Лекция 13.04 – 2

Связь спектральной плотности с корреляционной функцией

На предыдущей лекции было построено спектральное представление стационарной случайной функции $X(t)$ в виде интеграла вида

$$X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t}\, d\Phi_x(\omega), \qquad (1)$$

где элементарные случайные амплитуды $d\Phi_x(\omega)$ удовлетворяют двум условиям

$$M[d\Phi_x(\omega)] = 0, \qquad (2)$$

$$M[d\Phi_x^*(\omega_1)\, d\Phi_x(\omega_2)] = S_x(\omega_1)\,\delta(\omega_2-\omega_1)\, d\omega_1 d\omega_2, \qquad (3)$$

из которых первое обеспечивает центрированность функции $X(t)$, а второе – ее стационарность. Функция $S_x(\omega)$ называется <u>спектральной плотностью</u> процесса $X(t)$.

Возникает вопрос, как введенная равенством (3) функция $S_x(\omega)$ связана с другими вероятностными характеристиками случайной функции $X(t)$, в частности, с ее корреляционной функцией.

Подсчитаем корреляционную функцию $K_x(t_1,t_2)$ на основе определения

$$K_x(t_1,t_2) = M[\overset{\circ}{X}{}^*(t_1)\,\overset{\circ}{X}(t_2)]. \qquad (4)$$

Продолжая считать, что $\bar{x} = 0$ и используя представление (1), получим

$$K_x(t_1,t_2) = M\Big[\iint_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega_1 t_1 + i\omega_2 t_2}\, d\Phi^*(\omega_1)\, d\Phi(\omega_2)\Big], \qquad (5)$$

что с учетом (3) дает

$$K_x(t_1,t_2) = \iint_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega_1 t_1 + i\omega_2 t_2}\, M[d\Phi^*(\omega_1)\, d\Phi(\omega_2)] =$$

$$= \iint_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega_1 t_1 + i\omega_2 t_2}\, S_x(\omega_1)\,\delta(\omega_2-\omega_1)\, d\omega_1 d\omega_2. \qquad (6)$$

Как известно, дельта-функция $\delta(x)$ определена соотношением
$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-a) f(x) dx = f(a) \qquad (7)$$
для любой непрерывной функции $f(x)$. Используя свойство (7), можно выполнить одно интегрирование по ω_2 в равенстве (6), что дает
$$K_x(t_1,t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega_1(t_2-t_1)} S_x(\omega_1) d\omega_1 . \qquad (8)$$
Это равенство показывает, что, во-первых, корреляционная функция процесса, представленного в виде (1), зависит только от разности аргументов $\tau = t_2 - t_1$
$$K_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau} S_x(\omega) d\omega, \qquad (9)$$
и, во-вторых, $K_x(\tau)$ представляет собой преобразование Фурье от спектральной плотности. Это утверждение носит название <u>теоремы Винера – Хинчина</u>.

Напомним, что спектральное разложение (1) было выведено в предположении, что корреляционная функция абсолютно интегрируема по всей оси
$$\int_{-\infty}^{\infty} |K_x(\tau)| d\tau < \infty . \qquad (10)$$
При этом допущении справедлива формула обратного преобразования Фурье[1]
$$S_x(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\tau} K_x(\tau) d\tau . \qquad (11)$$
Если положить в равенстве (9) $\tau = 0$, то получим
$$\sigma_x^2 = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) d\omega . \qquad (12)$$
Далее мы покажем, что спектральная

---
1) Титчмарш Е. Введение в теорию интегралов Фурье. М.–Л.: Гостехиздат, 1948.

плотность $S_x(\omega)$ неотрицательна. При этом дисперсии процесса можно придать энергетический смысл. Например, если процесс $X(t)$ задает скорость некоторого тела, то дисперсия $X(t)$ будет пропорциональна средней кинетической энергии тела, если $X(t)$ означает ток, протекающий через проводник, тогда дисперсия пропорциональна среднему количеству тепла, выделяемому в проводнике и т. д. При такой трактовке равенство (12) можно рассматривать как соотношение, задающее распределение средней энергии случайных колебаний по частотам. Благодаря этому спектральную плотность часто называют <u>энергетическим спектром</u>.

Свойства спектральной плотности

В этом параграфе мы систематизируем основные свойства этой функции, включая и те, о которых речь шла ранее по ходу изложения.

1° Неотрицательность спектральной плотности

Тот факт, что спектральная плотность неотрицательна, составляет предмет так называемой <u>теоремы Бохнера–Хинчина</u>, доказанной еще в тридцатые годы прошлого века. Неотрицательность $S_x(\omega)$ является следствием того, что корреляционная функция $K_x(\tau)$ является положительно определенной, а по теореме Винера–Хинчина две эти функции связаны формулами прямого и обратного преобразования Фурье (9) и (11).

