

Процесс Уленбека — Орнштейна. Определение через стохастическое дифференциальное уравнение

Ранее мы определили процесс Уленбека — Орнштейна (процесс УО). В следующем виде

$$U(t) = b e^{-\alpha t} W(e^{2\alpha t}), \quad (1)$$

где α и b — положительные постоянные, а $W(t)$ обозначает стандартный винеровский процесс. Существует и другое определение процесса УО, когда он определяется, исходя из некоторого дифференциального уравнения.

Нужно сказать, что Уленбек и Орнштейн вначале как раз использовали для определения своего процесса именно дифференциальное уравнение. Это уравнение имело вид

$$m \ddot{U} + \beta \dot{U} = h \dot{z} \quad (2)$$

и описывало движение броуновской частицы при наличии вязкого трения. При этом процесс УО $U(t)$ задавал скорость броуновской частицы, m обозначало ее массу, β — коэффициент вязкого трения, h — интенсивность воздействия на частицу со стороны молекул жидкости или газа, $\dot{z}(t)$ — процесс белого шума. Более подробно уравнение (2) обсуждается в примере 6.1 книги [1].

Попытаемся получить дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет процесс (1). При этом воспользуемся тем фактом, который был доказан в самом конце предыдущей лекции. Напомним, что мы доказали равенство

$$\frac{dW(t)}{dt} = \xi(t), \quad (3)$$

где $W(t)$ обозначает стандартный винеровский процесс, а $\xi(t)$ — стандартный гауссовский белый шум. Отметим, что равенство (3) понимается в смысле теории обобщенных функций. Ни в каком ином смысле (по распределению, по вероятности, в среднем квадратическом, почти наверное) производная винеровского процесса не существует.

Напомним свойства процесса белого шума $\xi(t)$. Это стационарный нормальный центрированный процесс. Его математическое ожидание $\bar{\xi}(t) \equiv 0$, а корреляционная функция дает равенство

$$K_{\xi}(t_1, t_2) = M[\xi(t_1) \xi(t_2)] = \delta(t_2 - t_1). \quad (4)$$

Продифференцируем выражение (1) для процесса U по t . С учетом (3) получим

$$\begin{aligned} \frac{dU}{dt} &= -\alpha U + b e^{-\alpha t} \left. \frac{dW}{d\tau} \right|_{\tau=e^{2\alpha t}} \cdot e^{2\alpha t} 2\alpha = \\ &= -\alpha U + b e^{-\alpha t} \xi(e^{2\alpha t}) e^{2\alpha t} 2\alpha. \end{aligned} \quad (5)$$

Перепишем уравнение (5) в виде

$$\frac{dU}{dt} + \alpha U = b \eta(t), \quad (6)$$

где случайный шум $\eta(t)$ согласно (5) определяется в следующем виде

$$\eta(t) = 2\alpha e^{\alpha t} \xi(e^{2\alpha t}) \quad (7)$$

Попытаемся разобраться, каковы свойства случайного шума $\eta(t)$. Очевидно, он является нормальным и центрированным, так как указанными свойствами обладает белый шум $\xi(t)$. Найдем корреляционную функцию $\eta(t)$. Имеем по определению корреляционной функции с учетом (4)

$$K_{\eta}(t_1, t_2) = M[\eta(t_1)\eta(t_2)] = 4\alpha^2 e^{\alpha(t_1+t_2)} \delta(e^{2\alpha t_2} - e^{2\alpha t_1}). \quad (8)$$

Выражение (8) можно упростить, если вспомнить, что дельта-функция $\delta(x)$ обладает свойством

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-a) \varphi(x) dx = \varphi(a), \quad (9)$$

где $\varphi(x)$ — произвольная непрерывная функция.

Возьмем произвольную непрерывную функцию $\varphi(t)$ и вычислим интеграл

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t_2) K_{\eta}(t_1, t_2) dt_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t_2) 4\alpha^2 e^{\alpha(t_1+t_2)} \delta(e^{2\alpha t_2} - e^{2\alpha t_1}) dt_2. \quad (10)$$

Введем в интеграле (10) новую переменную интегрирования

$$z = e^{2\alpha t_2}$$

Тогда он перенесется в виде

$$I = 2\alpha e^{\alpha t_1} \int_0^{\infty} \varphi\left(\frac{1}{2\alpha} \ln z\right) \frac{1}{\sqrt{z}} \delta(z - e^{2\alpha t_1}) dz. \quad (12)$$

