Лекция 29.05

Формула Столла о паритете опционов колл и пут

На предыдущей лекции была найдена рациональная опциона колл в модели Блэка–Шоулза. Для полноты изложения теории, естественно, следовало бы вывести аналогичную формулу и для опциона пут. Разумеется, эту формулу можно было бы получить методом, изложенным ранее, а именно взять общее выражение цены опциона при произвольной платежной функции, а затем подставить в него выражение платежной функции опциона типа пут.

Существует менее прямой, но зато более короткий и простой способ вывода формулы Блэка–Шоулза для опционов пут, основанный на формуле Столла паритета опционов колл и пут. Эта формула гласит, что цены опционов колл и пут, выписанных на один и тот же базовый актив с одним и тем же сроком исполнения T и одной и той же ценой исполнения K связаны равенством

$$P + S_0 = C + Ke^{-rT}, \qquad (1)$$

где P и C, соответственно, стоимости опционов пут и колл, S_0 — начальная цена базового актива, r — процентная ставка по банковским вкладам.

Отметим, что в формуле Столла (1) величина Ke^{-rT} представляет собой дисконтированную цену исполнения обоих опционов. Это та сумма, которую надо положить в банк в момент $t=0$, чтобы к моменту $t=T$ она подросла за счет процентов по вкладам до значения K — цены исполнения опционов.

Докажем формулу (1). Для этого рассмотрим (B, S) — рынок, на котором имеются четыре вида активов: 1) безрисковый актив (банковский счет); 2) рисковый базовый актив (акция); 3) производный инструмент в виде опциона — колл на акцию; 4) производный инструмент в виде опциона пут на ту же акцию, с тем же сроком исполнения и с той же ценой исполнения.

Сформируем два портфеля ценных бумаг $\vec{\gamma}^{(1)}$ и $\vec{\gamma}^{(2)}$. В первый портфель включаем все те активы, цены которых выписаны в левой части равенства (1), а именно, опцион пут и одна акция. При той нумерации активов, которая была дана выше, в момент $t = 0$ имеем

$$\vec{\gamma}^{(1)}(0) = \{0, 1, 0, -1\}. \qquad (2)$$

Во второй портфель включаем дисконтированную цену исполнения Ke^{-rT} на банковском счете, а также опцион колл

$$\vec{\gamma}^{(2)}(0) = \{Ke^{-rT}, 0, -1, 0\}. \qquad (3)$$

Посмотрим, как изменится содержимое портфелей в момент $t = T$ исполнения опционов. Вначале обратимся к первому портфелю $\vec{\gamma}^{(1)}(T)$. Если окажется, что $S(T) < K$ то тогда выгодно предъявить опцион и потребовать, чтобы акция из портфеля была куплена по цене K, превышающей спотовую цену. Следовательно, у первого инвестора после продажи акции останется сумма K на банковском счете. Если же $S(T) > K$, то продавать по опциону акцию невыгодно, она стоит дороже, и у инвестора останется акция. Таким образом

$$\vec{\gamma}^{(2)}(T) = \begin{cases} \{K, 0, 0, 0\}, & S(T) < K, \\ \{0, 1, 0, 0\}, & S(T) > K. \end{cases} \qquad (4)$$

Теперь посмотрим, как изменится

второй портфель. Положенная в банк сумма, равная дисконтированной цене исполнения, за время T подрастет до цены исполнения. Если окажется, что $S(T) > K$, то второй инвестор заплатит K денежных единиц за акцию, и в портфеле останется акция. Если же $S(T)$ будет меньше K, то акцию покупать невыгодно, и на банковском счете останется сумма K. В результате получим

$$\vec{\gamma}^{(2)}(T) = \begin{cases} \{0, 1, 0, 0\}, & S(T) > K, \\ \{K, 0, 0, 0\}, & S(T) < K. \end{cases} \qquad (5)$$

Поскольку независимо от значения курсовой стоимости акции оба портфеля оказались эквивалентными при $t = T$, они будут эквивалентны по стоимости и при $t = 0$, то есть выполняется формула Столла (1).

