Лекция 06.04-2

Теория выбросов (Продолжение 2)

На предыдущей лекции мы рассмотрели некоторые новые задачи, которые можно решать методом Райса, немного видоизменив и модифицировав его. Следует сказать, что за время, прошедшее с момента публикации работ Райса было решено много новых задач такого рода. Например, рассматривались задачи о выбросах многомерных (векторных) процессов из некоторой пространственной области. Другим примером может служить так называемая задача о совпадениях выбросов. В ней рассматривается несколько (в простейшем случае два) процессов и исследуются такие случаи, когда все они имеют одновременно выброс за заданный уровень. Примеры задач подобных перечисленным выше, можно найти в книге В.И.Тихонова и В.И.Хименко [1].

На сегодняшней лекции будет рассмотрен еще один важный в прикладном отношении пример обобщения теории Райса.

Получение закона распределения ординаты процесса в точке экстремума

Как говорилось ранее, анализ экстремумов случайного процесса сводится к классической постановке задачи о выбросах. Но это касается только анализа числа экстремумов. Между тем во многих задачах важно знать, насколько далеко зашла траектория в точке экстремума, то есть знать ординату процесса в точке экстремума. Рассмотрим задачу получения закона распределения ординаты

---

1. Тихонов В.И., Хименко В.И. Выбросы траекторий случайных процессов. М.: Наука, 1987, 304 с.

минимума процесса (см. рис. 1).

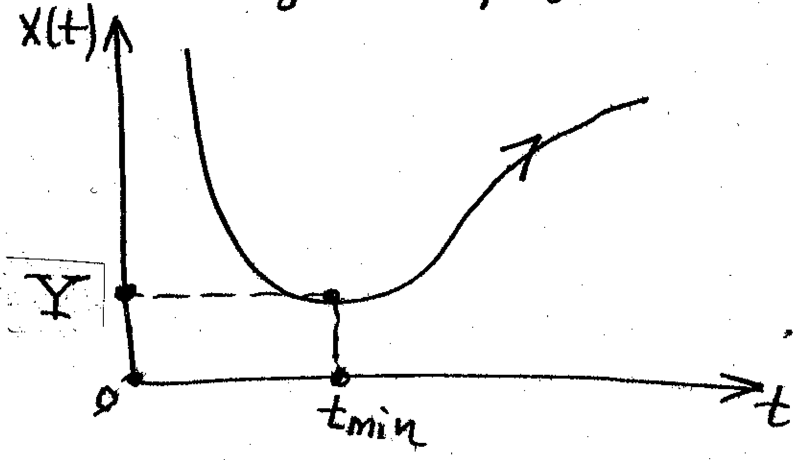

Рис. 1. К получению закона распределения ординаты в точке минимума процесса.

Рассмотрим дважды дифференцируемый процесс $X(t)$. Предположим для простоты, что процесс $X(t)$ стационарен. Обозначим через $f_{x\dot{x}\ddot{x}}(x_0, x_1, x_2)$ трехмерный закон распределения случайных величин $X_0 = X$, $X_1 = \dot{X}$, $X_2 = \ddot{X}$, взятых в один и тот же момент времени. Ординату процесса в точке минимума обозначим через $Y = X_{min}$ (см. рис. 1). Плотность вероятности Y обозначим через $f_{min}(y)$.

Рассмотрим элементарную вероятность того, что ордината минимума Y попадет в интервал от y до $y+dy$, которую обозначим через dP_1. Очевидно, с одной стороны,

$$dP_1 = f_{min}(y)\,dy. \qquad (1)$$

Эту же самую вероятность можно подсчитать несколько иначе. Введем случайное событие $B(t, dt; y, dy)$, состоящее в том, что в интервале $[t, t+dt]$ имел место минимум, причем его ордината попала в интервал $[y, y+dy]$. Математически это событие можно записать в виде одновременного выполнения следующих условий

$$B(t, dt; y, dy) = \{\dot{X}(t) < 0,\ \dot{X}(t+dt) > 0,\ y < X(t) < y+dy,\ \ddot{X}(t) > 0\}. \qquad (2)$$

Вероятность события (2) можно выразить через трехмерный закон распределения $f_{x\dot{x}\ddot{x}}(x_0, x_1, x_2)$ следующим образом:

$$\mathcal{P}\{B(t,dt;y,dy)\} = \left[\int_0^\infty f_{x\dot{x}\ddot{x}}(y,0,x_2)\,x_2\,dx_2\right] dy\,dt. \qquad (3)$$

В принципе, вычисление вероятности (3) ничем не отличается от рассуждений Райса применительно к случаю минимума, нужно только учесть одну вещь: ордината процесса при этом должна попасть в промежуток $[y, y+dy]$.

Введем еще одно случайное событие $A(t,dt)$ состоящее в том, что в точке t имеет минимум с какой угодно ординатой. Согласно классической теории

$$A(t,dt) = \{\dot{X}(t) < 0,\ \dot{X}(t+dt) > 0,\ \ddot{X}(t) > 0\}. \qquad (4)$$

По обычным правилам находим

$$\mathcal{P}\{A(t,dt)\} = \left[\int_0^\infty f_{\dot{x}\ddot{x}}(0,x_2)\,x_2\,dx_2\right] dt. \qquad (5)$$

Нетрудно понять, что вероятность события $Y \in [y, y+dy]$ должна вычисляться при условии, что в точке t имел место выброс, то есть произошло событие (4). Поэтому интересующая нас вероятность должна вычисляться как отношение вероятностей (3) и (5). Таким образом, альтернативное выражение вероятности (1) имеет вид

$$dP_2 = \frac{\mathcal{P}\{B(t,dt;y,dy)\}}{\mathcal{P}\{A(t,dt)\}} = \frac{\int_0^\infty f_{x\dot{x}\ddot{x}}(y,0,x_2)\,x_2\,dx_2}{\int_0^\infty f_{\dot{x}\ddot{x}}(0,x_2)\,x_2\,dx_2}\,dy. \qquad (6)$$

