sqrt{2\alpha}\,\sigma\, d\Phi_\xi(\omega). \quad (1.3)$$

В силу единственности спектрального разложения следует приравнять коэффициенты при $e^{i\omega t}$ в правой и левой частях равенства (1.3), что дает

$$(i\omega + \alpha)\, d\Phi_u(\omega) = \sqrt{2\alpha}\,\sigma\, d\Phi_\xi(\omega), \quad (1.4)$$

откуда получаем связь между $d\Phi_u$ и $d\Phi_\xi$:

$$d\Phi_u(\omega) = \frac{\sqrt{2\alpha}\,\sigma}{(i\omega + \alpha)}\, d\Phi_\xi(\omega). \quad (1.5)$$

Белый шум ξ характеризуется корреляционной функцией

$$K_\xi(\tau) = \delta(\tau). \quad (1.6)$$

Следовательно, по формуле Винера — Хинчина (см. предыдущее практическое занятие) будем иметь:

$$S_\xi(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\tau} K_\xi(\tau)\, d\tau =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\tau}\delta(\tau)\, d\tau = \frac{1}{2\pi} = \mathrm{const}(\omega). \tag{1.7}$$

Но тогда в соответствии с определением спектральной плотности

$$M\left[d\Phi_\xi^*(\omega_1)\, d\Phi_\xi(\omega_2)\right] = \frac{1}{2\pi}\delta(\omega_2-\omega_1)\,d\omega_1\, d\omega_2. \tag{1.8}$$

Теперь подсчитаем математическое ожидание, стоящее в левой части (3) для случая, когда $X = U$, $Y = \xi$. Имеем согласно (1.5) и (1.8)

$$M\left[d\Phi_u^*(\omega_1)\, d\Phi_\xi^*(\omega_2)\right] =$$

$$= M\left[\frac{\sqrt{2\alpha}\,\sigma}{(\alpha - i\omega)}\, d\Phi_\xi^*(\omega_1)\, d\Phi_\xi(\omega_2)\right] =$$

$$= \frac{\sqrt{2\alpha}\,\sigma}{(\alpha - i\omega)} M\left[d\Phi_\xi^*(\omega_1)\, d\Phi_\xi(\omega_2)\right] = \tag{1.9}$$

$$= \frac{\sqrt{2\alpha}\,\sigma}{(\alpha - i\omega)}\frac{1}{2\pi}\delta(\omega_2-\omega_1)\,d\omega_1\, d\omega_2.$$

Сравнивая полученное выражение с определением взаимной спектральной плотности (3), делаем вывод, что

$$S_{u\xi}(\omega) = \frac{1}{2\pi}\frac{\sqrt{2\alpha}\,\sigma}{(\alpha - i\omega)}. \tag{1.10}$$

<u>Пример 2</u>

Имеются два процесса Уленбека-Орнштейна вида

$$\dot U_1 + \alpha_1 U_1 = \sqrt{2\alpha_1}\,\sigma_1\,\xi(t),$$
$$\dot U_2 + \alpha_2 U_2 = \sqrt{2\alpha_2}\,\sigma_2\,\xi(t), \tag{2.1}$$

у которых в роли возмущения выступает один и тот же белый шум ξ. Определить взаимную спектральную плотность $S_{u_1 u_2}(\omega)$.

Решение

Прежде, чем излагать само решение, сделаем ряд замечаний. Во-первых, важно, что в уравнениях (2.1) стоит один и тот же случайный шум $\xi(t)$. Если бы шумы в уравнениях были разные и независимые, то тогда связь между U_1 и U_2 отсутствовала бы и, очевидно, $S_{u_1 u_2}(\omega)$ тождественно равнялась бы нулю.

Второе замечание касается физической трактовки задачи. Процессы U_1 и U_2 могли бы, например, описывать скорости двух различных броуновских частиц, движущихся с вязким трением в одном и том же потоке жидкости или газа. Различие в числовых параметрах α_i и σ_i могло быть обусловлено, например, разным размером и массой частиц.

Перейдем непосредственно к решению. По аналогии с формулой (1.5) находим

$$
\begin{aligned}
d\Phi_{u_1}(\omega) &= \frac{\sqrt{2\alpha_1}\,\sigma_1}{(i\omega+\alpha_1)}\, d\Phi_\xi(\omega), \\
d\Phi_{u_2}(\omega) &= \frac{\sqrt{2\alpha_2}\,\sigma_2}{(i\omega+\alpha_2)}\, d\Phi_\xi(\omega).
\end{aligned}
\qquad (2.2)
$$

Если теперь подставить выражения (2.2) в формулу (3), определяющую взаимную спектральную плотность

$$
M\left[d\Phi_{u_1}^{*}(\omega_1)\, d\Phi_{u_2}(\omega_2)\right] = S_{u_1u_2}(\omega_1)\,\delta(\omega_2-\omega_1)\,d\omega_1 d\omega_2 \qquad (2.3)
$$

то после рассуждений, аналогичных (1.9), с учетом (1.8) находим

$$
S_{u_1u_2}(\omega) = \frac{\sqrt{\alpha_1\alpha_2}\,\sigma_1\sigma_2}{\pi(\alpha_1-i\omega)(\alpha_2+i\omega)}. \qquad (2.4)
$$

Пример 3

Имеется случайный процесс Y, определяемый уравнением

$$\ddot{Y} + 2\alpha\dot{Y} + \beta Y = X, \quad (\alpha > 0, \beta > 0), \tag{3,1}$$

где возмущение X представляет собой стационарное решение следующего уравнения

$$\dot{X} + \gamma X = c\xi, \quad (c > 0) \tag{3,2}$$

причем ξ обозначает гауссовский стандартный белый шум. Требуется найти взаимную спектральную плотность между Y и X

Решение

Рассмотрим далее два способа решения задачи.

