Занятие 9. Стохастические дифференциальные уравнения. Формула Ито.

Теория

1° Понятие стохастического дифференциального уравнения

В физических приложениях стохастические дифференциальные уравнения (СДУ) часто записывают с использованием процесса белого шума $\xi(t)$, который имеет ясную и понятную, наглядную физическую интерпретацию. Например, в теории броуновского движения воздействие, приложенное к броуновской частице, представляет собой совокупность коротких, частых и независимых толчков, обусловленных соударениями молекул жидкости или газа.

С математической точки зрения запись СДУ с помощью белого шума не является вполне строгой и корректной. Еще в середине прошлого века Дж. Дуб предложил записывать СДУ в дифференциалах с использованием винеровского процесса. Рассмотрим вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ и определим на нем стандартный винеровский процесс $W(t)$. Тогда СДУ запишется в виде

$$dX = \varphi(t, X)\,dt + \psi(t, X)\,dW, \qquad (1)$$

где φ и ψ – заданные функции.

В общей теории СДУ доказаны теоремы существования и единственности решения СДУ. Для процессов, которые мы рассматриваем в нашем курсе (винеровский процесс, процесс Башелье, геометрическое броуновское движение, процесс Уленбека–Орнштейна и т.п.) решение существует и единственно, поэтому эти вопросы мы оставим в стороне, считая, что условия соответствующих теорем выполнены.

2° Порядок малости слагаемых, входящих в СДУ

Выражение (1) часто называют *стохастическим дифференциалом* процесса X. Он включает два слагаемых. Первое входит с множителем dt и имеет первый порядок малости по dt. Второе слагаемое имеет порядок $\sqrt{dt}$ (А.Н. Ширяев называет это явление эффектом $\sqrt{dt}$[4]). При малых значениях dt второе слагаемое значительно больше первого и определяет поведение процесса.

3°. Формула Ито

Существуют несколько форм записи СДУ. Основными из них являются СДУ в форме Ито и СДУ в форме Стратоновича. Форма Стратоновича часто используется в физических работах. В работах по финансовой математике обычно используются СДУ в форме Ито.

Правила преобразования СДУ Ито отличаются от привычных правил, применяемых в классическом математическом анализе. Здесь есть специальная формула, позволяющая преобразовывать СДУ Ито. Она называется *формулой Ито*.

Пусть процесс $X(t)$ задается СДУ в форме Ито (1). Допустим, что вводится новая функция

$$Y(t) = \Phi(t, X(t)), \qquad (2)$$

где $\Phi(t,x)$ – заданная функция. Требуется определить, какому СДУ будет удовлетворять вновь введенная функции $Y(t)$. Согласно формуле Ито

$$dY=\left[\frac{\partial\Phi}{\partial t}+\varphi(t,X)\frac{\partial\Phi(t,X)}{\partial X}+\frac{1}{2}\psi^2(t,X)\frac{\partial^2\Phi(t,X)}{\partial X^2}\right]dt + \psi(t,X)\frac{\partial\Phi(t,X)}{\partial X}\,dW \qquad (3)$$

4°. Частный случай формулы Ито, когда X совпадает с базовым винеровским процессом

В этом случае $X\equiv W$, $\varphi\equiv 0$, $\psi\equiv 1$. Тогда $Y=\Phi(t,W)$ имеет стохастический дифференциал

$$dY=\left[\frac{\partial\Phi}{\partial t}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2\Phi(t,W)}{\partial W^2}\right]dt+\frac{\partial\Phi(t,W)}{\partial W}\,dW \qquad (4)$$

5°. Связь СДУ в форме Ито и Стратоновича

Если задано СДУ Ито вида

$$dX=\varphi(t,X)\,dt+\psi(t,X)\,dW, \qquad (5)$$

то ему будет соответствовать СДУ Стратоновича

$$dX=\left[\varphi(t,X)-\frac{1}{2}\psi(t,X)\frac{\partial\psi(t,X)}{\partial X}\right]dt + \psi(t,X)\,dW. \qquad (6)$$

Наоборот, если задано СДУ Стратоновича в форме (5), то соответствующее СДУ Ито выглядит так:

$$dX=\left[\varphi(t,X)+\frac{1}{2}\psi(t,X)\frac{\partial\psi(t,X)}{\partial X}\right]dt + \psi(t,X)\,dW \qquad (7)$$

6. Аналог формулы Ито для СДУ Стратоновича

$$dY=\left[\frac{\partial\Phi}{\partial t}+\varphi(t,X)\frac{\partial\Phi(t,X)}{\partial X}\right]dt+\psi(t,X)\frac{\partial\Phi(t,X)}{\partial X}\,dW. \qquad (8)$$

Формула имеет такой же вид, как для гладких дифференцируемых процессов.

Примеры

Пример 1. Стохастическая экспонента

Рассмотрим функцию
$$Y(t)=\Phi(t,W)=e^{W-\frac{t}{2}}.$$
По формуле Ито (частный случай (4)) имеем:
$$dY=\left[\frac{\partial\Phi}{\partial t}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2\Phi(t,W)}{\partial W^2}\right]dt+\frac{\partial\Phi(t,W)}{\partial W}dW=$$
$$=\left[\Phi\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}\Phi\right]dt+\Phi\,dW=$$
$$=Y\,dW$$
Итак, стохастическая экспонента удовлетворяет СДУ вида
$$dY=Y\,dW$$

Пример 2. Стохастическая формула интегрирования по частям.

Рассмотрим функцию
$$Y=\Phi(t,W)=f(t)W,$$
где $f(t)$ — произвольная дифференцируемая функция. Имеем
$$dY=\left[f'(t)W+\frac{1}{2}0\right]dt+f(t)\,dW.$$
Перепишем это равенство в виде
$$d(f(t)W)=f'(t)W\,dt+f(t)\,dW.$$
Проинтегрируем это уравнение от 0 до t.
$$f(t)W\Big|_0^t=\int_0^t f'(\tau)W(\tau)\,d\tau+\int_0^t f(\tau)\,dW(\tau).$$
Учитывая, что $W(0)=0$ и перенося члены имеем
$$\int_0^t f'(\tau)W(\tau)\,d\tau=f(t)W(t)-\int_0^t f(\tau)\,dW(\tau).$$
Фактически получили обобщение формулы интегрирования по частям.

хотя процесс $W(t)$ является недифференцируемым.

<u>Пример 3</u>. Процесс Башелье

Рассматриваем функцию, линейно зависящую от t и W:

$$Y = \Phi(t, W) = S_0 + \mu t + \sigma W.$$

По формуле Ито:

$$dY = \left[\mu + \frac{1}{2}\cdot 0\right]dt + \sigma\, dW =$$

$$= \mu\, dt + \sigma\, dW.$$

Имеем здесь СДУ с постоянными коэффициентами φ и ψ.

<u>Пример 4</u>. Геометрическое броуновское движение

Пусть теперь

$$Y = \Phi(t, W) = S_0\, e^{\mu t - \frac{\sigma^2}{2} t + \sigma W}.$$

По формуле Ито:

$$dY = \left[\Phi\left(\mu - \cancel{\frac{\sigma^2}{2}}\right) + \frac{1}{2}\Phi\, \cancel{\sigma^2}\right]dt + \Phi\sigma\, dW =$$

$$= \mu\Phi\, dt + \sigma\Phi\, dW.$$

Таким образом, геометрическое броуновское движение удовлетворяет СДУ Ито:

$$dY = \mu Y\, dt + \sigma Y\, dW.$$