При замене (12) укажем, что

$$t_2 = \frac{1}{2\alpha} \ln z, \quad dt_2 = \frac{1}{2\alpha} \frac{dz}{z}. \quad (13)$$

Используя свойства дельта-функции (9), интеграл (12) легко вычисляется

$$I = 2\alpha e^{\alpha t_1} \varphi(t_1) \frac{1}{e^{\alpha t_1}} = 2\alpha \varphi(t_1). \quad (14)$$

Последнее равенство с учетом определения (10) интеграла I означает, что функция $K_{\eta}(t_1, t_2)$ обладает тем же самым свойством, как следующая дельта-функция

$$K_{\eta}(t_1, t_2) = 2\alpha \delta(t_2 - t_1). \quad (15)$$

Если теперь вспомнить, что $K_{\eta}(t_1, t_2)$ есть корреляционная функция шума $\eta(t)$, то это означает, что сам шум $\eta(t)$ с точностью до постоянного множителя $\sqrt{2\alpha}$ совпадает с белым шумом, то есть

$$\eta(t) = \sqrt{2\alpha} \xi_0(t), \quad (16)$$

где $\xi_0(t)$ означает некоторый стандартный гауссовский белый шум.

Таким образом, уравнение (6) можно переписать в форме

$$\dot{U} + \alpha U = \sqrt{2\alpha} \sigma \xi_0(t). \quad (17)$$

Дифференциальное уравнение, содержащее в качестве возмущения белый шум, называется стохастическим дифференциальным уравнением (или, сокращенно, СДУ). В дальнейшем мы более подробно изучим СДУ, в частности, покажем, что решение таких уравнений задает марковский диффузионный процесс. То, что процесс U_0 является диффузионным, мы уже показали на примере функции и даже подсчитали его коэффициенты сноса и диффузии.

Зададим начальное условие для уравнения (17). Полагая в (17) $t=0$, получим

$$U(0) = \sigma W(1). \quad (18)$$

Поскольку $W(1) \in N(0, 1)$, откуда следует, что

$$U(0) = U_0, \quad (19)$$

где $U_0 \in N(0, \sigma)$, то есть представляет собой нормально центрированную величину с дисперсией σ^2 .

В заключение отметим, что и тогда процесс U_0 определяется не формулой (1), а как решение СДУ вида (17), при этом начальное условие U_0 берется произвольным.

Фрактальное броуновское движение

Понятие фрактала является одним из центральных в современной физике. Фракталами называют геометрические объекты, у которых каждая их часть "устроена" точно так же, как и весь объект в целом. Примером фрактала может служить, скажем, так называемый ковер (или треугольник) Серпинского. Рассмотрим равносторонний треугольник, изображенный на рис. 1а.

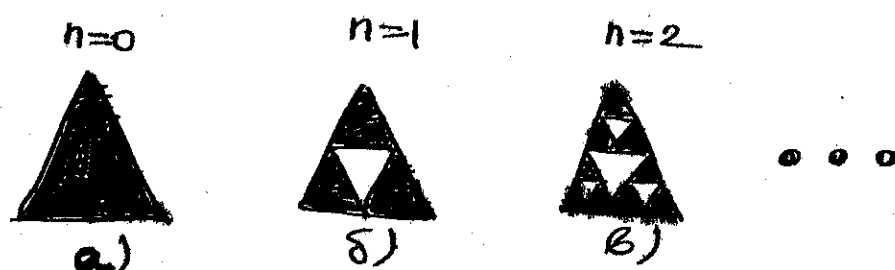


Рис. 1. Первые две итерации ковра Серпинского. На нулевой итерации вся точка треугольника входит в ковер. Затем соединим середины сторон и выделим центральный треугольник (рис. 1б). Далее выделим середины трех оставшихся треугольников, получим девять более мелких треугольников, из которых теперь выделяем их середины и т.д. В пределе при $n \rightarrow \infty$ множество оставшихся точек и есть ковер Серпинского.

Важность фрактального свойства в том, что оно по методу сколь угодно малой части объекта позволяет рассмотреть свойства всего объекта в целом. Если вспомнить описанный выше процесс, то становится очевидным его фрактальное свойство. Это связано с независимостью его приращений и одинаковым способом задания его приращения для любого интервала. По методу сколь угодно малого интервала можно далеко за броуновскими движениями можно восстановить общую картину этого движения в целом. Если взять некоторый "кусочек"

реализации винеровского процесса, а затем увеличить его, растягивая вдоль осей абсцисс и ординат, то при соответствующем масштабе увеличения полученная картина будет в точности повторять картину исходного винеровского процесса.