Способ 1

Будем рассматривать только уравнение (3,1), приняв во внимание, что спектральная плотность процесса X согласно общим правилам спектральной теории, изложенным на предыдущем занятии, дается равенством

$$S_x(\omega) = \frac{c^2}{2\pi(\omega^2+\gamma^2)}. \tag{3,3}$$

Здесь множитель $1/2\pi$ согласно (1,7) представляет собой спектральную плотность ξ.

Далее, вводя спектральные представления для процессов Y и X, получаем, что случайные амплитуды $d\Phi_y$ и $d\Phi_x$ будут связаны равенством, аналогичным (1,5) и (2,2)

$$d\Phi_y(\omega) = \frac{d\Phi_x(\omega)}{(\beta + 2i\alpha\omega - \omega^2)}. \tag{3,4}$$

Теперь подставим это выражение в определение взаимной спектральной плотности $S_{yx}(\omega)$

$$M[d\Phi_y^*(\omega_1)\,d\Phi_x(\omega_2)] = \frac{1}{(\beta-2i\alpha\omega-\omega^2)}\,M[d\Phi_x^*(\omega_1)\,d\Phi_x(\omega_2)], \quad (3.5)$$

Вследствие определения спектральной плотности $S_x(\omega)$ можем записать с учетом (3.3)

$$M[d\Phi_x^*(\omega_1)\,d\Phi_x(\omega_2)] = S_x(\omega_1)\,\delta(\omega_2-\omega_1)\,d\omega_1 d\omega_2 = \frac{c^2}{2\pi(\omega^2+\gamma^2)}\,\delta(\omega_2-\omega_1)\,d\omega_1 d\omega_2, \quad (3.6)$$

что дает в выражении (3.5)

$$M[d\Phi_y^*(\omega_1)\,d\Phi_x(\omega_2)] = \frac{c^2}{2\pi(\omega^2+\gamma^2)(\beta-2i\alpha\omega-\omega^2)}\,\delta(\omega_2-\omega_1)\,d\omega_1 d\omega_2, \quad (3.7)$$

а это означает, что

$$S_{yx}(\omega) = \frac{c^2}{(\omega^2+\gamma^2)(\beta-2i\alpha\omega-\omega^2)}. \quad (3.8)$$

Способ 2

В этом способе мы вводим трехмерный случайный процесс (Y_1, Y_2, Y_3), компоненты которого имеют смысл $Y_1 = Y$, $Y_2 = \dot{Y}$, $Y_3 = X$. Тогда исходные уравнения преобразуются к виду (16)

$$\begin{cases} \dot{Y}_1 = Y_2, \\ \dot{Y}_2 = -\beta Y_1 - 2\alpha Y_2 + Y_3, \\ \dot{Y}_3 = -\gamma Y_3 + c\xi. \end{cases} \quad (3.9)$$

Характеристический многочлен (12) системы (3.9) имеет вид

$$\Delta(\lambda)=\begin{vmatrix} \lambda, & -1, & 0 \\ \beta, & \lambda+2\alpha, & -1 \\ 0, & 0, & \lambda+\gamma \end{vmatrix}. \qquad (3.10)$$

По формуле (15) имеем:

$$S_{y_1y_3}(\omega)=\frac{c^2}{2\pi}\;\frac{A^*_{31}(\omega)\,A_{33}(\omega)}{|\Delta(i\omega)|^2}, \qquad (3.11)$$

где $A_{ke}(\omega)$ обозначает алгебраическое дополнение элемента (k,e) в определителе $\Delta(i\omega)$. При записи (3.11) учтено, что из всех спектральных плотностей $S_{x_e x_k}(\omega)$ в нашем случае отлична от нуля только плотность, отвечающая $k=e=3$, которая равна $\frac{c^2}{2\pi}$. (3.11).

Подсчитаем числитель и знаменатель. Имеем

$$\Delta(\lambda)=(\lambda+\gamma)(\lambda^2+2\lambda\alpha+\beta), \qquad (3.12)$$

поэтому

$$|\Delta(i\omega)|=(\omega^2+\gamma^2)(\beta+2i\alpha\omega-\omega^2)(\beta-2i\alpha\omega-\omega^2). \qquad (3.13)$$

Алгебраические дополнения в числителе (3.11) подсчитываются так:

$$A_{31}(\omega)=\begin{vmatrix} -1, & 0 \\ i\omega+2\alpha, & -1 \end{vmatrix}=1, \qquad (3.14)$$

$$A_{33}(\omega)=\begin{vmatrix} i\omega, & -1 \\ \beta, & i\omega+2\alpha \end{vmatrix}=\beta+2i\alpha\omega-\omega^2.$$

Подставляя (3.14) в (3.11), будем иметь

$$S_{y_1y_3}(\omega)=\frac{c^2}{2\pi(\omega^2+\gamma^2)(\beta-2i\alpha\omega-\omega^2)}, \qquad (3.15)$$

что, естественно, совпадает с (3.8)