Для доказательства воспользуемся свойством положительной определенности $K_x(\tau)$, согласно которому

$$\iint_{-\infty}^{\infty} K_x(t_2-t_1)\,\eta(t_1)\,\eta(t_2)\,dt_1\,dt_2 \geq 0 \qquad (13)$$

для любой функции $\eta(t)$, интегрируемой в $(-\infty,\infty)$. Подставим в этот интеграл выражение корреляционной функции по теореме Винера-Хинчина (9), что дает

$$\iiint_{-\infty}^{\infty} e^{i(t_2-t_1)\omega}\,\eta(t_1)\,\eta(t_2)\,S_x(\omega)\,dt_1 dt_2 d\omega \geq 0. \tag{14}$$

Введем в рассмотрение интеграл вида

$$\varphi(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\omega}\eta(t)\,dt, \tag{15}$$

представляющий преобразование Фурье от функции η. Тогда неравенство (14) преобразуется к виду

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(\omega)|^2 S_x(\omega)\,d\omega \geq 0. \tag{16}$$

Возьмем в качестве функции φ функцию вида

$$\varphi(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega_0 \leq \omega \leq \omega_0+\varepsilon, \\ 0, & \omega<\omega_0,\ \omega>\omega_0+\varepsilon \end{cases} \tag{17}$$

при достаточно малом ε. Тогда неравенство (16) перепишется в виде

$$\int_{\omega_0}^{\omega_0+\varepsilon} S_x(\omega)\,d\omega \geq 0. \tag{18}$$

Считая ε достаточно малым, выразим интеграл (18) с помощью теоремы о среднем

$$S_x(\omega_0)\,\varepsilon \geq 0, \tag{19}$$

откуда следует, что $S_x(\omega)$ неотрицательна в точке $\omega=\omega_0$. Поскольку ω_0 было произвольным, неотрицательность имеет место для всех значений ω.

2°. Связь с дисперсией процесса

Она выражается интегралом (12).

3°. Выражение спектральной плотности через корреляционную функцию

При соблюдении условия (10) это выражение дается формулой обратного преобразования Фурье (11).

4°. Свойство четности спектральной плотности

Вычислим по формуле (11) значение спектральной плотности при аргументе, равном значению $-\omega$, что дает

$$S_x(-\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau} K_x(\tau)\,d\tau. \qquad (20)$$

Проделаем в интеграле (20) замену переменной интегрирования $s=-\tau$, причем воспользуемся свойством четности корреляционной функции

$$K_x(-\tau) = K_x(\tau). \qquad (21)$$

После очевидных стандартных преобразований получим с учетом (11)

$$S_x(-\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega s} K_x(s)\,ds = S_x(\omega). \quad (22)$$

Тем самым четность $S_x(\omega)$ установлена

5°. Порядок убывания спектральной плотности на бесконечности

Из неотрицательности функции $S_x(\omega)$ и ее интегрируемости по промежутку $(-\infty, \infty)$ следует, что спектральная плотность на бесконечности должна убывать быстрее, чем $\frac{1}{\omega}$. Например, допускается порядок убывания $\frac{1}{\omega^{1+\alpha}}$, где α – любое сколь угодно малое положительное число.

Из приведенных свойств можно сделать вывод, что спектральная плотность напоминает плотность вероятности симметричного относительно нуля закона распределения, конечно, кроме выполнения условия нормировки последнего.

Спектральная плотность производной стационарного случайного процесса

Сразу же можно сказать, что

сама по себе задача спектрального анализа производной вполне законна и логична, так как производная стационарного процесса сохраняет свойство стационарности. Нужно только наложить соответствующие ограничение на спектральную плотность дифференцируемого процесса.

Здесь удобнее всего исходить из соотношения корреляционной теории.

$$K_v(\tau) = -\frac{d^2 K_x(\tau)}{d\tau^2}. \tag{23}$$

С одной стороны по теореме Винера-Хинчина

$$K_v(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau} S_v(\omega)\, d\omega. \tag{24}$$

С другой стороны согласно (23)

$$K_v(\tau) = -\frac{d^2 K_x(\tau)}{d\tau^2} = -\frac{d^2}{d\tau^2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau} S_x(\omega) d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau}\omega^2 S_x(\omega)\, d\omega, \tag{25}$$

причем дифференцирование под знаком интеграла (25) законно, если функция $\omega^2 S_x(\omega)$ интегрируема в $(-\infty, \infty)$.

Приравнивая подинтегральные выражения в (24) и (25), получаем формулу дифференцирования в терминах спектрального анализа

$$S_v(\omega) = \omega^2 S_x(\omega). \tag{26}$$

Таким образом, для получения спектральной плотности производной достаточно всего лишь умножить спектральную плотность дифференцируемого процесса на квадрат частоты. Это правило гораздо проще, чем ранее рассмотренные правила дифференцирования во временной области.

Для выполнения правила (26) плотность $S_v(\omega)$ должна убывать на бесконечности быстрее, чем $\frac{1}{\omega}$, следовательно, от $S_x(\omega)$ требуется убывание более быстрое, чем $\frac{1}{\omega^3}$. Это дает возможность сразу сделать вывод о дифференцируемости процесса $X(t)$.