Данные свойства наблюдаются для многих естественных, природных процессов. Например, береговая линия рек и морей, спелеографические рисунки в различных масштабах, геологические разрезы по своему виду. Аналогичными свойствами обладают горный рельеф, строение растений, кроны деревьев, системы кровеносных сосудов и т.п.

Дадим более строгое определение. Оми основываемого на понятии автоподобности (или самоподобия). Случайный процесс $X(t)$ называется автоподобным (самоподобным), если для любого $a > 0$ найдется такое $b > 0$, что

$$Law(X(at)) = Law(bX(t)). \quad (1)$$

Эта запись означает, что законы распределения $X(at)$ и $bX(t)$ одинаковы. Иначе говоря, изменение масштаба времени автоподобного процесса эквивалентно соответствующему изменению масштаба самого процесса.

Рассмотрим важный частный случай автоподобных процессов. Пусть $b(t)$

$$b = a^H. \quad (2)$$

Тогда процесс $X(t)$ называется автоподобным с показателем Харста H . Это наименование связано с именем британского климатолога Г. Харста, который впервые установил данное свойство в середине 50-х годов прошлого века применительно

к изгущенно колебаниям уровня рек (в, жтмосм, Нила, начиная с эпохи Древнего Египта.

Мы уже знаем один пример авторомального процесса - стандартный винеровский процесс. Докажем, что он авторомален с показателем Харста $H = 1/2$. Рассмотрим процесс

$$V(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} W(at). \quad (3)$$

Ясно, что $V(t)$ - нормальный, $M(V(t)) = 0$, $V(0) = 0$.
Подсчитаем $D(\Delta V(t))$, где $\Delta V(t) = V(t+\Delta t) - V(t)$.
Имеем

$$D(\Delta V(t)) = D\left(\frac{1}{\sqrt{a}} \Delta W(at)\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^2 a \Delta t = \Delta t, \quad (4)$$

откуда следует

$$\text{Law}(V(t)) = \text{Law}(W(t)), \quad (5)$$

что эквивалентно

$$\text{Law}(W(at)) = \text{Law}(\sqrt{a} W(t)). \quad (6)$$

Итак, если растянуть график $W(t)$ вдоль оси абсцисс в a раз, то это будет эквивалентно растяжению вдоль оси ординат в \sqrt{a} раз.

Свойство самонаподобия выполняется для многих реальных процессов, в том числе и для финансовых показателей, но показатель Харста для них может существенно отличаться от $H = 1/2$. Это требует построения более общих моделей авторомальных процессов, чем броуновское движение.

Фрактальным броуновским движением называют нормальный, непрерывный, центрированный случайный процесс $W_H(t)$, характеризующийся $W_H(0) = 0$ и корреляционной функцией

$$K_{W_H}(t_1, t_2) = \frac{1}{2} (|t_1|^{2H} + |t_2|^{2H} - |t_2 - t_1|^{2H}) \quad (7)$$

где числовой параметр $0 < H \leq 1$ называется показателем Харста.

По аналогии с обычным броуновским движением такой процесс называют стандартным фрактальным броуновским движением. Процесс вида $\alpha W_H(t) + \beta$

называют просто фрактальными броуновскими движениями. Это корреляционная функция дотного типа на α^2 а математическое ожидание становится равным β .

Легко видеть, что

$$W_{1/2}(t) = W(t). \quad (8)$$

Действительно, согласно (7) имеем

$$K_{W_{1/2}}(t_1, t_2) = \frac{1}{2} \begin{cases} t_1 + t_2 - (t_2 - t_1), & t_2 > t_1, \\ t_1 + t_2 - (t_1 - t_2), & t_2 < t_1, \end{cases} = \\ = \frac{1}{2} \begin{cases} 2t_1, & t_2 > t_1, \\ 2t_2, & t_2 < t_1, \end{cases} = \min(t_1, t_2). \quad (9)$$

Значит ФБД при $H = 1/2$ совпадает с СВП и обладает автоподобностью. Далее рассмотрим случай произвольного $H \in (0, 1]$.