Сравнивая выражения (1) и (5) и приравнивая $dP_1 = dP_2$, находим

$$f_{min}(y) = \frac{\int_0^\infty f_{x\dot{x}\ddot{x}}(y,0,x_2)\,x_2\,dx_2}{\int_0^\infty f_{\dot{x}\ddot{x}}(0,x_2)\,x_2\,dx_2}. \qquad (7)$$

Закон распределения (7), естественно, подчиняется условию нормировки

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_{min}(y)\,dy = 1, \qquad (8)$$

так как в силу согласования многомерных законов распределения

$$f_{\dot{x}\ddot{x}}(x_1,x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{x\dot{x}\ddot{x}}(x_0,x_1,x_2)\,dx_0. \qquad (9)$$

В заключение заметим, что формулы, подобные (7), могут быть получены тем же способом и для ординат максимумов процесса, а также для ординат произвольного экстремума, однако для сокращения объема лекционного материала этот вопрос оставим в стороне.

Получение закона распределения числа выбросов

В самой общей постановке получение закона распределения числа выбросов в заданном интервале является весьма сложной математической задачей. Некоторые результаты здесь могут быть получены методами теории марковских процессов, которые выходят за рамки программы наших лекций. Общее представление об этих методах можно получить, ознакомившись с материалом главы V книги А.А. Свешникова[2]. Здесь будет изложено применение ряда асимптотических методов.

Асимптотические формулы для числа положительных выбросов в случае высокого уровня

Рассмотрим получение закона распределения $N_a^+(t_1,t_2)$ в случае, когда уровень выбросов a является постоянным и достаточно высоким. Под „высоким уровнем" здесь понимается настолько большой уровень, при котором выбросы, следующие друг за другом, можно считать независимыми и „редкими" событиями. Тогда приближенно можно считать, что

---

2) Свешников А.А. Прикладные методы теории случайных функций. СПб: Лань, 2011, 464 с.

число таких выбросов подчиняется закону распределения Пуассона, так что

$$P^{+}_{a,k}(t_1,t_2) = \mathcal{P}\{N^{+}_{a}(t_1,t_2)=k\} = \tag{10}$$

$$= e^{-\overline{n}^{+}_{a}(t_1,t_2)} \frac{[\overline{n}^{+}_{a}(t_1,t_2)]^k}{k!}, \quad (k=\overline{0,\infty}).$$

Особый интерес здесь представляет вероятность полного отсутствия выбросов во всем интервале $[t_1,t_2]$

$$P^{+}_{a,0}(t_1,t_2) = e^{-\overline{n}^{+}_{a}(t_1,t_2)} \tag{11}$$

Среднее число выбросов $\overline{n}^{+}_{a}(t_1,t_2)$ здесь берется из стандартных формул Райса.

Для стационарного процесса, как известно, среднее число выбросов пропорционально длине интервала наблюдения $\tau = t_2 - t_1$

$$\overline{n}^{+}_{a}(t_1,t_2) = \nu^{+}_{a}(t_2-t_1) = \nu^{+}_{a}\tau. \tag{12}$$

Следовательно, в этом случае вероятность отсутствия выбросов зависит от длины интервала экспоненциально,

$$P^{+}_{a,0}(t_1,t_2) = P^{+}_{a,0}(\tau) = e^{-\nu^{+}_{a}\tau}. \tag{13}$$

Интервал между выбросами при этом будет распределен по показательному закону с параметром ν^{+}_{a}.

В заключение этого раздела отметим, что похожие формулы можно получить и для отрицательных выбросов, но только если уровень выбросов задается очень низким, так что отрицательные выбросы по-прежнему оказываются редкими событиями.

Асимптотические формулы в случае длинного интервала наблюдения

Рассмотрим, для примера, получение приближенного закона распределения числа положительных выбросов $N^{+}_{a}(t_1,t_2)$ в предположении, что интервал наблюдения

$[t_1,t_2[$ имеет большую длину t_2-t_1. Напомним, что в соответствии с методом счетчиков пересечений число выбросов может быть представлено в виде суммы

$$N_a^+(t_1,t_2)=\sum_{j=1}^{n}\xi_j, \qquad (14)$$

где ξ_j — число выбросов, попавших на j-й интервал из числа n более мелких интервалов, на которые был поделен промежуток $[t_1,t_2]$.

Если предположить, что процесс $X(t)$ стационарен и все интервалы разбиения имеют одинаковую длину, то тогда все величины ξ_j оказываются одинаково распределенными случайными величинами, хотя и зависимыми.

При достаточно общих предположениях в случае увеличения длины интервала наблюдения можно показать, что сумма (14) будет асимптотически распределена по нормальному закону в силу центральной предельной теоремы. Но тогда асимптотически

$$P_{a,k}^+(t_1,t_2)=\mathcal{P}\{N_a^+(t_1,t_2)=k\}=\int_k^{k+1}\frac{1}{\sqrt{2\pi D(N_a^+(t_1,t_2))}}\,e^{-\frac{(n-\overline{n_a^+}(t_1,t_2))^2}{2D(N_a^+(t_1,t_2))}} \quad (k=\overline{1,\infty}). \qquad (15)$$

В этом приближении вероятность отсутствия выбросов представляется как дополнительная вероятность по отношению к сумме всех вероятностей вида (15):

$$P_{a,0}^+(t_1,t_2)=1-\sum_{k=1}^{\infty}P_{a,k}^+(t_1,t_2). \qquad (16)$$