Совершенно аналогично решается вопрос о спектральном анализе производных старших порядков. Пусть, например, $Y(t)=X^{(k)}(t)$. Тогда, повторяя рассуждения, приведенные выше, последовательно k раз, получим

$$S_y(\omega)=\omega^{2k}\,S_x(\omega), \quad (k\geqslant 1), \tag{27}$$

причем формула (27) справедлива лишь в том случае, когда $S_x(\omega)$ убывает на бесконечности быстрее, чем $\frac{1}{\omega^{2k+1}}$.

Спектральная плотность линейной комбинации производных

Теперь рассмотрим процесс $Y(t)$, представленный в виде

$$Y(t)=Q_n(p)\,X(t), \tag{28}$$

где $Q_n(x)$ представляет собой некоторый полином степени n

$$Q_n(x)=q_0x^n+q_1x^{n-1}+\ldots+q_{n-1}x+q_n \tag{29}$$

с постоянными коэффициентами, в который в выражении (28) в качестве аргумента подставлен оператор дифференцирования по времени $p=\frac{d}{dt}$.

Найдем спектральную плотность Y. Эта задача корректна, так как процесс (28), очевидно, будет стационарной функцией, если только все производные, фигурирующие в (28) существуют, а это будет иметь место при условии, что $S_x(\omega)$ убывает на бесконечности быстрее, чем $\frac{1}{\omega^{2n+1}}$

Представим процесс $X(t)$ в виде спектрального представления (1), а процесс $Y(t)$ в виде аналогичного спектрального представления

$$Y(t)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t}\, d\Phi_y(\omega). \qquad (30)$$

Если подействовать на процесс X с помощью оператора $Q_n(p)$, то, очевидно, получим

$$Y(t)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} Q_n(i\omega)\, d\Phi_x(\omega). \qquad (31)$$

Благодаря единственности спектрального разложения получаем следующую связь между элементарными случайными амплитудами $d\Phi_y$ и $d\Phi_x$, взятыми на одной и той же частоте ω:

$$d\Phi_y(\omega)=Q_n(i\omega)\, d\Phi_x(\omega). \qquad (32)$$

Теперь воспользуемся определением спектральной плотности. Имеем,

$$M[d\Phi_y^*(\omega_1)\, d\Phi_y(\omega_2)] = Q_n^*(i\omega_1)\, Q_n(i\omega_2).$$

$$M[d\Phi_x^*(\omega_1)\, d\Phi_x(\omega_2)] = \qquad (33)$$

$$Q_n(-i\omega_1)\, Q_n(i\omega_2)\, S_x(\omega_1)\, \delta(\omega_2-\omega_1)\, d\omega_1 d\omega_2 =$$

$$= Q_n(-i\omega_1)\, Q_n(i\omega_1)\, S_x(\omega_1)\, \delta(\omega_2-\omega_1)\, d\omega_1 d\omega_2.$$

Последний переход в (33) возможен благодаря тому, что в выражении присутствует дельта-функция от аргумента $\omega_2-\omega_1$, обращающаяся в нуль при всех $\omega_2 \neq \omega_1$.

На основании определения спектральной плотности процесса $Y(t)$ заключаем, что

$$S_y(\omega) = Q_n(-i\omega)\, Q_n(i\omega)\, S_x(\omega) = |Q_n(i\omega)|^2 S_x(\omega). \qquad (34)$$

Отметим, что ранее полученное выражение (26) является частным случаем (34), если принять $n=1$ и положить $Q_1(x)=x$.

Спектральная плотность решения линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами и стационарной правой частью

Рассмотрим дифференциальное уравнение вида

$$Q_n(p)\,Y(t) = P_m(p)\,X(t), \tag{35}$$

где $Q_n(x)$ и $P_m(x)$ – полиномы, соответственно, степеней n и m, $p=\frac{d}{dt}$ – оператор дифференцирования, $X(t)$ – стационарный случайный процесс с известной спектральной плотностью $S_x(\omega)$. В корреляционной теории было показано, что, если система устойчива, то по прошествии достаточно длительного времени процесс $Y(t)$ стабилизируется и становится стационарным. Требуется определить его спектральную плотность $S_y(\omega)$.

Введем в рассмотрение новый процесс

$$Z(t) = Q_n(p)\,Y(t). \tag{36}$$

В силу уравнения (35) справедливо и другое представление

$$Z(t) = P_m(p)\,X(t). \tag{37}$$

Согласно результатам предыдущего параграфа можно записать два альтернативных выражения для спектральной плотности Z:

$$S_z(\omega) = |Q_n(i\omega)|^2 S_y(\omega), \quad S_z(\omega) = |P_m(i\omega)|^2 S_x(\omega). \tag{38}$$

Исключая из этих равенств $S_z(\omega)$, получаем

$$S_y(\omega) = \frac{|P_m(i\omega)|^2}{|Q_n(i\omega)|^2}\,S_x(\omega). \tag{39}$$

Отметим, что коэффициент, стоящий в правой части (39) в качестве множителя при $S_x(\omega)$, часто называют передаточной функцией системы.