Действуем по аналогии с (3). Положим

$$V(t) = \frac{1}{a^H} W_H(at). \quad (10)$$

очевидно $V(t)$ — нормированный, центрированный и $V(0) = 0$.
Далее находим

$$K_V(t_1, t_2) = \frac{1}{a^{2H}} \frac{1}{2} \left((at_1)^{2H} + (at_2)^{2H} - |at_1 - at_2|^{2H} \right) = \\ = K_{W_H}(t_1, t_2). \quad (11)$$

отсюда следует, что

$$\text{Law}(a^H W_H(t)) = \text{Law}(W_H(at)), \quad (12)$$

то есть $W_H(t)$ — автоподобное с показателем Херста H .

В частном случае $H = 1$ имеем

$$K_{W_1}(t_1, t_2) = t_1 t_2. \quad (13)$$

Это означает, что

$$W_1(t) = Ct, \quad (14)$$

где C — некоторая случайная постоянная, характеризующаяся $M(C) = 0$ и $D(C) = 1$. Из

(14) следует, что $C = W_1(1)$, то есть нормальна.

Значит, $W_1(t) \in N(0, t)$.

ФБД впервые было введено А.Н. Колмогоровым в 1940 году. Тогда оно называлось спирально Винера, сам термин ФБД был предложен Б. Мандельбротом и Дж. Ван Нессом в 1968 году.

Выше ФБД было определено через корреляционную функцию, как это и делал сам А.Н. Колмогоров. Это несколько отличается от ранее данного определения обычного броуновского движения, которое давалось в терминах приращений СВ. Поэтому сейчас полезно изучить свойства приращений ФБД.

Рассмотрим приращение $W_H(t_2) - W_H(t_1)$. Имеем согласно (7)

$$D(W_H(t_2) - W_H(t_1)) = M[(W_H(t_2) - W_H(t_1))^2] = \quad (15)$$

$$= K_{WH}(t_2, t_2) + K_{WH}(t_1, t_1) - 2K_{WH}(t_1, t_2) = |t_2 - t_1|^{2H}$$

то есть приращение стационарно (зависит лишь от разности моментов времени $t_2 - t_1$). Законом (15) было называют законом дисперсии.

При $H = \frac{1}{2}$ закон дисперсии для обычного броуновского движения является линейным относительно $|t_2 - t_1|$. Для произвольного ФБД он будет степенным.

Для обычного броуновского движения приращение $W(t)$ на непересекающихся интервалах были независимыми. Рассмотрим случай общего ФБД и исследуем зависимость $(W_H(t) - W_H(0))$ и $(W_H(t+\Delta t) - W_H(t))$, считая $\Delta t > 0$.

Подсчитаем математическое ожидание

$$\theta = M[(W_H(t) - W_H(0))(W_H(t+\Delta t) - W_H(t))]. \quad (16)$$

Используя тот факт, что $W_H(0) = 0$, можно показать, что

$$\theta = \frac{1}{2} M[(W_H(t+\Delta t) - W_H(0))^2 - (W_H(t) - W_H(0))^2 - (W_H(t+\Delta t) - W_H(t))^2]. \quad (17)$$

Применяя закон дисперсии (15), будем иметь

$$\theta = \frac{1}{2} [(t+\Delta t)^{2H} - t^{2H} - (\Delta t)^{2H}]. \quad (18)$$

Это выражение удобно представить в виде

$$\theta = \frac{1}{2} \{ [(t+\Delta t)^{2H} - t^{2H}] - [(\Delta t)^{2H} - 0] \}, \quad (19)$$

где в квадратных скобках выписано приращение функции $\varphi(t) = t^{2H}$ на интервалах $[t, t+\Delta t]$ и $[0, \Delta t]$ длиной Δt . Как показано на рис. 2,