Формула Блэка-Шоулза для опциона пут европейского типа

Рассмотрим формулу Блэка-Шоулза для опциона колл

$$C = S_0 F(y_1) - K e^{-rT} F(y_2). \qquad (6)$$

Выразим стоимость опциона пут на основании формулы Столла (1)

$$P = C - S_0 + K e^{-rT}. \qquad (7)$$

Подставляя значение C из (6) в (7), получим

$$P = K e^{-rT} (1 - F(y_2)) - S_0 (1 - F(y_1)). \qquad (8)$$

Воспользуемся приведенным на прошлой лекции выражением функции распределения

$$F(y) = \frac{1}{2} [1 + \Phi(y)] \qquad (9)$$

через интеграл вероятностей

$$\Phi(y) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^y e^{-\frac{t^2}{2}} dt. \qquad (10)$$

Имеем согласно (9) с учетом нечетности Φ

$$1-F(y)=\frac{1}{2}\left[1-\Phi(y)\right]=\frac{1}{2}\left[1+\Phi(-y)\right]=F(-y). \qquad (11)$$

Тогда выражение (8) можно переписать так:

$$P = Ke^{-rT}F(-y_2) - S_0 F(-y_1), \qquad (12)$$

что и дает формулу для стоимости опциона пут. Эта формула включает те же слагаемые, что в случае опциона колл, но произошла смена знака перед самими слагаемыми и у аргументов функции распределения нормального закона.

Прямой вывод формулы Блэка-Шоулза для опциона пут

Выведем теперь для контроля правильности формулы (12) ее другим способом. Платежная функция опциона-пут может быть записана в виде

$$f_T(S(T)) = (K - S(T))^+. \qquad (13)$$

Действительно, опцион пут — это опцион на продажу актива. Если в момент T окажется, что $S(T) < K$, то тогда, предъявляя опцион, можно будет продать имеющийся актив выше его рыночной стоимости $S(T)$, получив доход $K-S(T)$. В противном случае при $S(T) > K$ продавать актив ниже его рыночной стоимости нет смысла, а доход от продажи обращается в нуль. Платежная функция такого опциона представлена на рис.1

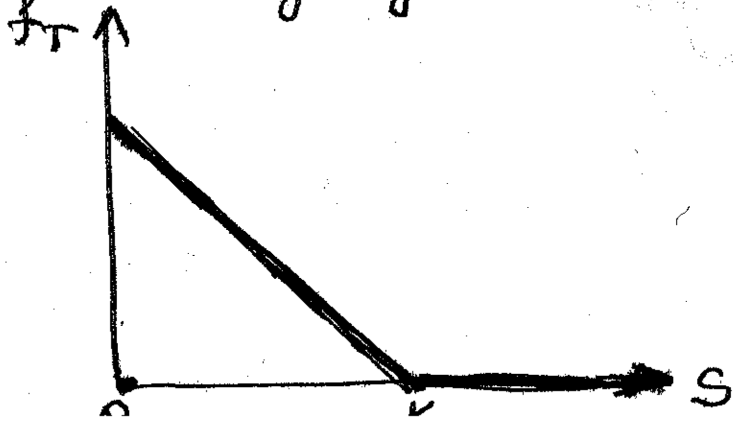

Рис.1 Платежная функция опциона пут европейского типа с ценой исполнения K.

Явное выражение стоимости пут опциона представляется интегралом

$$P = e^{-rT}\int_{-\infty}^{\infty}\left(K - S_0 e^{rT + x - \frac{\sigma^2}{2}T}\right)^{+}\frac{e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2 T}}}{\sqrt{2\pi T}\,\sigma}\,dx. \qquad (14)$$

В круглых скобках (14) здесь стоит взятое со знаком минус выражение, которое присутствовало в случае опциона колл. Оно обращается в нуль при том же самом значении аргумента

$$x_* = \ln\frac{K}{S_0} - \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T, \qquad (15)$$

но интеграл (14) фактически сохранится лишь для полуоси $(-\infty, x^*)$ в виде

$$P = e^{-rT}\int_{-\infty}^{\ln\frac{K}{S_0} - \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T}\left(K - S_0 e^{rT + x - \frac{\sigma^2}{2}T}\right)\frac{e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2 T}}}{\sqrt{2\pi T}\,\sigma}\,dx. \qquad (16)$$

Повторяя рассуждения предыдущей лекции, этот интеграл может быть преобразован к виду

$$P = K e^{-rT}\int_{-\infty}^{-\ln\frac{S_0}{K} - \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T}\frac{e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2 T}}}{\sqrt{2\pi T}\,\sigma}\,dx - S_0\int_{-\infty}^{-\ln\frac{S_0}{K} - \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)T}\frac{e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2 T}}}{\sqrt{2\pi T}\,\sigma}\,dy, \qquad (17)$$

что после стандартного преобразования интегралов приводит к ранее доказанной другим способом формуле (12).