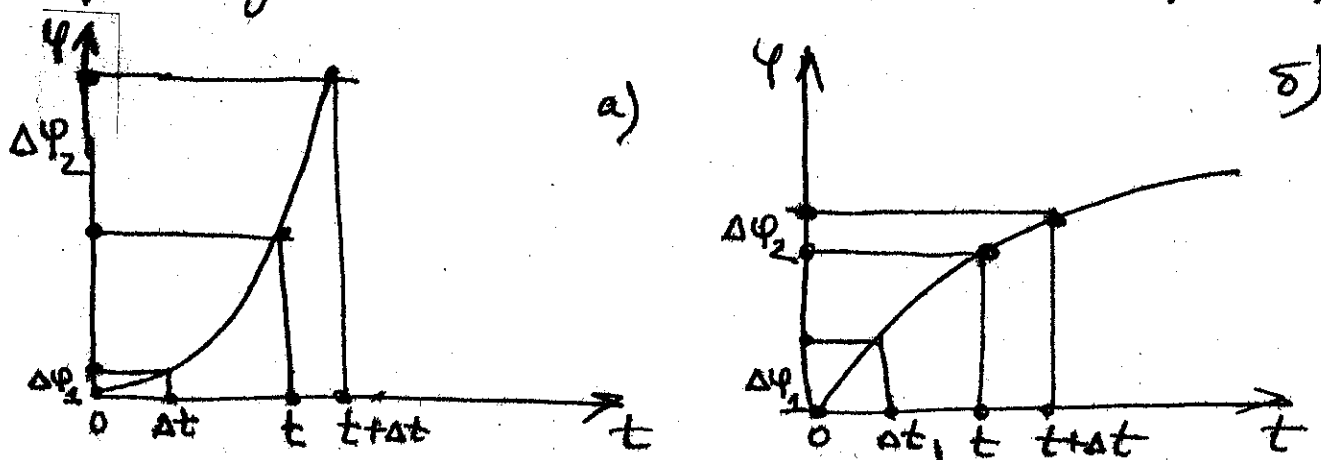


Рис. 2. К вычислению θ . Графики функции $\varphi(t) = t^{2H}$: а) $H > \frac{1}{2}$; б) $H < \frac{1}{2}$.

при $H > \frac{1}{2}$ функция φ является выпуклой, $\Delta\varphi_2 > \Delta\varphi_1$, и получаем $\theta > 0$. В случае $H < \frac{1}{2}$, наоборот, $\Delta\varphi_2 < \Delta\varphi_1$ из-за вогнутости φ , вследствие чего $\theta < 0$. При $H = \frac{1}{2}$ имеем $\theta = 0$.

Таким образом приращению ФБД на произвольных друг к другу интервалах, говорящее, зависимость при этом независимости имеет место тогда и только тогда, когда $H = \frac{1}{2}$, то есть ФБД совпадает с винеровским процессом.

Такое поведение приращений говорит о немарковском свойстве ФБД. Если $H > \frac{1}{2}$, то более вероятно одинаковый знак приращений $W_H(t) - W_H(0)$ и $W_H(t+\Delta t) - W_H(t)$. А.Н. Ширяев называет это свойство «настойчивостью» (persistence) процесса ФБД, стремящегося сохранить имеющийся темп

измерении [2]. При $H=1$ эта тенденция становится неукоснительно, так как согласно (14) ФБД вырождается в прямую со случайными наклонами. Если $H < \frac{1}{2}$ более вероятны разные знаки $W_H(t) - W_H(0)$ и $W_H(t+\Delta t) - W_H(t)$, причем при сколь угодно малом Δt . Указанные свойства часто называют "свойством сильного перемешивания". Такой процесс постоянно меняет направление своего изменения.

В литературе приводятся примеры моделирования финансовых индексов с помощью ФБД. Так, например, анализ данных по ценам на акции компании Бойнг для последовательных 336 биржевых дней показал [3], что они достаточно хорошо описываются ФБД с показателем Харста $H = 0.5023$ (использован период 1982-1993 годов). В этом случае отличие от марковской модели на основе классического броуновского движения оказалось небольшим.

Вместе с тем А.Н. Ширяев приводит и данные по ряду компаний, где при аппроксимации стоимости акций с помощью ФБД отличие H от 0.5 весьма существенно [2]. Так, по данным за 1990 год для индекса S & P 500 было получено значение $H = 0.78$, для акций IBM оказалось $H = 0.72$, для акций Apple Computer $H = 0.75$, а для акций Consolidated Edison имели $H = 0.68$.

Вобщем, для современных рынков чаще наблюдаются значения, большие $\frac{1}{2}$, свидетельствующие о сохранении и даже усилении тенденции движения. Значения H , меньшие 50%, можно было наблюдать в первую половину прошлого века.

Литература

1. Свешников А.А. Прикладные методы теории марковских процессов. СПб: Лань, 2007.
2. Ширяев А.Н. Основы стохастической финансовой математики. Том 1. Факты. Модели. М.: Фазис, 1998
3. Кромовер Р. Фракталы и хаос в динамических системах. М.: Постмаркет, 2000.